गणित

अध्याय-9: समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल

संगत तलीय क्षेत्र

एक सरल बंद आकृति द्वारा तल का घेरा हुआ भाग उस आकृति का संगत तलीय क्षेत्र कहलाता है। इस तलीय क्षेत्र का परिमाण या माप उस आकृति का क्षेत्रफल कहलाता है। इस परिमाण या माप को सदैव एक संख्या (किसी मात्रक में), की सहायता से व्यक्त किया जाता है।

दूसरे शब्दों में किसी आकृति का क्षेत्रफल (किसी मात्रक में) एक संख्या है जो उस आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग से संबद्ध (जुड़ी) होती है।

1) यदि A और B दो सर्वांगसम आकृतियाँ हैं, तो क्षेत्रफल (A) = क्षेत्रफल (B) है तथा
2) यदि एक आकृति T द्वारा निर्मित क्षेत्र दो आकृतियों P और फ़ द्वारा निर्मित अनातिव्यापी तलीय क्षेत्रें से मिल कर बना है, तो क्षेत्रफल (T) = क्षेत्रफल (P) + क्षेत्रफल (Q) होगा।

उभयनिष्ठ आधार पर बनी आकृतियाँ

दो आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित कही जाती हैं, यदि उनका एक उभयनिष्ठ आधार (भुजा) हो तथा उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख प्रत्येक आकृति के शीर्ष (या का शीर्ष) उस आधार के समांतर किसी रेखा पर स्थित हों।

सर्वांगसम आकृतियाँ

'दो आकृतियाँ सर्वांगसम कही जाती हैं, यदि उनके आकार और माप समान हों।' दूसरे शब्दों में, यदि दो आकृतियाँ A और B सर्वांगसम हों, तो आप एक अक्स कागज का प्रयोग करके, एक आकृति को दूसरी आकृति पर इस प्रकार रख सकते हैं कि एक आकृति दूसरी को पूरा-पूरा ढक ले। अतः, यदि दो आकृतियाँ A और B सर्वांगसम हैं, तो उनके क्षेत्रफल अवश्य ही बराबर (समान) होने चाहिए।

परन्तु इस कथन का विलोम सत्य नहीं है। दूसरे शब्दों में, बराबर क्षेत्रफलों वाली दो आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।

स्मरणीय तथ्य

1. एक आकृति का क्षेत्रफल उस आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग से संबद्ध (किसी मात्रक में) एक संख्या होती है।
2. दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं, परन्तु इसका विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं है।
3. यदि एक आकृति T द्वारा निर्मित कोई तलीय क्षेत्र किन्हीं दो आकृतियों P और Q द्वारा निर्मित दो अनातिव्यापी तलीय क्षेत्रें से मिल कर बना है, तो क्षेत्रफल (T) = क्षेत्रफल (P) + क्षेत्रफल (Q) है, जहाँ क्षेत्रफल (X) आकृति X का क्षेत्रफल व्यक्त करता है।

एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच समांतर चतुर्भुज

एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

उदाहरण

दो समांतर चतुर्भुज ABCD और EE'CD हैं, जो एक ही आधार DC और एक ही समांतर रेखाओं AE' और DC के बीच स्थित हैं।

चूँकि $\Delta ADE \cong \Delta A'D'E'$

अतः क्षेत्रफल (ADE) = क्षेत्रफल (A'D'E')

साथ ही क्षेत्रफल (ABCD) = क्षेत्रफल (ADE) + क्षेत्रफल (EBCD)

= क्षेत्रफल (A'D'E') + क्षेत्रफल (EBCD)

= क्षेत्रफल (EE'CD)

अतः, दोनों समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर हैं।

प्रमेय 9.1: एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

उपपत्ति

दो समांतर चतुर्भुज ABCD और EFCD दिए हुए हैं, जो एक ही आधार DC और एक ही समांतर रेखाओं AF और DC के बीच स्थित हैं।

हमें क्षेत्रफल (ABCD) = क्षेत्रफल (EFCD) सिद्ध करना है।

Δ ADE और Δ BCF में

$\angle DAE = \angle CBF$ (AD ∥ BC और तिर्यक रेखा AF से संगत कोण) (1)

$\angle AED = \angle BFC$ (ED ∥ FC और तिर्यक रेखा AF से संगत कोण) (2)

इसलिए, $\angle ADE = \angle BCF$ (त्रिभुज का कोण योग गुण) (3)

साथ ही, AD = BC (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ) (4)

अतः $\Delta ADE \cong \Delta BCF$ (ASA नियम तथा (1), (3) तथा (4) द्वारा)

इसलिए, क्षेत्रफल ADE = क्षेत्रफल BCF (सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं) (5)

अब, क्षेत्रफल (ABCD) = क्षेत्रफल (ADE) + क्षेत्रफल (EDCB)

= क्षेत्रफल (BCF) + क्षेत्रफल (EDCB) [(5) से]

= क्षेत्रफल (EFCD)

अतः, समांतर चतुर्भुज ABCD और EFCD क्षेत्रफल में बराबर हैं।

नोट

एक ही आधार या बराबर आधारों और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

उपरोक्त कथन का विलोम इस प्रकार है:

एक ही आधार (या बराबर आधारों) और बराबर क्षेत्रफलों वाले समांतर चतुर्भुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।

एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज

दो त्रिभुज ABC और PBC ऐसे देखेंगे जो एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं BC और AP के बीच स्थित हैं। ऐसे दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल (लगभग) बराबर हैं। इसको इस प्रकार से सिद्ध किया जा सकता है:

रेखा AP को आगे बढ़ाते हैं तथा बिंदु C से रेखा AP पर दो रेखाएं AB और BP के समान्तर खींचते हैं जो क्रमशः D और R पर मिलती हैं।

इस प्रकार CD ∥ BA और CR ∥ BP

यहाँ पर हमें दो समान्तर चतुर्भुज PBCR और ABCD प्राप्त होते हैं। ये दोनों चतुर्भुज एक ही आधार BC और एक ही समान्तर रेखाओं BC और AR के बीच स्थित हैं।

अतः, क्षेत्रफल ((ABCD) = क्षेत्रफल (PBCR)

अब, Δ ABC $\cong$ Δ CDA और Δ PBC $\cong$ Δ CRP

अतः क्षेत्रफल (ABC) = $\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (ABCD)

और क्षेत्रफल (PBC) = $\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (PBCR)

इसलिए, क्षेत्रफल (ABC) = क्षेत्रफल (PBC)

प्रमेय 9.2

एक ही आधार (या बराबर आधारों) और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

अब, मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसका एक विकर्ण AC है। मान लें कि AN ⊥ DC है। ध्यान दीजिए कि

Δ ADC $\cong$ Δ CBA है

अतः, क्षेत्रफल (ADC) = क्षेत्रफल (CBA)

इसलिए, क्षेत्रफल (ADC) = $\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (ABCD)

= $\frac{1}{2}$ (DC × AN)

अतः Δ ADC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार DC) × संगत शीर्षलम्ब AN

दूसरे शब्दों में, किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार (एक भुजा) और संगत शीर्षलम्ब (या ऊँचाई) के गुणनफल के आधे के बराबर होता है।

स्मरणीय तथ्य

1. दो आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित कही जाती हैं, यदि उनमें एक उभयनिष्ठ आधार (एक भुजा) हो तथा उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख प्रत्येक आकृति के शीर्ष (का शीर्ष) उस आधार के समांतर किसी रेखा पर स्थित हों।
2. एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
3. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके आधार और संगत शीर्षलम्ब का गुणनफल होता है।

एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और बराबर क्षेत्रफलों वाले त्रिभुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।

उपरोक्त प्रमेय का प्रयोग निम्नलिखित उदाहरण में करते हैं:

उदाहरण:

दर्शाइए कि त्रिभुज की एक माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है।

हल

मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है और AD उसकी एक माध्यिका है। आप यह दर्शाना चाहते हैं कि

क्षेत्रफल (ABD) = क्षेत्रफल (ACD)

चूँकि त्रिभुज के क्षेत्रफल में शीर्षलम्ब सम्बद्ध होता है, इसलिए आइए AN $\perp$ BC खींचें।

अब, क्षेत्रफल (ABD) = $\frac{1}{2}$ × आधार × शीर्षलम्ब (Δ ABD का)

= $\frac{1}{2}$ BD × AN

= $\frac{1}{2}$ CD × AN (चूँकि BD = CD)

= $\frac{1}{2}$ × आधार × शीर्षलम्ब (Δ ACD का)

= क्षेत्रफल (ACD)

स्मरणीय तथ्य

1. एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और बराबर क्षेत्रफलों वाले समांतर चतुर्भुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।
2. यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।
3. एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
4. त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार और संगत शीर्षलम्ब के गुणनफल का आधा होता है।
5. एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और बराबर क्षेत्रफलों वाले त्रिभुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।
6. त्रिभुज की एक माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है।

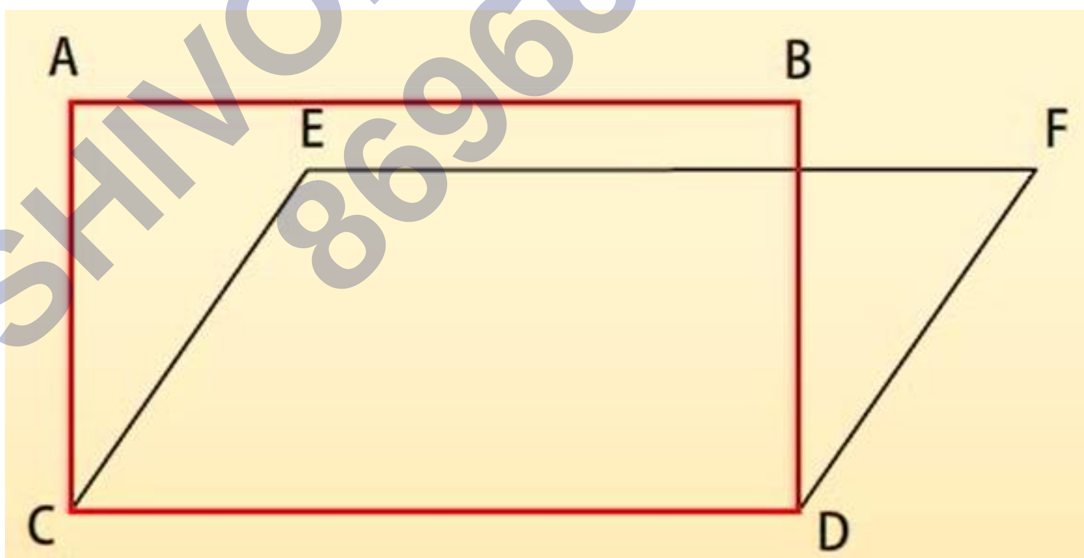
उद्देश्य

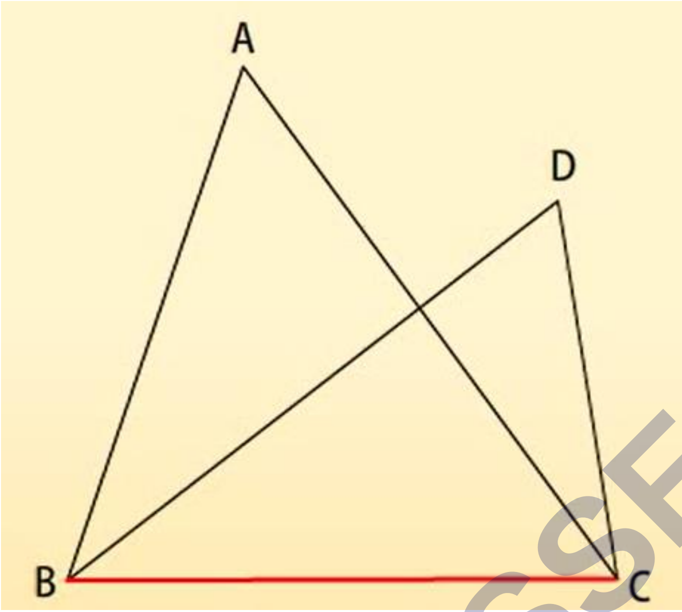
- एक ही आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच की आकृतियाँ बनाना।
- एक ही आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच के समांतर चतुर्भुजों को समझना।
- एक ही आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच के त्रिभुजों को समझना।
- समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल से सम्बंधित प्रमेयों को सिद्ध करना।
- समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल से सम्बंधित उदाहरणों को हल करना।

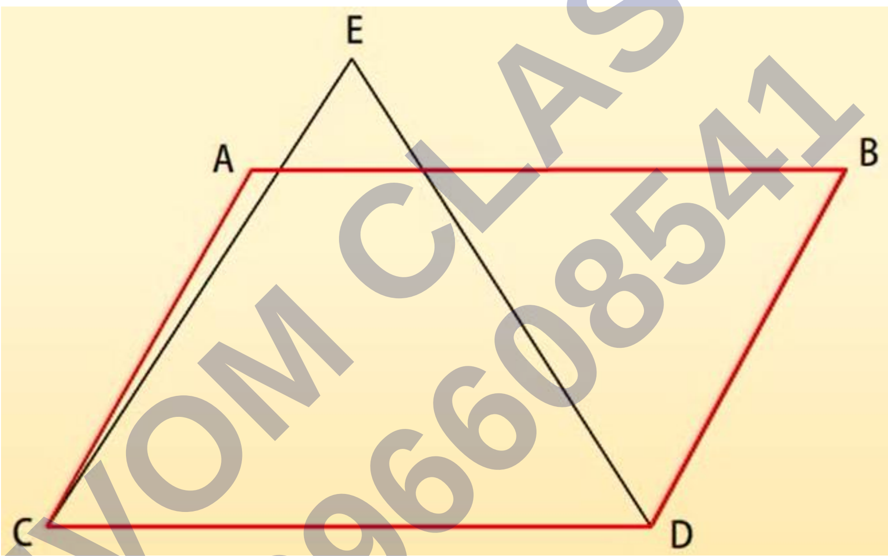
परिभाषाएँ

समतल क्षेत्र के विस्तार अथवा उसकी माप को उस क्षेत्र का क्षेत्रफल कहते हैं। किसी समतल का वह भाग जो किसी बंद आकृति के अंदर हो, वह उसी आकृति का समतल क्षेत्र कहलाता है। दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल सामान होते हैं, लेकिन सामान क्षेत्रफल वाली आकृतियाँ सर्वांगसम हों यह आवश्यक नहीं है। किसी आकृति के क्षेत्रफल को AR से भी दर्शाया जा सकता है। उदाहरण के लिए 'त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल' के स्थान पर ar(ABC) भी लिखा जा सकता है।

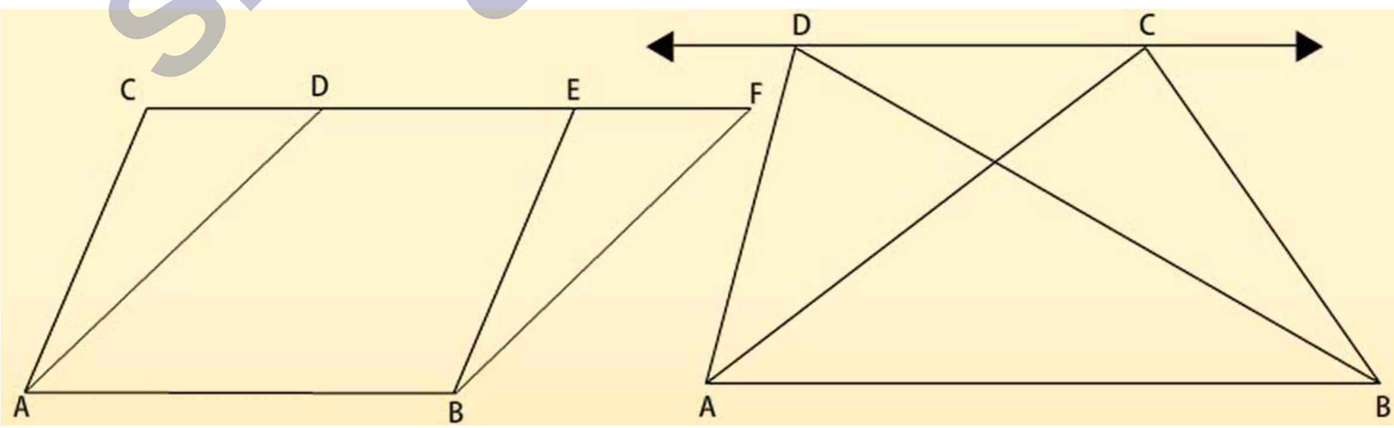
एक ही आधार पर बनी आकृतियाँ







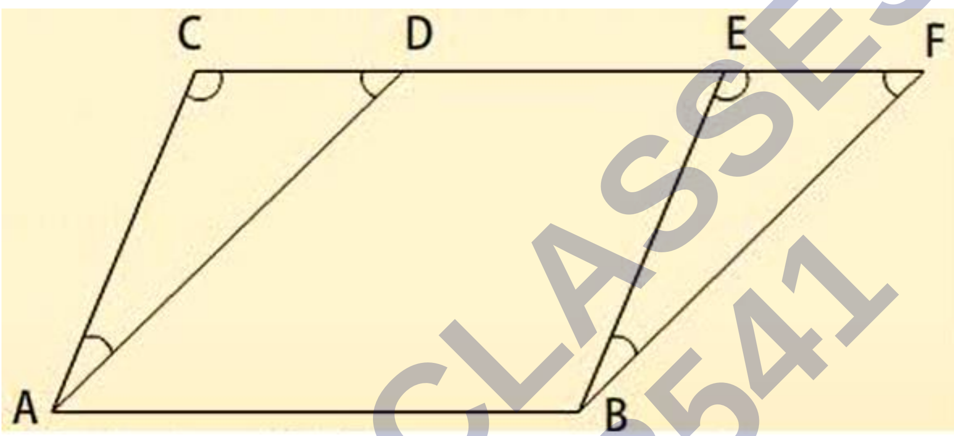
एक आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच की आकृतियाँ



परिणामः दो आकृतियाँ यदि एक ही आधार पर स्थित हों और उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख स्थित उनके शीर्ष एक ऐसी रेखा पर स्थित हो जो उस आधार के समांतर हो। तो वो आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच की आकृतियाँ कहलाएंगी।

एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुर्भुज

प्रमेयः एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुर्भजों के क्षेत्रफल सामान होते हैं।



दिया हैं: दो समांतर चतुर्भुज ABEC और ABFD, दिए गए हैं, जो एक ही / आधार AB तथा एक समांतर रेखाओं AB और CF के बीच स्थित हैं।

सिद्ध करेः

क्षेत्रफल (ABEC) = क्षेत्रफल (ABED)

$\triangle ADC$ और $\triangle BEF$ में,

$\angle ACD = \angle BEF$ .... (1)

(समांतर रेखाओं AC || BE तथा तिर्यक रेखा CF के संगत कोण हैं।)

$\angle ADC = \angle BFE$ .... (2)

(समांतर रेखाओं AD || BF तथा तिर्यक रेखा CF के संगत कोण हैं।)

