गणित

अध्याय-9: अवकल समीकरण

अवकल समीकरण (Differential equation)

यदि किसी समीकरण में स्वतन्त्र चर x तथा आश्रित चर y के अतिरिक्त एक या अधिक अवकल गुणांक जैसे $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ उपस्थित हों, तो उस समीकरण को अवकल समीकरण कहते हैं।

$$\frac{dy}{dx} = \cos x + \sin x; \quad \frac{dy}{dx} + x\cos x = 0;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = e^{4x}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0;$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0; \quad \frac{d^4y}{dx^4} + n^4y = 0.$$

ये सभी अवकल समीकरण के उदाहरण हैं।

साधारण अवकल समीकरण (Simple or "Ordinary" differential equation)-वे समीकरण जिनमें केवल एक स्वतन्त्र चर हो और इस स्वतन्त्र चर के सापेक्ष अवकल गुणांक हो, साधारण अवकल समीकरण कहलाते हैं। ऊपर दिये गये सभी अवकल समीकरण साधारण अवकल समीकरण हैं।

अवकल समीकरण की कोटि (Order ofadifferential equation)-किसी अवकल समीकरण की कोटि, उसमें आने वाले उच्चतम अवकल गुणांक की कोटि होती है। ऊपर दी गई अवकल समीकरणों की कोटियाँ (Orders) क्रमशः 1, 1,2,2, 1 व 4 हैं।

अवकल समीकरण की घात (Degree ofadifferential equation)-किसी अवकल समीकरण की घात, उसमें आने वाले उच्चतम अवकल गुणांक की घात होती है जबकि अवकल समीकरण में आने वाले अवकल गुणांक मूलक तथा भिन्नात्मक घातों से स्वतन्त्र हों।

उदाहरण-

(i) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 8\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ की घात 3 है।

(ii) $\frac{d^3y}{dx^3} + y = 0$ की घात 1 है।

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 7 = 0$ की घात 1 है।

रैखिक अवकल समीकरण (Linear Differential Equation)

ऐसे अवकल समीकरण जिनमें आश्रित चर और उसके । अवकल गुणांक प्रथम घात के हों, रैखिक अवकल समीकरण कहलाते हैं। आश्रित चर तथा उसके अवकल गुणांकों के गुणांक अचर तथा के फलन हो सकते हैं।

प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण का व्यापक रूप

$$\frac{dy}{dx} + py = Q$$

होता है, जहाँ P, Q "अचर" अथवा "केवल के फलन हैं। "n वीं कोटि के रैखिक अवकल समीकरण का व्यापक रूप अग्र है-

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots$$

$$+ a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x).y + f(x) = 0$$

यहाँ $a_o(x)$, $a_1(x)$,......., $a_{n-1}(x)_3$,a_n,(x) अवकल समीकरण के गुणांक हैं।

अरैखिक अवकल समीकरण- जो समीकरण रैखिक नहीं होते अर्थात् के सभी फलन व अवकलज एक घात के नहीं हों तो उन्हें अरैखिक (Non-linear) अवकल समीकरण कहते हैं।

अवकल समीकरण का हल (Solution of a Differential Equation) : किसी अवकल समीकरण का हल उसमें आने वाले चरों के बीच ऐसा सम्बन्ध होता है जिसमें अवकल गुणांक उपस्थित नहीं तथा जो स्वयं तथा जिससे प्राप्त अवकलजों से समीकरण सन्तुष्ट हों। अवकल समीकरण के हल को उसका समाकलन भी कहते हैं। उदाहरण

(i) $y = \log\sec x + c$, अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \tan x$ का हल है।

(ii) $y = \log x + c$, अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ का हल है।

(iii) $y = A\cos x + B\sin x + c$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

इनमें c समाकल अचर कहलाता है।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि अवकल समीकरण अपने हल से अवकलन और विलोपन आदि बीजीय संक्रियाओं द्वारा प्राप्त किया जाता है। इसलिए अवकल समीकरण के हल को उसका पूर्वग (Primitive) भी कहते हैं।

सामान्य हल (GeneralSolution orComplete Solution or Complete Primitive) किसी अवकल समीकरण का वह हल अपने स्वेच्छ अचरों की संख्या, अवकल समीकरण के क्रम के बराबर होती है।

उदाहरण— $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6 = 0$ का सामान्य हल है।

विशेष हल (Particular solution)- यदि किसी अवकल समीकरण के सामान्य हल में आने वाले स्वेच्छ अचरों में से किसी एक को या कुछ को या सभी को कोई विशेष मान दे दिये जाएँ, तो इस प्रकार प्राप्त हल, उस समीकरण का विशेष हल कहलाता है।

उदाहरण-y= $\log\sin x + 3$, अवकल समीकरण

$\frac{dy}{dx}$ = cotx का एक विशेष हल है, क्योंकि यह सामान्य हल में $c = 3$ रखने से प्राप्त हुआ है।

अवकल समीकरण की रचना (Formation of a Differential Equation)

