गणित

अध्याय-9: अनुक्रम तथा श्रेणी

अनुक्रम (Sequence)

संख्याओं के उस समूह को अनुक्रम कहते हैं जिसमें संख्याओं को किसी क्रम में एक निश्चित नियम के अनुसार रखा गया हो। इस प्रकार के समूह के अवयव अनुक्रम के पद कहलाते हैं। **उदाहरणत**ः संख्याओं के निम्न समूह अनुक्रम हैं :

1,	3,	5,	7,......
11,	8,	5,	2,......
3,	6,	12,	24,.....

पहले समूह में प्रत्येक पद अपने पूर्व पद से 2 अधिक है; दूसरे समूह में प्रत्येक पद अपने पूर्व पद से 3 कम है और तीसरे समूह का प्रत्येक पद अपने पूर्व पद का दुगुना है।

श्रेणी (Series)

किसी अनुक्रम के पदों को + अथवा -चिह्नों द्वारा सम्बन्धित . कर देने पर श्रेणी प्राप्त होती है। उदाहरणार्थ

1 + 3 + 5 + 7 + ...

3 – 6 + 12 – 24 + ...

$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\cdots$

परिमित एवं अपरिमित श्रेणी (Finite and In finite Series)

श्रेणियाँ दो प्रकार की होती हैं

(i) परिमित श्रेणी- वह श्रेणी है जिसमें पदों की संख्या सीमित होती है। जैसे

1 + 4 + 7 + 10 +.....+ n पदों तक।

एवं a + (a + b) + (a + 2b) +.....+ n पदों तक।

(ii) अपरिमित श्रेणी या अनन्त श्रेणी- वह श्रेणी है जिसमें पदों की संख्या असीमित होती है। जैसे

a + ar + ar +...... अनन्त पदों तक।

(iii) हम प्राकृत सम संख्याओं के अनुक्रम - 2, 4, 6, 8..... पर विचार करते हैं

यहाँ –

$a_1 = 2 = 2 \times 1,$	$a_2 = 4 = 2 \times 2$
$a_3 = 6 = 2 \times 3,$	$a_3 = 6 = 2 \times 3$
....	....
....	....
$a_{19} = 38 = 2 \times 19,$	$a_{20} = 40 = 2 \times 20$

स्पष्ट है कि अनुक्रम का n वाँ पद $a_n = 2n$ लिखा जा सकता

इसी प्रकार विषम प्राकृत संख्याओं के अनुक्रम का nवाँ पद $a_n = 2n - 1$ होगा।

अब हम अनुक्रम 1, 1, 2, 3, 5, 8.... पर विचार करते हैं।

इस अनुक्रम की रचना पुनरावृत्ति संवध द्वारा व्यक्त की जा सकती है। यहाँ

$a_1 = a_2 = 1$

$a_3 = a_1 = a_2$

इस प्रकार $a_n = a_{n-2} + a_{n-1},$ जहाँ $n > 2$

इस अनुक्रम को Fibonacci अनुक्रम कहते है।

श्रेढी (Progression)

श्रेणी के पदों को जब विशेष प्रतिबन्धों के साथ लिखा जाता है, तो उसे श्रेढी कहते हैं। प्रत्येक श्रेढी, श्रेणी होती है किन्तु प्रत्येक श्रेणी, श्रेढी नहीं होती है।

फिबोनेकी (Fibonacci) अनुक्रम निम्नलिखित रूप में परिभाषित है

उदाहरण 1. $a_1 = a_2$ तथा $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$, तो ज्ञात $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ कीजिए, जबकि n = 1, 2, 3, 4, 5.

हल : दिया है – $a_1 = a_2 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$

$a_3 = a_{3-1} + a_{3-2} = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_{4-1} + a_{4-2} = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_{5-1} + a_{5-2} = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$a_6 = a_{6-1} + a_{6-2} = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

अब, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ के लिए जब n = 1, 2, 3, 4, 5 के लिए

जब n = 1,

$$\frac{a_{1+1}}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$$

n = 2 पर,

$$\frac{a_{2+1}}{a_2} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$$

n = 3 पर,

$$\frac{a_{3+1}}{a_3} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2}$$

n = 4 पर,

$$\frac{a_{4+1}}{a_4} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3}$$

n = 5 पर,

$$\frac{a_{5+1}}{a_5} = \frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5}$$

समान्तर श्रेढी (Arithmetic Progression)

वह अनुक्रम है जिसका प्रत्येक पद अपने पूर्ववर्ती पद में एक निश्चित संख्या को जोड़ने या घटाने से प्राप्त होता है। जोड़ी या घटायी जाने वाली निश्चित संख्या को पदान्तर या सार्वअन्तर (Common difference) कहते हैं। किसी समान्तर श्रेढी का पदान्तर ज्ञात करने के लिए श्रेढी के किसी भी पद में से उसका पूर्ववर्ती पद घटाया जाता है।

निम्नलिखित में से प्रत्येक समान्तर श्रेढी है-

1, 3, 5, 7, ...

8, 5, 2,-1,-4, ...

$\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}, -3, \dots\dots$

इनके पदान्तर क्रमशः 2, -3 और $-\frac{5}{4}$ हैं।

पदान्तर $= T_2 - T_1$

$= T_3 - T_2$

$= T_4 - T_3$

=.......... - ....

=.......... - ....

$= T_n - T_{n-1}$

जहाँ T_n = n वा पद है।

सामान्यतः समान्तर श्रेढी को संक्षेप में स.श्रे. (A.P.), श्रेढी के प्रथम पद को a एवं पदान्तर को d से सम्बोधित करते हैं।

समान्तर श्रेढी का मानक रूप (standard form)

a, a + d, a + 2d, ... है।

समान्तर श्रेढी का व्यापक पद या वा पद (General Term or nth Term of A.P.)

मान लिया कि स.श्रे. का प्रथम पद a तथा पदान्तर में d है। तब श्रेढी के पद,

a,(a + d),(a + 2d), (a + 3d),....... हुए जिन्हें हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

प्रथम पद = a = a + 0.d = a + (1 - 1)d

द्वितीय पद = a + d = a + (2 - 1)d

तृतीय पद = a + 2d = a + (3 - 1)d

चतुर्थ पद = a + 3d = a + (4 - 1)d

...... = ...

...... = ...

स्पष्ट है कि प्रत्येक पद में जोड़ा गया है और उसमें d का गुणांक श्रेढी पद की संख्या से 1 कम है।

अतः श्रेढी का n वाँ पद = a + (n - 1)d

श्रेढी का n वा पद उसका व्यापक पद कहलाता है। इसमें = 1, 2, 3, 4, ... रखकर श्रेढी के प्रथम, द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ, ... पद ज्ञात किए जा सकते हैं।

यदि किसी श्रेढी में n पद हैं, तो n वा पद उस श्रेढी का अन्तिम पद (last term) कहलाता है। इसे l से सूचित करते हैं। इस प्रकार,

$l = a + (n - 1)d$

टिप्पणी : समान्तर श्रेढी का अन्त से n वाँ पद = $l + (n - 1)(-d)$.

उदाहरण 2. श्रेढी 5, 11, 17,........ का (n - 3) वा पद क्या होगा?

हल : यहाँ $a = 5$, $d = 11 - 5 = 6$ तथा $n = (n - 3)$

अतः $T_n = a + (n - 1)d$ से,

$T_{n-3} = 5 + (n - 3 - 1)6$

$= 5 + 6n - 24 = 6n - 19.$

उदाहरण 3. समान्तर श्रेढी 2, 6, 10, ...,86 का अन्त से 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 2$, $d = 6 - 2 = 4$, $l = 86$ तथा $n = 15$.

श्रेढी का अन्त से n वा पद, $T_n = l + (n - 1)(-d)$

$\therefore T_{15} = 86 + (15 - 1) \times (-4)$

$= 86 - 56$

$\Rightarrow T_{15} = 30.$

उदाहरण 4. 3x, x + 2 तथा 8 समान्तर श्रेढी के तीन क्रमागत पद हैं। इसका चौथा पद क्या होगा?

हल : चूँकि $3x$, $x + 2$, 8 समान्तर श्रेढी में हैं।

अतः पदान्तर, $(x + 2) - 3x = 8 - (x + 2)$

$\Rightarrow 2 - 2x = 6 - x$

$\Rightarrow - x = 4$

$\Rightarrow X = -4$

अतः प्रथम पद = $3x = 3 \times (-4) = -12$

द्वितीय पद = $x + 2 = 4 + 2 = -2$

तृतीय पद = 8

स्पष्ट है कि d = 10 अतः चतुर्थ पद = 8 + 10 = 18.

उदाहरण 5. यदि श्रेणियों 3, 10, 17,……. और 63, 65, 67,……के वें पद समान हों, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हलः श्रेणी 3, 10, 17,……

का प्रथम पद a = 3 तथा d = 7 हैं।

श्रेणी का n वा पद $T_n = a + (n - 1)d$

$T_n = 3 + (n - 1) \times 7$

$\Rightarrow T_n = 3 + 7n - 7$

$\Rightarrow T_n = 7n - 4$

श्रेणी 63, 65, 67,…… का प्रथम पद a = 63 तथा d = 2 हैं।

इस श्रेणी का n वा पद $T_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow T_n = 63 + (n-1) \times 2$

$= 63 + 2n - 2$

$\Rightarrow T_n = 2n + 61$

दिया गया है : $T_n = T_n$

$\Rightarrow 7n - 4 = 2n + 61$

$\Rightarrow 5n = 65$

$\Rightarrow n = 13.$

उदाहरण 6. यदि $S_n = an^2 + bn$, तो सिद्ध कीजिए कि यह श्रेणी स. श्रे. है।

हल: $S_n = an^2 + bn$

$\Rightarrow S_{n-1} = a(n - 1)^2 + b(n - 1)$

$\therefore T_n = S_n - S_{n-1}$

$= a[n^2 -(n - 1)^2] + b[n-(n - 1)]$

$= a[n^2 - n^2 + 2n - 1] + b$

$= (2n - 1)a + b$

$T_1 = (2 \times 1 - 1)a + b = a+b$

$T_2 = (2 \times 2 - 1)a + b = 3a + b$

$T_3 = (2 \times 3 - 1)a + b = 5a + b$

...... = ... = ...

इस प्रकार, श्रेढी के पद $a + b$, $3a + b$, $5a + b$,....... हैं

जो एक स.श्रे. में है जिसका प्रथम पद a और सार्वअन्तर (3a + b) - (a + b) अर्थात् 2a है।

उदाहरण 7. किसी स.श्रे. का 5 वाँ पद 11 और 9 वाँ पद 7 है। तो 16 वाँ पद ज़ात कीजिए।

हल : मान लिया कि स.श्रे. का प्रथम पद a तथा पदान्तर d है। तब प्रश्नानुसार,

$a + (5 - 1)d = 11$ .....(1)

और $a + 4d = 11$ $a + (9 - 1)d = 7$

$a + 8d = 7$ .....(2)

समी. (1) व (2) को हल करने पर,

$a = 15$ और $d = 1$

अतः श्रेढी का 16वाँ पद = $a + (16 - 1)d$

$= 15 + 15(-1) = 0.$

उदाहरण 8. सिद्ध कीजिए कि किसी स. श्रे. के प्रारम्भ और अन्त से समान दूरी वाले पदों का योगफल अचर होता है।

हल : माना कि स.श्रे. का प्रथम पद a, पदान्तर d तथा स.श्रे. के कुल पदों की संख्या n है। तब,

प्रारम्भ से p वाँ पद = $a + (p-1)d$ ...(1)

तथा अन्त से p वा पद = प्रारंभ से $(n - p + 1)$ वाँ पद

$= a + (n - p + 1 - 1)d$

$= a + (n - p)d$ ...(2)

अतः उपर्युक्त दोनों पदों का योग

$= [a + (p - 1)d] + [a + (n - p)d]$

$= 2a + (n - 1)d$ –

जो एक अचर राशि है, चूँकि a, n वें d दिये हैं।

उदाहरण 9. किसी स.श्रे. के 7 वें पद का सात गुना उसके उसके 11 वें पद के 11 गुने के बराबर है। श्रेढी का 18वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया कि स. श्रे. का प्रथम पद a तथा पदान्तर d है। तब स.श्रे. का

7 वाँ पद $= a + 6d$ और 11 वाँ पद $= a + 10d$.

∴ प्रश्नानुसार,

$7(a + 6d) = 11(a + 10d)$

$\Rightarrow 7a + 42d = 11a + 110d$

$\Rightarrow 7a - 11a = 110d - 42d$

$\Rightarrow -4a = 68d$

$\Rightarrow a = -17d$

अतः श्रेढी का 18 वाँ पद $= a + 17d$

$= -17d + 17d$,

$[\therefore a = -17d] = 0$.

$= 0$.

उदाहरण 10. समान्तर श्रेढी जिसका अन्तिम पद।सार्वअन्तर d हो, तो सिद्ध कीजिए कि श्रेणी के n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}[2l - (n-1)d]$$

होगा।

हल: l = a + (n - 1)d ....(1)

$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$ ....(2)

समी. (1) से,

a = 1 - (n - 1)d

इसका मान समी. (2) में रखने पर,

$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[l - (n-1)d + l]$

$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[2l - (n-1)d]$

समान्तर माध्य अथवा मध्यमान (Arithmetic Mean)

यदि तीन राशियाँ समान्तर श्रेढी में हों, तो बीच की राशि शेष दो राशियों का समान्तर माध्य (स.मा.) कहलाती है।

माना कि दो राशियों a और b का स.मा. A है। तब a, A,b स.श्रे. में होंगे।

∴ A – a = b - A, [∴ प्रत्येक पदान्तर है]

⇒ 2A = a + b

$$\Rightarrow A = \frac{a+b}{2}$$

अत: दो राशियों का समा. उनके योगफल का आधा होता है।

दो राशियों के बीच समान्तर माध्य ज्ञात करना

(To Find n Arithmetical Mean Between Two Quantities)

माना कि दो राशियों a और 6 के बीच n समान्तर माध्य $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots., A_n$ हैं। तब परिभाषा से,

$a, A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$, b एक स.श्रे. है जिसका प्रथम पद a, अन्तिम पद 6 और इसमें पदों की संख्या n + 2 है। यदि इस स.श्रे. का पदान्तर d हो, तो

$$b = a + (\overline{n + 2 -} 1)d$$

$$\Rightarrow b = a + (n + l)d$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{b - a}{n + 1}$$

अतः

$$A_1 = a + d = a + \frac{b - a}{n + 1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + 2\left(\frac{b - a}{n + 1}\right)$$

$$A_3 = a + 3d = a + 3\left(\frac{b - a}{n + 1}\right)$$

....

....

अतः $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots,,, A_n$, अभीष्ट n समान्तर माध्य है।

उदाहरण 1. दो संख्याओं का समान्तर माध्य 7 है। उनका गुणनफल 45 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना संख्याएँ a और b हैं तथा a > b. .