इसलिए, $\angle CAD = \angle EBF$ .... (3)

(त्रिभुज के कोण योग गुण के अनुसार)

साथ ही, AC = BE .... (4)

(समांतर चतुर्भुज ABEC की सम्मुख भुजाएं)

इसलिए, $\triangle ADC \cong \triangle BEF$

[ASA नियम द्वारा समीकरण (1), (3), (4), का प्रयोग करते हुए।]

$\therefore$ क्षेत्रफल (ADC) = क्षेत्रफल (BEF) .... (5)

(सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल सामान होते हैं)

अब, ABEC का क्षेत्रफल = (ADC) का क्षेत्रफल + (ABEC) का क्षेत्रफल

अब हम जानते हैं कि, ADC = BEF

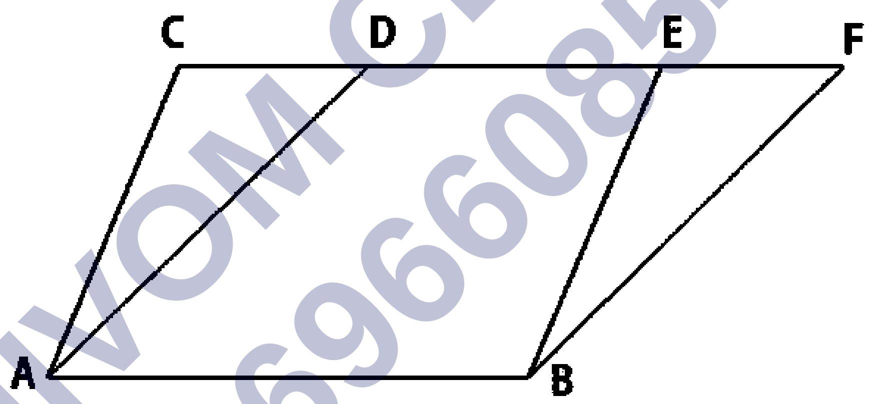
इसलिए हम इसे इस तरह भी लिख सकते हैं,

(ABEC) का क्षेत्रफल = (BEF) का क्षेत्रफल + (EDAB) का क्षेत्रफल (समीकरण 5 से)

= ABFD का क्षेत्रफल

इसलिए, समांतर चतुर्भुज ABEC तथा ABED दोनों के क्षेत्रफल बराबर हैं।

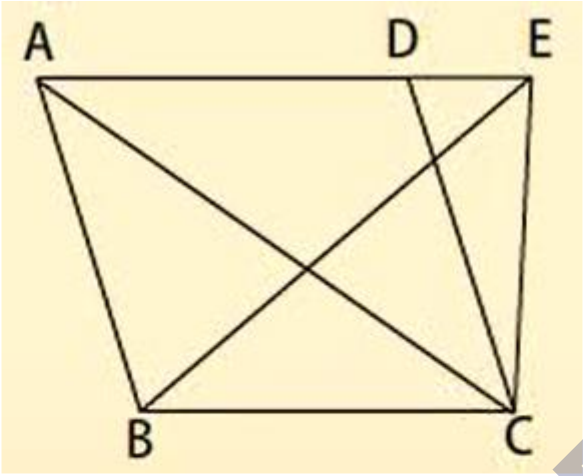
प्रमेय का विलोम



एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल सामान होते हैं।

एक ही आधार पर स्थित सामान क्षेत्रफल वाले समांतर चतुर्भुज एक ही समांतर रेखाओं की बीच स्थित होते हैं।

उदाहरण: यदि एक समांतर चतुर्भुज और एक त्रिभुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं तो सिद्ध कीजिये कि समांतर चतुर्भुज उसी त्रिभुज जैसे दो त्रिभुजों से बना होता है।



मान लेते हैं कि एक उभयनिष्ठ आधार BC पर, और एक ही समांतर रेखाओं AE और BC के बीच समांतर चतुर्भुज ABCD और एक त्रिभुज EBC स्थित हैं, अब । सिद्ध करते हैं कि समांतर चतुर्भुज ABCD त्रिभुज EBC जैसे दो त्रिभुजों से बना है।

रचनाः रेखा AC खींचिए।

समांतर चतुर्भुज ABCD = 2△ABC (विकर्ण AC, समांतर चतुर्भुज को बाँट रही है।)

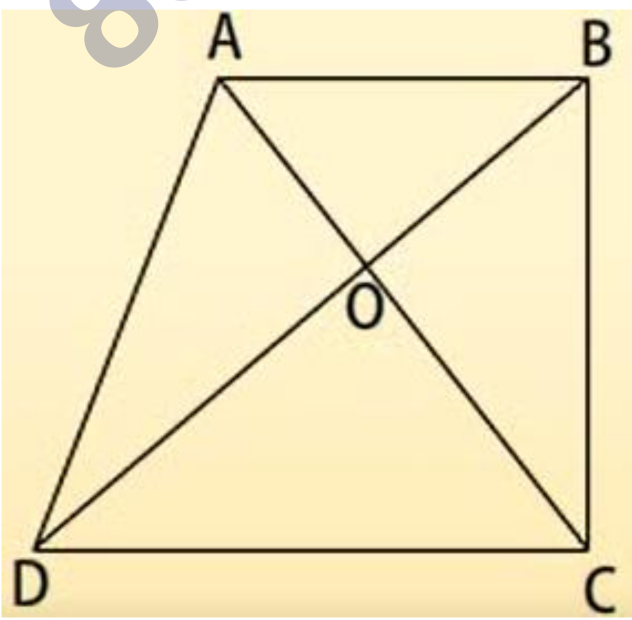
किन्तु △ABC = △EBC,

(एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं AE और BC के बीच स्थित हैं)

समांतर चतुर्भुज ABCD = 2△EBC

इति सिद्धम

उदाहरणः एक समलम्ब ABCD, जिसमें AB || DC के विकर्ण AC और BD एक दूसरे को 0 पर काटते हैं। सिद्ध करिये कि △AOD का क्षेत्रफल = △BOC का क्षेत्रफल।



हल:

यह देखा जा सकता है कि ADAC और ADBC एक ही आधार DC पर और एक ही समांतर रेखाओं AB और CD के बीच स्थित हैं।

∴ (△DAC) का क्षेत्रफल = (△DBC) का क्षेत्रफल

⇒ (△DAC) का क्षेत्रफल - (△DOC) का क्षेत्रफल = (△DBC) का क्षेत्रफल - (△DOC) का क्षेत्रफल

= (△AOD) का क्षेत्रफल = (△BOC) का क्षेत्रफल।

एक ही आधार तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज

प्रमेयः एक ही आधार (या बराबर आधारों) और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुजों के क्षेत्रफल सामान होते हैं।

दिया गया है: एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं BC तथा AD के बीच स्थित दो त्रिभुज ABC और DBCI

- एक ही आधार तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच

स्थित त्रिभुज

प्रमेयः एक ही आधार (या बराबर आधारों) और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुजों के क्षेत्रफल सामान होते हैं। दिया गया है: एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं BC तथा AD के बीच स्थित दो त्रिभुज ABC और DBCT सिद्ध करना है: (AABC) का क्षेत्रफल = (ADBC) का क्षेत्रफल

Areas of Parallelograms and Triangles

BL

एक ही आधार तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच

स्थित त्रिभुज

_

--

_

_

_

A

Er- - - - -

F

रचनाः B से होते हुए, CA के समांतर, E पर बनी DA को काटती हुई, BE खींचिए और C से होते हुए, BD के समांतर, F पर बनी ।। AD को काटती हुई, CF खींचिए। उपपत्तिः हमारे पास दो समांतर रेखाएं BE और CA हैं। (निर्माण के अनुसार) BCII EA (दिया है।) इसलिए, चतुर्भुज BCAE एक समांतर चतुर्भुज है। ठीक इसी तरह, BCFD भी एक समांतर चतुर्भुज है। अब, समांतर चतुर्भुज BCAE तथा समांतर चतुर्भुज BCFD एक ही आधार BC तथा एक ही समांतर रेखाओं BC तथा AD के बीच स्थित हैं। इसलिए, समांतर चतुर्भुज BCAE का क्षेत्रफल = समांतर चतुर्भुज BCFD का क्षेत्रफला ....(1) हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुजों के विकर्ण उन्हें बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बाँट देते हैं।

एक ही आधार तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच

स्थित त्रिभुज

इसलिए, क्षेत्रफल (ADBC) = क्षेत्रफल (समांतर चतुर्भुज BCFD) ... ...2) और क्षेत्रफल (AABC) = क्षेत्रफल (समांतर चतुर्भुज BCAE) ....(3)

Er- - - - - - - - - - -A

-

-

-

-

-

-

-

-

-

चूंकि, समांतर चतुर्भुज BCAE का क्षेत्रफल = समांतर' चतुर्भुज BCFD का क्षेत्रफला (समीकरण 1 से)

+ (समांतर चतुर्भुज

BCFD) का क्षेत्रफल

= = (समांतर चतुर्भुज

BCAE) का क्षेत्रफल

इसलिए, क्षेत्रफल (AABC) = क्षेत्रफल (ADBC)

समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुज, जिनके आधार एक ही हैं (या बराबर हैं), एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।

उदाहरण

उदाहरणः

एक त्रिभुज ABC, में, E माध्यिका AD का मध्य बिंदु है। सिद्ध करिये कि (BED) का क्षेत्रफल = 1 ABC का क्षेत्रफल का

हलः

दिया है:

AD, AABC की माध्यिका है। इसलिए यह त्रिभुज ABC को बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बाँट देगी। :: AABD का क्षेत्रफल = AACD का क्षेत्रफल = AABD का क्षेत्रफल = 7 AABC का क्षेत्रफ. .(1)

त्रिभुज ABD में AD का Eमध्य बिंदु है।

उदाहरण

इसलिए, BE माध्यिका है।

:: (ABED) का क्षेत्रफल = (AABE) का क्षेत्रफल

= ABED का क्षेत्रफल == AABE का क्षेत्रफल = ABED का क्षेत्रफल = 1 का क्षेत्रफल (AABC) (समीकरण समीकरण (1) के अनुसार = जिससे यह सिद्ध होता है कि BED का क्षेत्रफल = 1 ABC के क्षेत्रफल का

,

उदाहरण

उदाहरण: सिद्ध करिये कि किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण उसे बराबर क्षेत्रफल वाले चार त्रिभुजों में विभाजित कर देते हैं।

हलः

हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। इसलिए 0, AC और BD का मध्य बिंदु है। AABC में BO माध्यिका है। इसलिए, यह इसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करेगी। :: (AAOB) का क्षेत्रफल = (ABOC) का क्षेत्रफल ....(1) त्रिभुज BCD में CO माध्यिका है।

::: (ABOC) का क्षेत्रफल = (ACOD) का क्षेत्रफल .... (2) LACOD) का क्षेत्रफल = (AAOD) का क्षेत्रफल ....(3)

00:20:22

00:03:39

समीकरण (1), (2),और (3), से हमें पता चलता है कि

(AAOB) का क्षेत्रफल = (ABOC) का क्षेत्रफल = (ACOD) का क्षेत्रफल = (AAOD) का क्षेत्रफल इसलिए, यह सिद्ध हुआ कि, किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण उसे बराबर क्षेत्रफल वाले चार त्रिभुजों में विभाजित कर देते हैं।

क्या आप जानते हैं ।

सिकंदरिया के हीरोन (एक शताब्दी ई.पू.) में त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र की खोज की थी।।। गणित के इतिहास में वह सबसे अधिक इसी सूत्र के कारण जाने जाते हैं, जिसका नाम उन्ही के नाम पर है।

सारांश

आइये हमने जो कुछ सीखा है, उसे संक्षेप में दोहराएं।

८) किसी आकृति का क्षेत्रफल वह संख्या (किसी इकाई में) है, जो उस आकृति के अंदर आने वाले

समतल को दर्शाती है। ८) दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं। लेकिन इस कथन का विलोम भी सही हो

यह आवश्यक नहीं है। 5) दो आकृतियाँ यदि एक ही आधार पर स्थित हैं और उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख स्थित उनके शीर्ष

एक ऐसी रेखा पर स्थित हैं जो आधार के समांतर है तो वो आकृतियाँ एक ही आधार और एक

ही समांतर रेखाओं के बीच की आकृतियाँ कहलाएंगी। ८) एक ही आधार (या बराबर आधारों) और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर

चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं। ८) एक ही आधार (या बराबर आधारों) पर स्थित समान क्षेत्रफल वाले समांतर चतुर्भुज एक ही समांतर

रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।

k

सारांश

आइये हमने जो कुछ सीखा है, उसे संक्षेप में दोहराएं। ।

1) एक ही आधार (या बराबर आधारों) और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुजों के

क्षेत्रफल सामान होते हैं।

सारांश

आइये हमने जो कुछ सीखा है, उसे संक्षेप में दोहराएं।

८) किसी आकृति का क्षेत्रफल वह संख्या (किसी इकाई में) है, जो उस आकृति के अंदर आने वाले

समतल को दर्शाती है। ८) दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं। लेकिन इस कथन का विलोम भी सही हो

यह आवश्यक नहीं है। 5) दो आकृतियाँ यदि एक ही आधार पर स्थित हैं और उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख स्थित उनके शीर्ष

एक ऐसी रेखा पर स्थित हैं जो आधार के समांतर है तो वो आकृतियाँ एक ही आधार और एक

ही समांतर रेखाओं के बीच की आकृतियाँ कहलाएंगी। c) एक ही आधार (या बराबर आधारों) और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर

चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं। c) एक ही आधार (या बराबर आधारों) पर स्थित समान क्षेत्रफल वाले समांतर चतुर्भुज एक ही समांतर

रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।

सारांश

आइये हमने जो कुछ सीखा है, उसे संक्षेप में दोहराएं।।

c) एक ही आधार (या बराबर आधारों) और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुजों के

क्षेत्रफल सामान होते हैं। c) किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार और लम्ब के गुणनफल का आधा होता है। c) एक ही आधार (या बराबर आधारों) पर स्थित समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुज एक ही समांतर

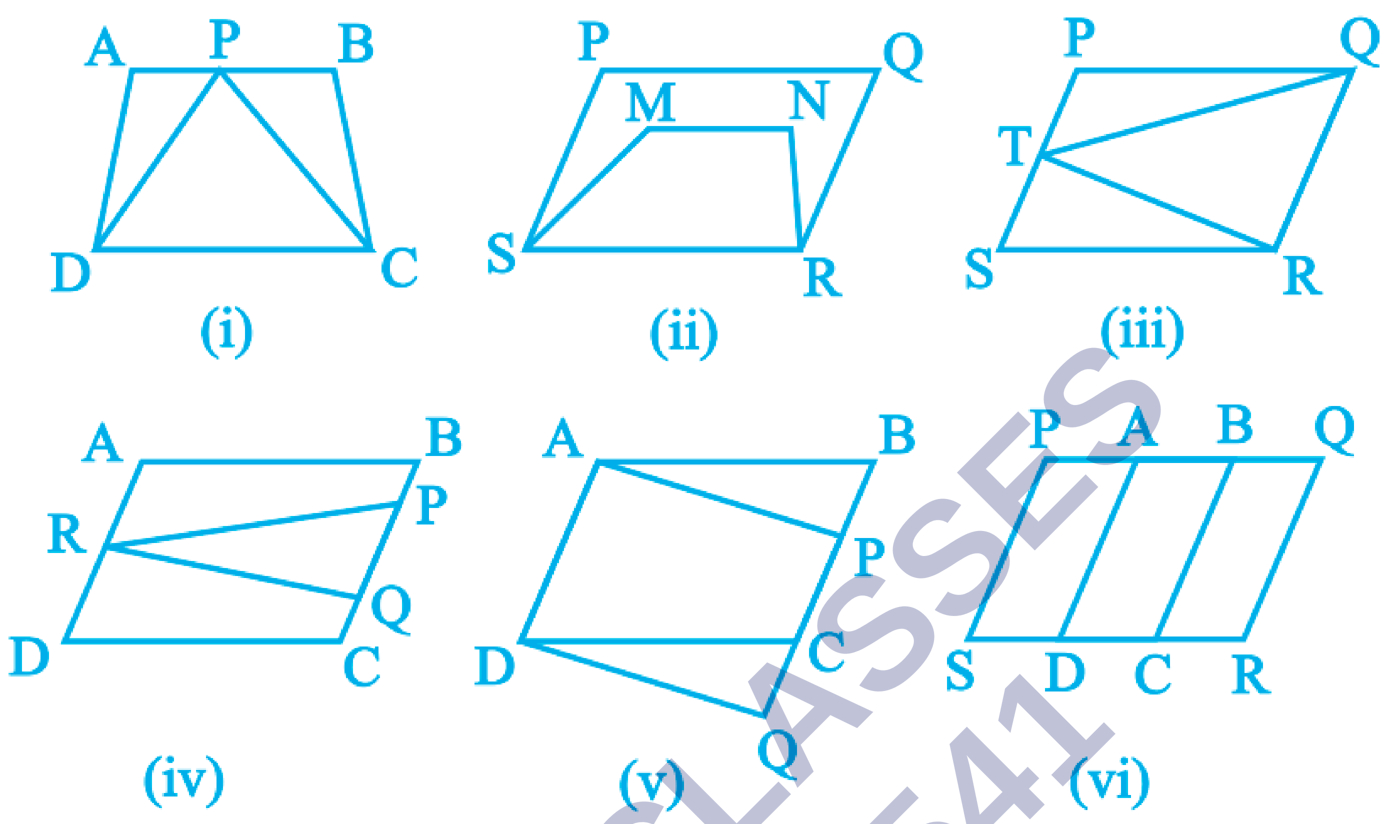
रेखाओं के बीच स्थित होते हैं। c) एक त्रिभुज की माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बांटती है। एक ही आधार ___(या बराबर आधारों) पर स्थित समान क्षेत्रफल वाले समांतर चतुर्भुज एक ही समांतर रेखाओं

के बीच स्थित होते हैं।) एक त्रिभुज की मध्य उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुज में बांटती है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 9.1 (पृष्ठ संख्या 187)

प्रश्न 1 निम्नलिखित आकृति में से कौन-सी आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं? ऐसी स्थिति में, उभयनिष्ठ आधार और दोनों समांतर रेखाएँ लिखिए।