किसी दिये गये समीकरण से अवकल समीकरण बनाने के। लिए उसे x के सापेक्ष क्रमिक अवकलन उतनी बार करते हैं जितने स्वेच्छ अचर हों। तत्पश्चात् प्राप्त समीकरणों से स्वेच्छ । अचरों को विलोपित करते हैं। प्राप्त समीकरणों में x,y, $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ होंगे। यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

विशेष हल (Particular solution)– यदि किसी अवकल समीकरण के सामान्य हल में आने वाले स्वेच्छ अचरों में से किसी एक को या कुछ को या सभी को कोई विशेष मान दे दिये जाएँ, तो इस प्रकार प्राप्त हल, उस समीकरण का विशेष हल कहलाता है।

उदाहरण- $y = \log \sin x + 3$, अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \cot x$ का एक विशेष हल है, क्योंकि यह सामान्य हल में $c = 3$ रखने से प्राप्त हुआ है।

अवकल समीकरण की रचना (Formation of a Differential Equation)

किसी दिये गये समीकरण से अवकल समीकरण बनाने के लिए उसे x के सापेक्ष क्रमिक अवकलन उतनी बार करते हैं जितने स्वेच्छ अचर हों। तत्पश्चात् प्राप्त समीकरणों से स्वेच्छ अचरों को विलोपित करते हैं। प्राप्त समीकरणों में $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots$ होंगे। यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रथम कोटि तथा प्रथम घातके अवकल समीकरणोंका हल (Solution of Differential Equation of the First Order and First Degree)

उन अवकल समीकरणों का हल जो $\frac{dy}{dx} = f(x)$ के रूप में हों

माना

$\frac{dy}{dx} = f(x)$

तब, इसे अवकल रूप में लिखा जायेगा-

$dy = f(x)dx$

अब दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$\int dy = \int f(x)dx$

$\Rightarrow y = F(x) + c,$

$\Rightarrow$ जबकि $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$

उदाहरण 15. निम्नअवकल समीकरणको हल कीजिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 3x - \cos 2x}{\cos x}.$$

हल : $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 3x - \cos 2x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow dy = \left(\frac{\cos 3x - \cos 2x}{\cos x}\right)dx$$

$$= \frac{(4\cos^3 x - 3\cos x) - (2\cos^2 x - 1)}{\cos x}dx$$

$$= \left(\frac{4\cos^3 x - 3\cos x - 2\cos^2 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}\right)dx$$

$$= (4\cos^2 x - 3 - 2\cos x + \sec x)dx$$

$$= [2(1 + \cos 2x) - 3 - 2\cos x + \sec x]dx$$

$$= (2\cos 2x - 1 - 2\cos x + \sec x)dx + c$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\therefore \int dy = \int (2\cos 2x - 1 - 2\cos x + \sec x)dx + c$$

$$\Rightarrow \quad y = 2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) - x - 2\sin x$$

$$+ \log(\sec x + \tan x) + c$$

$$\Rightarrow \quad y = \sin 2x - x - 2\sin x$$

$$+ \log(\sec x + \tan x) + c.$$

उदाहरण 16. निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए

$$(x-1)\frac{dy}{dx}=x^2+3x+2.$$

हल : $(x-1)\dfrac{dy}{dx}=x^2+3x+2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3x+2}{x-1}$$

$$dy=\frac{x^2+3x+2}{x-1}dx$$

$$\int dy=\int\frac{x^2+3x+2}{x-1}dx$$

माना $x-1=t \Rightarrow x=t+1$ तथा $dx=dt.$

$$\therefore \int\frac{x^2+3x+2}{x-1}dx$$

$$=\int\frac{(t+1)^2+3(t+1)+2}{t}dt$$

$$=\int\frac{t^2+5t+6}{t}dt=\int\left(\frac{t^2}{t}+\frac{5t}{t}+\frac{6}{t}\right)dt$$

$$=\int\left(t+5+\frac{6}{t}\right)dt=\frac{t^2}{2}+5t+6\log t$$

$$=\frac{1}{2}(x-1)^2+5(x-1)+6\log(x-1)$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-2x+1+10x-10)+6\log(x-1)$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+8x-9)+6\log(x-1)$$

$$=\frac{x^2}{2}+4x-\frac{9}{2}+6\log(x-1)$$

उपर्युक्त मान समी. (1) में रखने पर,

$$y=\frac{x^2}{2}+4x+6\log(x-1)+\left(c-\frac{9}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{x^2}{2}+4x+6\log(x-1)+c'.$$

अवकल समीकरण जिसमें चरों को पृथक् किया जा सके (Solution of Differential Equations in Which Variables are Separable)

ऐसे समीकरण जो $\frac{dy}{dx} = f_1(x).f_2(y)$ स्वरूप में हों उन्हें -

$f(x)dx = g(y)dy$ के रूप में लिखा जा सकता है। तब हम कह सकते हैं कि समीकरण में चर पृथक् करने योग्य हैं। ऐसे समीकरण का हल बायें व दायें पक्ष काxyके सापेक्ष समाकलित करके ज़ात किया जा सकता है। इस प्रकार अभीष्ट हल है-