दिया है : $\frac{a+b}{2} = 7$

$a + b = 14$ ......(1)

तथा $a + b = 45$

$\therefore (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

$= (14)^2 - 4 \times 45$

$= 196 - 180 = 16$

$\Rightarrow a - b = 4$ ....(2)

समी. (1) और (2) से,

$a + b = 14$

$a - b = 4$

जोड़ने पर $2a = 18$

$\therefore a = 9$

a का मान समी. (1) में रखने पर

$9 + b = 14$

$\therefore b = 5$

अतः अभीष्ट संख्याएँ 9 और 5 हैं।

उदाहरण 2. सिद्ध कीजिए कि ऐसी स.श्रे. जिसके पदों की संख्या सम (Even) हो, के दो मध्य पदों का स.मा., प्रथम व अन्तिम पदों के स.मा. के बराबर होता है।

हल : मानलो स.श्रे. का प्रथम पद a, पदान्तर d तथा पदों की संख्या 2n है। तब, दो मध्य पद होंगे; n वाँ पद और (n + 1) वाँ पद।

अब n वाँ पद = a +(n - 1)d

(n + 1) वाँ पद = a +(n + 1 - 1)d

= a + nd

अतः इन मध्य पदों का स.मा.

$$= \frac{a + (n-1) + a + nd}{2}$$

$$= \frac{2a + (2n-1)d}{2}$$

$$= \frac{a + (a + (2n-1)d]}{2}$$

$$= \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अन्तिम पद}}{2}$$

= प्रथम एवं अन्तिम पद का स.मा.।

उदाहरण 3. तीन संख्यायें स. श्रे. में हैं। उनका योग 15 तथा गुणनफल 120 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना तीन संख्याएँ a - d, a, a + d हैं। तब प्रश्न के अनुसार,

∴ (a – d) + a +(a + d) = 15

⇒ 3a = 15

⇒ a = 5

⇒ (a - d)a(a + d) = 120

⇒ $a(a^2 - d^2) = 120$

⇒ $5(25 - d^2) = 120$

$\Rightarrow 25 - d^2 = 24$

$\Rightarrow d = \mp I$

अत: तीन संख्याएँ $5 \mp 1, 5, 5 \mp 1$ अर्थात् 4, 5, 6 6, 5, 4 हैं।

उदाहरण 4. किसी स.श्रे. के तीन क्रमागत पदों का योग 12 है। प्रथम तथा तृतीय पदों का गुणनफल दूसरे का तीन गुना है। पद ज्ञात कीजिए।

हल : माना स.श्रे. के तीन क्रमागत पद क्रमशः a - d, a, a + d हैं।

तब, $(a - d) + a + (a + d) = 12$

$\Rightarrow 3a = 12$

$\Rightarrow a = 4$

और $(a + d)(a - d) = 3a$

$\Rightarrow a^2 - d^2 = 3a$

$\Rightarrow 16 - d^2 = 12$

$\Rightarrow d^2 = 4$

$\Rightarrow d = \mp 2$

अतः अभीष्ट पद 2, 4, 6 या 6, 4, 2 हैं।

उदाहरण 5. यदि $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots,, \theta_n$ समान्तर श्रेढी में हैं जिसका सार्वअन्तर है, तो सिद्ध कीजिए कि $\sec\theta_1 \sec\theta_2 + \sec\theta_2,. \sec\theta_3 + \ldots.. + \sec\theta_{n-1}.\mathrm{sect}\theta_n$

$$= \frac{\tan\theta_n - \tan\theta_1}{\sin d}$$

हल : $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots \theta_n$ समान्तर श्रेढी में है

$\therefore\ \theta_1 - \theta_1, = \theta_3 - \theta_2 = \theta_n - \theta_{n-1}, = d$

$\theta_2 - \theta_1, = d\ \theta_3 - \theta_2 = d, \theta_n - \theta_{n-1}, = d$

$\sin(\theta_2 - \theta_1) = \sin d, \sin(\theta_3 - \theta_2) = \sin d, \sin(\theta_n - \theta_{n-1}) = \sin d$

$$\sin d\ \sec\theta_1 \sec\theta_2, = \frac{\sin d}{\cos\theta_1 . \cos\theta_2}$$

$$= \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos\theta_1 . \cos\theta_2}$$

$$= \frac{\sin\theta_2 \cos\theta_1 - \cos\theta_2 \sin\theta_1}{\cos\theta_1 . \cos\theta_2}$$

$$= \frac{\sin\theta_2 \cos\theta_1}{\cos\theta_1 . \cos\theta_2} - \frac{\cos\theta_2 \sin\theta_1}{\cos\theta_1 . \cos\theta_2}$$

$\sin d\ \sec\theta_1 \sec\theta_2, = \tan\theta_2 - \tan\theta_1]$

$$\sec\theta_1 \sec\theta_2, = \frac{1}{\sin d}[\tan\theta_3 - \tan\theta_2]$$

इसी प्रकार

$$\sec\theta_1 \sec\theta_2, = \frac{1}{\sin d}[\tan\theta_3 - \tan\theta_2]$$

तथा $\sec\theta_{n-1}, \sec\theta_n = \frac{1}{\sin d}[\tan\theta_n - \tan\theta_{n-1}]$

$\therefore\ \sec\theta_1 \sec\theta_2 + \sec\theta_2 \sec\theta_3 + \cdots + \sec\theta_{n-1}$

$$\sec\theta_n = \frac{1}{\sin d}[\tan\theta_2 - \tan\theta_1 + \tan\theta_3 - \tan\theta_2 + \cdots$$

$$= \frac{\tan\theta_n - \tan\theta_1}{\sin d}$$

गुणोत्तर श्रेढी (GeometricalProgression)

वह श्रेढी जिसका प्रत्येक पद (प्रथम पद को छोड़कर) अपने पूर्व पद को एक निश्चित संख्या से गुणा करने पर प्राप्त होता है, गुणोत्तर श्रेढी कहलाती है। इस निश्चित संख्या को गुणोत्तर अनुपात या सार्वअनुपात या पदानुपात (Common ratio) कहते हैं। इसे 'r' से प्रदर्शित करते हैं। गुणोत्तर श्रेढी को संक्षेप में गु. श्रे. (GP.) लिखते हैं। गुणोत्तर श्रेढी का मानक रूप,

a, ar, ar^2, ar^3',....... होता है। इसका प्रथम पद a और पदानुपात r है।

ध्यान देने योग्य है कि-

$$r = \frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar} = \frac{ar^3}{ar^2} = \cdots$$

$$\Rightarrow \text{पदानुपात} = \frac{\text{द्वितीय पद}}{\text{प्रथम पद}} = \frac{\text{तृतीय पद}}{\text{द्वितीय पद}}$$

$$= \frac{\text{चतुर्थ पद}}{\text{तृतीय पद}} = ...$$

निम्नांकित श्रेढियाँ गुणोत्तर श्रेढियाँ हैं :

(i) 1, 2, 4, 8, 16, ...

(ii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots \dots \dots ..$

(iii) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots \dots \dots ..$

इनके प्रथम पद क्रमशः $1, \frac{1}{2}, 1$ और पदानुपात क्रमशः $2, \frac{1}{3},$

प्रथम पद = $a = ar^0 = ar^{1-1}$

द्वितीय पद = $ar = ar^1 = ar^{2-1}$

तृतीय पद = $ar^2 = ar^{3-1}$

चौथा पद = ar^3 = ar^{4-1}

.... = ...

.... = ...

स्पष्ट है कि प्रत्येक पद में a से गुणा किया गया है और उसमें r का घात श्रेणी में पद की संख्या से 1 कम है।

अतः $\boxed{\text{गु. श्रे. का n वा पद} = ar}$

उदाहरण 1. किसी गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद $a = \frac{1}{2}$ सार्व अनुपात r = 2 तथा n वा पद 32 हो, तो का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $a = \frac{1}{2}. r = 2, T_n = 32$

$T_n = ar^{n-1}$

$\Rightarrow 32 = \left(\frac{1}{2}\right)(2)^{n-1}$

$\Rightarrow 32 = 2^{n-2}$

$\Rightarrow 2^5 = 2^{n-2}$

$\Rightarrow n - 2 = 5$

$\Rightarrow n = 7.$

उदाहरण 2. श्रेढी 1, 2, 4, 8, ... तथा 256, 128, 64.......के p वें पद बराबर हैं। p का मान ज्ञात कीजिए।

हल : श्रेढी 1, 2, 4, 8, ... एक गु. श्रे. है। इसका प्रथम पद 1 और सार्वअनुपात 2 है। तब $Tn = ar^{n-1}$

इस गु. श्रे. का p वाँ पद = $1.(2)^{P-1} = 2^{P-1}$

पुनः श्रेढी 256, 128, 64.... भी एक गु. श्रे. है। इसका प्रथम

पद 265 तथा सार्वअनुपात $\frac{1}{2}$ में है।

इस गु. श्रे. का p वाँ पद = $256\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$

प्रश्न के अनुसार,

$2^{p-1} \times 2^{p-1} = 256\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$

⇒ 2P-1 × 2P-1 = 256

⇒ $2^{2}{}_{p-2} = 2^8$

⇒ 2p – 2 = 8

⇒ 2p = 10

⇒ p = 5.

उदाहरण 3. किसी कल्चर में बैक्टीरिया की संख्या प्रत्येक घंटे पश्चात् दुगुनी हो जाती है। यदि प्रारंभ में उसमें 30 बैक्टीरिया उपस्थित थे तो बैक्टीरिया की संख्या दूसरे, चौथे तथा n वें घंटे बाद क्या होगी?

हल : यहाँ a = 30

r = 2 दूसरे घंटे बाद उपस्थित बैक्टीरिया = ar^2.

= $30 \times (2)^2 = 120$.

चौथे घंटे बाद उपस्थित बैक्टीरिया = ar^4

$= 30 \times (2)^4 = 30 \times 16$

$= 480.$

n वें घटे बाद उपस्थित बैक्टीरिया = $ar^n = 30 \times 2^n$.

उदाहरण 4. किसी गु.श्रे. का 5 वा पद 81 तथा दूसरा पद 24 है। श्रेढी ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि गु. श्रे. का प्रथम पद a तथा पदानुपात r है।

तब प्रश्नानुसार, 5 वाँ पद = ar4 = 81 ....(1)

तथा दूसरा पद = ar = 24 ...(2)

समी (1) में समी. (2) का भाग देने पर,

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{81}{24}$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\therefore r = \frac{3}{2}$$

समी. (2) में r का मान रखने पर,

$$a \times \frac{3}{2} = 24$$

$\Rightarrow a = 16$

अतः अभीष्ट श्रेढी है:

$$16, 16.16.\left(\frac{3}{2}\right)^2 \dots \dots \dots$$

अर्थात् 16, 24, 36, ...

गु.श्रे.के पदों का योगफल (The Sum of n Terms of a GP.)

माना कि किसी गु. श्रे. का प्रथम पदव, पदानुपात तथा n पदों का योगफल S है। तब,

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$ ...(1)

समी. (1) के दोनों पक्षों को से गुणा करके दायें पक्ष के पदों को एक पद आगे सरकाकर लिखने पर,

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n$ ...(2)

समी. (1) में से समी. (2) को घटाने पर,

$S_n(1 - 7) = a - ar^n = a(1 - r^n)$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

जबकि r < 1 ...(3)

तथा

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(r^n-1)}{1-r}$$

जबकि r > 1 ...(4)

अतः समी. (3) व (4) को क्रमशः निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(r^n-1)}{1-r}$$

जबकि r < 1 ...(5)

तथा

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

जबकि r < 1 ...(6)

अनन्त गु. श्रे. का योगफल (The Sum of an Infinite GP.)

यदि किसी गु. श्रे. के पदों की संख्या अनन्त हो, तो वह अनन्त गु. श्रे. कहलाती है। दूसरे शब्दों में, अनन्त गु. श्रे. का कोई अन्तिम पद नहीं होता है।

माना कि किसी गु. श्रे. का प्रथम पद a, पदानुपात r तथा n पदों का योगफल S, है। तब,

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

जबकि r < 1

$$= \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}$$

चूँकि r का संख्यात्मक मान 1 से कम है, अतएव जैसे-जैसे n का मान बढ़ता जायेगा, वैसे-वैसे का मान घटता जायेगा।

यदि n अनन्त (∞) की ओर अग्रसर हो, तो का मान 0 की ओर अग्रसर होगा।

अतः अनन्त पदों का योगफल,

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

उदाहरण 1. श्रेढी 2 – 4 + 8 – 16 + ... का दस पदों तक योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ a = 2, r = -2, n = 10.

$$S_{10} = \frac{2[1 - (-2)^{10}}{1 - r}$$

$$= \frac{2(1 - 2^{10})}{3} = \frac{-2 \times 1023}{3}$$

= -682.

उदाहरण 2. श्रेढी $\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4^2}\right)+\left(\frac{3}{4^3}-\frac{5}{4^4}\right)+\left(\frac{3}{4^5}-\frac{5}{4^6}\right)+\cdots\ldots\ldots.\infty$

का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र $\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4^2}\right)+\left(\frac{3}{4^3}-\frac{5}{4^4}\right)$

$\left(\frac{3}{4^5}-\frac{5}{4^6}\right)+\cdots\ldots\ldots.\infty,$

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4^3}+\frac{3}{5}+\cdots.\infty\right)$$

$$\left(-\frac{5}{4^2}+\frac{5}{4^4}+\frac{5}{5^6}+\cdots.\infty\right)$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4^2}}-\frac{\frac{5}{4^2}}{1-\frac{1}{4^2}}\left[\therefore S_\infty=\frac{a}{1-r}\right]$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{15}{16}}-\frac{\frac{5}{16}}{\frac{15}{16}}=\frac{3}{4}\times\frac{16}{15}-\frac{5}{16}\times\frac{16}{15}$$

$$=\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{12-5}{15}=\frac{7}{15}$$

उदाहरण 3. यदि अनन्त पदवाली गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद 1 है और प्रत्येक पद उसके बाद आने वाले पदों के योग के बराबर है, तो सार्वअनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना अभीष्ट गुणोत्तर श्रेढी है :

$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots\ldots\ldots.$

∴ प्रश्नानुसार,

1 = अनन्त गु. श्रे. $(1 + r + r^2 + \ldots..)$ का योग

$\Rightarrow\ 1 = \dfrac{r}{1-r}$ $\left[S_\infty = \dfrac{a}{1-r}\right]$

$\Rightarrow 1 - r = r$

$\Rightarrow 2r = 1$

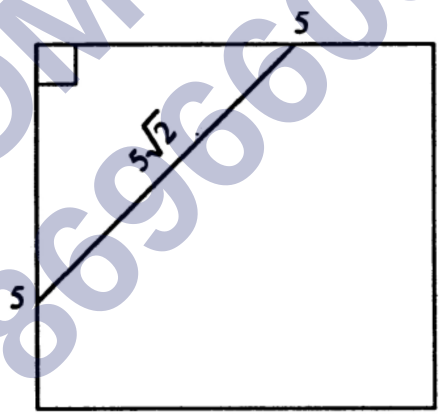
$\Rightarrow r = \dfrac{1}{2}$

अतः अभीष्ट सार्वअनुपात $\frac{1}{2}$ है ।

उदाहरण 4. एक वर्ग की एक भुजा 10 सेमी है। भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर एक दूसरा वर्ग बनाया गया है जिसके मध्य बिन्दुओं को मिलाकर पुनः एक अन्य वर्ग बनाया गया है। यह प्रक्रिया अनन्त बार दुहराई गई है। सभी वर्गों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वर्ग की भुजा = 10 सेमी

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = 10 x 10 = 100 वर्ग सेमी।



10 सेमी भुजा के वर्ग के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बने वर्ग की प्रत्येक भुजा

$= \dfrac{10}{2}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

∴ इस वर्ग का क्षेत्रफल $= (5\sqrt{2})^2$ वर्ग सेमी

= 50 वर्ग सेमी।

पुन: $5\sqrt{2}$ सेमी भुजा के वर्ग के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बने वर्ग की भुजा

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ सेमी}$$

= 5 सेमी।

∴ इस वर्ग का क्षेत्रफल = $(5)^2$ वर्ग सेमी

= 25 वर्ग सेमी।

सभी वर्गों का क्षेत्रफल = 100 + 50 + 25 +...... ∞

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} \quad \left[\because a = 100, r = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}\right]$$

$$S_\infty = \frac{100}{1-\frac{1}{2}}$$

S_∞ = 100 x 2 = 200 वर्ग सेमी।

गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

यदि तीन राशियाँ गुणोत्तर श्रेढी में हों, तो बीच की राशि अन्य दो राशियों का गुणोत्तर माध्य (गु.मा.) [Geometric Mean (GM.)] कहलाती है।

माना कि राशियाँ a और b का गुणोत्तर माध्य G है। तब a, G, b गु. श्रे. के तीन क्रमागत पद हैं।

$$\therefore \frac{G}{a} = \frac{b}{G}$$

[क्योंकि प्रत्येक पक्ष गु. श्रे. का सार्वअनुपात है।] -

⇒ G^2 – ab

$\Rightarrow G = \pm\sqrt{ab}$

अर्थात्, दो राशियों का गुणोत्तर माध्य उनके गुणनफल के वर्गमूल के बराबर होता है।

दो राशियों के बीच n गु. मा. का निवेशन (Insertion of n Geometric Means between Two Numbers)

परिभाषा : यदि a और b दो राशियाँ हैं तथा n राशियाँ $G_1, G_2, G_3,, \ldots\ldots, G_n$, इस प्रकार हैं कि राशियाँ $a, G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots, G_n$., b गु. श्रे. में हैं तो राशियों $G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots, G_n$, को राशियों a और 6 के बीच n गुणोत्तर माध्य कहते हैं। उदाहरणार्थ, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 एक गु. श्रे. है। यहाँ पर छः राशियाँ 4, 8, 16,32, 64, 128 राशियों 2 और 256 के बीच छः गुणोत्तर माध्य कहलाती है।

निवेशन (Insertion): माना कि राशियों a और b के बीच n गुणोत्तर माध्य $G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots, G_n$ हैं। तब,

$a, G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots, G_n., b$

एक गुणोत्तर श्रेढी है जिसका प्रथम पद a, अन्तिम पद b और इसमें पदों की संख्या (n + 2) है। यदि इस गु. श्रे. का पदानुपात r हो, तो

$$b = ar^{n+1} \text{ या } r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

अत: अभीष्ट गुणोत्तर माध्य $G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots\ldots, G_n$, क्रमशः

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \ldots\ldots\ldots, a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

दो वास्तविक धनात्मक राशियों के समान्तर,

(ii) पुनः

$$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)$$

$\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)^2$ एक धनात्मक राशि।

$\therefore$ A – G > 0

$\Rightarrow$ A > G.