उत्तर-

(i) यह आकृति एक ही आधार CD और एक ही समान्तर रेखाओं AB || CD के मध्य स्थित है।

(ii) यह आकृति एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित नहीं हैं।

(iii)यह आकृति एक ही आधार QR और एक ही समान्तर रेखाओं PS || QR के मध्य स्थित है।

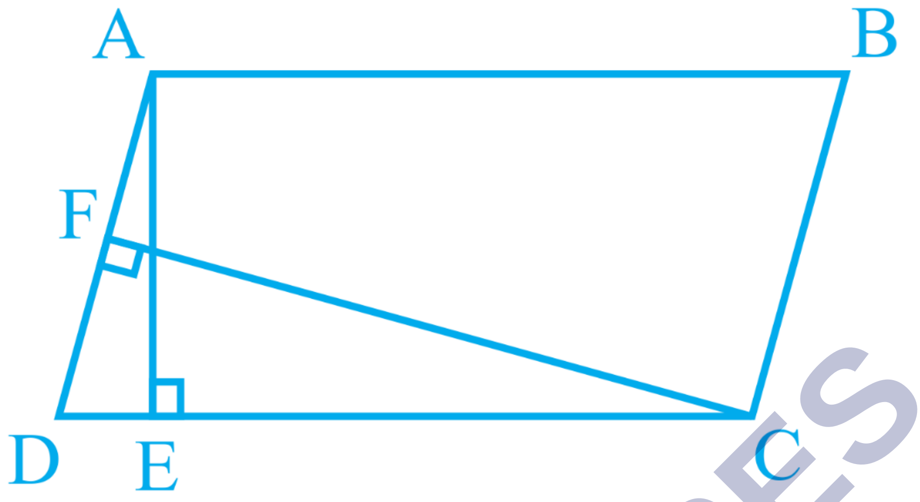
(iv)यह आकृति एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित नहीं हैं।

(v) यह आकृति एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित नहीं हैं।

(vi)यह आकृति एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित नहीं हैं।

प्रश्नावली 9.2 (पृष्ठ संख्या 192)

प्रश्न 1 आकृति में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है AE ⊥ DC और CF ⊥ AD यदि AB = 16 सेमी. AE = 8 सेमी. और CF = 10 सेमी. है तो AD ज्ञात किजिए।



उत्तर-

हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ शीर्षलंब

यदि आधार DC है तो ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \mathrm{DC} \times \mathrm{AE} \ldots . (2)$

तथा यदि आधार AD है तो ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \mathrm{AD} \times \mathrm{FC} \ldots . (2)$

समीकरण (1) और (2) से

$= \frac{1}{2} \times \mathrm{DC} \times \mathrm{AE} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AD} \times \mathrm{FC}$

$\Rightarrow \mathrm{DC} \times \mathrm{AE} = \mathrm{AD} \times \mathrm{FC}$

$\Rightarrow \mathrm{AB} \times \mathrm{AE} = \mathrm{AD} \times \mathrm{FC}\ [\because \mathrm{DC} = \mathrm{AB}]$

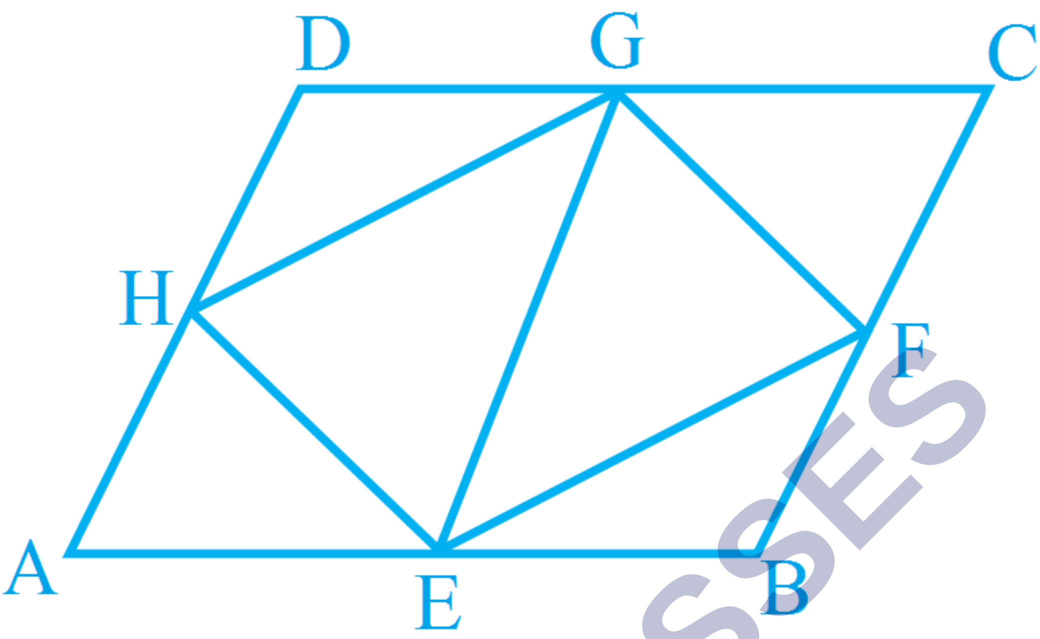
$\Rightarrow 16 \times 8 = \mathrm{AD} \times 10$

$\Rightarrow \mathrm{AD} = \frac{16 \times 8}{10} = 12.8$

अतः, $\mathrm{AD} = 12.8 \mathrm{~cm}$

प्रश्न 2 यदि E, F, G और H क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD कि भुजाओ के मध्य-बिन्दु है तो दर्शाइए कि $ar(EFGH) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$ है।

उत्तर-



दिया है- E, F, G और H क्रमश: समांतर चतुर्भुज ABCD कि भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं।

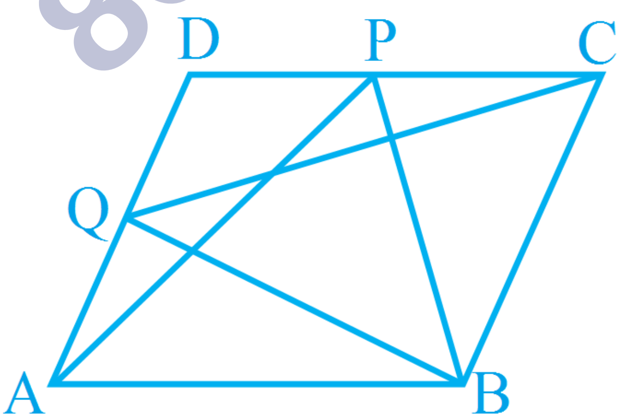
समीकरण (1) तथा (2) जोड़ने पर

$$\mathrm{ar}(\mathrm{GEH}) + \mathrm{ar}(\mathrm{GEF}) = \frac{1}{2}\mathrm{ar}(\mathrm{AEGD}) + \frac{1}{2}\mathrm{ar}(\mathrm{EBCD})$$

या $\mathrm{ar}(\mathrm{EFGH}) = \frac{1}{2}\mathrm{ar}(\mathrm{ABCD})$ इति सिद्धम्।

प्रश्न 3 P और Q क्रमश: समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिंदु है। दर्शाइए ar(APB) = ar(BQC) है।

उत्तर-



दिया है- P और Q क्रमश: समांतर चतुर्भुज ABCD = की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिंदु है।

सिद्ध करना है- ar(APB) = ar(BQC)

प्रमाण- अतः $\text{ar}(\text{APB}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABCD})\ldots(1)$

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज समांतर चतुर्भुज का आधा होता है।)

△BQC तथा ||gm ABCD एक ही आधार BC तथा AD || BC के मध्य स्थित है।

अत: ar(BQC) = ar(ABCD) ...(1)

समीकरण (1) तथा (2) से

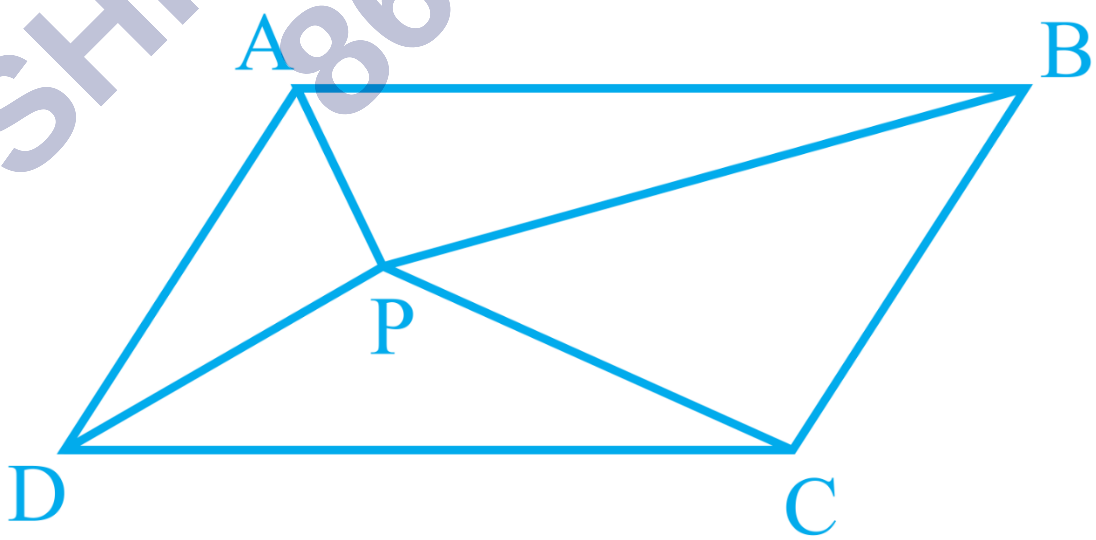
ar(APB) = ar(BQC) इति सिद्धम्

△APB तथा ||gm ABCD एक ही आधार AB तथा AB||CD के मध्य स्थित है।

प्रश्न 4 P समांतर चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में स्थिति कोई बिंदु है। दर्शाइए कि

i. $\text{ar}(\text{APB}) + \text{ar}(\text{PCD}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABCD})$

ii. $\text{ar}(\text{APD}) + \text{ar}(\text{PBC}) = \text{ar}(\text{APB}) + \text{ar}(\text{PCD})$



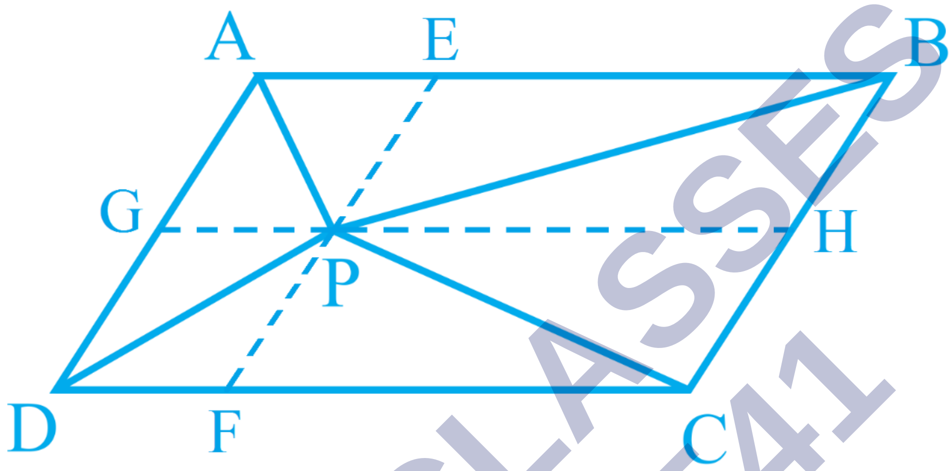
[**संकेत-** P से होकर AB के समांतर एक रेखा खीचिए।]

उत्तर-

दिया है- ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसके अभ्यंतर P कोई बिंदु है।

सिद्ध करना है- $\text{ar}(APB) + \text{ar}(PCD) = \frac{1}{2}\text{ar}(ABCD)$

$\text{ar}(APD) + \text{ar}(PBC) = \text{ar}(APB) + \text{ar}(PCD)$



रचना- P बिंदु से होकर AB के समांतर GH खिंचा और AD के समान्तर EF खिंचा।

प्रमाण- AB || GH रचना से और AB = GH है इसलिए ABHG एक समांतर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है- ar(EFGH) = ar(ABCD)

रचना- E को G से मिलाया।

प्रमाण- E तथा G क्रमश: AB तथा CD के मध्य बिंदु है और AB || CD है।

इसलिए AEGD और EBCG भी समांतर चतुर्भुज हैं।

अब, △EGD तथा ||gm AEGD एक ही आधार GE तथा AD || GE के मध्य स्थित है।

अतः $\text{ar}(\text{GEH}) = \frac{1}{2}\text{ar}\ (\text{AEGD}) \ldots (1)$

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज समांतर चतुर्भुज का आधा होता है ।

इसी प्रकार, AGEF तथा ||gm EBCD एक ही आधार GE तथा BC || GE के मध्य स्थित

अतः $\text{ar}(\text{GEH}) = \frac{1}{2}\text{ar}\ (\text{EBCD}) \ldots (2)$

इसी प्रकार DCHG भी एक समांतर चतुर्भुज है।

अब $\triangle\text{APB}$ तथा ||gm ABHG एक ही आधार AB तथा AB || GH के मध्य स्थित है।

अतः $\text{ar}(\text{APB}) = \frac{1}{2}\text{ar}\ (\text{AABHG}) \ldots (1)$

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज समांतर चतुर्भुज का आधा होता है)

इसीप्रकार, APCD तथा ||gm DCHG एक ही आधार DC तथा DC || GH के मध्य स्थित है।

अतः $\text{ar}(\text{PCD}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{DCHG}) \ldots (1)$

समीकरण (1) तथा (2) जोड़ने पर

$$\text{ar}(\text{APB}) + \text{ar}(\text{PCD}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABHG}) + \frac{1}{2}\text{ar}(\text{DCHG})$$

$$\text{ar}(\text{APB}) + \text{ar}(\text{PCD}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABCD}) \ldots (3)$$

अब $\triangle\text{APD}$ और ||gm ADFE एक ही आधार AD तथा AD || EF के मध्य स्थित है।

इसलिए, $\text{ar}(\text{APD}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ADFE}) \ldots (4)$

इसीप्रकार, $\triangle\text{PCD}$ और ||gm BCFE एक ही आधार BC तथा BC || EF के मध्य स्थित है।

इसलिए, $\text{ar}(\text{PBC}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{BCFE}) \ldots (5)$

समीकरण (4) और (5) को जोड़ने से

$$\text{ar}(\text{APD}) + \text{ar}(\text{PBC}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ADFE}) + \frac{1}{2}\text{ar}(\text{BCFE})$$

या $\text{ar}(\text{APD}) + \text{ar}(\text{PBC}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABCD})$

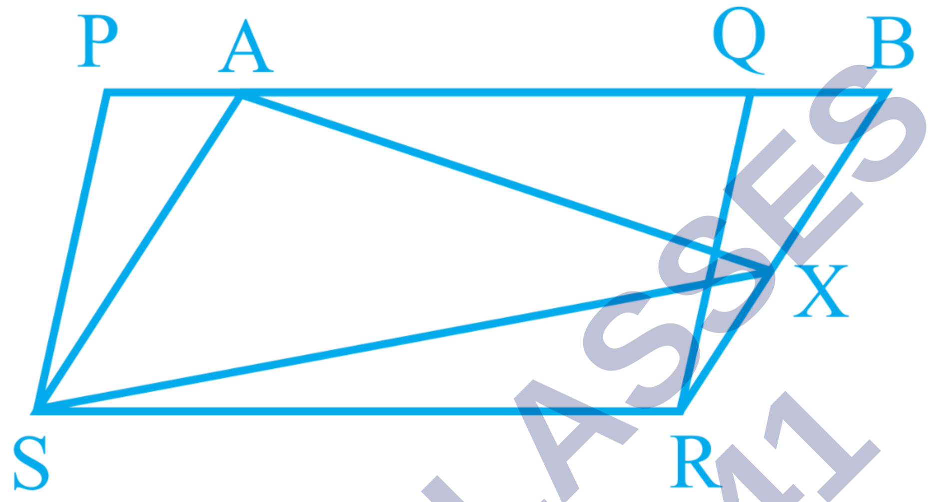
या $\text{ar}(\text{APD}) + \text{ar}(\text{PBC}) = \text{ar}(\text{APB}) + \text{ar}\ (\text{PCD})$

समीकरण (3) से सिद्ध है।

प्रश्न 5 PQRS और ABRS समांतर चतुर्भुज है तथा X भुजा BR पर स्थित कोई बिंदु है। दर्शाइए कि

i. $\operatorname{ar}(PQRS) = \operatorname{ar}(ABRS)$

ii. $\operatorname{ar}(AXS) = \frac{1}{2}\operatorname{ar}(PQRS)$

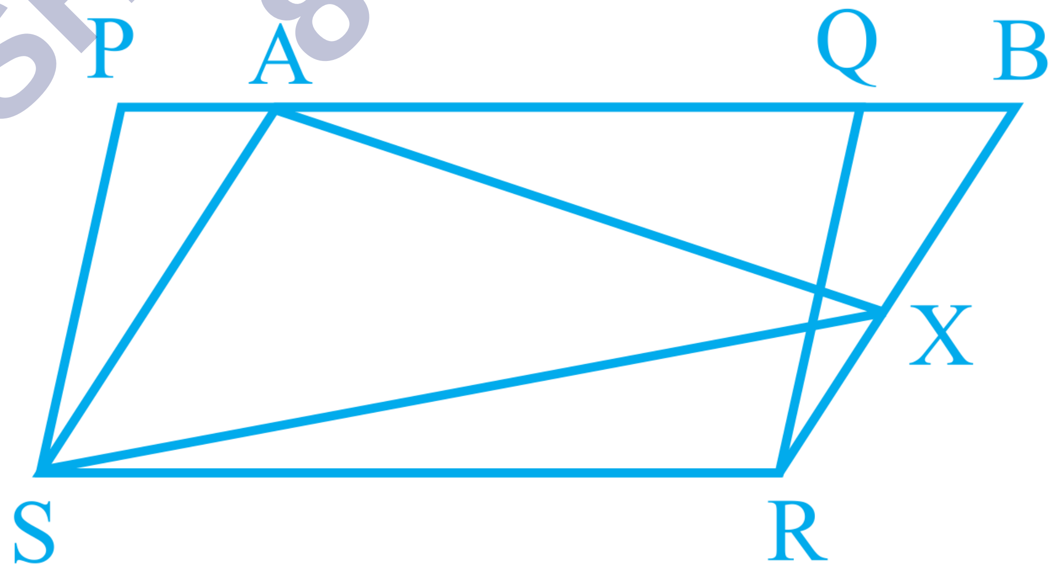


उत्तर- दिया है- PQRS और ABRS समांतर चतुर्भुज है तथा X भुजा BR पर स्थित कोई बिंदु है।

सिद्ध करना है-

$\operatorname{ar}(PQRS) = \operatorname{ar}(ABRS)$

$\operatorname{ar}(AXS) = \frac{1}{2}\operatorname{ar}(PQRS)$



प्रमाण- ||gm PQRS तथा ||gm ABRS एक ही आधार SR तथा SR || PB के मध्य स्थित हैं।

इसलिए $\therefore \operatorname{ar}(AXS) = \frac{1}{2}\operatorname{ar}(PQRS)$

या $\operatorname{ar}(AXS) = \frac{1}{2}\operatorname{ar}(PQRS)$ समी. (1) से सिद्ध है

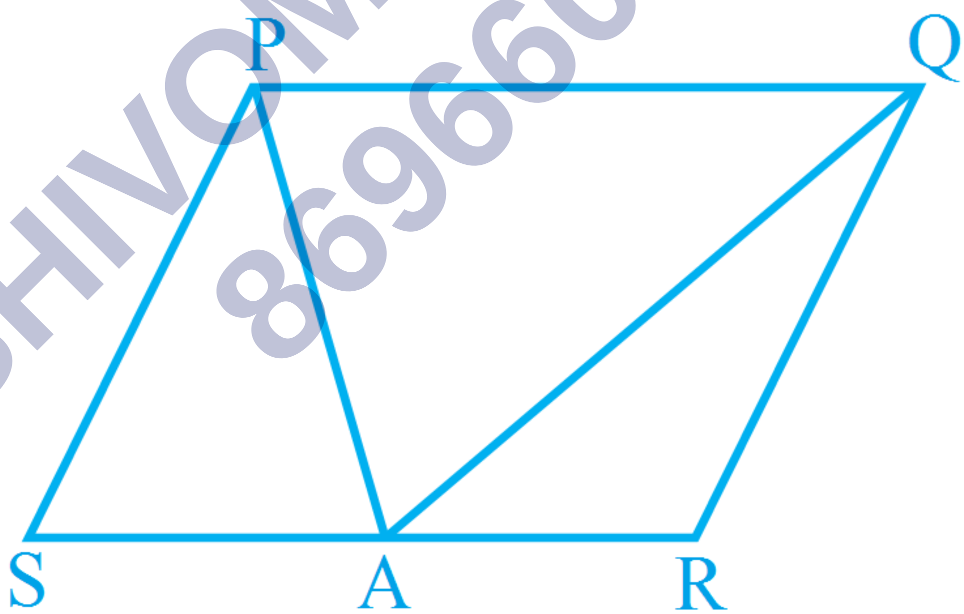
$$\operatorname{ar}(PQRS) = \operatorname{ar}(ABRS) \ldots (1)$$

अब, $\triangle AXS$ तथा ||gm ABRS एक ही आधार AS तथा AS || BR के मध्य स्थित है।

प्रश्न 6 एक किसान के पास समांतर चतुर्भुज (PQRS) के रूप का एक खेत था। उसने RS पर स्थित कोई बिन्दु A लिया और उसे P और Q से मिला दिया। खेत कितने भागों में विभाजित हो गया है? इन भागों के आकार क्या हैं? वह किसान खेत में गेहूँ और दालें बराबर-बराबर भागों में अलग-अलग बोना चाहती है। वह ऐसा कैसे करे?