$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$, जहाँ c स्वेच्छ समाकलन अचर

उदाहरण 1. अवकल समीकरण को हल कीजिए

$$\frac{dy}{dx} = y\sin x.$$

हल : दिया है: $\frac{dy}{dx} = y\sin x$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = \sin x\, dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \sin x\, dx + c,$$

[जहाँ c समाकल नियतांक है]

$$\Rightarrow \quad \log y = -\cos x + c.$$

उदाहरण 3. अवकल समीकरण हल कीजिए

$$\log_e \frac{dy}{dx} = ax + by.$$

हल : दिया है— $\log_e\left(\frac{dy}{dx}\right) = ax + by$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{ax+by} = e^{ax}\, e^{by}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-by} dy = e^{ax} dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int e^{-by} dy = \int e^{ax} dx + c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{-by}}{-b} = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

$$\Rightarrow \quad e^{-by} = \frac{-b}{a} e^{ax} - bc.$$

समघाती अवकल समीकरण (Homogeneous Differential Equations)

ऐसे अवकल समीकरण जिनका रूप

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$$

जहाँ $f_1\ (x, y)$ तथा $f_2\ (x, y)$ x और y के समघाती व्यंजक हैं, समघाती अवकल समीकरण कहलाते हैं।

एक फलन $f(x, y)$ को n घात का समघाती फलन कहते हैं,

हैं, यदि $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

जहाँ λ एक अशून्य वास्तविक संख्या है।

उदाहरण—(i) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 7y^2$ एक समघात फलन है, जिसकी घात 2 है, चूँकि

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - 3\lambda x \cdot \lambda y + 7(\lambda y)^2$$

$$= \lambda^2 \left(x^2 - 3xy + 7y^2\right)$$

$$= \lambda^2 f(x, y)$$

अचर गुणांक या किसी फलन वाला प्रथम कोटि कारैखिक अवकल समीकरण (Linear Differential Equation of First Order Function or Constant coefficient)

एक रेखीय अवकल समीकरण जो प्रथम कोटि एवं "अचर गणांक" या किसी "फलन गुणांक" को रखता है, वह निम्न रूप में होगा-

(i) $\frac{dy}{dx} + Py = Q$

इसका समाकलन गुणांक $\text{I.F.} = e^{\int P dx}$ होता है

[जहाँ P और Q अचर या x के फलन होते हैं।

अर्थात् $P = f(x)$ या c_1 नियतांक

$Q = \phi(x)$ या c_2 नियतांक]

(ii) $\frac{dy}{dx} + Rx = S$

इसका समाकलन गुणांक $\text{I.F.} = e^{\int R dx}$ होता है

[जहाँ R और S अचर या y के फलन होते हैं।

अर्थात् $R = f(y)$ या K_1 नियतांक

$S = \phi(y)$ या K_2 नियतांक]

रेखीय अवकल समीकरण का हल (Solution of Lincar Differential Equation)

समीकरण $\frac{dy}{dx}$

को हल करने के लिए हम इसे $e^{\int pdx}$PA से गुणा करते हैं जो इस समीकरण का समाकलन गुणांक (Integrating factor) कहलाता है। तब हमें प्राप्त होता है-

$$e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx}+Py.e^{\int Pdx}=Qe^{\int Pdx}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}+Py\right)e^{\int Pdx}=Q.e^{\int Pdx}$$

समाकलन करने पर,

$$y.e^{\int Pdx}=c+\int Q.e^{\int Pdx}dx \quad ...(2)$$

$$\text{चूँकि } \frac{d}{dx}y.e^{\int Pdx} = \frac{dy}{dx}e^{\int Pdx}+y\frac{d}{dx}e^{\int Pdx}$$

$$=\frac{dy}{dx}e^{\int Pdx}+ye^{\int Pdx}.\frac{d}{dx}\int Pdx$$

$$=\frac{dy}{dx}e^{\int Pdx}+ye^{\int Pdx}.P$$

$$=\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)e^{\int Pdx}$$

जहाँ c स्वेच्छ समाकलन अचर है। तब समी. (2), समी. (1) का अभीष्ट हल है।

याद रखिए $\frac{dy}{dx}+py=Q$ हल है :

$y(\text{I.F.}) = \int Q\,(\text{I.F.})dx + c$

जहाँ c एक स्वेच्छ चर है तथा $\text{I.F.} = e^{\int pdx}$

(ii) यदि समीकरण $\frac{dy}{dx}$ का कोई गुणांक हो, तो उससे भाग देकर $\frac{dy}{dx}$ का गुणांक 1 कर लेना चाहिए।

(iii)यदि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Px = Q'$ के रूप में परिवर्तित हो रही हो जहाँ P तथा Q अचर अथवा y के फलन हों तो यह भी रेखीय अवकल समीकरण है तथा इसका समाकलन गुणांक $e^{\int pdy}$ तथा व्यापक हल $xe^{\int pdx} = \int Q'.\, e^{\int pdy} dy + c$ होगा।