पुन:

$$G-H=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

एक धनात्मक राशि

$\therefore$ G - H > 0

$\Rightarrow$ G > H

अत: A > G > H

उदाहरण 1. 16 का गु. मा. ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट गु. मा. $\sqrt{4\times16\,.}$

= $\sqrt{64\,.}=\pm8$.

उदाहरण 2. दो राशियों का समान्तर माध्य $\frac{13}{2}$ तथा हरात्मक माध्य. $\frac{72}{13}$ है तो उनका गुणोत्तर माध्य क्या होगा?

हल: A.H = G2

$$\Rightarrow \frac{13}{2} \cdot \frac{72}{13} = G^2$$

$$\Rightarrow G^2 = 36$$

$\Rightarrow G = 36$

अत: अभीष्ट गुणोत्तर माध्य 6 है।

उदाहरण 3. यदि a, b, c, गु.श्रे. में हों, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2 + b^2, b^2 + c^2, c^2 + d^2$ भी गु. श्रे. में होंगे।

हल : माना कि गु. श्रे. का पदानुपात r है। तब,

$b = ar, c = ar\ r^2, d = ar^3$

अत: $a^2 + b^2 = a^2\ r^2 + a^2\ (1 + r^2)$

$b^2 + c^2 = a^2\ r^2 + a^2\ r^4 = a^2\ r^2\ (1 + r^2)$

$c^2 + d^2 = a^2\ r^4 + a^2r^6 = a^2r^4\ (1 + r^2)$

स्पष्ट है कि $a^2 + b^2, b^2 + c^2 + c^2 + d^2$ गु. श्रे. में हैं, जिसका पदानुपात r है।

सिग्मा संकेतन (SigmaNotation)

किसी श्रेढी का योगफल उसके व्यापक पद के पहले ग्रीक अक्षर Σ (सिग्मा) लिखकर व्यक्त किया जाता है। यह संकेत श्रेढी के उन सभी पदों के योगफल को व्यक्त करता है जिसका व्यापक पद ' Σ ' के आगे लिखा जाता है। **उदाहरण** के लिए,

$1 + 2 + 3 + ... + n = \Sigma n$

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = \Sigma\ (2n - 1)$

प्रथम प्राकृत संख्याओं अथवाधन पूर्णांकों का योगफल (The Sum of First n Natural Numbers)

माना कि प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग S है। तब,

$S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n = \Sigma n.$

यह एक स. श्रे. है जिसका प्रथम पद 1, पदों की संख्या n तथा अन्तिम पद n है।

$$\therefore S = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

अतः $\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योगफल (The Sum of the Squares of First Natural Numbers)

माना कि $\Sigma n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2$ हम जानते हैं कि

$X^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$

एक सर्वसमिका है। इसमें क्रमशः $x = 1, 2, 3, \ldots\ldots, (n-1), n$ रखने पर,

. $1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$

.... = ...

.... = ...

.... = ...

$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-1)^3 - 3(n-1) + 1$

$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1.$

स्तम्भानुसार जोड़ने पर,

$n^3 = 3[1^2 + 2^2 + 3^{2+} \ldots\ldots + n^2]$

$-3[1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n] + n$

$= 3\Sigma n^2 - 3\Sigma n + n$

या $3\Sigma n^2 = n^3 + 3\Sigma n - n$

$= n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} = -n,$

$= \frac{n}{2}[2n^2 + 3(n+1) - 2],$

$= \frac{n}{2}[2n^2 + 3n + 3 - 2]$

$= \frac{n}{2}(2n^2 + 2n + n + 1)$

$= \frac{n}{2}[2n(n+1) + 1(n+1)]$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

अर्थात् $\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम प्राकृत संख्याओं के घनों का योगफल (The Sum of Cubes of First n Natural Numbers)

माना कि .

$\Sigma n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3$' हम जानते हैं कि

$X^4 - (x - 1)^4 = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$

उपर्युक्त सर्वसमिका में क्रमशः $x = 1, 2, 3, \ldots\ldots, (n - 1), n$ रखने पर,

$1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$

$2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$

$3^4 - 2^4 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$

.... = ...

.... = ...

.... = ...

$(n - 1)^4 - (n - 2)^4 = 4(n - 1)^3 - 6(n - 1)^2 + 4$

$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

स्तम्भानुसार जोड़ने पर,

$n^4 = 4[1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n - 1)^2 + n^3]$

- $6[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2]$
- $+4\Sigma n^3 - 6\,\Sigma n^2 + 4\,\Sigma n - n$

$4\Sigma n^3 = n^4 - 6\Sigma n^2 - 4\Sigma n + n$

$$= n^4 + 6\frac{n(n+1)2n+1) - 2n(n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{6}$$

$= n^4 = n(n + 1)(2n + 1) - 2n\,(n + 1) + n$

$= n = [n^3 + (n + 1)(2n + 1) - (n + 1) + 1]$

= n = [n^3 + 2n^2 + 3n + 1 – 2n - 2 + 1)

= n (n^3 + 2n^2 + 3n)

= n^2 (n^2 + 2n + 1) = [n(n + 1)]^2

अर्थात् $\Sigma n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

उदाहरण 1. निम्न श्रेढी का n वाँ पद तथा n पदों तक ही योगफल ज्ञात कीजिए

1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4) +.........

हल : श्रेढी के पदों का योगफल

= 1 + 2 + 3 + ...+ n

$$= \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

अत: अभीष्ट योगफल

$$= \Sigma\frac{1}{2}(n^2 + n)$$

$$= \frac{1}{2}(\Sigma n^2 + \Sigma n)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n\,(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{n\,(n+1)}{6}(2n + 1 + 3)$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}.2(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

अन्तर विधि (Difference Method)

माना कि $T_1, T_2, T_3, ..., T_n$, किसी श्रेढी के क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय, ...nवें पद हैं तथा इनके क्रमिक अन्तर $T_2 - T_1, T_3 - T_2, ..., T_n - T_{n-1}$ स. श्रे. अथवा गु. श्रे. में हैं। तब अन्तर विधि से श्रेढी का योग ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण 2. श्रेढी 1+4+10+20+35+....... का nवा पद ज्ञात कीजिए।

हल : श्रेढी 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + ... के क्रमागत पदों का अन्तर 4-1, 10-4, 20-10, 35-20.... अर्थात् 3, 6, 10, 15 समान्तर श्रेढी में नहीं है।

परन्तु श्रेढी 3, 6, 10, 15 के क्रमागत पदों का अन्तर 6-3, 10-6, 15-10...... अर्थात् 3,4,5 ...... समान्तर श्रेढी में है।

माना कि दी हुई श्रेढी का वाँ पद T_n, और n पदों का योग S_n, है। तब,

$$S_n = 1+4+10+20+35+......T_{n-1}+T_n$$

$$S_n = \quad 1+4+10+20+35+......T_{n-2}+T_{n-1}+T_n$$

घटाने पर

$$0 = 1+3+6+10+15+..........T_n$$

$T_n = 1+3+6+10+15+..........n$ पदों तक

माना इस श्रेणी का n वाँ पद t_n है।

$$T_n = 1+3+6+10+15+..........t_{n-1}+t_n$$

$$T_n = \quad 1+3+6+10+15+..........t_{n-2}+t_{n-1}+t_n$$

पुनः घटाने पर

$$0 = 1+2+3+4+5+..........t_n$$

$t_n = 1+2+3+4+5+......n$ पदों तक

माना इस श्रेणी का n वाँ पद t_n है। तब,

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}.$$

समान्तरीय-गुणोत्तर श्रेढी (Arithmetico Geometric Progression)

वह श्रेढी जिसका प्रत्येक पद एक समान्तर श्रेढी तथा एक गुणोत्तर श्रेढी के संगत पदों के गुणनफल से बनी हो, समान्तरीय गुणोत्तर श्रेढी कहलाती है। इसे संक्षेप में स. गु. श्रे. लिखते हैं।

उदाहरणार्थ; श्रेढी

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\ldots.$$
$$+(a+\overline{n-1}d)+\ldots..$$

एक समान्तरीय-गुणोत्तर श्रेढी है, क्योंकि इसका प्रत्येक पद एक समान्तर श्रेढी

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\ldots.$$
$$+(a+\overline{n-1}d)+\ldots..$$

तथा एक गुणोत्तर श्रेढी

$1+r+r2+r2+\ldots.r^{n-1}+\ldots.$ के संगत पदों के गुणनफल से बना है।

किसी समान्तर गुणोत्तर श्रेणी का nवां पद

ज्ञात करने की विधि (Method of finding nth Term of an Arithmetico-Geometric Progression)

पद 1. स. श्रे. का nवां पद ज्ञात कीजिए।

पद 2. गु. श्रे. का nवाँ पद ज्ञात कीजिए।

पद 3. पद 1 तथा पद 2 में प्राप्त व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात कीजिए। यही समान्तर गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद होगा।

कार्यविधि

पद I. स. श्रेणी का nवाँ पद ज्ञात कीजिए।

पद II. गु. श्रेणी का गवाँ पद ज्ञात कीजिए।

पद III. पद I एवं II में प्राप्त व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

पद IV. समस्त पदों का योग कर S_n के बराबर मानें। पद V. IV में प्राप्त श्रेणी के दोनों पक्षों में से गुणा करें।

पद VI. पद IV में प्राप्त श्रेणी से पद V में प्राप्त श्रेणी को घटाएँ।

समान्तरीय-गुणोत्तर श्रेढी के अनन्त पदों का

योगफल (Sum of Infinite Terms of Arithmetico-Geometric Progression)

यदि r का संख्यात्मक मान 1 से कम हो अर्थात् |r|<1 अर्थात् -1<r< 1, तब जैसे-जैसे n का मान अनन्त (0) की ओर अग्रसर होता है, वैसे-वैसे r^n का मान शून्य (0) की ओर अग्रसर होता है। अतः स. गु. श्रे. के अनन्त पदों का योगफल

$$\boxed{S_\infty = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}}$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 9.1 (पृष्ठ संख्या 193-194)

प्रश्न 1 अनुक्रमों में प्रत्येक के प्रथम पाँच पद लिखिए, nवाँ दिया गया है।

$a_n = n(n + 2)$

उत्तर- $a_n = n(n + 2)$

n का मान 1, 2, 3, 4, 5 रखने पर

$a_1 = 1 \times 3 = 3$

$a_2 = 2 \times 4 = 8$

$a_3 = 3 \times 5 = 15$

$a_4 = 4 \times 6 = 24$

$a_5 = 5 \times 7 = 35$

अतः दिए गए अनुक्रम में पांच पद 3, 8, 15, 24, 35 है।

प्रश्न 2 अनुक्रमों में प्रत्येक के प्रथम पाँच पद लिखिए, nवाँ दिया गया है।

$$a_{(n)} = \frac{n}{n+1}$$

उत्तर-

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

n का मान 1, 2, 3, 4, 5 रखने पर

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{2}, a_3 = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{5}, a_5 = \frac{5}{6}$$

$\therefore$ अनुक्रम के पांच पद $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ है।

प्रश्न 3 अनुक्रमों में प्रत्येक के प्रथम पाँच पद लिखिए, nवाँ दिया गया है।

$a_n = 2^n$

उत्तर- $a_n = 2^n$ में n का मान 1, 2, 3, 4, 5 रखने पर

$a_1 = 2^1 = 2$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 2^3 = 8$, $a_4 = 2^4 = 16$, $a_5 = 2^5 = 32$

अतः अनुक्रम के पांच पद 2, 4, 8, 16, 32 है।

प्रश्न 4 अनुक्रमों में प्रत्येक के प्रथम पाँच पद लिखिए, nवाँ दिया गया है।

$$a_n = \frac{2n-3}{6}$$

उत्तर-

$a_n = \frac{2n-3}{6}$ में n = 1, 2, 3, 4, 5, रखने पर

$$a_1 = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$a_2 = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$a_3 = \frac{6-3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{8-3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$a_5 = \frac{10-3}{6} = \frac{7}{6}$$

अतः अनुक्रम के पांच पद $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}$ है।

प्रश्न 5 अनुक्रमों में प्रत्येक के प्रथम पाँच पद लिखिए, nवाँ दिया गया है।

$a_n = (-1)^{n-1}5^{n+1}$

उत्तर-

$a_n = (-1)^{n-1}5^{n+1}$, n में 1, 2, 3, 4, 5 रखने पर

$$a_1 = (-1)^0 5^2 = 25$$

$$a_2 = (-1)^1 5^3 = -125$$

$$a_3 = (-1)^2 5^4 = 625$$

$$a_4 = (-1)^3 5^5 = -3125$$

$$a_5 = (-1)^4 5^6 = 15625$$

अनुक्रम के पांच पद 25, -125, 625, -3125, 15625 है।

प्रश्न 6 अनुक्रमों में प्रत्येक के प्रथम पाँच पद लिखिए, nवाँ दिया गया है।

$a_n = n\frac{n^2+5}{4}$

उत्तर-

$a_n = n\frac{n^2+5}{4}$, n में 1, 2, 3, 4, 5 रखने पर

$a_1 = 1.\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$a_2 = 2.\frac{9}{4} = \frac{9}{2}$

$a_3 = 3.\frac{14}{4} = \frac{21}{2}$

$a_4 = 4.\frac{21}{4} = 21$

$a_5 = 5.\frac{30}{4} = \frac{75}{2}$

अतः अनुक्रम के पाँच पद $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{21}{2}, 21, \frac{75}{2}$ है।

प्रश्न 7 निम्नलिखित अनुक्रम का वांछित पद ज्ञात कीजिए, जिनका nवाँ पद दिया गया है।

$a_n = 4n - 3, a_{17}, a_{24}$

उत्तर-

n = 17 लेने पर,

$a_{17} = 4 \times 17 - 3 = 68 - 3 = 65$

n = 24 लेने पर,

$a_{24} = 4 \times 24 - 3 = 96 - 3 = 93$

प्रश्न 8 निम्नलिखित अनुक्रम का वांछित पद ज्ञात कीजिए, जिनका nवाँ पद दिया गया है।

$a_n = \frac{n^2}{2^n} : a_7$

उत्तर-

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}$$

n = 7 रखने पर,

$$a_7 = \frac{7^2}{2^7} = \frac{49}{128}$$

प्रश्न 9 निम्नलिखित अनुक्रम का वांछित पद ज्ञात कीजिए, जिनका nवाँ पद दिया गया है।

$a_n = (-1)^{n-1n^3}; a_9$

उत्तर-

$$a_n = (-1)^{n-1} n^3,$$

n = 9 रखने पर,

$$a_9 = (-1)^{9-1} 9^3 = 729$$

प्रश्न 10 निम्नलिखित अनुक्रम का वांछित पद ज्ञात कीजिए, जिनका nवाँ पद दिया गया है।

$a_n = \frac{n(n-2)}{n+3} : a_{20}$

उत्तर-

$a_n = \frac{n(n-2)}{n+3}$,

n = 20 लेने पर,

$a_{20} = \frac{20 \times 18}{23}$

$= \frac{360}{23}$

प्रश्न 11 अनुक्रम के पाँच पद लिखिए सांगत श्रेणी ज्ञात कीजिए:

$a_1 = 3$, $a_n = 3a^{n-1} + 2$ सभी $n > 1$ के लिए|

उत्तर-

$a_n = 3a_{n-1} + 2$, और $a_1 = 3$

अनुक्रम में n = 2, 3, 4, 5 रखने पर,

$a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \times 3 + 2 = 11$

$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \times 11 + 2 = 35$

$a_4 = 3a_3 + 2 = 3 \times 35 + 2 = 107$

$a_5 = 3a_4 + 2 = 3 \times 107 + 2 = 323$

अतः संगत श्रेणी 3 + 11 + 35 + 107 + 323 +...

प्रश्न 12 अनुक्रम के पाँच पद लिखिए सांगत श्रेणी ज्ञात कीजिए:

$a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, जहाँ $n \geq 2$.