उत्तर- दिया है- PQRS एक ||gm है और RS पर एक बिंदु A है।

सिद्ध करना है- ar(PAQ) = ar(PAS) + ar(QAR)



प्रमाण $\triangle PAD$ तथा ||gm PQRS एक ही आधार PQ तथा PQ || SR के मध्य स्थित है।

$\therefore \operatorname{ar}(PAQ) = \frac{1}{2}\operatorname{ar}(PQRS) \ldots (1)$

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज समांतर चतुर्भुज का आधा होता है।)

इसलिए $\operatorname{ar}(PAS) + \operatorname{ar}(QAR) = \frac{1}{2}\operatorname{ar}(PQRS)\ \ldots (2)$

समीकरण (1) तथा (2) से

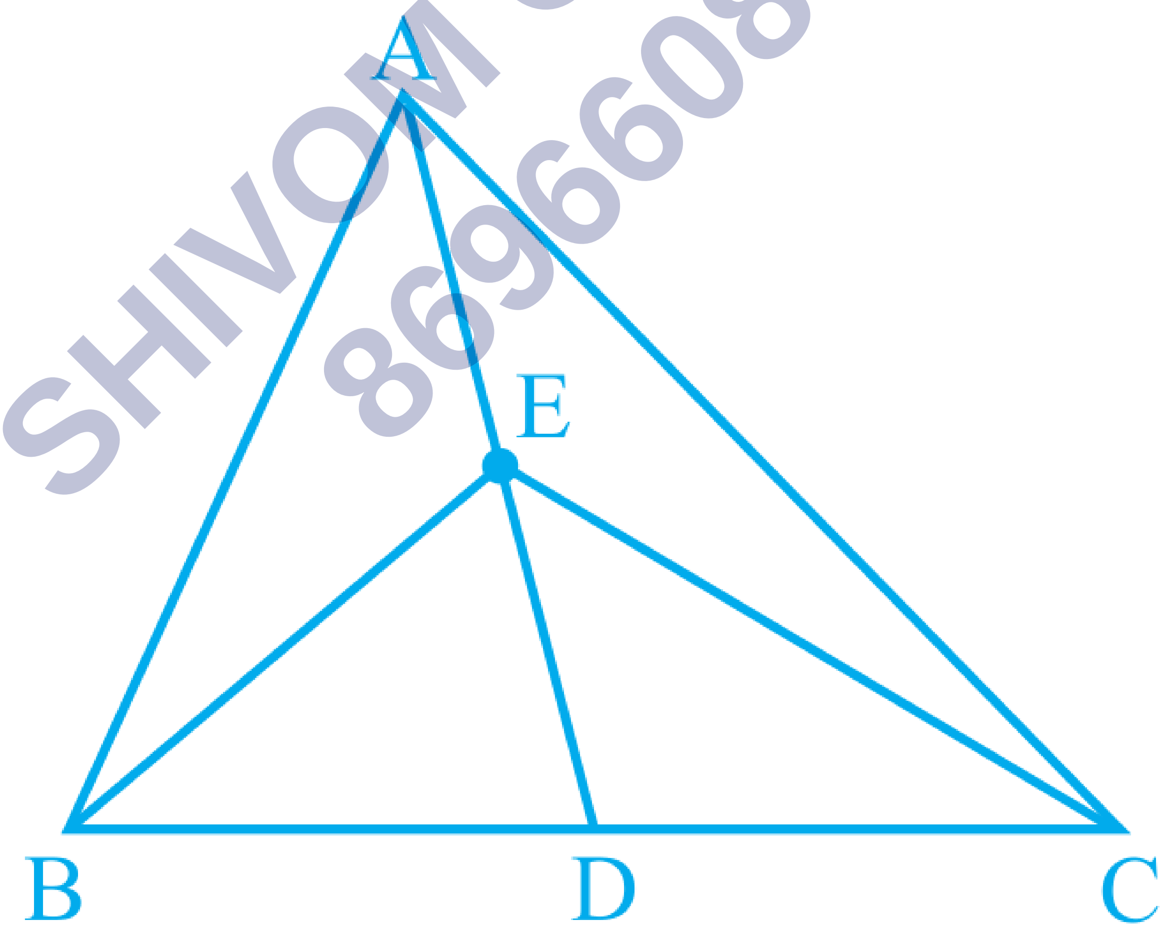
$\operatorname{ar}(PAQ) = \operatorname{ar}(PAS) + \operatorname{ar}(QAR)$

अर्थात किसान चाहे तो ar(PAQ) में गेंहू बो सकता है

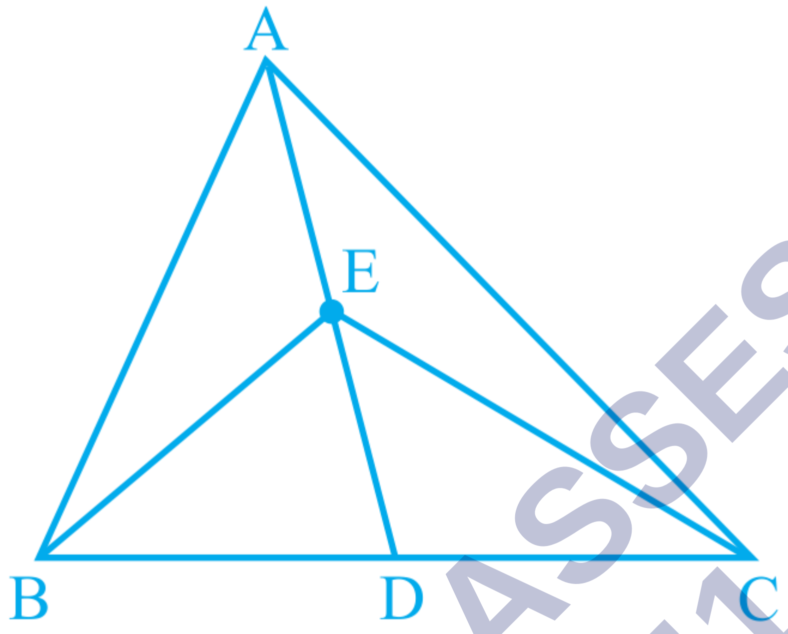
अथवा ar(PAS) + ar(QAR) में चना बो सकता है। क्योंकि ये क्षेत्रफल में बराबर हैं।

प्रश्नावली 9.3 (पृष्ठ संख्या 195-198)

प्रश्न 1 △ABC की एक माध्यिका AD पर स्थित E कोई बिंदु है। दर्शाइए कि ar(ABE) = ar(ACE) है।



उत्तर-



दिया है- $\triangle ABC$ की एक माध्यिका AD पर स्थित E कोई बिंदु है।

सिद्ध करना है- ar(ABE) = ar(ACE)

रचना- B तथा CE को मिलाया।

प्रमाण- $\triangle ABC$ में, AD, $\triangle ABC$ कि एक माध्यिका है।

इसलिए ar(ABD) = ar(ACD) ...(1)

(त्रिभुज कि माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है)

अब, $\triangle BEC$ में, ED भी $\triangle BEC$ कि एक माध्यिका है।

इसलिए ar(BED) = ar(CED) ...(2)

समीकरण (1) में से (2) घटाने पर

ar(ABD) - ar(BED) = ar(ACD) - ar(CED)

या ar(ABE) = ar(ACE) इति सिद्धम्

प्रश्न 2

$\triangle ABC$ में, E माध्यिका AD का मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि $\mathrm{ar}(\mathrm{BED}) = \frac{1}{4}\mathrm{ar}(\mathrm{ABC})$ है।

उत्तर-

दिया है- $\triangle ABC$ में, E माध्यिका AD का मध्य-बिंदु है।

सिद्ध करना है- $\text{ar}(BED) = \frac{1}{4}\text{ar}(ABC)$

रचना- B तथा C को बिंदु E से मिलाया।

प्रमाण- $\triangle ABC$ में, AD, $\triangle ABC$ कि एक माध्यिका है

इसलिए, $\text{ar}(ABD) = \frac{1}{2}\text{ar}(ABC)\ldots(1)$

(त्रिभुज कि माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है)

अब, बिंदु E, $\triangle ABD$ कि भुजा AD का मध्य-बिंदु है (दिया है)

इसलिए, BE, $\triangle ABD$ की एक माध्यिका है

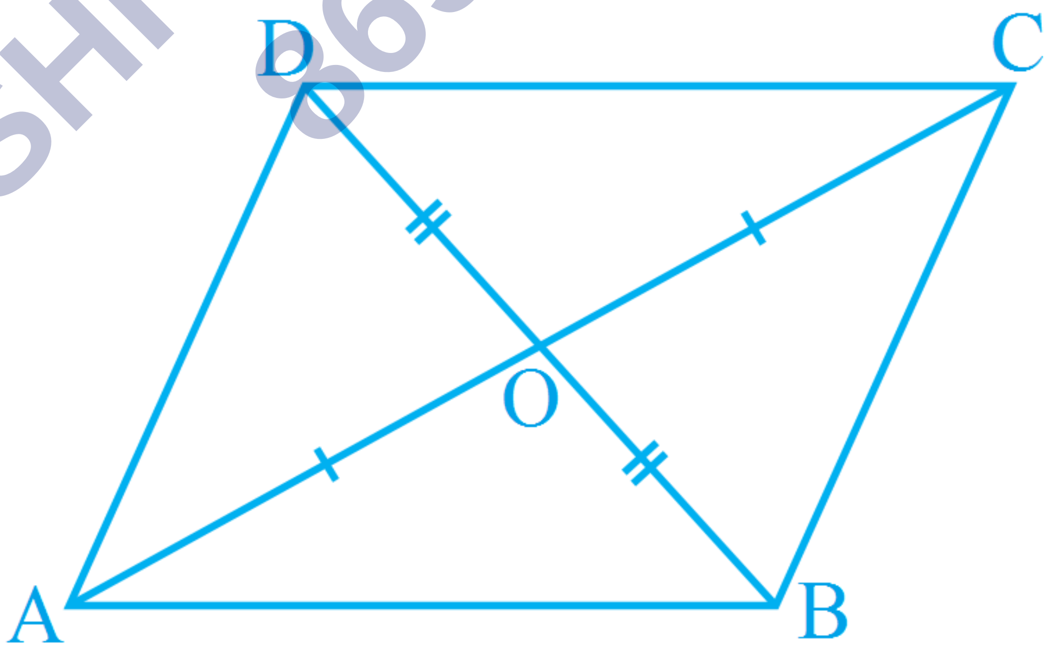
अत: $\text{ar}(BED) = \frac{1}{2}\text{ar}(ABC)$

या $\text{ar}(BED) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\text{ar}(ABC)$ समी. (1) से

या $\text{ar}(BED) = \frac{1}{4}\text{ar}(ABC)$ इति सिद्धम्

प्रश्न 3 दर्शाइए कि समांतर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले चार त्रिभुजों में बाँटते हैं।

उत्तर-



दिया है- ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसके दो विकर्ण AC तथा BD हैं। जो एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है।

सिद्ध करना है- ar(AOB) = ar(BOC) = ar(COD) = ar(AOD)

प्रमाण- △ABC की भुजा AC का O मध्य-बिंदु है।

इसलिए OB एक माध्यिका है।

अत: ar(AOB) = ar(BOC) ...(1)

(त्रिभुज कि माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है।)

इसी प्रकार, △ACD की भुजा AC का O मध्य-बिंदु है।

इसलिए OD एक माध्यिका है।

अत: ar(AOD) = ar(COD) ...(2)

अब और △BCD में

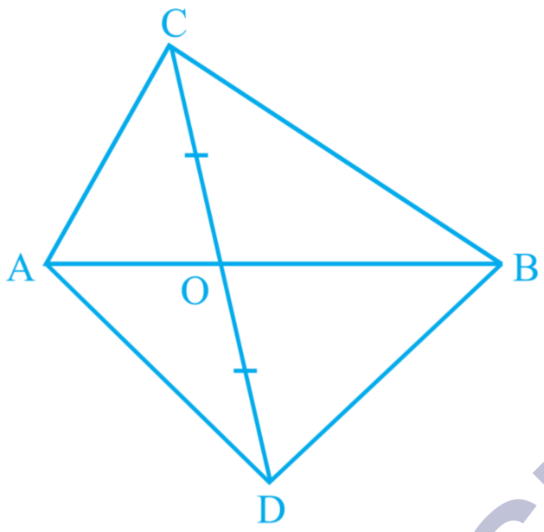
भुजा BD की मध्य-बिंदु O है अत: OC एक माध्यिका है।

अत: ar(BOC) = ar(COD) ...(3)

समीकरण (1), (2) तथा (3) से हमें प्राप्त होता है।

ar(AOB) = ar(BOC) = ar(COD) = ar(AOD) इति सिद्धम्।

प्रश्न 4 ABC और ABD एक ही आधार AB पर बने दो त्रिभुज हैं। यदि रेखाखंड CD रेखाखंड AB से बिंदु O पर समद्विभाजित होता है, तो दर्शाइए कि ar(ABC) = ar(ABD)



उत्तर- दिया है- ABC और ABD एक ही आधार AB पर बने दो त्रिभुज हैं और रेखाखंड CD रेखाखंड AB से बिंदु O पर समद्विभाजित होता है।

सिद्ध करना है- ar(ABC) = ar(ABD)

प्रमाण- DACD में भुजा CD को AB समद्विभाजित करता है जिसका मध्य-बिंदु O है।

अत: AO त्रिभुज कि एक माध्यिका है।

इसलिए ar(AOC) = ar(AOD) ...(1)

(त्रिभुज कि माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है।)

इसी प्रकार, DBCD में OB एक माध्यिका है।

अत: ar(BOC) = ar(BOD) ...(2)

समी. (1) तथा (2) जोड़ने पर

ar(AOC) + ar(BOC) = ar(AOD) + ar(BOD)

या ar(ABC) = ar(ABD)

या FE || BC तथा FE = BD [चूँकि DBC का मध्य-बिंदु है।]

अत: BDEF एक समांतर चतुर्भुज है।

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म बराबर और समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।)

DF समांतर चतुर्भुज BDEF का विकर्ण है इसलिए ar(BDF) = ar(DEF) ...(1)

इसी प्रकार, DCEF भी समांतर चतुर्भुज है।

और DE इसका विकर्ण है ar(CED) = ar(DEF) ...(2)

और AEDF भी समांतर चतुर्भुज है और FE

इसका विकर्ण है तो ar(AEF) = ar(DEF) ...(3)

समीकरण (1), (2) और (3) से

$\Rightarrow$ ar(AEF) = ar(BDF) = ar(DEF) = ar(CED) ...(4)

अब ar(AEF) + ar(BDF) + ar(DEF) + ar(CED) = ar(ABC)

$\Rightarrow$ ar(DEF) + ar(DEF) + ar(DEF) + ar(DEF) = ar(ABC) समी. (4)

$\Rightarrow$ 4ar(DEF) = ar(ABC)

$\Rightarrow$ ar(BDF) + ar(DEF) + ar(AEF) + ar(CED) = ar(ABC)

$\Rightarrow$ ar(BDF) + ar(DEF) + ar(BDF) + ar(DEF) = ar(ABC)

$\Rightarrow$ ar(BDEF) + ar(BDEF) = ar(ABC)

$\Rightarrow$ 2ar(BDEF) = ar(ABC)

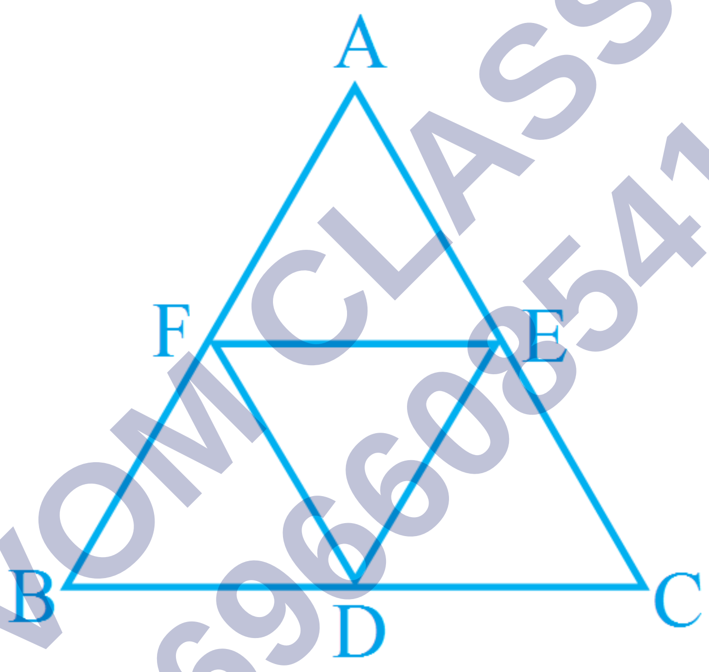
प्रश्न 5 D, E और F क्रमशः त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिंदु हैं। दर्शाइए कि-

i. BDEF एक समांतर चतुर्भुज है।

ii. $\operatorname{ar}(\mathrm{DEF})=\frac{1}{4}\operatorname{ar}(\mathrm{ABC})$

iii. $\operatorname{ar}(\mathrm{BDEF})=\frac{1}{2}\operatorname{ar}(\mathrm{ABC})$