उदाहरण 1. अवकल समीकरण $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y = e^{-2\sqrt{x}}$ का समाकल गुणांक ज्ञात कीजिए। हल: दिया गया अवकल समीकरण है-

$$\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y = e^{-2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{x}}y = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

समी. (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}}, Q = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

समाकल गुणांक $\text{I.F.} = e^{\int Pdx}$

$$= e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx} = e^{x^{-\frac{1}{2}+1}/-\frac{1}{2}+1}$$

$$= e^{2\sqrt{x}}.$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 9.1 (पृष्ठ संख्या 398-399)

प्रश्न 1 प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

$$\frac{d^{4y}}{dx^4} + \sin(y''') = 0$$

उत्तर- दी गई अवकल समीकरण अवकलजों में बहुपद समीकरण नहीं है।

∴ इसकी घात परिभाषित नहीं है। जबकि कोटि = 4

प्रश्न 2 प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

$y' + 5y = 0$

उत्तर- चूँकि अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि की अवकलज y’ है जिसकी कोटि 1 तथा घात 1 है। अतः समीकरण की कोटि 1 तथा घात 1 है।

प्रश्न 3 प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^{2s}}{dt^2} = 0$$

उत्तर- कोटि = 2, घात = 1

प्रश्न 4 प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

$$\left(\frac{d^{2y}}{dx^2}\right)^2 + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

उत्तर- कोटि = 2

चूँकि समीकरण का बायाँ पक्ष अवकलजों में बहुपद नहीं है।

अतः इसकी घात परिभाषित नहीं है।

प्रश्न 5 प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

$$\frac{d^{2y}}{dx^2} = \cos 3x + \sin 3x$$

उत्तर- चूँकि दिए गए अवकल समीकरण में उच्चतम कोटि का अवकलज

$$\frac{d^{2y}}{dx^2}$$

है जिसकी कोटि 2 तथा घात 1 है। अतः अवकल समीकरण की कोटि 2 तथा घात 1 है।

प्रश्न 6 प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

$(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0$

उत्तर- चूँकि दिए गए अवकल समीकरण में उच्चतम कोटि का अवकलज $(y''')^2$ है जिसकी कोटि 3 तथा घात 1 है। अत: अवकल समीकरण की कोटि 3 तथा घात 2 है।

प्रश्न 7 प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

$y''' + 2y'' + y' = 0$

उत्तर- चूँकि दिए गए अवकल समीकरण में उच्चतम कोटि का अवकलज y''' है जिसकी कोटि 3 तथा घात 1 है। अतः अवकल समीकरण की कोटि 3 तथा घात 1 है।

प्रश्न 8 प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

$Y' + y = e^x$

उत्तर- चूँकि दिए गए अवकल समीकरण में उच्चतम कोटि का अवकलज y' है जिसकी कोटि 1 तथा घात 1 है। अत: अवकल समीकरण की कोटि 1 तथा घात 1 है।

प्रश्न 9 प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

$y'' + (y')^2 + 2y = 0$

उत्तर- चूँकि दिए गए अवकल समीकरण में उच्चतम कोटि का अवकलज y'' है जिसकी कोटि 2 तथा घात 1 है। अत: अवकल समीकरण की कोटि 2 तथा घात 1 है।

प्रश्न 10 प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

$y'' + 2y' + \sin y = 0$

उत्तर- चूँकि दिए गए अवकल समीकरण में उच्चतम कोटि का अवकलज y'' है तथा यह y', y'' में बहुपदी है। अत: अवकल समीकरण की कोटि 2 तथा घात 1 है।

प्रश्न 11 अवकल समीकरण

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

की घात है-

a. 3
b. 2
c. 1
d. परिभाषित नहीं है।

उत्तर-

d. परिभाषित नहीं है।

हल-

दी गई समीकरण y', y'' में बहुपद समीकरण नहीं है। अत: इस अवकल समीकरण की घात परिभाषित नहीं है। अतः विकल्प (d) सही है।

प्रश्न 12 अवकल समीकरण

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$$

की कोटि है-

a. 2
b. 1
c. 0
d. परिभाषित नहीं है।

उत्तर-

a. 2

हल-

अवकल समीकरण में उच्चतम अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ है जिसकी कोटि 2 है। अतः विकल्प (a) सही है।

प्रश्नावली 9.2 (पृष्ठ संख्या 401-402)

प्रश्न 1 प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है

Y = e^x + 1 : y″−y′= 0

उत्तर- दिया है y = e^x + 1, अवकल समीकरण y” – y’ = 0

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$y' = \frac{d}{dx}(e^x + 1) = e^x$$

पुनः अवकलन करने पर,

$$y'' = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर,

$y'' - y' = e^x - e^x = 0$

अतः $y = e^x + 1$ अवकल समीकरण $y'' - y' = 0$ का हल है।

प्रश्न 2 प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है:

$y = x^2 + 2x + C : y' - 2x - 2 = 0$

उत्तर- दिया है, $y = x^2 + 2x + C$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $y' = 2x + 2 + 0$

$\Rightarrow y' - 2x - 2 = 0$

$\therefore y = x^2 + 2x + C$, अवकल समीकरण $y' - 2x - 2 = 0$ का हल है।

प्रश्न 3 प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है:

$y = \cos x + C : y' + \sin x = 0$

उत्तर- दिया है, $y = \cos x + C$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$y' = -\sin x + 0$ या $y' + \sin x = 0$

$\therefore$ y = cosx + C, अवकल समीकरण y′ + sinx = 0 का हल है।

प्रश्न 4 प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है-

$y = \sqrt{1 + x^2} : y' = \frac{xy}{1 + x^2}$

उत्तर- दिया गया फलन

$y = \sqrt{1 + x^2}$ ... (1)

(1) का x में सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \text{ या}$$

$$y' = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} \text{ या}$$

$$y' = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}$$

अतः $y = \sqrt{1 + x^2}$ अवकल समीकरण $y' = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}$ का हल है।

प्रश्न 5 प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है:

y = Ax : xy′ = y(x ≠ 0)

उत्तर- दिया है, y = Ax .....(1)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, y' = A × 1 .....(2)

परन्तु समीकरण (1) से, $A = \frac{y}{x}$

A का मान समीकरण (2) में रखने पर, $y' = \frac{y}{x}$

$$\therefore\ xy' = y$$

xy' = y(x ≠ 0) का हल y = Ax है।

प्रश्न 6 प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है-

$y = x \sin x : xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$

(x ≠ 0 और x > y अथवा x < - y)

उत्तर- दिया गया फलन y = x sin x ...(1)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, y' = x cos x + sin x.1 = x cos x + sin x

$$= x \cos x + \frac{y}{x}\ (1) \text{ से } \left[\sin x = \frac{y}{x}\right]$$

$$\Rightarrow\ xy' = x^2 \cos x + y = x^2\sqrt{1 - \sin^2 x} + y$$

$$= x^2\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + y = x\sqrt{x^2 - y^2} + y$$

$$= y + x\sqrt{x^2 - y^2}$$

$\therefore\ y = x \sin x$ अवकल समीकरण $xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$ का हल है।

प्रश्न 7 प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है-

$$xy = \log y + C : y' = \frac{y^2}{1 - xy}(xy \neq 1)$$

उत्तर- दिया है: xy = logy + C ....(i)

सिद्ध करने के लिए: y समीकरण द्वारा दिया गया। (i) विभेदक समीकरण का एक हल है

$$y' = \frac{y^2}{1 - xy} \quad ...(ii)$$

प्रमाण: समीकरण के दोनों पक्षों में अवकलन करने पर (i) w.r.t x, हमारे पास है

$$xy' + y(1) = \frac{1}{y}y' + 0$$

$$\Rightarrow xy' - \frac{y'}{y} = -y$$

$$\Rightarrow y'\left(x - \frac{1}{y}\right) = -y$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{xy-1}{y}\right) = -y$$

$$\Rightarrow y'(xy - 1) = -y^2$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-y^2}{xy-1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-y^2}{-(1-xy)} = \frac{y^2}{1-xy}$$

इसलिए, समीकरण(i)द्वारा दिया गया फ़ंक्शन (निहित) का एक समाधान है,

$$y' = \frac{y^2}{1-xy}.$$

प्रश्न 8 प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है:

$y - \cos y = x : (y \sin y + \cos y + x)y' = y$

उत्तर- दिया गया फलन $y - \cos y = x$ ...(1)

(1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} - (-\sin y)\frac{dy}{dx} = 1 \text{ या}$$

$$(1 + \sin y)\frac{dy}{dx} = 1 \text{ या}$$

$$y(1 + \sin y)\frac{dy}{dx} = y \text{ या}$$

$$(y + y \sin y)\frac{dy}{dx} = y \text{ या}$$

$$(x + \cos y + y \sin y)\frac{dy}{dx} = y \text{ ......(1) से}$$

अतः $y - \cos y = x$ अवकल समीकरण $(y \sin y + \cos y + x)\frac{dy}{dx} = y$ का हल है।

प्रश्न 9 प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है-

$X + y = \tan^{-1}y : y^2 y' + y^2 + 1 = 0$

उत्तर- दिया है,

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $1 + y' = \frac{y'}{1+y^2}$

$1 + y^2$ से दोनों तरफ गुणा करने पर,

$(1 + y^2) + y'(1 + y^2) = y'$ या

$1 + y^2 + y'(1 + y^2 - 1) = 0$ या

$y^2y' + y^2 + 1 = 0$ यही अवकलन समीकरण है।

प्रश्न 10 प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है।

$y = \sqrt{a^2 - x^2}x \in (-a, a) : x + y\frac{dy}{dx} = 0 (y \neq 0)$

उत्तर-

प्रश्नानुसार, $y = \sqrt{a^2 - x^2} \ldots . (1)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}x(-2x)$ या