उत्तर-

$$a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$$, n में 2, 3, 4, 5 रखने पर,

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{\frac{-1}{2}}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{\frac{-1}{6}}{4} = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5} = \frac{\frac{-1}{24}}{5} = -\frac{1}{120}$$

$$\text{अतः संगत श्रेणी} = (-1) + \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{6}\right) + \left(\frac{-1}{24}\right) + \left(\frac{-1}{120}\right) + \ldots$$

प्रश्न 13 अनुक्रम के पाँच पद लिखिए सांगत श्रेणी ज्ञात कीजिए:

$a_1 = a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} - 1$, जहाँ $n > 2$

उत्तर- $a_1 = a_2 = 2$ (दिया है)

और

n = 3, 4, 5 रखने पर,

$a_3 = a_2 - 1 = 2 - 1 = 1$

$a_4 = a_3 - 1 = 1 - 1 = 0$

$a_5 = a_4 - 1 = 0 - 1 = -1$

अतः अनुक्रम के पाँच पद 2, 2, 1, 0 और - 1 है। संगत श्रेणी = 2 + 2 + 1 + 0 + (-1)

प्रश्न 14 Fibonacci अनुक्रम निम्नलिखित रूप में परिभाषित है-

$1 = a_1 = a_2$, तथा $a_n = an - 2 + a_{n-2}$, $n > 2$ तो, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ज्ञात कीजिए जबकि $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

उत्तर- $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$n = 3, 4, 5, 6$ रखने पर,

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

अब $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ में $n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 1$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{50}$$

प्रश्नावली 9.2 (पृष्ठ संख्या 198-199)

प्रश्न 1 1 से 2001 तक के विषम पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर- श्रेणी 1 + 3 + 5 + 7 +... + 2001

मान लीजीए n वां पद 2001 तब

2001 = a + (n - 1)d

= 1 + (n - 1). 2

= 1001

अतः योगफल $S = \frac{n}{2}(a + l)$

$= -\frac{1001}{2}[1 + 2001]$

$= \frac{1001}{2} \times 2002$

$= 1002001$

प्रश्न 2 100 तथा 1000 के मध्य उन सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 5 के गुणज हो।

उत्तर- 100 और 1000 के बीच की संख्याओं जो 5 की गुणज है उनका योगफल

= 105 + 110 + 115 +... + 995

मन लीजिये 995, n वां पद है।

∴ n वां पद = a + (n - 1)d

⇒ 995 = 105 + (n - 1)5

5(n - 1) = 995 - 105

= 890

$$n - 1 = \frac{890}{5} = 178$$

n = 179

अतः योगफल, $S_{179} = \frac{179}{2}[2 \times 105 + (179 - 1).5]$

$$= \frac{179}{2}[2 \times 105 + 178 \times 5]$$

$$= 179[105 + 89 \times 5]$$

$$= 98450$$

प्रश्न 3 किसी समान्तर श्रेणी में प्रथम पद 2 है तथा प्रथम पांच पदों का योगफल, अगले पांच पदों के योगफल का एक चौथाई है। दर्शाइए की 20 वां पद -112 है।

उत्तर-

मान लीजिए, d सार्वअंतर है जबकि a = 2

प्रथम पाँच पदों का योगफल $= \frac{5}{2}[2 \times 2 + 4 \times d]$

$$= 5[2 + 2d] = 10(1 + d)$$

तथा 6 वां पद $= 2 + (6 - 1).d = 2 + 5d$

अगले पाँच पदों योगफल $= \frac{5}{2}[2(2 + 5d) + (5 - 1)d]$

$$= \frac{5}{2}[4 + 10d + 4d]$$

$$= \frac{5}{2}[4 + 14d] = 5(2 + 7d)$$

प्रथम पाँच पदों का योगफल $= \frac{1}{4}$ अगले पाँच पदों का योगफल

$$10(1 + d) = \frac{1}{4} \times 5(2 + 7d)$$

$$\therefore 8 + 8d = 2 + 7d$$

$$\therefore d = 2 - 8 = -6$$

20 वां पद = a + (20 - 1)d

= 2 + 19 (-6)

= 2 - 114 = - 112

प्रश्न 4 समान्तर श्रेणी $-6, -\frac{11}{2}, -5$ के कितने पदों का योगफल - 25 है?

उत्तर-

दिया हुआ अनुक्रम $-6, -\frac{11}{2}, -5 \ldots$ समान्तर श्रेणी में है।

यहाँ, a = - 6,

$$d = -\frac{11}{2} - (-6)$$

$$= -\frac{11}{2} + 6 = -\frac{11}{2} + \frac{6}{1}$$

$$d = \frac{-11+12}{2} = \frac{1}{2}$$

अब, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$\Rightarrow -25 = \frac{n}{2}\left[2 \times (-6) + (n-1)\frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow -25 \times 2 = n\left[\frac{-12}{1} + \frac{(n-1)}{2}\right]$$

$$\Rightarrow -50 = n\left[\frac{-24+n-1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow -50 \times 2 = n(n-25)$$

$$\Rightarrow -100 = n^2 - 25n$$

$$\Rightarrow n^2 - 25n + 100 = 0$$

मध्य पद को विभक्त कर गुणनखंड करने पर,

$$n^2 - (20+5)n + 100 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 - 20n - 5n + 100 = 0$$

$$\Rightarrow n(n-20) - 5(n-20) = 0$$

$$\Rightarrow n = 5, 20$$

प्रश्न 5 किसी समान्तर श्रेणी का p वां पद $\frac{1}{q}$ तथा q वां पद $\frac{1}{q}$, हो तो सिद्ध कीजिए कि प्रथम pq पदों का योग $\frac{1}{2}$(pq+1) होगा जहाँ $p \neq q$.

उत्तर-

मान लीजिए प्रथम पद = a

और सार्वअंतर = d

$$\therefore \text{p वां पद} = a + (p-1)d = \frac{1}{q} \ldots (1)$$

$$\text{q वां पद} = a + (q-1)d = \frac{1}{p} \ldots (2)$$

समीकरण (2) को (1) में से घटाने पर,

$$(p-q)d = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{p-q}{pq}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{pq}$$

d का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\therefore a + (p-1)\frac{1}{pq} = \frac{1}{q}$$

$$a = \frac{1}{q} - \frac{p-1}{pq}$$

$$= \frac{1}{q} - \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{pq}$$

$\therefore$ pq पदों का योग $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$= \frac{pq}{2}\left[2 \times \frac{1}{pq} + (pq-1)\frac{1}{pq}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[2 + pq - 1]$$

$$= \frac{1}{2}[pq + 1]$$

प्रश्न 6 यदि किसी समांतर श्रेणी 25, 22, 19,... के कुछ पदों का योगफल 116 है तो अंतिम पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है-

a = 25, d = 22 - 25 = - 3

मान लीजिए इस श्रेणी में n पद है।

n पदों का योगफल $= 116 = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2 \times 25 + (n-1)(-3)]$

$= \frac{n}{2}[50 - 3(n-1)]$

$= \frac{n}{2}[50 - 3n + 3]$

$= \frac{n}{2}[53 - 3n]$

$\therefore 232 = 53n - 3n^2$

$3n^2 - 53n + 232 = 0$

$(n-8)(3n-29) = 0$

$n \neq \frac{29}{3}$

$n = 8$

अतः 8 वां पद $= a + (n-1)d$

$= 25 + (8-1)(-3)$

प्रश्न 7 उस समान्तर श्रेणी के n पदों को योगफल ज्ञात कीजिए जिसका k वां पद 5k + 1 है।

उत्तर- दिया है, k वां पद = $T_k = 5k + 1$

k = 1, 2 रखने पर

$T_1 = 5 \times 1 + 1$

= 5 + 1 = 6

$T_2 = 5 \times 2 + 1$

$= 10 + 1 = 11$

$d = T_2 - T_1$

$= 11 - 6 = 5$

$$\therefore \text{n पदों का योगफल} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[2 \times 6 + (n-1).5]$$

$$= \frac{n}{2}[12 + 5n - 5]$$

$$= \frac{n}{2}[5n + 7]$$

प्रश्न 8 यदि किसी समान्तर श्रेणी के n पदों का योगफल $(pn + qn^2)$, है, जहाँ p तथा q अचर हो तो सार्वअंतर ज्ञात कीजिए।

उत्तर- n पदों योगफल $= S_n = pn + qn^2$

n = 1, 2 रखने पर,

$T_1 = S_1 = p \times 1 + q \times 1 = p + q$

$S_2 = p \times 2 + q \times 2^2$

$= 2q + 4q$

$T_2 = S_2 - S_1$

$= (2p + 4q) - (p + q) = p + 3q$

$d = T_2 - T_1$

$=(p + 3q) - (p + q) = 2q$

सार्वअंतर = 2q.

प्रश्न 9 दो समान्तर श्रेणियों के n पदों के योगफल का अनुपात 5n + 4 : 9n + 6 हो, तो उनके 18 वे पदों का अनुपात ज्ञात करो।

उत्तर- मान लीजिए समातर श्रेणियों के प्रथम पद a_1, a_2 तथा सार्वअंतर d_1 और d_2 है। यदि S_n, S'_n उनके संगत योगफल है। T_{18} और T'_{18} उनके संगत 18 वे पद है।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1]$$

$$S'_n = \frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2]$$

$$\therefore \frac{S_n}{S'_n} = \frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d\_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]}$$

$$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2} = \frac{5n+4}{9n+6}$$

हमें ज्ञात करना है

$$\frac{T_{18}}{T'_{18}} = \frac{a_1+(18-1)d_1}{a_2+(18-1)d_2}$$

अंश और हर दोनों को 2 से गुना करने पर

$$\frac{T_{18}}{T'_{18}} = \frac{2a_1+2(18-1)d_1}{2a_2+2(18-1)d_2}$$

$$= \frac{2a_2+34d_1}{2a_2+34d_2}$$

समीकरण (1) और (2) की तुलना करने पर

n - 1 = 34

n = 35

समीकरण (2) में n = 35 रखने पर

$$\frac{T_{18}}{T'_{18}} = \frac{2a_1+34d_1}{2a_2+34d_2}$$

$$= \frac{5\times35+4}{9\times35+6}$$

$$= \frac{179}{231}$$

प्रश्न 10 यदि किसी समान्तर श्रेणी के प्रथम p पदों का योग, प्रथम q पदों के योगफल के बराबर हो, तो प्रथम (p + q) पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

मान लीजिए a प्रथम पद व d सार्वअंतर है।

$\therefore$ p पदों का योगफल $= \frac{p}{2}[2a + (p - 1)d] \ldots (1)$

q पदों का योगफल $= \frac{q}{2}[2a + (q - 1)d] \ldots (2)$

प्रश्नानुसार,

$$\therefore \frac{p}{2}[2a + (p - 1)d] = \frac{q}{2}[2a + (q - 1)d]$$

$$2ap + p(p - 1)d = 2aq + q(q - 1)d$$

$$2a(p - q) + [p(p - 1) - q(q - 1)]d = 0$$

$$2a(p - q) + [p^2 - q^2 - (p - q)]d = 0$$

$$2a(p-q)+(p-q)[p+q-1]d=0 \ \ldots(3)$$

p - q से भाग करने पर

$$2a+(p+q-1)d=0$$

p + q पदों का योगफल $=\frac{p+q}{2}[2a+(p+q-1)d]$

$=\frac{p+q}{2}\times 0=0$ [∵ समीकरण (3) से]

प्रश्न 11 यदि किसी समान्तर श्रेणी के प्रथम p, q, r पदों का योगफल क्रमशः a, b तथा c हो तो सिध्द कीजिए की-

$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}(p-q)=0$

उत्तर-

p पदों, का योगफल $=\frac{p}{2}[2a+(p-1)d]=a$

$$2a+(p-1)d=\frac{2a}{p} \ \ldots(1)$$

q पदों का योगफल $=\frac{q}{2}[2a+(q-1)d]=b$

$$2a(q-1)d=\frac{2b}{q} \ \ldots(2)$$

r पदों का योगफल $=\frac{r}{2}[2a+(r-1)d]=c$

$$\therefore 2a+(r-1)d=\frac{2c}{r} \ \ldots(3)$$

समीकरण (1) को q - r से, समीकरण (2) को (r - p) से, समीकरण (3) को (p - q) से गुणा करके जोड़ने पर

$$[2a+(p-1)d](q-r)+[2a+(q-1)d](r-p)+[2a+(r-1)d](p-q)$$

$$=\frac{2a}{p}(q-r)+\frac{2b}{q}(r-p)+\frac{2c'}{r}(p-q)$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{p}(q-r)+\frac{2b}{q}(r-p)+\frac{2c}{r}(p-q)$$

$$=2a[q-r+r-p+p-q]+d[(p-1)(q-r)$$
$$+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)]$$

$$=0+d[p(q-r)+q(r-p)+r(p-q)]$$
$$-[q-r+r-p+p-q]$$

$$=d[pq-pr+qr-pq+pr-qr]=0$$

2 से भाग देने पर

$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}(p-q)=0$ इति सिध्दम्

प्रश्न 12 किसी समांतर श्रेणी के m तथा n पदों के योगफालो का अनुपात $m^2 : n^2$ है तो दर्शाइए की वे m तथा n वे पदों का अनुपात (2m - 1) : (2n - 1) है।

उत्तर-

मान लीजिए समान्तर श्रेणी का पहला पद a और संघर्ष अंतर d है।

$\therefore$ m पदों का योगफल $=\frac{m}{2}[2a+(m-1)d]$

n पदों का योगफल $=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

दिया है-

$$\frac{\frac{m}{2}[2a+(m-1)d]}{\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}=\frac{m^2}{n^2}$$

$$\frac{2a+(m-1)d}{2a+(n-1)d}=\frac{m}{n}\quad\ldots(1)$$

अब $\frac{a+(m-1)d}{a+(n-1)d}$

$$=\frac{2a+(2m-2)d}{2a+(2n-2)d}\quad\ldots(2)$$

समीकरण (1) और (2) की तुलना करने पर

समीकरण (1) में m - 1 के स्थान पर समीकरण (2) में 2m - 2 अथवा m के स्थान पर 2m - 1 रखने पर तथा इसी प्रकार n - 1 के स्थान पर 2n - 2 है अथवा n के स्थान पर 2n - 1 रखने पर

$$\therefore \frac{2a+(2m-2)d}{a+(n-1)d}$$

$$\frac{\text{m वाँ पद}}{\text{n वाँ पद}}$$

$$=\frac{2m-1}{2n-1}$$ इति सिध्दम्

प्रश्न 13 यदि किसी समान्तर श्रेणी के n वे पद का योगफल $3n^2 + 5n$ है तथा इसका m वां पद 164 है तो m का मान ज्ञात करो।

उत्तर- n पदों का योगफल, $S_n = 3n^2 + 5n$

n = 1, 2 रखने पर

$S_1 = 3.1^2 + 5.1 = 8 =$ पहला पद $= a$

$S_2 = 3.2^2 + 5.2 = 12 + 10 = 22$

दूसरा पद, $T_2 = S_2 - S_1 = 22 - 8 = 14$

सर्वांतर = 14 - 8 = 6

mवां पद = $a + (m - 1)d = 164$

$8 + (m - 1) \times 6 = 164$

$6(m - 1) = 164 - 8 = 156$

$\therefore m - 1 = \frac{156}{6} = 26$

$m = 27$

प्रश्न 14 8 और 26 के बीच ऐसी 5 संख्याएँ डालिए ताकि प्राप्त अनुक्रम एक समान्तर श्रेणी बन जाए।

उत्तर- माना A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 संख्या 8 और 26 के बीच डाली गई है। जिससे $8, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, 26$ समान्तर श्रेणी का रूप है।

इस अनुक्रम के कुल पद = 7

पहला पद = 8

अंतिम पद = 26, यदि सार्वअंतर d हो तो,

$26 = a + (n - 1)d = 8 + (7 - 1)d$

$6d = 26 - 8 = 18,$

$d = \frac{18}{6} = 3$

दूसरा पद = $A_1 = 8 + 3 = 11$

$A_2 = 11 + 3 = 14$

$A_3 = 14 + 3 = 17$

$A_4 = 17 + 3 = 20$

$A_5 = 20 + 3 = 23$

अतः A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 के मान क्रमशः 11, 14, 17, 20, 23 है।

प्रश्न 15 यदि $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$ a तथा b के मध्य समान्तर माध्य हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

a और b के बीच समान्तर माध्य $= \frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}} = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow 2(a^n + b^n) = (a+b)(a^{n-1} + b^{n-1})$$

$$\Rightarrow 2a^n + 2b^n = a^n + ab^{n-1} + a^{n-1}b + b^n$$

$$\Rightarrow a^n - ab^{n-1} = a^{n-1}b - b^n$$

$$\Rightarrow a(a^{n-1} - b^{n-1}) - a^{n-1}b + b^n = 0$$

$$\Rightarrow a(a^{n-1} - b^{n-1}) - b(a^{n-1} - b^{n-1}) = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a^{n-1} - b^{n-1}) = 0$$

$$\Rightarrow a = b \text{ या } a^{n-1} = b^{n-1}$$

$$\therefore a^{n-1} = b^{n-1}$$

या $\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} = 1$

अर्थात् $\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^{0}$

$\Rightarrow n - 1 = 0$ या $n = 1$

प्रश्न 16 m संख्याओं को 1 तथा 31 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक समान्तर श्रेणी है। और 7 वी एवं (m - 1) वी संख्याओं का अनुपात 5 : 9 है, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान लीजिए 1, A_1 A_2,... A_3, 31 समान्तर श्रेणी है।

कुल पद = m + 2

अंतिम पद = a + (m + 2 - 1)d = 1 + (m + 1)d

$\therefore d = \frac{31-1}{m+1} = \frac{30}{m+1}$

$A_7 = a + 7d$

$= 1 + 7\frac{30}{m+1} = \frac{210+m+1}{m+1}$

$= \frac{211+m}{m+1}$

$A^{m-1} = 1 + (m-1)d = 1 + (m-1)\frac{30}{m+1}$

$= \frac{m+1+30m-30}{m+1}$

$= \frac{31m-29}{m+1}$

दिया है-

$$\frac{7 \text{ वाँ पद}}{(m-1) \text{ वाँ पद}}$$

$$= \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{m-211}{31m-29} = \frac{5}{9}$$

$$5(31m-29) = 9(m+211)$$

$$155m - 145 = 9m + 1899$$

$$146m = 1899 + 145 = 2044$$

$$m = \frac{2044}{146} = 14$$

प्रश्न 17 एक व्यक्ति ऋण का भुगतान 100 रूपए की प्रथम किश्त से शुरू करता है। यदि वह प्रत्येक किश्त में 5 रूपए प्रति माह बढ़ाता है, तो 30 वी किश्त की राशि क्या होगी?