उत्तर-



दिया है- D, E और F क्रमशः त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिंदु हैं।

सिद्ध करना है-

i. BDEF एक समांतर चतुर्भुज है।

ii. $\text{ar}(\text{DEF}) = \frac{1}{4}\text{ar}(\text{ABC})$

iii. $\text{ar}(\text{BDEF}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABC})$

प्रमाण- (1) $\triangle\text{ABC}$में F तथा E भुजाएँ AB तथा AC के क्रमश: मध्य-बिंदु है।

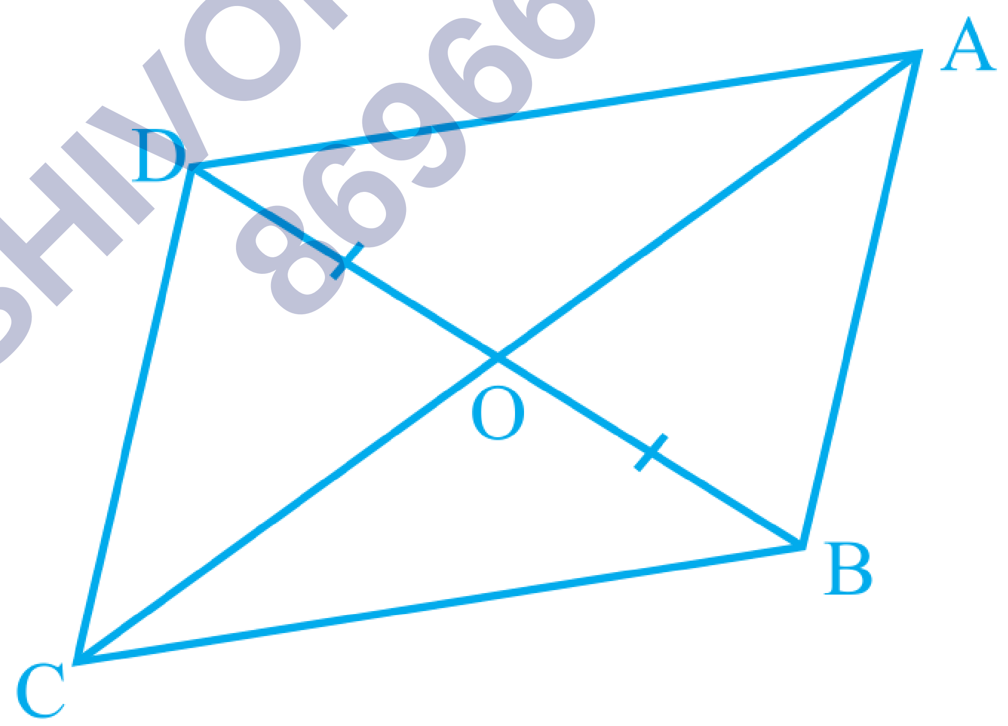
अत: मध्य-बिंदु प्रमेय से $\text{FE} \,||\, \text{BC}$ तथा $\text{FE} = \frac{1}{2}\text{BC}$

या $\text{ar}(\text{DEF}) = \frac{1}{4}\text{ar}(\text{ABC}) \ldots (2)$

या $\text{ar}(\text{BDEF}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABC}) \ldots (3)$

प्रश्न 6 चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OB = OD है। यदि AB = CD है, तो दर्शाइए कि

i. ar(DOC) = ar(AOB)
ii. ar(DCB) = ar(ACB)
iii. DA || CB या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।



[**संकेत-** D और B से AC पर लम्ब खीचिए।]

उत्तर- दिया है- चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OB = OD है। यदि AB = CD है।

सिद्ध करना है-

i. ar(DOC) = ar(AOB)
ii. ar(DCB) = ar(ACB)
iii. DA || CB या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रमाण- $\triangle DOC$ तथा $\triangle AOB$ में CD = AB(दिया है) OD = OB(दिया है)

$\angle COD = \angle AOB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

इसलिए, SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle DOC \cong \triangle AOB$

$\angle DCO = \angle AOB$ ...(1)

चूँकि $\triangle DOC \cong \triangle AOB$

इसलिए ar(DOC) = ar(AOB) ...(2)

(सर्वांगसम त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते है)

समी. (2) दोनों तरफ ar(BOC) जोड़ने पर

ar(DOC) + ar(BOC) = ar(AOB) + ar(BOC)

या ar(DCB) = ar(ACB) समी. (1) से

$\angle DCO = \angle BAO$ (एकांतर कोण)

इसलिए, CD || AB और CD = AB दिया है।

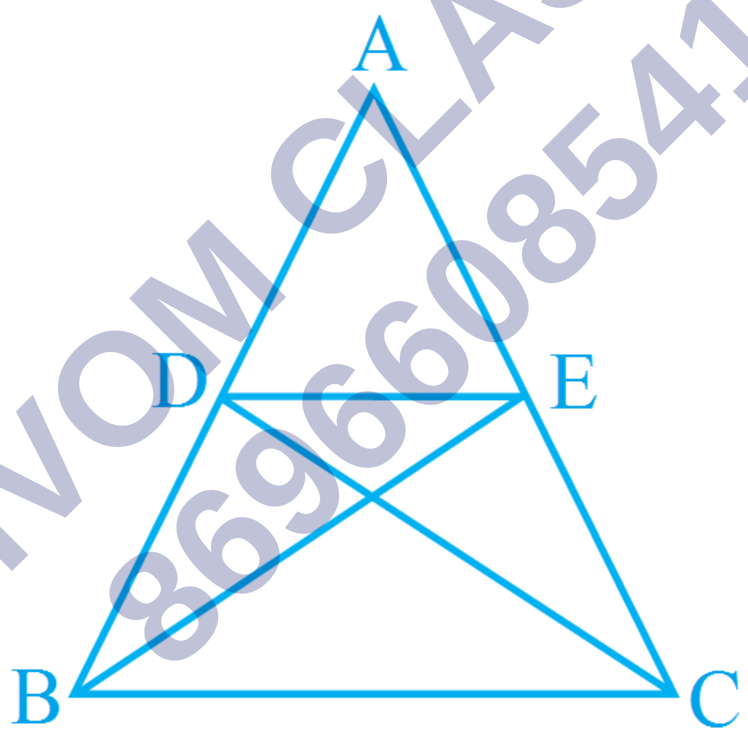
अत: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

(सम्मुख भुजाओं के एक युग्म बराबर और समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।)

इसलिए DA || CB या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रश्न 7 बिंदु D और E क्रमश: DABC कि भुजाओं AB और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि ar(DBC) = ar(EBC) है। दर्शाइए कि DE || BC है।

उत्तर- दिया है- बिंदु D और E क्रमश: DABC कि भुजाओं AB और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि ar(DBC) = ar(EBC) है



सिद्ध करना है- DE || BC

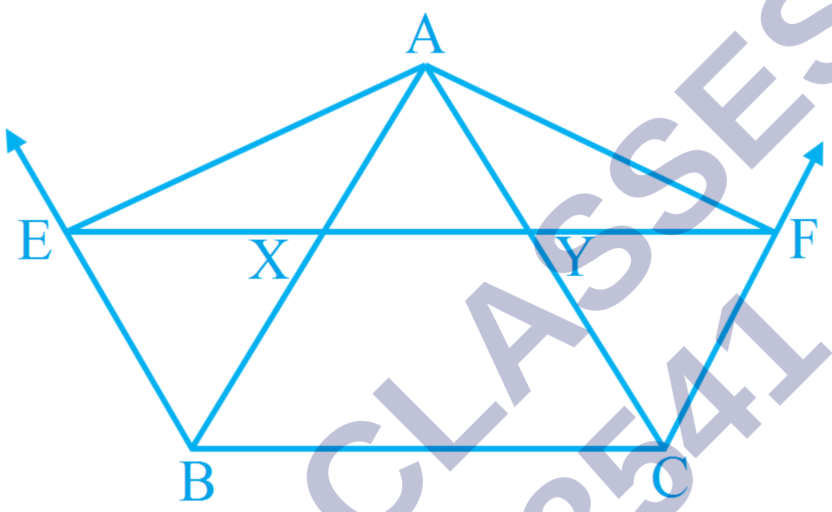
प्रमाण- △DBC और △EBC एक ही आधार BC और क्षेत्रफल में बराबर है क्योंकि ar(DBC) = ar(EBC) दिया है।

अत: DE || BC

प्रश्न 8 XY त्रिभुज ABC की भुजा BC के समांतर एक रेखा है। यदि BE || AC और CF || AB रेखा XY से क्रमशः E और F पर मिलती है, तो दर्शाइए कि-

ar(ABE) = ar(ACF)

उत्तर-



दिया है- XY त्रिभुज ABC की भुजा BC के समांतर एक रेखा है। यदि BE || AC और CF || AB रेखा XY से क्रमश : E और F पर मिलती है।

सिद्ध करना है- ar(ABE) = ar(ACF)

रचना- E तथा F को A से मिलाया।

प्रमाण- BC || XY और BE || AC दिया है, इसलिए BCYE एक समांतर चतुर्भुज है।

इसी प्रकार BC || XY और CE || AB दिया है अत: BCFX भी समांतर चतुर्भुज है।

अब समांतर चतुर्भुज BCYE तथा BCFX एक ही आधार BC और BC || XY के मध्य-स्थित है

इसलिए ar(BCYE) = ar(BCFX) ...(1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते है)

$\triangle ABE$ और ||gm BCYE एक ही आधार BE और BE || AC के मध्य-स्थित है।

इसलिए $\mathrm{ar}(ABE) = \frac{1}{2}\mathrm{ar}(BCYE) \ldots (2)$

इसप्रकार $\triangle ACF$ और ||gm BCFX एक ही आधार CF और CF || AB के मध्य स्थित है।

इसलिए $\mathrm{ar}(ACF) = \frac{1}{2}\mathrm{ar}(BCFX)$

अथवा $\mathrm{ar}(ACF) = \frac{1}{2}\mathrm{ar}(BCYE)$ समीकरण (1) से ...(3)

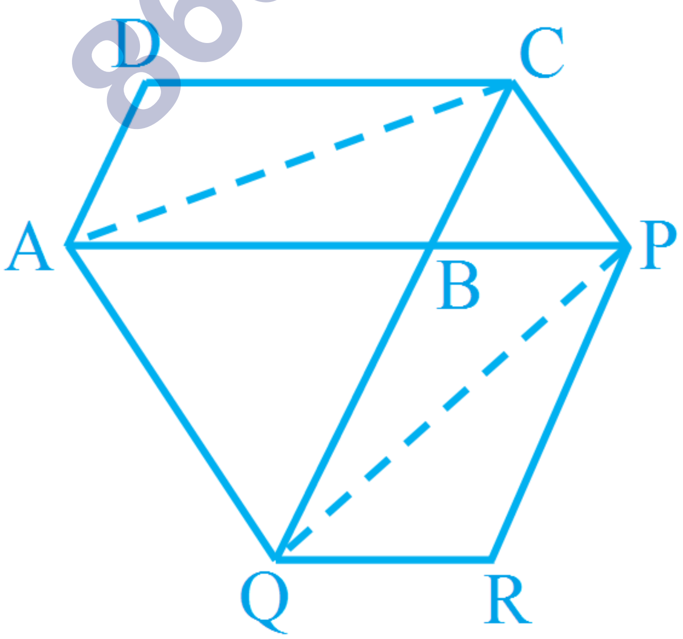
समीकरण (2) तथा (3) से

$\mathrm{ar}(ABE) = \mathrm{ar}(ACF)$

प्रश्न 9 समान्तर चतुर्भुज ABCD की एक भुजा AB को एक बिंदु P तक बढाया गया है। A से होकर CP के समांतर खिंची गई रेखा बढाई गई CB को Q पर मिलती है और फिर समांतर चतुर्भुज PBQR को पूरा किया गया है। दर्शाइए कि ar(ABCD) = ar(PBQR) है।

[**संकेत-** AC और PQ को मिलाइए। अब ar(ACQ) और ar(APQ) कि तुलना कीजिये।]

उत्तर-



दिया है- ABCD तथा PBQR समांतर चतुर्भुज है।

जहाँ AQ || CP है।

सिद्ध करना है- ar(ABCD) = ar(PBQR)

अतः $\mathrm{ar}(\mathrm{ABC}) = \frac{1}{2}\mathrm{ar}(\mathrm{ABCD}) \ldots (1)$

||gm PBQR का PQ भी एक विकर्ण है।

इसलिए $\mathrm{ar}(\mathrm{PQB}) = \frac{1}{2}\mathrm{ar}(\mathrm{PBQR}) \ldots (2)$

प्रमाण- ||gm ABCD का AC एक विकर्ण है।

△ACQ तथा △APQ एक ही आधार AQ तथा CP || AQ के मध्य स्थित है।

अत: ar(ACQ) = ar(APQ) ...(3)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।)

समीकरण (3) में दोनों तरफ ar(ABQ) घटाने पर

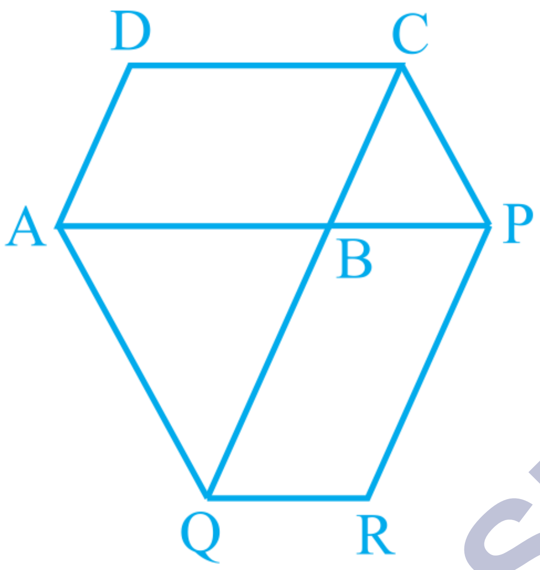
ar(ACQ) - ar(ABQ) = ar(APQ) - ar(ABQ)

या ar(ABC) = ar(PBQ)

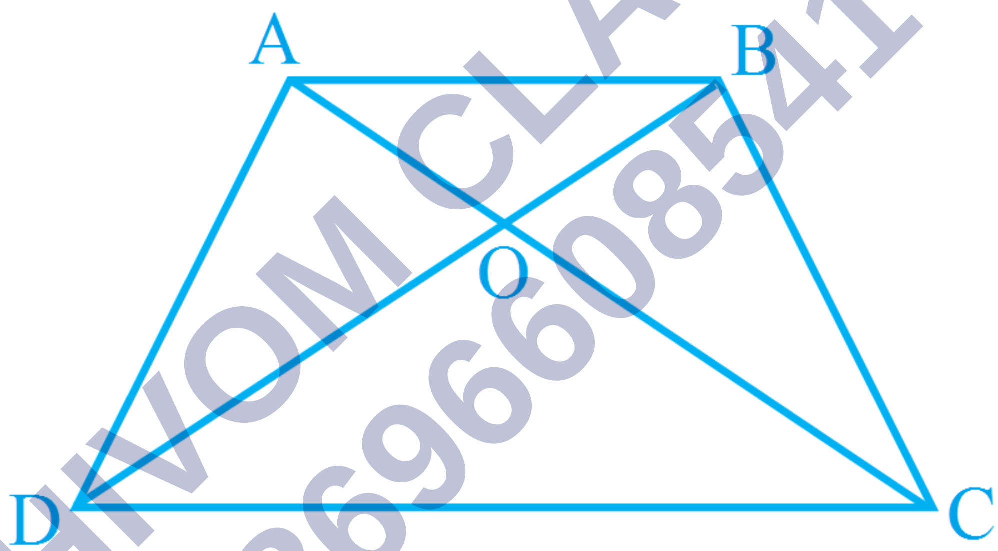
$\frac{1}{2}\mathrm{ar}(\mathrm{ABCD}) = \frac{1}{2}\ \mathrm{ar}(\mathrm{PBQR})$ समी. (1) तथा (2)

$\mathrm{ar}(\mathrm{ABCD}) = \mathrm{ar}(\mathrm{PBQR})$

प्रश्न 10 एक समलंब ABCD, जिसमें AB || DC हैं, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि ar(AOD) = ar(BOC) है।



उत्तर-



दिया है- एक समलंब ABCD, जिसमें AB || DC हैं, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है- ar(AOD) = ar(BOC)

प्रमाण- △ACD तथा △BCD एक ही आधार DC तथा AB || DC के बीच स्थित है।

अत: ar(ACD) = ar(BCD) ...(1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।)

दोनों तरफ ar(COD) घटाने पर

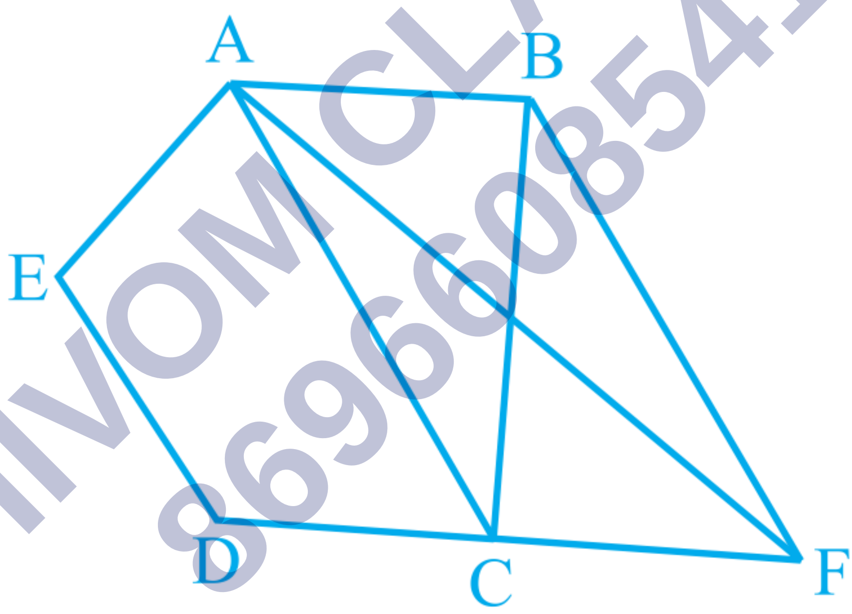
ar(ACD) - ar(COD) = ar(BCD) - ar(COD)

या ar(AOD) = ar(BOC) इति सिद्धम्।

प्रश्न 11 ABCDE एक पंचभुज है। B से होकर AC के समांतर खिंची गई रेखा बढाई गई DC को F पर मिलती है। दर्शाइए कि

i. ar(ACB) = ar(ACF)
ii. ar(AEDF) = ar(ABCDE)

उत्तर-



दिया है- ABCDE एक पंचभुज है। B से होकर AC के समांतर खिंची गई रेखा बढाई गई DC को F पर मिलती है।