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} \ldots (2)$ या

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ या

$x + y\frac{dy}{dx} = 0$

अतः $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ अवकलन समीकरण $x + y\frac{dy}{dx} = 0$ का हल है।

प्रश्न 11 चार कोटि वाले किसी अवकलन समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित अचरो की संख्या है

a. 0
b. 2
c. 3
d. 4

उत्तर-

b. 2

हल-

चौथे क्रम के अंतर समीकरण के सामान्य समाधान में 4 मनमानी स्थिरांक हैं। क्योंकि इसमें भिन्न समीकरण के क्रम के रूप में मनमानी स्थिरांक की एक ही संख्या होती है।

प्रश्न 12 तीन कोटि वाले किसी अवकलन समीकरण के विशिष्ट हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरो की संख्या है:

a. 3
b. 2
c. 1
d. 0

उत्तर-

d. 0

हल-

मनमानी स्थिरांक = 0 की संख्या क्योंकि विशेष समाधान मनमानी स्थिरांक से मुक्त है।

प्रश्नावली 9.2 (पृष्ठ संख्या 407-408)

प्रश्न 1 स्वेच्छ अचरों a तथा b को विलुप्त करते हुए दिए हुए वक्रों के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

उत्तर- दिया है

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{a}+\frac{y}{b}=0$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन समीकरण करने पर,

$$0+\frac{1}{b}.y''=0$$

या y''= 0

अतः अभीष्ट अवकल समीकरण y''= 0 है।

प्रश्न 2 स्वेच्छ अचरों a तथा b को विलुप्त करते हुए दिए हुए वक्रों के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

$y^2 = a(b^2 - x^2)$

उत्तर- दिया है,

$y^2 = a(b^2 - x^2)$ ...(1)

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2y\frac{dy}{dx}=-2ax\ldots(2)$$

(2) का पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2y\frac{d^2y}{dx} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -2a\ldots(3)$$

(2) से $-2a = \frac{2y}{x}\frac{dy}{dx}$, (3) में रखने पर,

$$2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2y}{x}\frac{dy}{dx} \text{ या}$$

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$$

प्रश्न 3 स्वेच्छ अचरों a तथा b को विलुप्त करते हुए दिए हुए वक्रों के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

$y = ae^{3x} + be^{-2x}$

उत्तर- दिया है,

$y = ae^{3}x + be^{-2x}$ ...(1)

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 3ae^{3x} - 2be^{-2x}\ldots(2)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9ae^{3x} + 4be^{-2x} \text{ या}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5ae^{3x} + 4y\ldots(3)$$

[(1) से $ae^{3x} + be^{-2x} = y$ रखने पर]

पुनः (2) से,

$$\frac{dy}{dx} = 3ae^{3x} + 3be^{-2x} - 5be^{-2x} \text{ या}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y - 5be^{-2x} \ldots (4)$$

(3) में से (4) को घटाने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = y + 5(ae^{3x} + be^{-2x}) \text{ या}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = y + 5y \text{ या}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्न 4 स्वेच्छ अचरों a तथा b को विलुप्त करते हुए दिए हुए वक्रों के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

$y = e^{2x} (a + bx)$

उत्तर- दिया है,

$y = e^{2x}(a + bx)$ ...(1)

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}.\, b + (a+bx).2e^{2x}$$

$$= e^{2x}(b+2a+2bx)$$

$$= e^{2x}\left[b + 2\frac{y}{e^{2x}}\right] \ldots (1) \text{ से या}$$

$$\frac{dy}{dx} = be^{2x} + 2y \ldots (2)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2be^{2x} + 2\frac{dy}{dx} \ldots (3)$$

(2) व (3) से,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\left(\frac{dy}{dx} - 2y\right) + 2\frac{dy}{dx} \text{ या}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्न 5 स्वेच्छ अचरों a तथा b को विलुप्त करते हुए दिए हुए वक्रों के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

$y = e^x(a \cos x + b \sin x)$

उत्तर- दिया है,

$y = e^x(a \cos x + b \sin x) \ldots(1)$

(1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = e^x(a\cos x + b\sin x) + (-a\sin x + b\cos x).\, e^x \text{ या}$$

$$\frac{dy}{dx} = y + e^x(-a\sin x + b\cos x) \ldots (2)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + e^x(-a\sin x + b\cos x) + (-a\cos x - b\sin x)e^x \ldots (3) \text{ या}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} - y\right) - e^x(a\cos x + b\sin x) \ldots (2) \text{ से या}$$