उत्तर- पहली किश्त a = 100 रु.

हर माह किश्त में बढ़ोत्तरी = सार्वअंतर = 5 रु,

30 वी किश्त = समान्तर श्रेणी का 30 वां पद = a + (n - 1)d

= 100 + (30 - 1) 5

= 100 + 29 × 5

= 100 + 145 = 245 रु.

प्रश्न 18 एक बहुभुज के दो क्रमिक अन्तः कोणों का अंतर 5° है। यदि सबसे छोटा कोण 120° हो, तो बहुभुज की भुजाओ की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- एक n भुजाओ वाले बहुभुज के अन्तः कोणों का योग = 180n − 260 ...(1)

दिया है कि

एक अन्तः कोण = समान्तर श्रेणी का पहला पद = 120°

क्रमिक अन्तः कोणों का अंतर = समान्तर श्रेणी का सार्वअंतर = d = 5

∴ n अन्तः कोणों का योग = समान्तर श्रेणी के n पदों का योग

$$= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[2 \times 120 + (n-1) \times 5]$$

$$= \frac{n}{2}[240 + 5n - 5]$$

$$= \frac{n}{2}[5n + 235] \ \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) से,

$$\frac{n}{2}[5n + 235] = 180n - 260$$

$$\therefore 5n^2 + 235n = 260n - 720$$

$$5n^2 - 12n + 720 = 0$$

$$n^2 - 25n + 144 = 0$$

$$\therefore (n-16)(n-9) = 0$$

$$\therefore n - 16, 9$$

परन्तु $n \neq 16$ इसलिए $n = 9$

प्रश्नावली 9.3 (पृष्ठ संख्या 205-207)

प्रश्न 1 गुणोत्तर श्रेणी $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}$ का 20 वां तथा n वां पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद, $\mathbf{a} = \frac{5}{2}$

दूसरा पद $= \frac{5}{4}$, सार्व अनुपात, $\mathbf{a} = \frac{1}{2}$

n वां पद = $\mathbf{a}^{\mathrm{n}-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}-1} = \frac{5}{2^{\mathrm{n}}}$

n = 20 रखने पर, 20 वां पद $= \frac{5}{2^{20}}$

प्रश्न 2 उस गुणोत्तर श्रेणी का 12 वां पद ज्ञात कीजिए, जिसका 8 वां पद 192 तथा सार्व अनुपात 2 है।

उत्तर- मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद = a

सर्व अनुपात = 2

12 वां पद = $a \times 2^{12-1} = 2^{11}\,a$

8 वां पद = $a.\ 2^{8-1} = a.\ 2^{7} = 128a$

दिया है- 8 वां पद = 192

$\therefore 128a = 192$

$$a = \frac{192}{128} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{12 वां पद} = 2^{11} \times \frac{3}{2}$$

$$= 2^{10} \times 3$$

$$= 1024 \times 3$$

$$= 3072$$

प्रश्न 3 किसी गुणोत्तर श्रेणी का 5 वां, 8 वां तथा 11 वां पद क्रमशः p, q तथा s है, तो दिखाइए की q^2 = PS.

उत्तर- मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद = a

सार्व तथा अनुपात = r

5 वां पद = $ar^{5-1} = ar^4 = p$

8 वहां पद = $ar^{8-1} = ar^7 = q$

11 वां पद = $ar^{11-1} = ar^{10} = s$

बायाँ पक्ष = q2 $(ar^7)^2 = a^2 . r^{14}$

दायाँ पक्ष = $ps = ar^4\ ar^{10} = a^2\ r^{14}$

अतः $q^2 = ps$.

प्रश्न 4 किसी गुणोत्तर श्रेणी का चौथा पद उसके दूसरे पद का वर्ग है तथा प्रथम पद - 3 है, तो 7 वां पद ज्ञात कीजिये।

उत्तर- मान लीजिये गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद, a = - 3

तथा सार्व-अनुपात = r

चौथा पद = $ar^{4-1} = ar^3 = -3r^3$

दूसरा पद = $ar = -3r$

दिया है- चौथा पद = (दूसरे पद)^2

$\Rightarrow -3r^3 = (-3r)^2 = 9r^2$

$r = -3$

7 वां पद = $ar^{7-1} = ar^6 = (-3)(-3)^6$

$= (-3)^7 = -2187$

प्रश्न 5 अनुक्रम को कौन सा पद-

(i) $2, 2\sqrt{2}, 4 \ldots; 2 = 128$ है?

(ii) $\sqrt{3}, 3, 3 \ldots; 729$ है?

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots; \frac{1}{19683}$ है?

उत्तर-

(i)

गुणोत्तर श्रेणी का पहला व दूसरा पद क्रमशः 2 और $\sqrt{2}$

$\therefore$ सर्व-अनुपात $= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

n वां पद $= ar^{n-1} = 2(\sqrt{2})^{n-1} = 128$

$$\Rightarrow 2.2^{\frac{n-1}{2}} = 128 \text{ या } 2^{\frac{n-1}{2}} = 64 = 2^6$$

$$\therefore \frac{n-1}{2} = 6, n - 1 = 12 \text{ या } n = 13$$

(ii)

गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद $= \sqrt{3}$

दूसरा पद = 3

$\therefore$ सर्व-अनुपात $= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

n वां पद $= ar^{n-1}$

$$= \sqrt{3}(\sqrt{3})^{n-1} = (\sqrt{3})^n = 3^{\frac{n}{2}}$$

दिया है-

n वां पद $= 3^{\frac{n}{2}} = 729 = 3^6$

अर्थात् $\frac{n}{2} = 6 = n = 12$

(iii)

गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद, a $= \frac{1}{3}$

दूसरा पद $= \frac{1}{9}$

$\therefore$ सर्व-अनुपात $= \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{3}$

n वां पद $= ar^{n-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^n}$

दिया है- $\frac{1}{3^n} = \frac{1}{19683} = \frac{1}{3^9}$

अतः $n = 9$

प्रश्न 6 x के किस मान के लिए संख्याएँ $\frac{-2}{7}, x, \frac{-7}{2}$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं?

उत्तर-

संख्याएँ a, b और c गुणोत्तर श्रेणी में है यदि $b^2 = ac$

$\therefore -\frac{2}{7}, X, \frac{-7}{2}$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं

यदि $x^2 = \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{7}{2}\right) = 1$

$x = \pm 1$

प्रश्न 7 गुणोत्तर श्रेणी का योगफल निर्दिष्ट पद तक ज्ञात कीजिए।

0.15, 0.015, 0.0015,.....20 पदों तक।

उत्तर-

गुणोत्तर श्रेणी 0.15, 0.015, 0.0015

पहला पद, a = 0.15

सार्व अनुपात $r = \frac{0.015}{0.15} = 0.1$

गुणोत्तर श्रेणी का योगफल $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$= \frac{0.15[1-(0.1)^{20}]}{1-(0.1)}$$

$$= \frac{0.15[1-(0.1)^{20}]}{0.9}$$

$$= \frac{1-(0.1)^{20}}{6}$$

प्रश्न 8 गुणोत्तर श्रेणी का योगफल निर्दिष्ट पद तक ज्ञात कीजिए।

$\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots$ n पदों तक।

उत्तर-

गुणोत्तर श्रेणी $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots$

पहला पद, $a = \sqrt{7}$

सार्व अनुपात $r = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \sqrt{3}$

n पदों का योग $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ जब $r > 1$

$$= \frac{\sqrt{7}\left[(\sqrt{3})^n - 1\right]}{r-1}$$

$$= \frac{\sqrt{7}\left(3^{\frac{n}{2}}\right)-1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{7}(\sqrt{3}+1)\left(3^{\frac{n}{2}}-1\right)}{2}$$

प्रश्न 9 गुणोत्तर श्रेणी का योगफल निर्दिष्ट पद तक ज्ञात कीजिए।

1, -a, $-a^2$, $-a^3$... n पदों तक (यदि a ≠ −1)

उत्तर-

गुणोत्तर श्रेणी 1, -a, $-a^2$, $-a^3$...

पहला पद, a = 1

सार्व अनुपात $r = \frac{-a}{1} = -a$

$\therefore$ n पदों का योग $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ जब $r > 1$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r > 1$$

$$= \frac{1.\left[1-(-a^n)\right]}{1+a}$$

$$= \frac{\left[1-(-a^n)\right]}{1+a}$$

प्रश्न 10 गुणोत्तर श्रेणी का योगफल निर्दिष्ट पद तक ज्ञात कीजिए।

X^3, X^5, X^7... n पदों तक (यदि X ≠ ±1)

उत्तर-

गुणोत्तर श्रेणी X^3, X^5, X^7...

पहला पद, a = x^3

सार्व अनुपात $r = \frac{x^5}{x^3} = x^2$

$\therefore$ n पदों का योग $= \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{x^3.\left[1-(x^2)^n\right]}{1-x^2}$

$= \dfrac{x^3.\left[1-x^{2n}\right]}{1-x^2}$

प्रश्न 11 मान ज्ञात कीजिए

$$\sum_{k=1}^{11}(2+3^k)$$

उत्तर-

$$\sum_{k=1}^{11}(2+3^k) = (2+3)+(2+3^2)+(2+3^3)+\ldots 11 \text{ पदों तक}$$

$$2\times 11+(3+3^2+3^3+\ldots 11) \text{ पदों तक}$$

$$22+\frac{3(3^{11}-1)}{3-1}\left[\because a=3, r=3, S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\right]$$

$$= 22+\tfrac{3}{2}(3^{11}-1)$$

प्रश्न 12 एक गुणोत्तर श्रेणी के तीन पदों का योगफल $\frac{39}{10}$ है तथा उनका गुणनफल 1 है। सार्व अनुपात तथा पदों को ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी के तीन पद $\frac{a}{r}$, a तथा ar हैं।

योगफल, $\frac{a}{r}+a+ar = \frac{39}{10} \quad \ldots(1)$

तथा गुणनफल $= \frac{a}{r}\times a\times ar = a^3 = 1 \quad \ldots(2)$

$a = 1$

समीकरण (1) में a = 1 रखने पर

$\frac{1}{r} + 1 + r = \frac{39}{10}$

10r से गुणा करने पर

$10 + 10r + 10r^2 = 39r$

$10r - 29r + 10 = 0$

$(2r - 5)(5r - 2) = 0$

$r = \frac{5}{2}$ या $\frac{2}{5}$

$a = 1$

$\frac{1}{r} = \frac{5}{2}, r = \frac{2}{5}$

$\therefore$ गुणोत्तर श्रेणी के पद $= \frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$ या $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$

प्रश्न 13 गुणोत्तर श्रेणी $3, 3^2, 3^3, \ldots$ के कितने पद आवश्यक हैं ताकि उनका योगफल 120 हो जाए।

उत्तर-

मान लो गुणोत्तर श्रेणी के कुल पद = n

पहला पद, a = 3,

सार्व अनुपात, $r = \frac{3^2}{3} = 3$

n पदों का योगफल $= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1$

$$= \frac{3(3^n-1)}{3-1} = 120$$

$$3(3^n - 1) = 120 \times 2 = 240$$

3 से भाग देने पर

$$3^n - 1 = \frac{240}{3} = 80$$

$$3^n = 80 + 1 = 81 = 3^4$$

अतः $n = 4$

प्रश्न 14 किसी गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योगफल 16 है तथा अगले 3 पदों का योग 128 है तो गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद, सार्व अनुपात तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी a, ar, ar^2,.... है।

पहला पद = a, सार्व अनुपात = r

तीन पदों का योगफल $= \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 16 \quad \ldots (1)$

चौथा पद $= a \times r^{n-1}$

$$= ar^{4-1} = ar^3$$

अगले तीन पदों का योगफल $= \frac{ar^3(1-r^3)}{1-r} = 128 \quad \ldots (2)$

समीकरण (2) को (1) से भाग देने पर,

$$\frac{ar^3(1-r^3)}{1-r} \times \frac{1-r}{a(1-r\hat{}3)}$$

$$= \frac{128}{16} = 8$$

$$\therefore r^3 = 8 \text{ या } r = 2$$

$\therefore$ समीकरण (1) में r का मान रखने पर

$$\frac{a(1-8)}{1-2} = 16 \text{ या } 7a = 16$$

$$\therefore a = \frac{16}{7}$$

$$\text{यहाँ } r > 1 \;\; \therefore S_n = \frac{\frac{16}{7}(2^n - 1)}{2-1}$$

$$= \frac{16}{7}(2^n - 1)$$

$$\text{अतः } a = \frac{16}{7}, r = 2, S_n = \frac{16}{7}(2^n - 1)$$

प्रश्न 15 एक गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a = 729 तथा 7 वाँ पद 64 है, तो S^7 ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद, a = 729

मान लीजिए सार्व अनुपात = r

$$\therefore 7 \text{ वाँ पद} = ar^{7-1} = ar^6$$

$$729r^6 = 64$$

$$\Rightarrow r^6 = \frac{64}{729} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$\therefore r = \frac{2}{3}$$

अब $S_7 = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{729\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^7\right]}{1-\frac{2}{3}}$

$= 729 \times 3 \times \left[\frac{2187-128}{2187}\right]$

$= \frac{729 \times 3}{2187}(2059)$

$= 2059$

प्रश्न 16 एक गुणोत्तर श्रेणी को ज्ञात कीजिए, जिसके प्रथम दो पदों का योगफल -4 है तथा 5 वाँ पद तृतीय पद का 4 गुना है।

उत्तर- मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद = a

सार्व अनुपात = r

पहले दो पदों का योग = a + ar = -4

5 वाँ पद = ar^4, तीसरा पद = ar^2

5 वाँ पद = 4 × तीसरा पद

$ar^4 = 4 \times ar$

$\therefore r^2 = 4$ या $r = \pm 2$

समी (1) में r = 2 रखने पर

$a(1+2) = -4$

$\therefore a = -\frac{4}{3}$

$\therefore$ गुणोत्तर श्रेणी $-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{3} \ldots$ है

और जब $r = -2, \;\; \therefore a(1-2) = -4$ या $a = 4$

गुणोत्तर श्रेणी है- $4, -8, 16, -32, \ldots$

प्रश्न 17 यदि किसी गुणोत्तर का 4 वाँ, 10 वाँ तथा 16 वाँ पद क्रमशः x, y तथा z हैं, तो सिद्ध कीजिए कि x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

उत्तर- मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद = a,

सार्व अनुपात = r

$\therefore$ 4 वां पद = $ar^3 = x$

10 वां पद $= ar^9 = y$

16 वां पद = $ar^{15} = z$

$\therefore y^2 = (ar^9)^2 = a^2r^{18}$

और $zx = ar^15 \times ar^3 = a^2r^{18}$

$\therefore y^2 = xz$

अतः x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में है।

प्रश्न 18 अनुक्रम 8, 88, 888, 8888... के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

मान लीजिए S = 8 + 88 + 888 + ... n पदों तक

= 8[1 + 11 + 111 + ... n पदों तक]

$$= \frac{8}{9}[9 + 99 + 999 + \ldots \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{8}{9}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{8}{9}[(10 + 100 + 1000 + \ldots \text{n पदों तक} - \text{n})]$$

$$= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right] \left[\because S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, a = 10, r = 10\right]$$

$$= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right]$$

$$= \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8}{9}n$$

प्रश्न 19 अनुक्रम 2, 4, 8, 16, 32, तथा 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ के संगत पदों के गुणनफल से बने अनुक्रम का योगफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अनुक्रम 2, 4, 8, 16, 32 तथा 128, 32, 8, 2,12 के संगत पदों के गुणनफल 2 × 128, 4 × 32, 8 × 8, 16 × 2, 32 × 12 या 256, 128, 64, 32, 16.

गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद, a = 256x

$$r = \frac{128}{256} = \frac{1}{2}, n = 5$$

$$\therefore \text{ योगफल} = \frac{256\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 256 \times 2\left(1 - \frac{1}{32}\right)$$

$$= 256 \times 2 \times \frac{31}{21}$$

$$= 16 \times 31 = 496$$

प्रश्न 20 दिखाइए कि अनुक्रम $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ तथा $A, AR, Ar^2, \ldots . AR^{n-1}$ के संगत पदों के गुणनफल से बना अनुक्रम गुणोत्तर श्रेणी होती है तथा सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर- %अनुक्रम $a, ar, ar^2, \ldots . ar^{n-1}$ तथा $A, AR, AR^2, \ldots AR^{n-1}$ के संगत पदों के गुणनफल से बना अनुक्रम

$aA, arAR, ar^2. AR^2, \ldots$

$aA, aArR, aAr^2 R^2, \ldots$

स्पष्ट है कि यह पद गुणोत्तर श्रेणी में है।

इसका पहला पद = aA

सार्व अनुपात $= \frac{aArR}{aA} = rR$

प्रश्न 21 ऐसे चार पद ज्ञात कीजिए जो गुणोत्तर श्रेणी में हो, जिसका तीसरा पद प्रथम पद से 9 अधिक हो, तथा दूसरा पद चौथे पद से 18 अधिक हो।

उत्तर- मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ है

तीसरा पद = ar^2, प्रथम पद = a

$\therefore ar^2 - a = 9 \ldots(1)$

दूसरा पद = ar, चौथा पद = ar^3

$ar - ar^3 = 18 \ldots(2)$

समी (1) को (2) से भाग देने पर,

$$\frac{a(r^2-1)}{a(r-r^3)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$2(r^2-1) = r - r^3$$

$$\therefore r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0$$

$$(r-1)(r+1)(r+2) = 0$$

$r = 1, -1, -2$ यदि $r = -2$

समीकरण (1) से, a(4 - 1) = 9

$$\therefore a = 3$$

∴ गुणोत्तर श्रेणी के चार पद 3, -6, 12, -24

प्रश्न 22 यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का p वाँ, q वाँ तथा r वाँ पद क्रमशः a, b तथा c हो, तो सिद्ध कीजिए कि $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$

उत्तर- मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद A और सार्व अनुपात R है

p वाँ पद = $AR^{p-1} = a$ ...(1)

q वाँ पद = $AR^{q-1} = b$ ...(2)

r वाँ पद = $AR^{r-1} = c$ ...(3)

समी. (1) की q – 7, समी (2) की r – p, समी (3) की p – q घात का प्रयोग करने पर,

$$a^{q-r}.\, b^{r-p}.\, c^{p-q} = (AR^{p-1})^{q-r}.\, (AR^{q-1})^{r-p}.\, (AR^{r-1})^{p-q}$$

$$= A^{q-r+r-p+p-q} R^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$$

$$= A^{0}.\, R^{p(q-r)-1(q-r)+q(r-p)-1(r-p)+r(p-q)-1(p-q)}$$

$$= R^{pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+rp-rq-p+q}$$

$= R^0 = 1$ इति सिद्धम्

प्रश्न 23 यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम तथा n वाँ पद a तथा b हैं, एवं P, n पदों का गुणनफल हो, तो सिद्ध कीजिए कि $P^2 = (ab)^n$

उत्तर- मान लो गुणोत्तर श्रेणी का सार्व अनुपात r है।

पहला पद = a, n वाँ पद = $ar^{n-1} = b$

∴ P = n पदों का गुणनफल

$= a.ar.ar^2.ar^3...ar^{n-1}$

$$= an.\, r1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$p^2 = a^{2n} r^{n(n-1)} \quad \ldots (1)$$

$$(ab)^n = (a \times ar^{n-1})^n$$

$$= (a^2 r^{n-1})^n = a^{2n}.\, r^{n(n-1)} \quad \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) से, $p^2 = (ab)^n$ इति सिध्दम्

प्रश्न 24 दिखाइए कि एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल तथा (n + 1) वें पद से (2n) वें पद तक के पदों के योगफल का अनुपात मे $\frac{1}{r^n}$ है।

उत्तर-

मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद a और सार्व अनुपात = r हों, तब

n पदों का योगफल $= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \ldots(1)$

$(n+1)$ वां पद $= ar^{n+1-1} = ar^n$

$\therefore ar^n + ar^{n+1} + ar^{n+2} + \ldots n$ पदों तक

$= \frac{ar^n(1-r^n)}{1-r} \quad \ldots(2)$

समीकरण (1) को (2) से भाग देने पर,

$$\frac{\text{n पदों का योगफल}}{\text{अगले n पदों का योगफल}}$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r} + \frac{ar^n(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \times \frac{1-r}{ar^n(1-r^n)} = \frac{1}{r^n}$$ इति सिद्धम्

प्रश्न 25 यदि a, b, c तथा d गुणोत्तर श्रेणी में हैं तो दिखाइए कि $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

उत्तर-

मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का सार्व अनुपात r है।

$\therefore b = ar, c = ar^2, d = ar^3$

बायाँ पक्ष $= (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$

$$= [a^2 + (ar^2 + ar^2)^2][(ar^2) + (ar^2)^2 + (ar^3)^2]$$

$$= a^4(1 + r^2 + r^4)(r^2 + r^4 + r^6)$$

$$= a^4r^2(1 + r^2 + r^4)(1 + r^2 + r^4)$$

$$= a^4r^2(1 + r^2 + r^4)^2$$

दायाँ पक्ष $= (ab + bc + cd)^2$

$$= [a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + ar^2 \cdot ar^3]^2$$

$$= a^4r^2(1 + r^2 + r^4)^2$$

अतः $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

प्रश्न 26 ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 3 और 81 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी बन जाए।

उत्तर- मान लीजिए G_1, G_2 ऐसी दो संख्याएँ हैं जिससे 3, G_1, G_2, 81 गुणोत्तर श्रेणी बनाते हैं। यह कुल चार पद हैं। यदि r सार्व अनुपात हो तो

$\therefore 81 = 3r^{4-1} = 3r^3$

$\Rightarrow r = 3$

$G_1 = 3r = 3$

$= 3 = 9$

$G_2 = 3r^2 = 3$

$= 3^2 = 27$

अतः संख्याएँ 9 और 27 हैं।

प्रश्न 27 n का मान ज्ञात कीजिए ताकि $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, a तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य हो।

उत्तर-

a और b के बीच गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{ab}$

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = \sqrt{ab}$$

$$\therefore a^{n+1} + b^{n+1} = \sqrt{ab}(a^n + b^n)$$

$$= a^{n+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} b^{n+\frac{1}{2}}$$

$$= \left(a^{n+1} - a^{n+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\right) - \left(a^{\frac{1}{2}} b^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+1}\right) = 0$$

$$= a^{n+\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) - b^{n+\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) = 0$$

$$= \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+\frac{1}{2}}\right) = 0$$

$$= a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \neq 0$$

$$\therefore a^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

$$= a^{n+\frac{1}{2}} = b^{n+\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0$$

$$\Rightarrow n + \frac{1}{2} = 0 \text{ या } n = -\frac{1}{2}$$

प्रश्न 28 दो संख्याओं का योगफल उनके गुणोत्तर माध्य का 6 गुना है तो दिखाइए कि संख्याएँ $(3+2\sqrt{2}):(3-2\sqrt{2})$ के अनुपात में हैं।

उत्तर-

मान लीजिए संख्याएँ a और b हों, तब

a और b का गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{ab}$

दिया है-

$$a + b = 6\sqrt{ab}$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 8\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = 8\sqrt{ab} \quad \ldots (1)$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = 4\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 4\sqrt{ab} \ldots (2)$$

समीकरण (1) को (2) से भाग देने पर,

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{8\sqrt{ab}}{4\sqrt{ab}} = 2$$

$$= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

वर्ग करने पर, $\frac{a}{b} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$

अतः $\frac{a}{b} = \frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$

प्रश्न 29 यदि A तथा G दो धनात्मक संख्याओं के बीच क्रमशः समांतर तथा गुणोत्तर माध्य हों, तो सिद्ध करो कि संख्याएँ $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ हैं।

उत्तर-

मान लीजिए संख्याएँ a और b हैं।

$$\frac{a+b}{2} = A \ \ldots (1)$$

$$\sqrt{ab} = G \ \ldots (2)$$

$$A^2 - G^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2$$

$$= \frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{4}$$

$$= \frac{a-b}{2} = \sqrt{A^2 - G^2} \ \ldots (3)$$

समीकरण (1) और (3) को जोड़ने पर

$$a = A + \sqrt{A^2 - G^2}$$

समीकरण (1) में से (3) को घटाने पर

$$b = A - \sqrt{A^2 - G^2}$$

$\therefore$ संख्याएँ a, b को $A \pm \sqrt{A^2 - G^2} = A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ से दर्शाया जा सकता है।

प्रश्न 30 किसी कल्चर में बैक्टीरिया की संख्या प्रत्येक घण्टे के पश्चात् दुगुनी हो जाती है। यदि प्रारंभ में उसमें 30 बैक्टीरिया उपस्थित थे, तो बैक्टीरिया की संख्या दूसरे, चौथे तथा n वें घण्टों बाद क्या होगी?

उत्तर- प्रारम्भ में बैक्टीरिया की संख्या $a = 30$

प्रत्येक घण्टे बाद बैक्टीरिया की संख्या दुगुनी हो जाती है।

सार्व अनुपात = 2

दूसरे घण्टे बाद बैक्टीरिया संख्या = $ar^2 = 30 \times 2^2 = 120$

चौथे घण्टे बाद बैक्टीरिया संख्या = $ar^4 = 30 \times 2^4 = 480$

n वें घण्टे बाद बैक्टीरिया संख्या = $ar^n = 30 \times 2^n$

प्रश्न 31 500 रुपए धनराशि 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर 10 वर्षों बाद क्या हो जाएगी, ज्ञात कीजिए?

उत्तर-

माना A मिश्रधन, P मूलधन, r% प्रतिवर्ष ब्याज की दर तथा n वर्ष का समय हो, तो

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

दिया है: $P = 500$, $r = 10\%$, $n = 10$ वर्ष

$$A = 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)$$

$$= 500 \times (1.1)^{10}$$

प्रश्न 32 यदि किसी द्विघात समीकरण के मूलों के समांतर माध्य एवं गुणोत्तर माध्य क्रमशः 8 तथा 5 हैं, तो द्विघातीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

मान लीजिए द्विघात समीकरण के मूल α और β हों, तब

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=8 \therefore \alpha+\beta=16$$

तथा $\sqrt{\alpha\beta}=5 \therefore \alpha\beta=25$

$\therefore$ द्विघातीय समीकरण.

$$\mathrm{x}^2-(\alpha+\beta)\mathrm{x}+\alpha\beta=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{x}^2-16\mathrm{x}+25=0$$

प्रश्नावली 9.4 (पृष्ठ संख्या 210)

प्रश्न 1 श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए-

1 × 2 + 2 × 3 + 3 × 4 + 4 × 5 + ...

उत्तर- 1 × 2 + 2 × 3 + 3 × 4 + 4 × 5 +......

प्रत्येक पद के दो गुणनखण्ड हैं।

पहले गुणनखंडों से बनी श्रेणी 1, 2, 3, 4......

∴ n वाँ पद = n

दूसरे गुणनखंडों से बनी श्रेणी 2, 3, 4, 5......

n वाँ पद = (n + 1)

$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ...$ का n वाँ पद $= n(n + 1) = n^2 + n$

$$\therefore \text{श्रेणी का योगफल} = \sum n^2 + \sum n$$

$$= \frac{n(n+)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3} + 1\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

प्रश्न 2 श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए-

$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + ...$

उत्तर- $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + ...$

पहले गुणनखंडों की श्रेणी 1, 2, 3, 4, ...n

n वाँ पद = n

दूसरे गुणनखंडों की श्रेणी 2, 3, 4, 5,....

n वाँ पद = (n + 1)

तीसरे गुणनखंडों की श्रेणी 3, 4, 5....

n वाँ पद = (n + 2)

$\therefore 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + ...$ का n वाँ पद

$= n(n + 1)(n + 2) = n(n^2 + 3n + 2)$

$= n^3 + 3n^2 + 2n$

$$\text{श्रेणी का योगफल} = \sum n^3 + 3\sum n^2 + 2\sum n$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}[n(n+1) + 2(2n+1) + 4]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}[n^2 + n + 4n + 2 + 4]$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

प्रश्न 3 श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए-

$3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + \ldots\ldots$

उत्तर- $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + \ldots\ldots$

पहले गुणनखंड 3, 5, 7,..... का n वाँ पद $= 3 + (n - 1)2 = 2n + 1$

दूसरे गुणनखंड $1^2, 2^2, 3^2$..... का n वाँ पद $= n^2$

$\therefore 3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + \ldots\ldots$ का n वाँ पद

$= (2n + 1)\, n^2 = 2n^3 + n^2$

$$\text{दी हुई श्रेणी का योगफल} = 2\sum n^3 + \sum n^2$$

$$= \frac{2n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}[3n(n+1) + 2n + 1]$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}(3n^2 + 5n + 1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(3n^2 + 5n + 1)$$

प्रश्न 4 श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए-

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots\ldots$$

उत्तर-

$$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \ldots$$

1, 2, 3,.... का n वां पद = n

2, 3, 4,.... का n वां पद = (n + 1)

$\therefore \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \ldots$ का n वां पद $= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

पदों को T_1, T_2, T_3 से निरूपित करते है और n = 1, 2, 3 रखने पर,

$$T_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$T_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$T_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$T_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

जोड़ने पर $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

प्रश्न 5 श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए-

$5^2 + 6^2 + 7^2 + \ldots + 20^2$

उत्तर-

n वें पद वाली इस श्रेणी में,

$(n + 4)^2 = n^2 + 8n + 16$

$$S_n = \sum T_n = \sum n^2 + 8\sum n + (16 + 16 + \ldots\ldots n \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 8 \times \frac{n(n+1)}{2} + 16n$$

$$= \frac{n}{6}[(n+1)(2n+1) + 24(n+1)96]$$

$$= \frac{n}{6}[2n^2 + 2n + n + 1 + 24n + 24 + 96]$$

$$= \frac{n}{6}[2n^2 + 27n + 121]$$

यहाँ n = 16 रखने पर,

$$= \frac{16}{6}[2 \times 16^2 + 27 \times 16 + 121]$$

$$= \frac{8}{3}(512 + 432 + 121)$$

$$= \frac{8}{3} \times 1065$$

$$= 2840$$

प्रश्न 6 श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए-

3 × 8 + 6 × 11 + 9 × 14 +....

उत्तर- 3 × 8 + 6 × 11 + 9 × 14 +....