सिद्ध करना है-

i. ar(ACB) = ar(ACF)
ii. ar(AEDF) = ar(ABCDE)

प्रमाण- $AC \parallel BF$ दिया है।

$\triangle ACB$ और $\triangle ACF$ एक ही आधार AC तथा $AC \parallel BF$ के बीच स्थित है।

अतः $ar(ACB) = ar(ACF)$ ...(1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।)

अब दोनों तरफ $ar(ACDE)$ जोड़ने पर

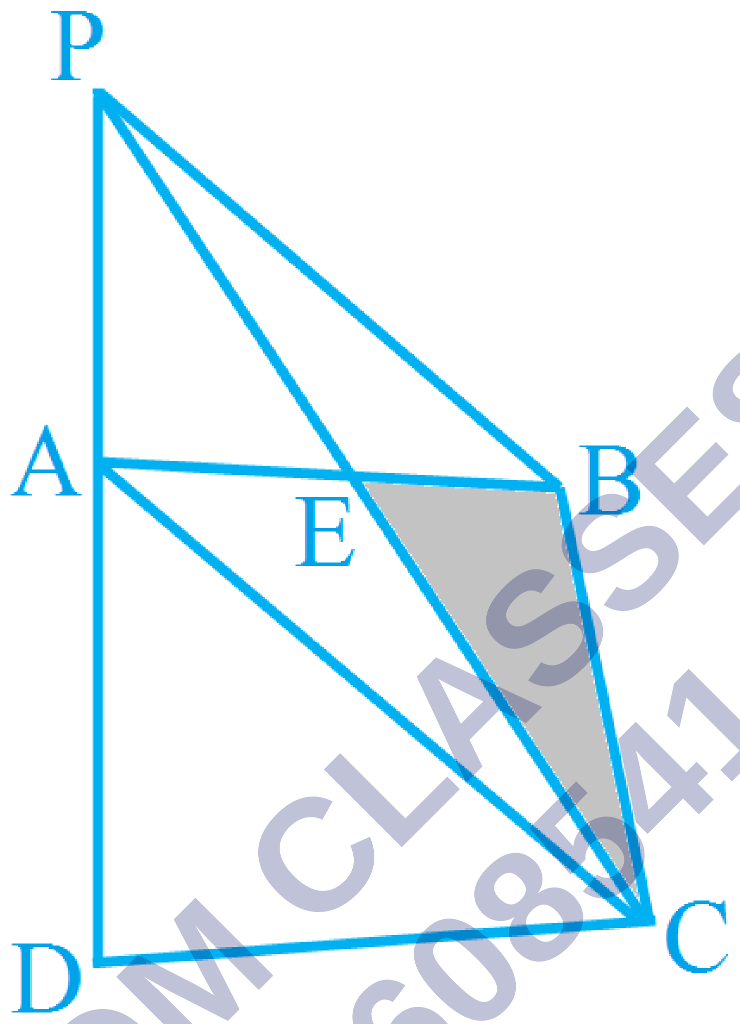
$ar(ACB) + ar(ACDE) = ar(ACF) + ar(ACDE)$

या $ar(ABCDE) = ar(AEDF)$

या $ar(AEDF) = ar(ABCDE)$ इति सिद्धम्।

प्रश्न 12 गाँव के एक निवासी इतवारी के पास एक चतुर्भुजाकार भूखंड था। उस गाँव की ग्राम पंचायत ने उसके भूखंड के एक कोने से उसका कुछ भाग लेने का निर्णय लिया ताकि वहाँ एक स्वास्थ्य केन्द्र का निर्माण कराया जा सके। इतवारी इस प्रस्ताव को इस प्रतिबन्ध् के साथस्वीकार कर लेता है कि उसे इस भाग के बदले उसी भूखंड के संलग्न एक भाग ऐसा दे दिया जाए कि उसका भूखंड त्रिभुजाकार हो जाए। स्पष्ट कीजिए कि इस प्रस्ताव को किस प्रकार कार्यान्वित किया जा सकता है।

उत्तर-



दिया है- ABCD एक चतुर्भुज है। ar(BEC) स्वास्थ्य केंद्र के लिए भूखंड है।

सिद्ध करना है- ar(ABCD) = ar(PCD)

रचना- A को C से मिलाया और AB के बढ़े हुए भाग P बिंदु से AC || PB खिंचा।

प्रमाण- △ACP तथा △ACB एक ही आधार AC तथा AC || PB के बीच स्थित है।

अत: ar(ACP) = ar(ACB) ...(1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं)

ar(AEC) दोनों तरफ घटाने पर

ar(ACP) - ar(AEC) = ar(ACB) - ar(AEC)

या ar(AEP) = ar(BEC) ...(2)

अत: ar(BEC) स्वास्थ्य केंद्र है और ar(AEP) के बदले मिला भूखंड है।

अब समीकरण (2) में दोनों तरफ ar(AECD) जोड़ने पर

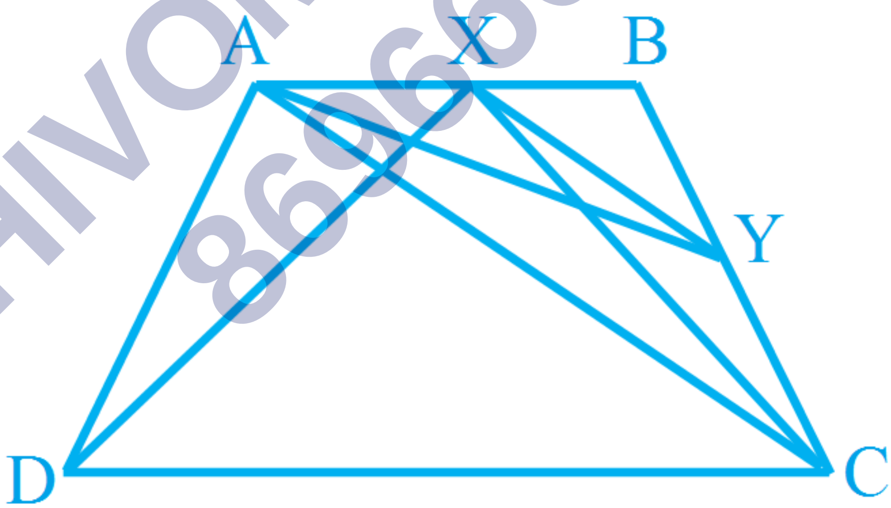
ar(BEC) + ar(AECD) = ar(AEP) + ar(AECD)

या ar(ABCD) = ar(PCD)

प्रश्न 13 ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है और AC के समांतर एक रेखा AB को X पर और BC को Y पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि ar(ADX) = ar(ACY) है।

[**संकेत-** CX को मिलाइए]

उत्तर-



दिया है- ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है और AC के समांतर एक रेखा AB को X पर और BC को Y पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है- ar(ADX) = ar(ACY)

रचना- CX और AY को मिलाया।

प्रमाण- $\triangle ADX$ तथा $\triangle ACX$ एक ही आधार AX और AB || DC के मध्य स्थित है।

अत: ar(ADX) = ar(ACX) ...(1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।)

अब $\triangle ACY$ तथा $\triangle ACX$ एक ही आधार AC तथा AC || XY के बीच स्थित है।

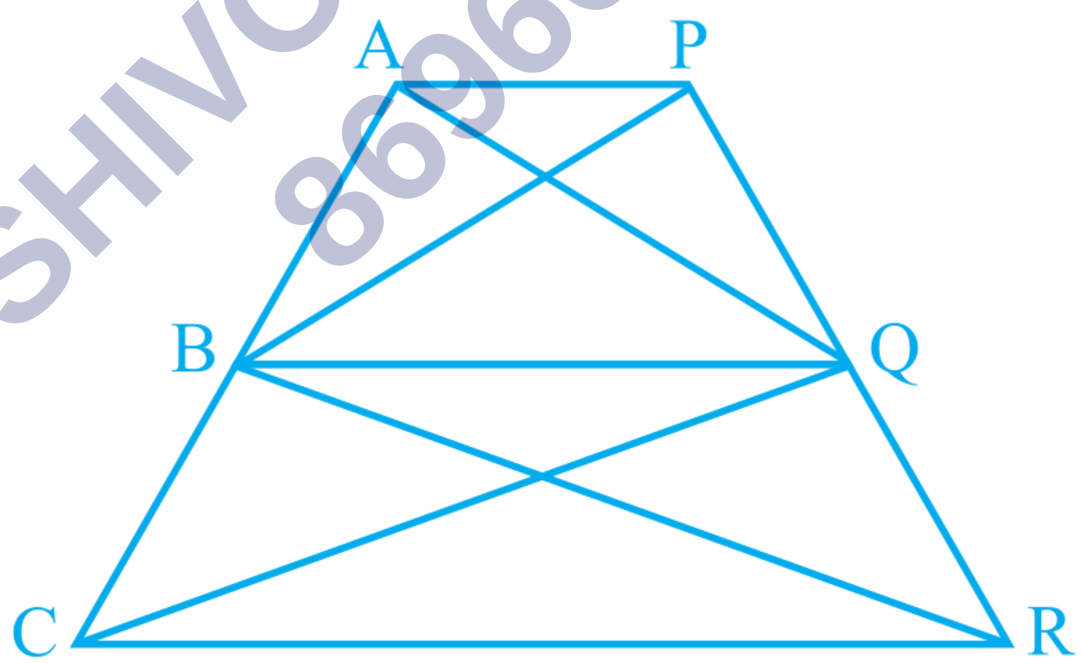
अत: ar(ACY) = ar(ACX) ...(2)

समीकरण (1) तथा (2) से हमें प्राप्त होता है।

ar(ADX) = ar(ACY)

प्रश्न 14 दी गई आकृति में, AP || BQ || CR है। सिद्ध कीजिए कि ar(AQC) = ar(PBR) है।

उत्तर-



दिया है- दी गई आकृति में, AP || BQ || CR है।

सिद्ध करना है- ar(AQC) = ar(PBR)

प्रमाण- AP || BQ दिया है अत: △ABQ तथा △PQB एक ही आधार BQ तथा AP || BQ के मध्य स्थित है।

∴ ar(ABQ) = ar(PQB) ...(1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।)

इसी प्रकार, BQ || CR दिया है और △BQC तथा △BQR एक ही आधार BQ तथा BQ || CR के बीच स्थित है।

∴ ar(BQC) = ar(BQR) ...(2)

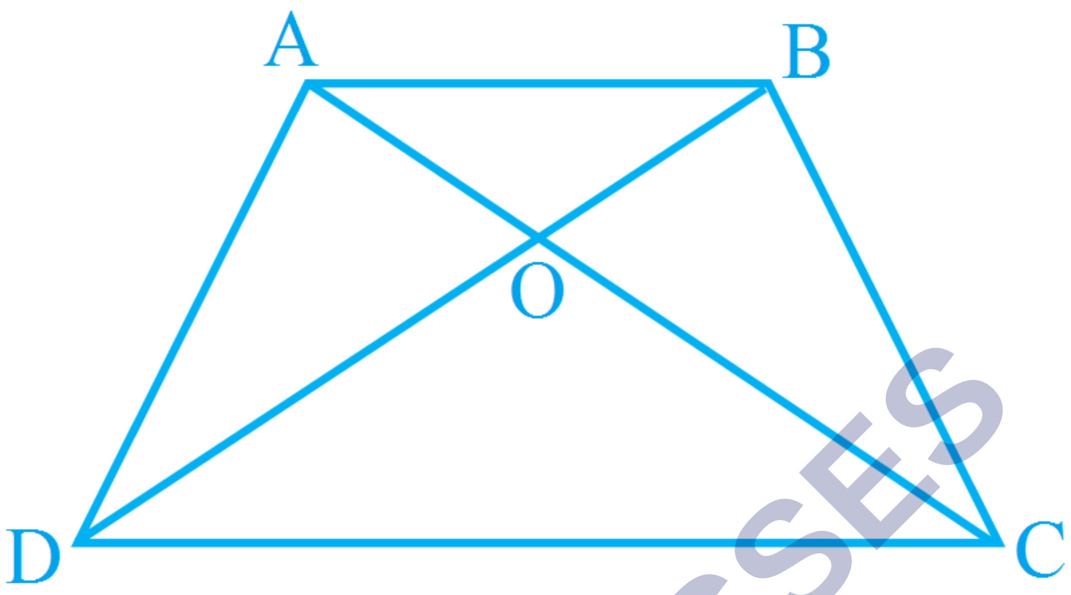
समीकरण (1) तथा (2) जोड़ने पर

ar(ABQ) + ar(BQC) = ar(PQB) + ar(BQR)

या ar(AQC) = ar(PBR)

प्रश्न 15 चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि ar(AOD) = ar(BOC) है। सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समलंब है।

उत्तर-



दिया है- चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि ar(AOD) = ar(BOC) है।

सिद्ध करना है- ABCD एक समलंब है।

प्रमाण- ar(AOD) = ar(BOC) ...(1) (दिया है)

समीकरण (1) में दोनों तरफ

ar(COD) जोड़ने पर ar(AOD) + ar(COD) = ar(BOC) + ar(COD)

या ar(ACD) = ar(BCD)

अब △ACD तथा △BCD एक ही आधार CD और ar(ACD) = ar(BCD) है।

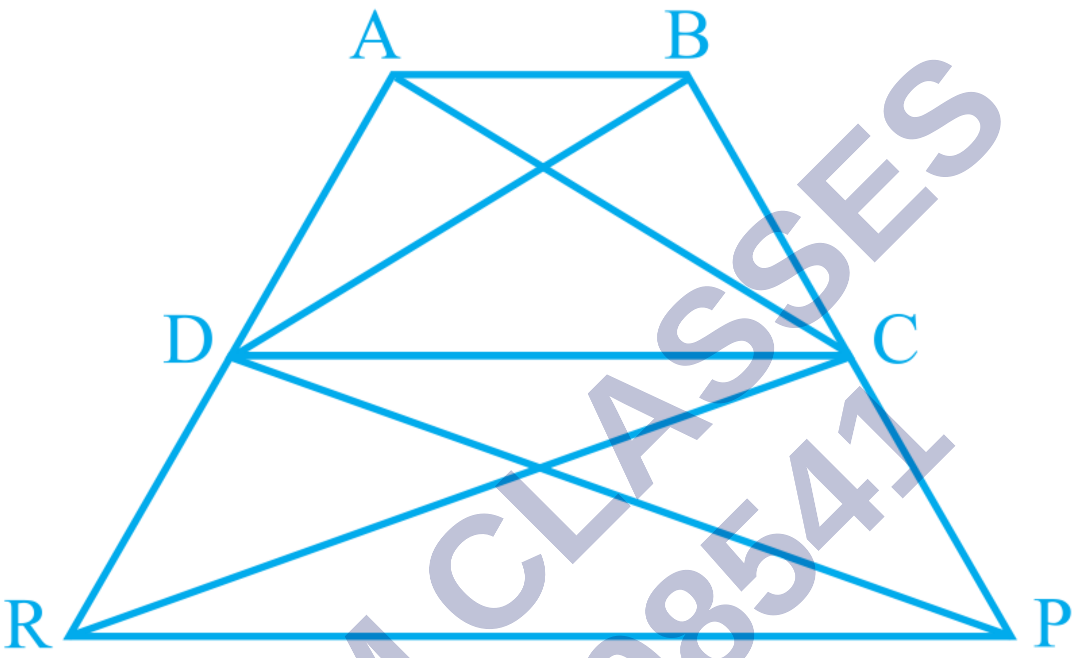
अत: ये दोनों त्रिभुज अवश्य ही एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित है।

इसलिए AB || DC है।

चतुर्भुज ABCD में AB || DC है अत: ABCD एक समलंब है।

प्रश्न 16 दी गई आकृति में, ar(DRC) = ar(DPC) है और ar(BDP) = ar(ARC) है। दर्शाइए कि दोनों चतुर्भुज ABCD और DCPR समलंब है।

उत्तर-



दिया है- ar(DRC) = ar(DPC) है और ar(BDP) = ar(ARC) है।

सिद्ध करना है- चतुर्भुज ABCD और DCPR समलंब है।

प्रमाण- ar(ARC) = ar(BDP) ...(1)

(दिया है) और ar(DRC) = ar(DPC) ...(2) (दिया है)

समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर

ar(ARC) – ar(DRC) = ar(BDP) – ar(DPC)

या ar(ADC) = ar(BCD) ...(3)

अब △ADC और △BCD एक ही आधार DC और क्षेत्रफल में बराबर हैं समी. (3) से

अत: (एक ही आधार और क्षेत्रफल में बराबर त्रिभुज एक ही समांतर रेखाओं के मध्य-स्थित होते हैं।)

इसलिए, AB || CD है अत: ABCD एक समलंब है।

अब $\triangle DRC$ और $\triangle DPC$ एक ही आधार DC और समी. (2) से क्षेत्रफल में बराबर हैं।

अत: DC || RP है इसलिए DCPR एक समलंब है।

अत: चतुर्भुज ABCD और DCPR समलंब है।

प्रश्नावली 9.4 (पृष्ठ संख्या 198-200)

प्रश्न 1 समान्तर चतुर्भुज ABCD और आयत ABEF एक ही आधार पर स्थित हैं और उनके क्षेत्रफल बराबर हैं। दर्शाइए कि समान्तर चतुर्भुज का परिमाप आयत के परिमाप से अधिक है।

उत्तर- दिया है- समान्तर चतुर्भुज ABCD का आधार AB तथा इसी आधार AB पर ही समान क्षेत्रफल को आयते ABEF स्थित है।

सिद्ध करना है- समान्तर चतुर्भुज ABCD का परिमाप > आयत ABEF का परिमाप

उपपत्ति: $\triangle ADF$ में,

$\angle F = 90°$ (आयत का अन्त:कोण) $AF \perp EF$

$AF < AD$ (AD कर्ण है) ...(1)

इसी प्रकार $\triangle BCE$ में, $\angle E = 90°$ (आयत का बहिष्कोण = 90°)

$BE \perp CD$

$BE < BC$ ...(2)

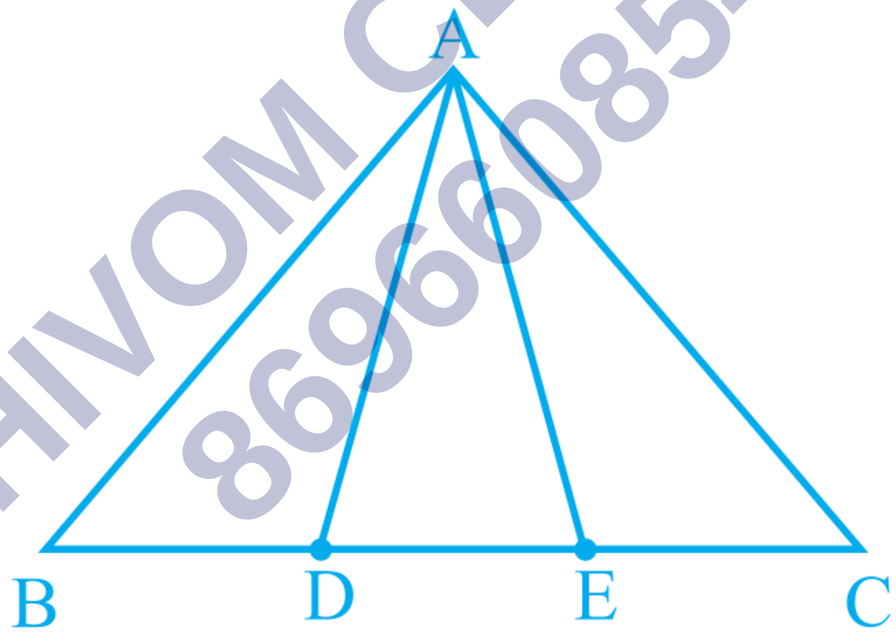
समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर $(AF + BE) < (AD + BC)$

$AB = EF$ (ABDF आयत है।) और $AB = DC$ (ABCD समान्तर चतुर्भुज है।)

दोनों ओर क्रमशः $(AB + EF)$ और $(AB + CD)$ जोड़ने पर, $AB + BE + EF + AF < AB + BC + CD + DA$ अतः समान्तर चतुर्भुज का परिमाप > आयत का परिमाप।

प्रश्न 2 दी गई आकृति में, भुजा BC पर दो बिन्दु D और E इस प्रकार स्थित हैं कि $BD = DE = EC$ है। दर्शाइए। कि $ar(ABD) = ar(ADE) = ar(AEC)$ है।

क्या आप अब उस प्रश्न का उत्तर दे सकते हैं, जो आपने इस अध्याय की 'भूमिका' में छोड़ दिया था कि "क्या बुधिया का खेत वास्तव में बराबर क्षेत्रफलों B वाले तीन भागों में विभाजित हो गया है?"