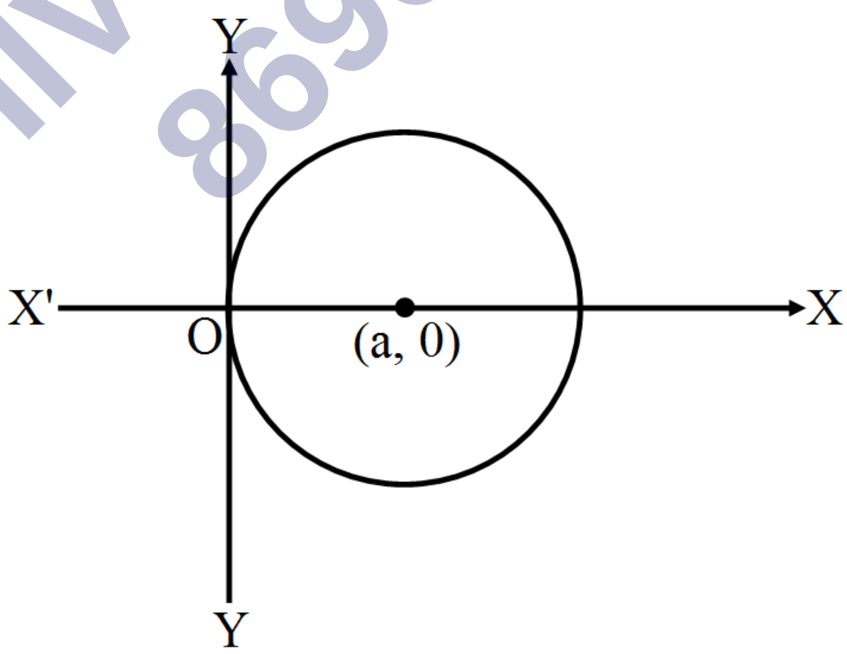
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - y - y \ldots (1) \text{ से या}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्न 6 y-अक्ष को मूलबिन्दु पर स्पर्श करने वाले वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



वृत्त y को मल बिन्दु पर स्पर्श करने वाले वृत्त केन्द्र x अक्ष पर होगा। माना (a, 0) वृत्त का केन्द्र तथा a वृत्त की त्रिज्या है, तब वृत्त का समीकरण

$$(x\text{-}a)^2 + y^2 = a^2 \text{ या}$$

$$x^2 + a^2 - 2ax + y^2 = a^2 \text{ या}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0 \ldots (1)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2a = 0$$

$$\therefore\ a = x + y\frac{dy}{dx}$$

a का मान समीकरण (1) में रखने पर

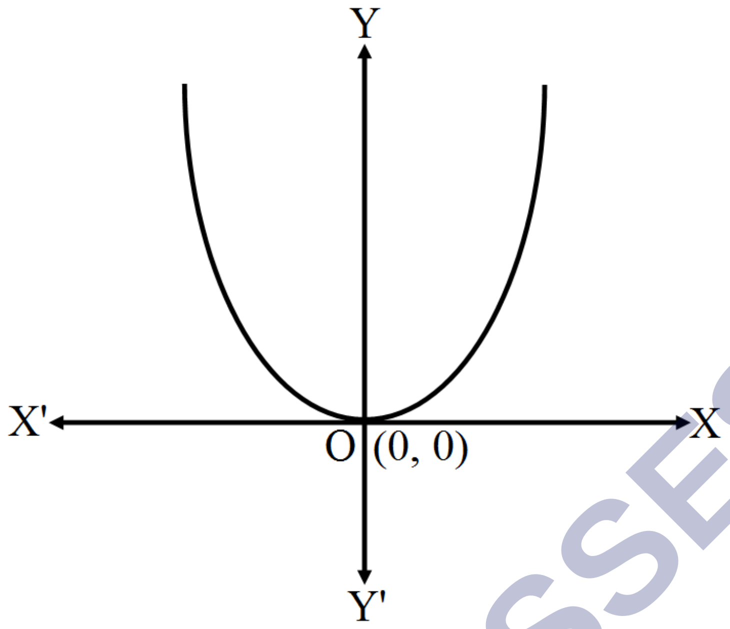
$$x^2 + y^2 - 2x\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ या}$$

$$\Rightarrow 2xy\frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$$

जोकि अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्न 7 ऐसे परवलयों के कुल का अवकल समीकरण निर्मित कीजिए जिनका शीर्ष मूलबिन्दु पर है और जिनको अक्ष धनात्मक y-अक्ष की दिशा में है।

उत्तर- ऐसे परवलय के कुल का समीकरण जिसका शीर्ष मूल बिन्दू तथा अक्ष OY है, निम्नवत् है, ...(1)



$x^2 = 4ay$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2x = 4a\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4a} = \frac{x}{2a} \ldots(2)$$