3, 6, 9 का n वाँ पद = 3n

8, 11, 14,.....का n वाँ पद = 8 + (n - 1)3 = 3n + 5

$\therefore$ 3 × 8 + 6 × 11 + 9 × 14 +......का nवाँ पद = 3n(3n + 5)

= $3(3n^2 + 5n)$

दी हुई श्रेणी के n पदों का योगफल

$$= 3(3\sum n^2 + 5\sum n)$$

$$= 3\left[\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{5n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}[3(2n+1) + 15]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(6n+18)$$

$$= 3n(n+1)(n+3)$$

प्रश्न 7 श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए-

$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + ...$

उत्तर-

$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + ...$

n वां पद $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$= \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$= \frac{1}{6}[2\sum n^3 + 3\sum n^2 + \sum n]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{2n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{12}[n^2(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1) + n(n+1)]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[n(n+1) + (2n+1) + 1]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[n^2 + 3n + 2]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

प्रश्न 8 श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसका n वाँ पद दिया है-

n(n + 1)(n + 4)

उत्तर-

$T^n = n(n + 1)(n + 4) = n(n^2 + 5n + 4)$

$= n^3 + 5n^2 + 4n$

दी हुई श्रेणी के n पदों का योग $= \sum n^3 + 5\sum n^2 + 4\sum n$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{5n(n+1)(n2+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n(n+1) + 10(2n+1) + 24]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n^2 + 3n + 20n + 10 + 24]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n^2 + 23n + 34]$$

प्रश्न 9 श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसका n वाँ पद दिया है-

$n^2 + 2^n$

उत्तर-

$T_n = n^2 + 2^n$

दी हुई श्रेणी के n पदों का योग

$$= \sum n^2 + \sum 2^n$$

$$= \sum n^2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2(2^n - 1)$$

प्रश्न 10 श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसका n वाँ पद दिया है-

$(2n - 1)^2$

उत्तर- $T^n = (2n - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$

दी हुई श्रेणी के n पदों का योग

$$= 4\sum n^2 - 4\sum n + n$$

$$= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n}{3}[4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3]$$

$$= \frac{n}{3}[4n^2 - 1]$$

$$= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 211)

प्रश्न 1 दर्शाइए कि किसी समांतर श्रेणी के (m + n) वें तथा (m - n) पदों का योग m वें पद का दुगुना है।

उत्तर-

मान लीजिए समांतर श्रेणी का पहला पद a और सार्व अंतर d है।

$$(m+n) \text{ वां पद} = T_{m+n} = a + (m+n-1)d$$

$$(m-n) \text{ वां पद} = T_{m-n} = a + (m-n-1)d$$

$$T_{m+n} + T_{m-n} = 2a + (2m-2)d$$

$$= 2[a + (m-1)d]$$

$$= 2 \times T_m = 2 \times m \text{ वां पद}$$

प्रश्न 2 यदि किसी समांतर श्रेणी की तीन संख्याओं का योग 24 है तथा उनका गुणनफल 440 है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान लीजिए समांतर श्रेणी की तीन संख्याएँ a - d, a और a + d हैं।

तीनों संख्याओं का योग = (a - d) + a + (a + d) = 24

∴ 3a = 24 या a = 8

तीन संख्याओं का गुणनफल = (a - d) × a × (a + a)

$= a(a^2 - d^2)$

$= 8(64 - d^2)$

या $8(64 - d^2) = 440$

$64 - d^2 = 55$

$d^2 = 64 - 55 = 9$ या d = 3

अतः अभीष्ट संख्याएँ 5, 8, 11

प्रश्न 3 माना कि किसी समांतर श्रेणी के n, 2n तथा 3n पदों का योगफल क्रमशः S_1, S_2 तथा S_3 हैं, तो दिखाइए कि $S_3 = 3(S_2 - S_1)$

उत्तर-

मान लीजिए समांतर श्रेणी का पहला पद a और सार्व अंतर d है।

n पदों का योगफल $= S_1 = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

2n पदों का योगफल $= S_2 = \frac{2n}{2}[2a + (2n - 1)d]$

2n पदों का योगफल $= S_3 = \frac{3n}{2}[2a + (3n - 1)d]$

$$s^2 - S = n[2a + (2n - 1)d] - \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[\{4a + (4n - 2)d\} - \{2a + (n - 1)d\}]$$

$$= \frac{n}{2}[2a + (3n - 1)d]$$

$$\therefore (S_2 - S\_1) = \frac{3n}{2}[2a + (3n - 1)d] = S_3$$

अतः $S_3 = 3(S_2 - S_1)$

प्रश्न 4 200 और 400 के मध्य आने वाली उन सभी संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 7 से विभाजित हों।

उत्तर- 200 से 400 के मध्य आने वाली संख्याएँ 203, 210, 217,........, 399

मान लीजिए 399, n वाँ पद है।

∴ 399 = a + (n – 1)7

= 203 + 7 (n – 1)

या 399 – 203 = 196 = 7(n – 1)

$$\therefore n - 1 = \frac{196}{7} = 28 \text{ या } n = 29$$

$$\therefore 203 + 210 + 217 + \ldots\ldots + 399$$

$$= \frac{29}{2}[203 + 399] \; [\because S = \frac{n}{2}(a + l)]$$

$$= \frac{29}{2}(602) = 29 \times 301$$

$$= 8729$$

प्रश्न 5 1 से 100 तक आने वाले उन सभी पूर्णांकों का योगफल ज्ञात कीजिए जो 2 या 5 से विभाजित हों।

उत्तर- 2 से विभाजित होने वाले पूर्णांक 2, 4, 6,...., 100

इनकी कुल संख्या = 50

5 से विभाजित होने वाले पूर्णांक 5, 10, 15, 20,......100

इनकी कुल संख्या = 20

2 और 5 दोनों से विभाजित होने वाले पूर्णांक 10, 20, 30,...., 100

इनकी कुल संख्या = 10

1 से 100 तक आने वाले पूर्णांक जो 2 या 5 से विभाजित हों, तब

= (2 + 4 + 6 + ...50 पदों तक) + (5 + 10 + 15 +...... 20 पदों तक) - (10 + 20 + 30 +......10 पदों तक)

$$= \frac{50}{2}[4+(50-1)2]+\frac{20}{2}[10+(20-1)5]$$
$$-\frac{10}{2}[20+(10-1)10]$$
$$= \frac{50\times102}{2}+10\times105-5\times110$$
$$= 2250+1050-550$$
$$= 3050$$

प्रश्न 6 दो अंकों की उन सभी संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए, जिनको 4 से विभाजित करने पर शेषफल 1 हो।

उत्तर- दो अंको की वे संख्याएँ जो 4 से विभाजित करने पर 1 शेष रहता है 13, 17, 21,....., 97

मान लीजिए n पद हों, तब n वाँ पद,

$$97 = 13 + (n - 1)4$$

$$84 = (n - 1) \times 4$$

$$\therefore n = 22$$

$$\therefore 13 + 17 + 21 + \cdots + 97 = \frac{22}{2}[26 + (22 - 1)4]$$

$$= 11 \times (26 + 84)$$

$$= 11 \times 110$$

$$= 1210$$

प्रश्न 7 सभी x, y ∈ N के लिए f(x + y) = f(x)f(y) को संतुष्ट करता हुआ f एक ऐसा फलन है कि f(1) = 3 एवं

$$\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$$

तो n का मान ज्ञात करो।

उत्तर- f(1) = 3, f(2) = f(1 + 1) = f(1)f(1) = 3 × 3 = 9

f(3) = f(1 + 2) = f(1)f(2) = 3 × 9 = 27

f(4) = f(1 + 3) = f(1)(3) = 3 × 27 = 81

इस प्रकार f(1) + f(2) + f(3) +......, n पदों तक

= 3 + 9 + 27 + 81 + ..., n पदों तक = 120

$$\Rightarrow \frac{3(3n-1)}{3-1} = 120$$

$$\Rightarrow (3n-1) = 120 \times 2 = 240$$

$$\Rightarrow 3n - 1 = 2403 = 80$$

$$\Rightarrow 3n = 81 = 34$$

अतः $n = 4$

प्रश्न 8 गुणोत्तर श्रेणी के कुछ पदों का योग 315 है, उसका प्रथम पद तथा सार्व अनुपात क्रमशः 5 और 2 हैं। अंतिम पद तथा पदों की संख्या ज्ञात करो।

उत्तर-

दी हुई गुणोत्तर श्रेणी

5 + 10 + 20 + 40 +.......

n पदों का योग $= \frac{5(2n-1)}{2-1} = 315$

$$\therefore 2n - 1 = 63$$

$$2n = 64 = 26$$

$$\Rightarrow n = 6$$

6 वाँ पद $= 5 \times 2^{6-1}$

$$= 5 \times 2^5$$

$$= 5 \times 32 = 160$$

प्रश्न 9 किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 1 है। तीसरे एवं पाँचवें पदों का योग 90 हो तो गुणोत्तर श्रेणी का सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का सार्व अनुपात r है।

तीसरा पद = $ar^2 = 1.r^2 = r^2$

पाँचवाँ पद = $ar^4 = r^4$

तीसरे और पाँचवें पद का योग = $r^2 + r^4 = 90$

$r^4 + r^2 - 90 = 0$

$(r^2 + 10)(r^2 - 9) = 0$

$\therefore r^2 = -10$ मान्य नहीं है।

$\therefore r^2 - 9 = 0, r^2 = 9$

$\therefore r = \pm 3$

प्रश्न 10 किसी गुणोत्तर श्रेणी के तीन पदों का योग 56 है। यदि हम क्रम से इन संख्याओं में से 1, 7, 21 घटाएँ तो हमें एक समांतर श्रेणी प्राप्त होती है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी की तीन संख्याएँ a, ar, ar^2 हैं।

तीनों पदों का योग = $a + ar + ar^2 = 56$ .....(1)

इन संख्याओं में से 1, 7, 21 घटाने पर संख्याएँ

$ar - 1, ar - 7, ar^2 - 21$ समांतर श्रेणी में हैं।

$\therefore 2(ar - 7) = (a - 1) + (ar^2 - 21)$

$2ar - 14 = ar^2 + a - 22$

$ar^2 - 2ar + a = 22 - 14 = 8$ ....(2)

समी. (1) को (2) से भाग देने पर

$$= \frac{a(1+r+r^2)}{a(1-2r+r^2)} = \frac{56}{8} = 7$$

$$7(1-2r+r^2) = 1+r+r^2$$

$$6r^2 - 15r + 6 = 0$$

$$\therefore 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$(r-2)(2r-1) = 0$ या $r = 2, \frac{1}{2}$

समी (1) में r = 2 रखने पर,

$a(1+2+4) = 56$ या $a = \frac{56}{7} = 8$

इस प्रकार तीन संख्याएँ हैं- 8, 16, 32.

पुनः समी (1) में $r = \frac{1}{2}$ रखने से,

$$a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 56$$

$$\therefore a = \frac{56\times 4}{7} = 3$$

∴ तीन संख्याएँ 32, 16, 8.

अतः अभीष्ट संख्याएं 8, 16, 32 हैं।

प्रश्न 11 किसी गुणोत्तर श्रेणी के पदों की संख्या सम है। यदि उसके सभी पदों का योगफल, विषम स्थान पर रखे पदों के योगफल का 5 गुना है, तो सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद = a सार्व अनुपात = r और पदों की संख्या = 2n

सभी पदों का योगफल $= \frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}$

विषम स्थानों पर रखे पद a, ar^2, ar^4, ... n पदों तक

इनका योग = $a + ar^2 + ar^2 + ...n$ पदों तक

$= \frac{a[(r^2)^n - 1]}{r^2 - 1} = \frac{a(r^{2n} - 1)}{r^2 - 1}$

दिया है-

गुणोत्तर श्रेणी के 2n पदों का योगफल = 5 × [विषम स्थानों पर स्थित पदों का योगफल]

$$\Rightarrow \frac{a(r^{2n}-1)}{r-1} = 5 \times \frac{a[(r^2)^n-1]}{r^2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a(r^{2n}-1)}{r-1} = \frac{5a(r^{2n}-1)}{r^2-1}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{5}{r+1}$$

$$\Rightarrow r + 1 = 5$$

$$r = 4$$

प्रश्न 12 एक समांतर श्रेणी के प्रथम चार पदों का योगफल 56 है। अंतिम चार पदों का योगफल 112 है। यदि इसका प्रथम पद 11 है, तो पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान लीजिए समांतर श्रेणी

$a + (a + d) + (a + 2a) + ...+ l$ जबकि l अंतिम पद n वाँ पद है।

प्रथम 4 पदों का योगफल $= \frac{4}{2}[2a + (4-1)d]$

= 2[22 + 3d] [∵ a = 11]

दिया है-

2[22 + 3d) = 56

⇒ 3d + 22 = 28 या d = 2

अंतिम पद = a + (n - 1)d = 11 + (n - 1)2

= 2n + 9

अंतिम चार पद 2n + 9, 2n + 7, 2n + 5, 2n + 3

इनका योगफल $= \frac{4}{2}[2(2n+9)+(4-1)(-2)]$

= 2[4n + 18 - 6]

= 2[4n + 12]

दिया है- 2(4n + 12) = 112

∴ 4n + 12 = 56

4n = 56 - 12 = 44

∴ n = 11

प्रश्न 13 यदि $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx} (x \neq 0)$ हो, तो दिखाइए कि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में है।

उत्तर-

हम जानते है कि यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तब $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

इस नियम के अनुसार, यदि $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx}$

तो, $\frac{(a+bx)+(a-bx)}{(a+bx)-(a-bx)} = \frac{(b+cx)+(b-cx)}{(b+cx)-(b-cx)}$

$= \frac{(c+dx)+(c-dx)}{(c+dx)-(c-dx)}$

$\frac{2a}{2bx} = \frac{2b}{2cx} = \frac{2c}{2dx}$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

अतः a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में है। इति सिद्धम्

प्रश्न 14 किसी गुणोत्तर श्रेणी में S,n पदों का योग, P उनका गुणनफल तथा R उनके व्युत्क्रमों का योग हो तो सिद्ध कीजिए कि $P^2R^n = S^n$.

उत्तर-

मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

इन n पदों का गुणनफल, $P = a.ar.ar^2 \ldots ar^{n-1}$

$= a^n.r^{1+2+\ldots+(n-1}$

$= a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$\therefore p^2 = a^{2n} r^{n(n-1)}$

$R = \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + \cdots + \frac{1}{ar^{n-1}}$

$$= \frac{\frac{1}{a}\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{n}-1\right]}{\frac{1}{r}-1}$$

$$= \frac{(1-r^{n})r}{ar^{n}(1-r)}$$

$$\therefore R^{n} = \frac{(1-r^{n})^{n}}{a^{n}r^{n(n-1)}(1-r)^{n}}$$

बायाँ पक्ष- $P^{2}R^{n} = a^{2n}r^{n(n-1)}\frac{(1-r^{n})^{n}}{a^{n}r^{n(n-1)}(1-r)^{n}}$

$$= \frac{a^{n}(1-r^{n})^{n}}{(1-r)^{n}} = S^{n}$$

जबकि $S = a + ar + ar^{2} + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^{n})}{1-r}$

अतः $P^{2}R^{n} = S^{n}$

प्रश्न 15 किसी समांतर श्रेणी का p वाँ, q वाँ, r वाँ पद क्रमशः a, b, c हैं, तो सिद्ध कीजिए

(q - r)a + (r - p)b + (p - q) c = 0

उत्तर- मान लीजिए समांतर श्रेणी

A + (A + d) + (A + 2d) +.... है।

p वाँ पद = A + (p – 1)d = a ....(1)

q वाँ पद = A + (q - 1)d = b ....(2)

r वाँ पद = A + (r - 1)d = c .....(3)

समी. (2) में से समी (3) को, समी. (3) में से समी (1) को, समी (1) में से समी. (2) को घटाने पर

(q - r)d = b - c ....(4)

(r - p)d = c - a ...(5)

(p - q)d = a - b ....(6)

समीकरण (4), (5) तथा (6) को क्रमशः a, b तथा c से गुणा करके जोड़ने पर,

a(q - r)d + b(r - p)d + c(p - d)d

= a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)

= ab - ac + bc - ba + ca - bc

= 0

दोनों पक्षों में d से भाग देने पर,

(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0

प्रश्न 16 यदि $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ समांतर श्रेणी में हैं, तो सिद्ध करो कि a, b, c समांतर श्रेणी में हैं।

उत्तर-

$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ समान्तर श्रेणी में है,

या $a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ भी समान्तर श्रेणी में है।

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ से भाग देने पर,

a, b, c समान्तर श्रेणी में है। इति सिद्धम्

प्रश्न 17 यदि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $(a^n + b^n), (b^n + c^n), (c^n + d^n)$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

उत्तर-

a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

मान लीजिए सार्व अनुपात r है।

$$\therefore b = ar, c = ar^2, d = ar^3$$

अब $a^n + b^n = a^n + (ar)^n = a^n(1 + r^n)$

$$b^n + c^n = (ar)^n + (ar^2)^n = a^n r^n + a^n r^{2n}$$

$$= a^n r^n (1 + r^n)$$

$$c^n + a^n = (ar^2)^n + (ar^3)^n = a^n r^{2n} + a^n r^{3n}$$

$$= a^n r^{2n} (1 + r^n)$$

अब $a^n(1 + r^n), a^n(1 + r^n)r^n, a^n(1 + r^n)r^{2n}$

गुणोत्तर श्रेणी हेतु-

$$[a^n(1 + r^n)a^n]^2 = a^{2n}(1 + r^n)^2 r^{2n}$$

तथा $[a^n(1 + r^n)][a^n(1 + r^n)r^{2n}]$

$$= a^n a^n (1 + r^n)^2 r^{2n}$$

$$= a^{2n}(1 + r^n)^2 r^{2n}$$

अतः $(a^n + b^n), (b^n + c^n), (c^n + d^n)$ गुणोत्तर श्रेणी में है।

प्रश्न 18 यदि $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल a तथा b हैं तथा $x^2 - 12x + q = 0$ के मूल c तथा d हैं, जहाँ a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी के रूप में है। सिद्ध कीजिए कि

$(q + p) : (q - p) = 17 : 15.$

उत्तर- यदि समीकरण $Ax^2 + Bx + C = 0$ के मूल α , B हैं, तो

$\alpha + \beta = -BA, \alpha\beta = CA$

दिया है कि $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल a, b हैं

$\therefore a + b = 3, ab = p$ .....(1)

इसी प्रकार $x^2 - 12x + q = 0$ के मूल c, d हैं

$\therefore c + d = 12. cd = q$ .....(2)

अब a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं, जिसका मान लीजिए r सार्व अनुपात है।

$\therefore b = ar, c = ar^2, d = ar^3$

$a + b = 3, a + ar = 3$ ...(3)

$c + d = 12$ या $ar^2 + ar^3 = 12$ ...(4)

समी (3) को (4) से भाग देने पर,

$$\frac{a(1+r)}{ar^2(1+r)} = \frac{3}{12} \text{ या } \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4}$$