उत्तर- दिया है- भुजा BC पर D और E दो बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि $BD = DE = EC$ है।

सिद्ध करना है- $ar(\triangle ABD) = ar(\triangle ADE) = ar(\triangle AEC)$

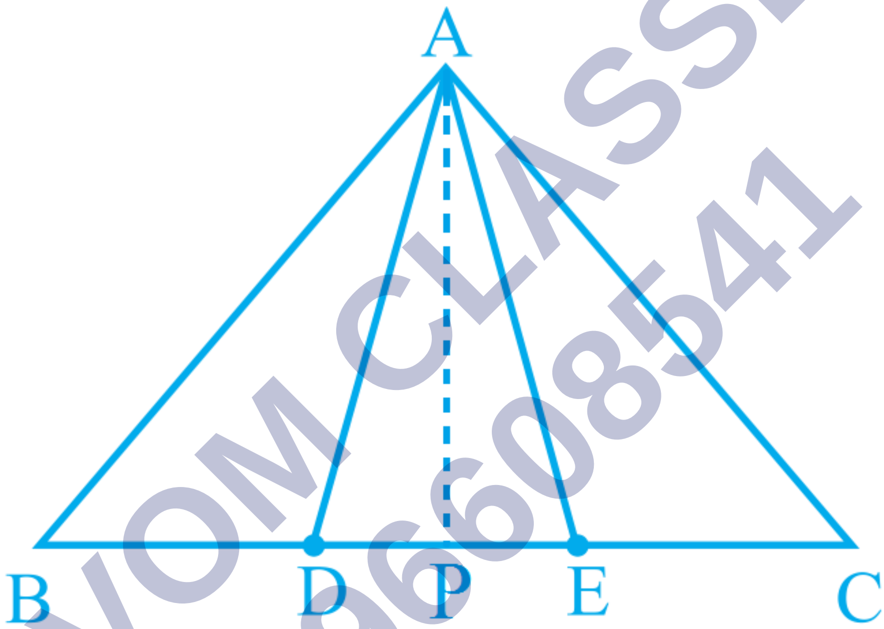
रचना- शीर्ष से BC पर शीर्षलम्ब AP खींचा।

उपपत्ति: दिया है, BD = DE = EC

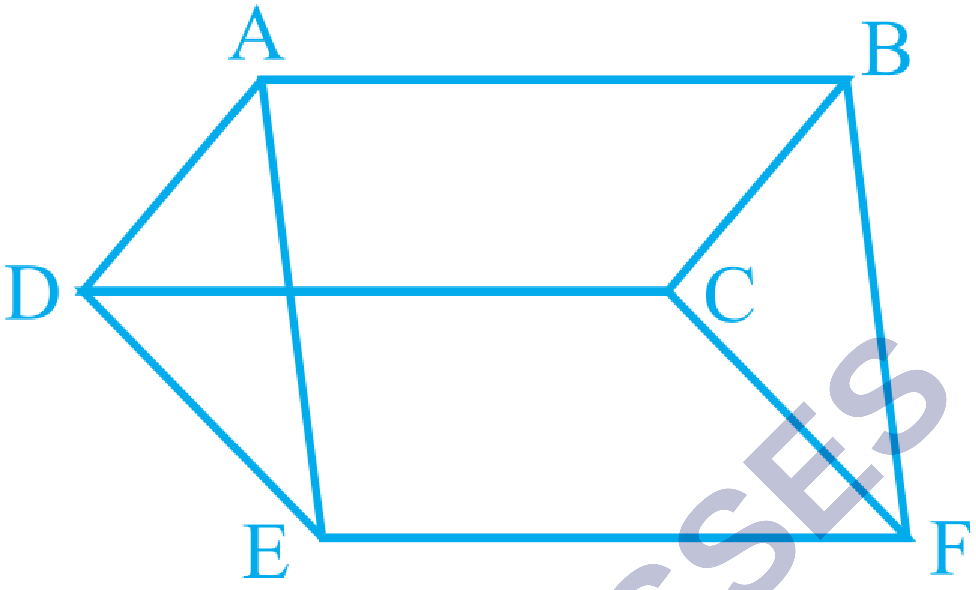
तीनों त्रिभुजों के आधार समान हैं। यह भी स्पष्ट है कि तीनों त्रिभुजों की एक ही ऊँचाई AP है।

तब तीनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल भी समान होंगे।

अतः $ar(\triangle ABD) = ar(\triangle ADE) = ar(\triangle AEC)$ किसी त्रिभुज के आधार को n समान भागों में विभक्त कर सम्मुख शीर्ष से मिलाने पर त्रिभुज समान n भागों में विभक्त हो जाता है।



प्रश्न 3 दी गई आकृति में, ABCD, DCFE और ABFE समान्तर चतुर्भुज हैं। दर्शाइए कि ar(ADE) = ar(BCF) है।



उत्तर- दिया है- दी गई आकृति में चतुर्भुज ABCD, चतुर्भुज DCFE और चतुर्भुज ABFE समान्तर चतुर्भुज हैं।

सिद्ध करना है- ar(△ADE) = ar(△BCF)

उपपत्ति: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। AD = BC DCFE एक समान्तर चतुर्भुज है। DE = CF

ABFE, एक समान्तर चतुर्भुज है।

AE = BF

अब △ADE तथा △BCF में,

AD = BC

DE = CF (अभी सिद्ध किया है)

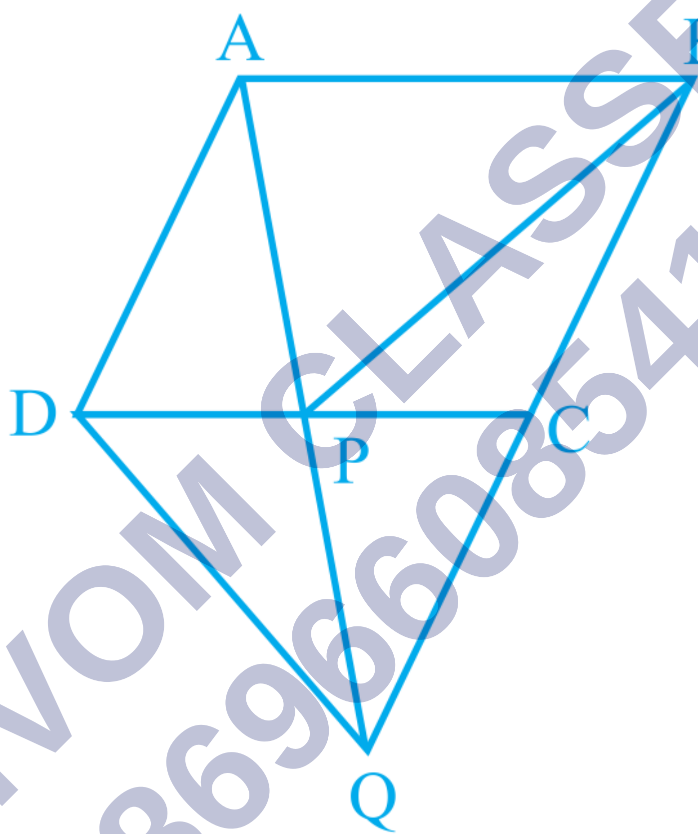
AE = BF

△ADE = △BCF (भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता से)

ar(△ADE) = ar(△BCF)

प्रश्न 4 दी गई आकृति में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। BC को बिन्दु 1 तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि AD = CQ है। यदि AQ भुजा DC को P पर प्रतिच्छेद करती है तो दर्शाइए कि ar (BPC) = ar (DPQ) है।

[**संकेत-** AC को मिलाइए।]



उत्तर- दिया है- □ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। BC को बिन्दु तक इस प्रकार बढ़ाया गया है। कि AD = CQ रेखाखण्ड AQ को मिलाया गया है जो DC को बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है- ar (ABPC) = ar (ADPQ) उपपत्ति

$\because \square$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ AD=BC और दिया है कि AD = CQ

$\therefore$ BC =CQ अर्थात् C, BQ का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore$ PC, $\triangle$PBQ की माध्यिका है जो इसे A BPC और APCQ में विभक्त करती है।

$\therefore \operatorname{ar}(\triangle BPC) = \operatorname{ar}(\triangle PCQ) \ldots (1)$

AD =CQ और ADICQ ($\because$ AD||BC)

$\therefore \square$ ADQC एक समान्तर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AQ तथा CD है।

$\therefore$ P,CD का मध्य-बिन्दु है या PQ $\triangle$ ADQCकी माध्यिका है जो इसे $\triangle$DPQ और $\triangle$PCQ में विभक्त करती है।

$\therefore \operatorname{ar}(\triangle DPQ) = \operatorname{ar}(\triangle PCQ)$ तब समीकरण (1) व (2) से,

$\operatorname{ar}(\triangle BPC) = \operatorname{ar}(\triangle DPQ)$

प्रश्न 5 दी गई आकृति में, ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिन्दु है। यदि AE भुजा BC को F पर प्रतिच्छेद करती है तो दर्शाइए कि

(i) $\operatorname{ar}(BDE) = \frac{1}{4}\operatorname{ar}(ABC)$

(ii) $\operatorname{ar}(BDE) = \frac{1}{2}\operatorname{ar}(BAE)$

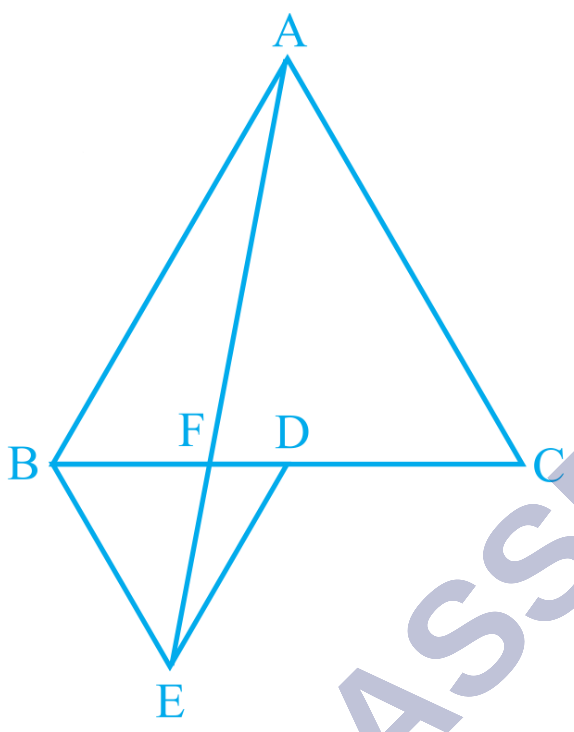
(iii) $\operatorname{ar}(ABC) = 2\operatorname{ar}(BEC)$

(iv) $\operatorname{ar}(BFE) = \operatorname{ar}(AFD)$

(v) $\operatorname{ar}(BFE) = 2\operatorname{ar}(FED)$

(vi) $\operatorname{ar}(FED) = \frac{1}{8}\operatorname{ar}(AFC)$

[**संकेत-** EC और AD को मिलाइए। दर्शाइए कि BE || AC और DE || AB है, इत्यादि।]



उत्तर-

(i)

दिया है- दी गई आकृति में $\triangle ABC$ और $\triangle BDE$ दो समबाहु त्रिभुज

इस प्रकार हैं कि D भुजा BC को मध्य-बिन्दु है। रेखाखण्ड AE खींचा गया है जो BC को F पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है- $\operatorname{ar}(\triangle BDE) = \frac{1}{4}\operatorname{ar}(\triangle ABC)$

रचना रेखाखण्ड BC और AD खींचे।

उत्पत्ति $\because$ D,BC का मध्य-बिन्दु है

$\therefore BD = DC$ या $BC = \frac{1}{2}BC$

तब समबाहु $\triangle BDE$ का क्षेत्रफल $= \frac{(BD)^2\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \operatorname{ar}(\triangle BDE) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}BC\right)^2\sqrt{3}$

$\therefore \operatorname{ar}(\triangle \mathrm{BDE})=\frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{BC}^2 \sqrt{3}}{4}\right] \ldots(1)$

तब समबाहु $\triangle \mathrm{BDE}$ का क्षेत्रफल $=\frac{(\mathrm{BD})^2 \sqrt{3}}{4}$

$\therefore \operatorname{ar}(\triangle \mathrm{BDE})=\frac{\mathrm{BC}^2 \sqrt{3}}{4} \ldots(2)$

तब समीकरण (1) व (2) से

$\therefore \operatorname{ar}(\triangle \mathrm{BDE})=\frac{1}{4} \operatorname{ar}(\triangle \mathrm{ABC})$

(ii)

दिया है- दी गई आकृति में $\triangle \mathrm{ABC}$ और $\triangle \mathrm{BDE}$ दो समबाहु त्रिभुज

इस प्रकार हैं कि D भुजा BC को मध्य-बिन्दु है। रेखाखण्ड AE खींचा गया है जो BC को F पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है- $\operatorname{ar}(\triangle \mathrm{BDE})=\frac{1}{2} \operatorname{ar}(\triangle \mathrm{ABE})$

$\because \triangle \mathrm{ABC}$ समबाहु त्रिभुज है

$\angle \mathrm{ACB}=60^{\circ}$ और $\triangle \mathrm{BDE}$ समबाहु त्रिभुज है

$\therefore \angle \mathrm{DBE}=60^{\circ}$ या $\angle \mathrm{CBE}=60^{\circ}$

$\because \angle \mathrm{ACE}$ और $\triangle \mathrm{CBE}$ समान एकान्त कोण है जो BE तथा AC को BC क्र काटने से बने है।

$\therefore \mathrm{BE} \| \mathrm{AC}$

$\because \triangle \mathrm{BAE}$ और $\triangle \mathrm{BEC}$ समान आधार BE पर सामन्तर रेखाओ BE व AC के मध्य स्थिर है।

$\therefore \operatorname{ar}(\triangle \mathrm{BDE})=\operatorname{ar}(\triangle \mathrm{DEC}) \ldots(3)$

$\because$ D,BC का मध्य बिंदु है

$\because$ DE, $\triangle \mathrm{BEC}$

$$\Rightarrow \text{ar}(\triangle BDE) = \frac{1}{2}\text{ar}(\triangle BEC)$$

$$2\text{ar}(\triangle BDE) = \text{ar}(\triangle BEC) \ldots (4)$$

तब समीकरण (3) व (4) से

$$2\text{ar}(\triangle BDE) = \text{ar}(\triangle BAE)$$

$$2\text{ar}(\triangle BDE) = \frac{1}{2}\text{ar}(\triangle BAE)$$

(iii)

दिया है- दी गई आकृति में $\triangle ABC$ और $\triangle BDE$ दो समबाहु त्रिभुज

इस प्रकार हैं कि D भुजा BC को मध्य-बिन्दु है। रेखाखण्ड AE खींचा गया है जो BC को F पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है- $\text{ar}(\triangle BDE) = 2\text{ar}(\triangle ABE)$

समीकरण (4) से

$$2\text{ar}(\triangle BDE) = \text{ar}(\triangle BEC)$$

परन्तु परिणाम (1) से

$$2\text{ar}(\triangle ABC) = \frac{1}{4}\text{ar}(\triangle BAC)$$

$$\therefore 2\frac{1}{4}\text{ar}(\triangle BDE) = \text{ar}(\triangle BEC)$$

या $\frac{1}{2}\text{ar}(\triangle ABC) = \text{ar}(\triangle BEC)$

अतः $\text{ar}(\triangle ABC) = 2\text{ar}(\triangle BEC)$

(iv)

दिया है- दी गई आकृति में $\triangle ABC$ और $\triangle BDE$ दो समबाहु त्रिभुज

इस प्रकार हैं कि D भुजा BC को मध्य-बिन्दु है। रेखाखण्ड AE खींचा गया है जो BC को F पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है- $\text{ar}(\triangle BFE) = \text{ar}(\triangle AFD)$

$\because \triangle BDE$ समबाहु त्रिभुज है।

$\angle BDE = 60^\circ$ और $\triangle ABC$ समबाहु त्रिभुज है।

$\angle ABC = 60^\circ \angle ABD = 60^\circ$

$\angle BDE$ और $\angle ABD$ बराबर एकान्तर कोण हैं जो AB और DE को BD के काटने से बने हैं।

$\therefore AB || DE$

$\therefore (\triangle BDE)$ और $\triangle ADE$ एक ही आधार DE और एक ही समान्तर रेखाओं AB और DE के बीच बने हैं।

$\therefore ar\triangle BDE = ar\triangle ADE$

$ar(\triangle BFE) + ar(\triangle FED) = ar(\triangle\ FED) + ar(\triangle AFD)$

तब $ar\triangle BFE = ar\triangle AFD$

(v)

दिया है- दी गई आकृति में △ABC और △BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC को मध्य-बिन्दु है। रेखाखण्ड AE खींचा गया है जो BC को F पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है-

$ar(\triangle BFE) = 2ar(\triangle FED)$

$\because \triangle ABC$ की भुजा $\triangle BDE$ की भुजा से दो गुनी है।

$\therefore \triangle ABC$ की ऊँचाई भी $\triangle BDE$ की ऊँचाई से दो गुनी होगी।

$\therefore GE : AD = 1 : 2$

यही अनुपात GF और FD में भी होगा; अत: $GF : FD = 1 : 2$

परन्तु $GD = BG = \frac{1}{4} = BC$

परन्तु $GD = GF + FD$

यदि $GF = a$ तो $FD = 2a$ होगा

तब $GD = a + 2a = 3a$

तब $BC = 2BD = 2(2BG) = 4BG = 4GD = 4 \times 3a = 12a$

$\Rightarrow BG = GD = 3a$

$\Rightarrow BD = 6a$

$GE\sqrt{BE^2 - BG^2} = \sqrt{(BD^2) - (BG^2)}$

$= \sqrt{(6a^2) - (3a^2)} = \sqrt{36a^2 - 9a^2} = \sqrt{27a^2}$

$GE = 3a\sqrt{3}$

$\therefore ar(\triangle BFE) = \frac{1}{2}BE \times GE = \frac{1}{2}(BG + GF)GE$

$= \frac{1}{2}(3a + a) \times (3a\sqrt{3})$

$(GE = 3a\sqrt{3}, BG = 3a, GF = a)$

$= \frac{1}{2}4a \times 3a\sqrt{3}$

$= 6a^2\sqrt{3}$

और $ar(\triangle FED) = \frac{1}{2}FD \times GE$

$= \frac{1}{2}(2a) \times 3a\sqrt{3}\ (FD = 2a)$

$= 3a^2\sqrt{3}$

$\therefore \frac{ar(\triangle BFE) = 6a^2\sqrt{3}}{ar(\triangle FED) = 3a^2\sqrt{3}} = \frac{2}{1}$

अतः $ar(\triangle BFE) = 2ar(\triangle FED)$

(vi)

दिया है- दी गई आकृति में $\triangle ABC$ और $\triangle BDE$ दो समबाहु त्रिभुज

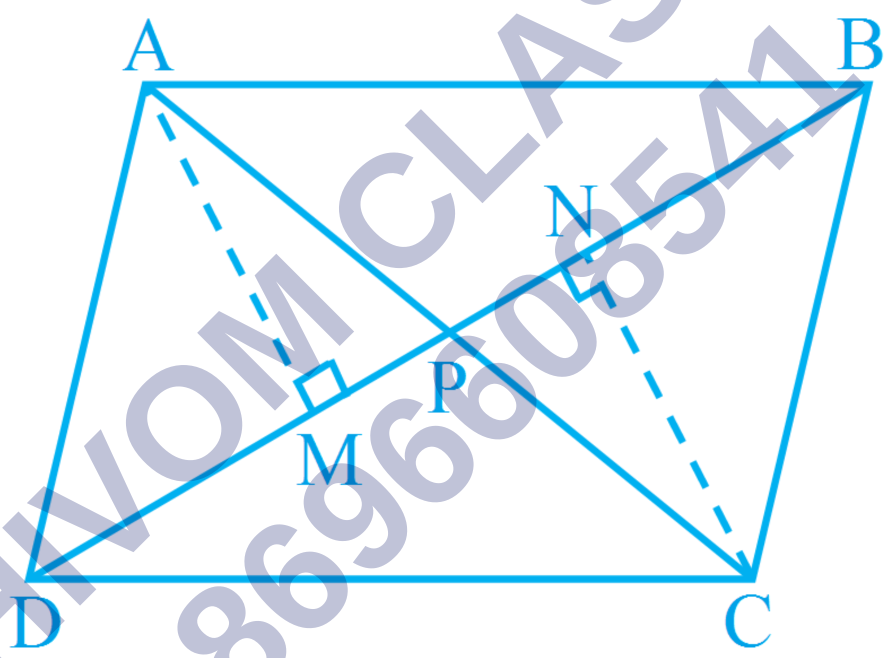
इस प्रकार हैं कि D भुजा BC को मध्य-बिन्दु है। रेखाखण्ड AE खींचा गया है जो BC को F पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है- $\operatorname{ar}(\triangle BDE)=\frac{1}{4}\operatorname{ar}(\triangle ABC)$

प्रश्न 6 चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि ar(APB) × ar(CPD) = ar(APD) × ar(BPC) है।

[**संकेत-** A और C से BD पर लम्ब खींचिए।]

उत्तर-



दिया है- $\square ABCD$ के विकर्ण AC और BD है जो परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते है।

सिद्ध करना है- $\mathrm{ar}(\triangle APB) \times \mathrm{ar}(\triangle CPD) = \mathrm{ar}(\triangle APD) \times \mathrm{ar}(\triangle BPC)$

रचना- A तथा C पर BD क्रमशः AM व CN लम्ब खींचे

उपपत्ति- $\mathrm{ar}(\triangle APB) = \frac{1}{2}\mathrm{AM} \times \mathrm{BP} \ldots (1)$

$\mathrm{ar}(\triangle APD) = \frac{1}{2}\mathrm{AM} \times \mathrm{DP} \ldots (2)$

$\mathrm{ar}(\triangle BPC) = \frac{1}{2}\mathrm{CN} \times \mathrm{BP} \ldots (3)$

$\mathrm{ar}(\triangle CPD) = \frac{1}{2}\mathrm{CN} \times \mathrm{DP} \ldots (4)$

समीकरण (1) को (2) से भाग देने पर

$$\frac{\mathrm{ar}(\triangle APB)}{\mathrm{ar}(\triangle CPD)} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{DP}} \ldots (5)$$

समीकरण (3) को (4) से भाग देने पर

$$\frac{\mathrm{ar}(\triangle BPC)}{\mathrm{ar}(\triangle CPD)} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{DP}} \ldots (6)$$

समीकरण (5) व (6) से

$$\frac{\mathrm{ar}(\triangle APB)}{\mathrm{ar}(\triangle CPD)} = \frac{\mathrm{ar}(\triangle BPC)}{\mathrm{ar}(\triangle CPD)}$$

व्रज-गुणन से $\mathrm{ar}(\triangle APB) \times \mathrm{ar}(\triangle CPD) = \mathrm{ar}(\triangle APD) \times \mathrm{ar}(\triangle BPC)$

प्रश्न 7 P और Q क्रमशः त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और BC के मध्य-बिन्दु हैं तथा R रेखाखण्ड AP का मध्य-बिन्दु है। दर्शाइए कि-

i. $\mathrm{ar}(\triangle PRQ) = \mathrm{ar}(\triangle ARC)$

ii. $\mathrm{ar}(\triangle RQC) = \mathrm{ar}(\triangle ABC)$

iii. $\mathrm{ar}(\triangle PBQ) = \mathrm{ar}(\triangle ARC)$

उत्तर- दिया है- $\triangle ABC$ में भुजा AB का मध्य-बिन्दु Pऔर भुजा BC का मध्य-बिन्दु Q है।

बिन्दु R, रेखाखण्ड AP का मध्य-बिन्दु है।

सिद्ध करना है-

i. $\text{ar}(\triangle \text{PRQ}) = \text{ar}(\triangle \text{ARC})$

ii. $\text{ar}(\triangle \text{RQC}) = \text{ar}(\triangle \text{ABC})$

iii. $\text{ar}(\triangle \text{PBQ}) = \text{ar}(\triangle \text{ARC})$

रेखाखण्ड AQ व PC को मिलाया।

उपपत्ति-

i. Q. BC का मध्य-बिन्दु है जिससे $\text{AQ}, \triangle \text{ABC}$ की माध्यिका है।

$$\text{ar}(\triangle \text{AQB}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\triangle \text{ABC})$$

P, AB का मध्य-बिन्दु है जिससे $\text{PQ}, \triangle \text{AQB}$ की माध्यिका है।

$$\therefore \text{ar}(\triangle \text{PBQ}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\triangle \text{AQB})$$

$$\therefore \text{ar}(\triangle \text{PBQ}) = \frac{1}{2}\left[\text{ar}(\triangle \text{ABC})\right]$$

$$\therefore \text{ar}(\triangle \text{PBQ}) = \frac{1}{4}\text{ar}(\triangle \text{ABC}) \ldots (1)$$

और $\therefore \text{ar}(\triangle \text{PAC}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\triangle \text{ABC}) \ldots (2)$

ii. $\triangle \text{PAC}$ में, आधार AP का मध्य-बिन्दु R है जिससे $\text{RC}, \triangle \text{PAC}$ की माध्यिका है।

$$\therefore \text{ar}(\triangle \text{ARC}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\triangle \text{PAC}) \ldots (3)$$

समीकरण (2) व (3) से,

$$\therefore \text{ar}(\triangle \text{ARC}) = \frac{1}{4}\text{ar}(\triangle \text{ABC}) \ldots (4)$$

$\therefore \text{ar}(\triangle \text{AQB}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\triangle \text{ABC})$ (समीकरण (1) से)

परन्तु P, AB का मध्य-बिन्दु है और $PQ, \triangle AQB$ की माध्यिका है।

$$\therefore \operatorname{ar}(\triangle AQP) = \frac{1}{2}\operatorname{ar}(\triangle AQB)$$

$$\therefore \operatorname{ar}(\triangle AQP) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ar}(\triangle ABC)\right] = \frac{1}{4}\operatorname{ar}(\triangle ABC)$$

$$\therefore \operatorname{ar}(\triangle AQP) = \frac{1}{4}\operatorname{ar}(\triangle ABC)$$

$\because R, AP$ का मध्य-बिन्दु है जिससे $QR, (\triangle AQP)$ की माध्यिका है।

$$\therefore \operatorname{ar}(\triangle PRQ) = \frac{1}{2}\operatorname{ar}(\triangle AQP) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\operatorname{ar}(\triangle ABC)\right]$$

$$\therefore \operatorname{ar}(\triangle PRQ) = \frac{1}{8}\operatorname{ar}(\triangle ABC)\ldots(5)$$

अब समीकरण (5) में (4) से भाग देने पर,

$$\frac{\operatorname{ar}(\triangle PRQ)}{\operatorname{ar}(\triangle ARC)} = \frac{\frac{1}{8}\operatorname{ar}(\triangle ABC)}{\frac{1}{4}\operatorname{ar}(\triangle ABC)} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{1} \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{ar}(\triangle PRQ) = \frac{1}{2}\operatorname{ar}(\triangle ARC)$$

iii. $\operatorname{ar}(\triangle ARC) = \frac{1}{2}\operatorname{ar}(\triangle ARC)$

$$\therefore \operatorname{ar}(\triangle RBC) = \operatorname{ar}(\triangle ABC) - \operatorname{ar}(\triangle ARC)$$

$= \operatorname{ar}(\triangle RBC) = \frac{3}{4}\operatorname{ar}(\triangle ABC)$ (समीकरण (4) से)

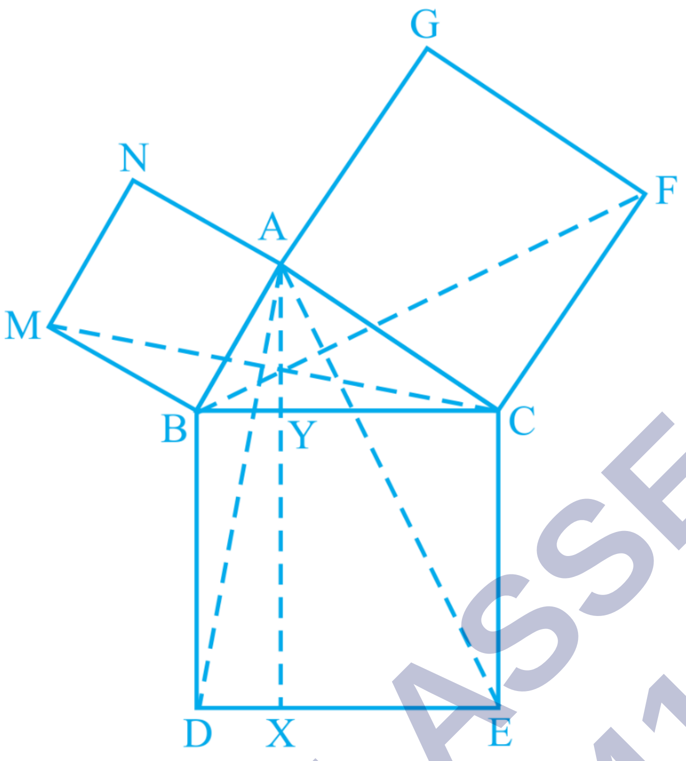
$$\therefore \operatorname{ar}(\triangle RBC) = \frac{3}{4}\operatorname{ar}(\triangle ABC)$$

परन्तु Q, BC का मध्य-बिन्दु है और $QR, \triangle RBC$ की माध्यिका है।

$$\therefore \operatorname{ar}(\triangle RQC) = \frac{1}{2}\operatorname{ar}(\triangle RBC) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\operatorname{ar}(\triangle ABC)\right]$$

अतः $\operatorname{ar}(\triangle RQC) = \operatorname{ar}(\triangle ARC)$

प्रश्न 8 दी गई आकृति में, ABC एक समकोण त्रिभुज है। जिसका कोण A समकोण है। BCED, ACFG और ABMN क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB पर बने वर्ग हैं। रेखाखण्ड AX ⊥ DE भुजा BC को बिन्दु Y पर मिलता है। दर्शाइए कि



(i) Δ MBC $\cong$ Δ ABD

(ii) ar (BYXD) = 2 ar (MBC)

(iii) ar (BYXD) = ar (ABMN)

(iv) Δ FCB $\cong$ Δ ACE

(v) ar (CYXE) = 2 ar (FCB)

(vi) ar (CYXE) = ar (ACFG)

(vii) ar (BCED) = ar (ABMN) + ar (ACFG)

उत्तर-

(i) दिया है- △ABC में ∠A समकोण है। त्रिभुज की भुजाओं AB, AC तथा BC पर क्रमशः ABMN, ACFG और BCED वर्ग बने हैं। रेखोखण्ड AX वर्ग BCED की भुजा DE पर लम्ब है, जो BC से Y पर मिलता है।

सिद्ध करना है- $\triangle MBC = \triangle ABD$

उपपत्ति- ABMN एक वर्ग है।

$\triangle MBC$

$\angle MBC = 90^\circ + \angle B$

इसी प्रकार $\triangle ABD$ में,

$\angle ABD = 90^\circ + \angle B$

$\triangle MBC$ और $\triangle ABD$ में,

$\angle MBC = \angle ABD$

$MB = AB$ (वर्ग की भुजाएं)

$MB = AB$ (वर्ग की भुजाएं)

$\triangle MBC \cong \triangle ABD$ (भुजा-कोण-भुजा सवार्गसमता से)

(ii) दिया है- △ABC में ∠A समकोण है। त्रिभुज की भुजाओं AB, AC तथा BC पर क्रमशः ABMN, ACFG और BCED वर्ग बने हैं। रेखोखण्ड AX वर्ग BCED की भुजा DE पर लम्ब है, जो BC से Y पर मिलता है।

सिद्ध करना है- ar(BYXD) = 2ar(MBC)

चतुर्भुज BYXD और $\triangle ABD$ दोनों ही उभयनिष्ठ आधार BD पर एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित हैं।

$ar(\square BYXD) = 2ar(\triangle ABD)$

परन्तु $\triangle ABD \cong \triangle MBC$

$ar(\triangle ABD) = ar(\triangle MBC)$

अतः $ar(\square BYXD) = 2ar(MBC)$

(iii)दिया है- △ABC में ∠A समकोण है। त्रिभुज की भुजाओं AB, AC तथा BC पर क्रमशः ABMN, ACFG और BCED वर्ग बने हैं। रेखोखण्ड AX वर्ग BCED की भुजा DE पर लम्ब है, जो BC से Y पर मिलता है।

सिद्ध करना है- ar(BYXD) = ar(ABMN)

$\square ABMN$ एक वर्ग है।

$\therefore MB || NA$ या $MB || NC$

$\because \triangle MBC$ और वर्ग ABMN एक ही आधार MB पर समान्तर रेखाओं MB और NC के बीच स्थित हैं।

$$\text{ar}(\square ABMN) = 2\text{ar}(\square AMBC)$$

तब परिणाम (1) से,

$$\text{ar}(\square BYXD) = 2\text{ar}(\square ABMN)$$

(iv) दिया है- △ABC में ∠A समकोण है। त्रिभुज की भुजाओं AB, AC तथा BC पर क्रमशः ABMN, ACFG और BCED वर्ग बने हैं। रेखोखण्ड AX वर्ग BCED की भुजा DE पर लम्ब है, जो BC से Y पर मिलता है।

सिद्ध करना है- $\triangle FCB = \triangle ACE$

$$\angle BCF + \angle BCA = \angle ACF = 90^\circ + \angle BCA$$

और $\therefore \angle ACE = \angle BCA + \angle BCE = 90^\circ + \angle BCA$

$$\therefore \angle BCF = \angle ACE$$

अतः $\triangle FCB$ और $\triangle ACE$ में

$$CF = AC$$

$$\angle BCF = \angle ACE$$

$$BC = CE$$

तब सर्वांगसमता के सिद्धान्त (S.A.S.) से,

$$\triangle FCB \cong \triangle ACE$$

(v) दिया है- △ABC में ∠A समकोण है। त्रिभुज की भुजाओं AB, AC तथा BC पर क्रमशः ABMN, ACFG और BCED वर्ग बने हैं। रेखोखण्ड AX वर्ग BCED की भुजा DE पर लम्ब है, जो BC से Y पर मिलता है।

सिद्ध करना है- ar(CYXE) = 2ar(FCB)

$\because \triangle ACE$ और $\square CYXE$ एक ही आधार CE पर एक ही समान्तर रेखाओं CE और AX के बीच स्थित हैं।

$\therefore \mathrm{ar}(\square CYXE) = \mathrm{ar}(\triangle ACE)$

परन्तु परिणाम (4) से, $\triangle ACE \cong \triangle FCB$

$\mathrm{ar}(\triangle ACE = \mathrm{ar}(\triangle FCB)$

अत: $\mathrm{ar}(\square CYXE) = 2\mathrm{ar}(\triangle FCB)$

(vi)दिया है- △ABC में ∠A समकोण है। त्रिभुज की भुजाओं AB, AC तथा BC पर क्रमशः ABMN, ACFG और BCED वर्ग बने हैं। रेखोखण्ड AX वर्ग BCED की भुजा DE पर लम्ब है, जो BC से Y पर मिलता है।

सिद्ध करना है- ar(CYXE) = ar(ACFG)

$\because \triangle FCB$ और $\square ACFG$ एक ही आधार CE पर एक ही समान्तर रेखाओं CE और AX के बीच स्थित हैं।

$\therefore \mathrm{ar}(\square ACFG) = \mathrm{ar}(\triangle FCB)$

परन्तु परिणाम (4) से, $\mathrm{ar}(\square ACFG) = 2\mathrm{ar}(\triangle FCB)$

(vii) दिया है- △ABC में ∠A समकोण है। त्रिभुज की भुजाओं AB, AC तथा BC पर क्रमशः ABMN, ACFG और BCED वर्ग बने हैं। रेखोखण्ड AX वर्ग BCED की भुजा DE पर लम्ब है, जो BC से Y पर मिलता है।

सिद्ध करना है- ar(BCED) = ar(ABMN) + ar(ACFG)

परिणाम (3) व परिणाम (6) को जोड़ने पर,

$\mathrm{ar}(\square BYXD) + \mathrm{ar}(\triangle CYXE) = \mathrm{ar}(\triangle ABMN) + \mathrm{ar}(\triangle CACFG)$

अतः $\mathrm{ar}(\triangle BCED) = \mathrm{ar}(\triangle ABMN) + \mathrm{ar}(\triangle ACFG)$