या $r = \pm 2$

r का मान (3) में रखने पर

$a(1+r) = 3$ या $a(1+2) = 3$

$\therefore a = 1$

$\therefore b = a\,r = 2, c = a\,r^2 = 4, d = a\,r^3 = 8$

अब $\frac{q+p}{q-p} = \frac{cd+ab}{cd-ab} = \frac{(ar^2)(ar^3)+a.ar}{(ar^2)(ar^3)-a.ar}$

$$= \frac{a^2r(1+r^4)}{a^r(r^4-1)} = \frac{r^4+1}{r^4-1}$$

$$= \frac{2^4+1}{2^4-1}$$

$$= \frac{16+1}{16-1} = \frac{17}{15}$$

प्रश्न 19 दो धनात्मक संख्याओं a और b के बीच समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य का अनुपात m : n है। दर्शाइए कि

$a:b = \left(m+\sqrt{m^2-n^2}\right):\left(m-\sqrt{m^2-n^2}\right)$

उत्तर-

a और b के बीच समांतर माध्य $= \frac{a+b}{2}$

a और b के बीच गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{ab}$

दोनों माध्यों का अनुपात m : n

अर्थात् $\dfrac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{ab}} = \dfrac{m}{n}$

$$\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{m+n}{m-n}$$

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{m+n}{m-n}$$

वर्गमूल लेकर,

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}$$

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$$

$$\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$$

वर्ग करते हुए,

$$\frac{a}{b} = \frac{(\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n})^2}{(\sqrt{m-n}-\sqrt{m-n})^2}$$

$$= \frac{(m+n)+(m-n)+2\sqrt{m^2-n^2}}{(m+n)+(m-n)-2\sqrt{m^2-n^2}}$$

$$= \frac{2m+2\sqrt{m^2-n^2}}{2m-2\sqrt{m^2-n^2}} = \frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}$$

अतः $a : b = m + \sqrt{m^2 - n^2} : m - \sqrt{m^2 - n^2}$

प्रश्न 20 यदि a, b, c समांतर श्रेणी में हैं; b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं तथा $\frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ समांतर श्रेणी में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि a, c, e गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

उत्तर-

a, b, c समांतर श्रेणी में हैं $\therefore \frac{a+c}{2} = b \quad \ldots (1)$

b, c, d, गुणोत्तर श्रेणी में हैं, $\therefore bd = c^2 \quad \ldots (2)$

$\frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ समांतर श्रेणी में हैं, $\therefore \frac{2}{d} = \frac{1}{c} + \frac{1}{e}$

$$\Rightarrow d = \frac{2ce}{c+e} \quad \ldots (3)$$

b और d का मान (1) और (3) से लेकर (2) में रखने पर

$$c^2 = \frac{a+c}{2} \times \frac{2ce}{c+e} = \frac{ce(a+c)}{c+e}$$

$$c = \frac{e(a+c)}{c+e}$$

$$c(c+e) = ea + ec$$

$$c^2 + ce = ea + ec \Rightarrow c^2 = ea$$

अतः a, c, e गुणोत्तर श्रेणी में है। इति सिद्धम्

प्रश्न 21 श्रेणी के n पद का योग ज्ञात कीजिए-

(i) 5 + 55 + 555+ ......

(ii) 0.6 + 0.66 + 0.666 + ...

उत्तर-

(i)

S = 5 + 55 + 555 +.....n पदों तक

$$= \frac{5}{9}[9 + 99 + 999 + \ldots \text{ n पदों तक}]$$

$$= \frac{5}{9}[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots \text{ n पदों तक}]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right]$$

$$= \frac{50}{81}[10^n - 1] - \frac{5n}{9}$$

(ii)

$$= \frac{6}{9}[0.9 + 0.99 + 0.999 + \ldots n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{2}{3}[(1-0.1) + (1-0.01) + (1-0.001) + \ldots n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{2}{3}[n - \{0.1 + (0.1)^2 + (0.1)^3 + \ldots\} n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{2}{3}\left[n - \frac{0.1\{1-(0.1)^n\}}{1-01}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[n - \frac{1}{9}\{1-(0.1)^n\}\right]$$

$$= \frac{2n}{3} - \frac{2}{27}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$= \frac{2n}{3} - \frac{2}{27}(1 - 10^{-n})$$

प्रश्न 22 श्रेणी का 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए-

2 × 4 + 4 × 6 + 6 × 8 +.....+ n पदों तक

उत्तर- 2, 4, 6,..... का 20 वाँ पद = 2n = 2 × 20 = 40

4, 6, 8..... का 20 वाँ पद = 4 + 19 × 2 = 4 + 38 = 42

2 × 4 + 4 × 6 + 6 × 8+...... का 20 वाँ पद

= 40 × 42

= 1680

प्रश्न 23 श्रेणी 3 + 7 + 13 + 21 + 31 +..... के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

मान लीजिए

$$T_n = 3 + \frac{n-1}{2}[2 \times 4 + (n-1)2]$$

$$= 3 + \frac{n-1}{2}[8 + 2n - 4]$$

$$T_n = 3 + \frac{n-1}{2}[2n + 4]$$

$$= (n-1)(n+2) + 3$$

$$= n^2 + n - 2 + 3$$

$$= n^2 + n + 1$$

$\therefore$ दी हुई श्रेणी का योग

$$= \sum n^2 + \sum n + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n}{6}[(n+1)(2n+1)+3(n+1)+6]$$

$$= \frac{n}{6}[2n^2+6n+10]$$

$$= \frac{n}{3}[n^2+3n+5]$$

प्रश्न 24 यदि S_1, S_2, S_3, क्रमशः प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग, उनके वर्गों का योग तथा घनों का योग है, तो सिद्ध कीजिए कि $9S_2^2 = S_3(1+8S_1)$

उत्तर-

S_1 = n प्राकृत संख्याओं का योग

= 1 + 2 + 3 +.....n पदों तक

$$= \frac{n(n+1)}{2} \quad \ldots(1)$$

S_2 = n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots.. + n^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ldots(2)$$

S_3 = n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग

$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots.. + n^3$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

दायाँ पक्ष $= S_3(1+8S_1)$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\left[1+8\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}[1+4n^2+4n]$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{4}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}\times 9$$

$$=S_2^2\times 9=9S_2^2=\text{बायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 25 निम्नलिखित श्रेणियों के n पदों का योग ज्ञात कीजिए-

$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots\ldots$$

उत्तर-

अंश में दी हुई संख्याएँ 1^3, 1^3+2^3, $1^3+2^3+3^3$, ...

n वाँ पद = $1^3+2^3+3^3+\ldots..+n^3$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

हर में दी हुई संख्याएँ 1, (1 + 3), (1 + 3 + 5), ...

n वाँ पद = 1 + 3 + 5 +......n पदों तक

$$=\frac{n}{2}[2+(n-1)2]=n^2$$

$\therefore$ दी हुए श्रेणी का n वाँ पद $=\dfrac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{n^2}=\dfrac{(n+1)^2}{4}$,

$$= \frac{n^2+2n+1}{4}$$

$\therefore$ दी हुए श्रेणी के n वाँ पदो का योग $= \frac{1}{4}\left(\sum n^2 + 2\sum n + 1\right)$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

प्रश्न 26 दर्शाइए कि $= \frac{1 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + \ldots + n \times (n+1)^2}{1^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + \ldots + n^2 \times (n+1)} = \frac{3n+5}{3n+1}$

उत्तर-

अंश का n वां पद $= n(n+1)^2 = n(n^2+2n+1)$

$$= n^3 + 2n^2 + n$$

अंश का n पदो का योग $S_1 = \sum n^3 + 2\sum n^2 + \sum n$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n(n+1) + 4(2n+1) + 6]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n^2 + 3n + 8n + 4 + 6]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n^2 + 11n + 10]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$$

हर का n वां पद $= n^2(n+1) = n^3 + n^2$

$$= \frac{n}{24}[(n+1)(2n+1) + 6(n+1) + 6]$$

$$= \frac{n}{24}[(2n^2+3n+1) + (6n+6) + 6]$$

$$= \frac{n}{24}(2n^2+9n+13)$$

हर के n पदों का योग $S_2 = \sum n^3 + \sum n^2$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n(n+1) + 2(2n+1)]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n^2 + 3n + 4n + 2]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n^2 + 7n + 2]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}}{\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}}$$

$$= \frac{3n+5}{3n+1}$$

प्रश्न 27 कोई किसान एक पुराने ट्रैक्टर को 12000 रू. में खरीदता है। वह 6000 रु. नकद भुगतान करता है और शेष राशि को 500 रू की वार्षिक किस्त के अतिरिक्त उस धन पर जिसका भुगतान न किया गया हो 12% वार्षिक ब्याज भी देता है। किसान को ट्रैक्टर की कुल कितनी कीमत देनी पड़ेगी?

उत्तर- पुराने ट्रैक्टर का मूल्य = 12000 रूपए

नकद भुगतान = 6000 रूपए

शेष = 12000 - 6000 = 6000 रूपए

एक किस्त का भुगतान = 500 रूपए

कुल किस्तें $= \frac{6000}{12} = 12$

P मूलधन पर 12% प्रतिवर्ष की दर से 1 वर्ष का ब्याज

$= \frac{p\times12\times1}{100} = \frac{3}{25}p$

एक वर्ष बाद ब्याज $= \frac{3}{25}p = \frac{3}{25} \times 6000$

एक वर्ष बाद राशि का भुगतान = 5000 + ब्याज

$= 500 + \frac{3}{25} \times 6000$

दो वर्ष बाद ब्याज $= \frac{3}{25} \times 5500$ रूपए क़िस्त

2 वर्ष बाद भुगतान $= \left(500 + \frac{3}{25} \times 5500\right)$ रूपए

12 वर्ष बाद क़िस्त $= 12 \times 500 = 6000$

ब्याज $= \frac{3}{25}(6000 + 5500 + 5000 + \ldots 12$ पदों तक$)$

$= \frac{3}{25} \times \frac{12}{2}[12000 - (12-1) \times 500]$

$= \frac{3}{25} \times \frac{12}{2}[12000 - 5500]$

$= \frac{3}{25} \times \frac{12}{2} \times 6500$

$= 4680$ रूपए

कुल भुगतान = (12000 + 4680) रूपए

= 16680 रूपए।

प्रश्न 28 शमशाद अली 22000 रुपये में एक स्कूटर खरीदता है। वह 4000 रुपये नकद देता है तथा शेष राशि को 1000 रुपये वार्षिक किश्त के अतिरिक्त उस धन पर जिसका भुगतान न किया गया हो 10% वार्षिक ब्याज भी देता है। उसे स्कूटर के लिए कुल कितनी राशि चुकानी पड़ेगी?

उत्तर-

स्कूटर की कीमत = 22000 रू

नकद भुगतान = 4000 रू

शेष = 22000 - 4000 = 18000 रू

एक किस्त की राशि = 1000 रू

$\therefore$ कुल किस्तें $= \frac{18000}{1000} = 18$

P मूलधन पर एक वर्ष का 10% प्रति वर्ष की दर से ब्याज

$$= \frac{p \times 100 \times 1}{100} = \frac{p}{10}$$

किस्त देने के बाद शेष राशि जिस पर एक वर्ष का ब्याज लगना है,

$$= 18000, 17000, 16000, \ldots, 1000$$

कुल ब्याज की राशि

$$= \frac{1}{10}(18000 + 17000 + 16000 + \cdots + 18 \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{18}{2}[2 \times 18000 - (18-1) \times 1000]$$

$$= \frac{9}{10}[36000 - 17000]$$

$$= \frac{9 \times 19000}{10} = 17100 \text{ रूपए}$$

कुल किश्तों की राशि = 18000 रूपए

नकद = 4000 रूपए

कुल भुगतान = (18000 + 17000) + 4000 रूपए

= 39,100 रूपए।

प्रश्न 29 एक व्यक्ति अपने चार मित्रों को पत्र लिखता है। वह प्रत्येक को उसकी नकल करके चार दूसरे व्यक्तियों को भेजने का निर्देश देता है, तथा उनसे यह भी करने को कहता है कि प्रत्येक पत्र प्राप्त करने वाला व्यक्ति इस श्रृंखला को जारी रखे। यह कल्पना करके कि श्रृंखला न टूटे तो 8 वें पत्रों के समूह भेजे जाने तक कितना डाक खर्च होगा जबकि एक पत्र का डाक खर्च 50 पैसे है।

उत्तर- पहला व्यक्ति चार पत्र लिखता है। पत्र प्राप्त करने वाले 4 व्यक्ति फिर चार-चार पत्र लिखते हैं। इस प्रकार श्रृंखला बढ़ती चली जाती है।

हर अवसर पर पत्रों की संख्याएँ 4, 16, 24...... 8 पदों तक

कुल पत्रों की संख्या = 4 + 16 + 64 + ...8 पदों तक

$$= \frac{4(4^8-1)}{4-1} = \frac{4}{3}(65536-1)$$

$$= \frac{4}{3} \times 65535 = 87380$$

एक पत्र का डाक खर्च = 50 पैसे $= \frac{1}{2}$ रूपए

कुल डाक खर्च $= 87380 \times \frac{1}{2}$

$= 43690$ रूपए

प्रश्न 30 एक आदमी ने एक बैंक में 10000 रूपये 5% वार्षिक साधारण ब्याज पर जमा किया। जब से रकम बैंक में जमा की गई तब से, 15 वें वर्ष में उसके खाते में कितनी रकम हो गई तथा 20 वर्षों बाद कुल कितनी रकम हो गई, ज्ञात कीजिए।

उत्तर- बैंक में जमा की गई राशि = 10000 रूपए

ब्याज की दर = 5% प्रति वर्ष

एक वर्ष बाद ब्याज $= \frac{10000 \times 5 \times 1}{100} = 500$ रूपए

इस प्रकार हर वर्ष उसे 500 रू ब्याज के मिलेंगे।

1 वर्ष, 2 वर्ष, 3 वर्ष,.......बाद ब्याज की राशि

500, 1000, 1500, ...

15 वें वर्ष में ब्याज = (n - 1) × 500 = (15 - 1) × 500

= 14 × 500

= 7000 रूपए

मूलधन = 10000 रूपए

उसके खाते में 15 वें वर्ष में = 10000 + 7000

= 17000 रूपए होंगें

20 वर्ष का ब्याज = 20 × 500

= 10000 रूपए

मूलधन = 10000 रूपए

20 वर्ष बाद बैंक में कुल जमा राशि = 10000 + 10000 = 20000 रूपए।

प्रश्न 31 एक निर्माता घोषित करता है कि उसकी मशीन जिसका मूल्य 15625 रूपये है, हर वर्ष 20% की दर से उसका अवमूल्यन होता है। 5 वर्ष के बाद मशीन का अनुमानित मूल्य ज्ञात कीजिए।

उत्तर- यदि किसी मशीन का r% की दर से अवमूल्यन हो रहा है n वर्ष बाद मशीन का मूल्य

$p\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$ होगा।

प्रारभ में मशीन का मूल्य P रूपये है।

यहां पर P = 15625, r = 20% प्रति वर्ष, n = 5 वर्ष

∴ उस मशीन का 5 वर्ष बाद का मूल्य

$$=15625\left(1-\frac{20}{100}\right)^5$$

$$=15625\left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$=15625\times(.8)^5=5120 \text{ रूपए।}$$

प्रश्न 32 किसी कार्य को कुछ दिनों में पूरा करने के लिए 150 कर्मचारी लगाए गए। दूसरे दिन 4 कर्मचारियों ने काम छोड़ दिया, तीसरे दिन चार और कर्मचारियों ने काम छोड़ दिया तथा इस प्रकार अन्य। अब कार्य पूरा करने में 8 दिन अधिक लगते हैं, तो दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिनमें कार्य पूरा किया गया।

उत्तर-

150 कर्मचारी उस कार्य को n दिनों में समाप्त करते हैं

150 कर्मचारियों का 1 दिन का काम $=\frac{1}{n}$

1 कर्मचारी का 1 दिन का काम $=\frac{1}{150n}$

पहले दिन 150 कर्मचारी 1 दिन में $\frac{150}{150n}$ कार्य करते हैं

दूसरे दिन 146 कर्मचारी 1 दिन में $\frac{146}{150n}$ कार्य करते हैं

तीसरे दिन 142 कर्मचारी 1 दिन में $\frac{142}{150n}$ कार्य करते हैं

वह काम n + 8 दिन में पूरा हुआ

$\therefore \frac{150}{150n} + \frac{146}{150n} + \frac{142}{150n} + \ldots (n+8)$ पदों तक = 1

या $\frac{1}{150n}[150 + 146 + 142 + \ldots (n+8)$ पदों तक] = 1

या $\frac{n+8}{2(150n)}[2 \times 150 + (n+8-1) \times (-4)] = 1$

$$(n+8)[300 - 4(n+7)] = 300n$$

$$(n+8)(-4n+272) = 300n$$

$$(n+8)(n-68) = -75n$$

$$n^2 - 60n - 544 = -75n$$

$$n^2 + 15n - 544 = 0$$

$$(n+32)(n-17) = 0$$

$n \neq -32$ या $n = 17$

कुल समय = n + 8 दिन

= 17 + 8 = 25 दिन।