समीकरण (1) और (2) का गुणा करने पर,

$$x^2\frac{dy}{dx} = 4ay \times \frac{x}{2a} = 2yx$$ या

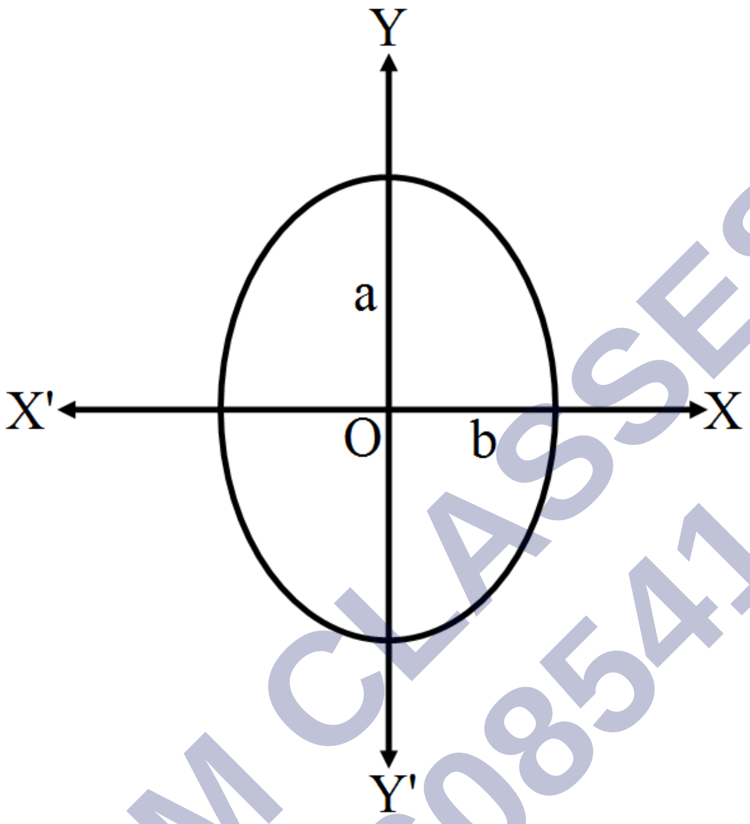
$$x\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} - 2y = 0,$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्न 8 ऐसे दीर्घवृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी नाभियाँ y-अक्ष पर हैं तथा जिनका केन्द्र मूलबिन्दु है।

उत्तर- ऐसे दीर्घवृत्त के कुल का समीकरण जिसकी नाभियाँ y-अक्ष पर हैं तथा जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर है।



$$\therefore \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, a > b \ldots (1)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{2x}{b^2} + \frac{2y}{a^2}\frac{dy}{dx} = 0 \text{ या}$$

$$\frac{x}{b^2} + \frac{yy'}{a^2} = 0 \ldots (2)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}(y'^2 + yy'') = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2} = -\frac{1}{a^2}(y'^2 + yy'')$$

$\frac{1}{b^2}$ का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$x\left(-\frac{y'^2+yy''}{a^2}\right)+\frac{yy'}{a^2}=0 \text{ या}$$

$$-x(y'^2+yy'')+yy'=0 \text{ या}$$

$$-xy'^2-xyy''+yy'=0$$

अतः अभीष्ट अवकल समीकरण,

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

प्रश्न 9 ऐसे अतिपरवलयों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ x-अक्ष पर हैं तथा जिनका केन्द्र मूल बिन्दु पर है।

उत्तर- दिये गये अतिपरवलय कुल का समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots(1)$$

जहाँ $a > b$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a^2}-\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$\Rightarrow xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्न 10 ऐसे वृत्तों के कुल की अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनका केन्द्र y-अक्ष पर है और जिनकी त्रिज्या 3 इकाई है।

उत्तर- दिये गये वृत्त कुल का समीकरण

$x^2 + (y - b)^2 = 9$ ...(1)

दोनों ओर का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2x+2(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow\ x+(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow\ y-b=-\frac{x}{\frac{dy}{dx}}\ \ldots(2)$$

(2) से (y - b) का मान (1) में रखने पर,

$$x^2+\left(-\frac{x}{\frac{dy}{dx}}\right)^2=9 \text{ या}$$

$$(x^2-9)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x^2=0$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्न 11 निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से किस समीकरण का व्यापक हल $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ है।

a. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

b. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

c. $\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$

d. $\frac{d^2y}{dx^2} - 1 = 0$

उत्तर-

b. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

हल-

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1e^x - c_2e^{-x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

प्रश्न 12 निम्नलिखित समीकरणों में से किस समीकरण का एक विशिष्ट हल y = x है?

a. $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = x$

b. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = x$

c. $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = 0$

d. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = 0$

उत्तर-

b. $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = 0$

हल-

$$y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

प्रश्नावली 9.4 (पृष्ठ संख्या 412-413)

प्रश्न 1 अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिये

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

उत्तर- दिया है,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

चरों को अलग-अलग करके समाकलन करने पर,

$$\int dy = \int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx$$

$$\Rightarrow y = \int \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \tan^2 \frac{x}{2} dx = \int \left(\sec^2 \frac{x}{2} - 1\right) dx$$

$$\Rightarrow y = 2\tan \frac{x}{2} - x + C$$

अतः $y = 2\tan \frac{x}{2} - x + c$ अभीष्ट हल है।

प्रश्न 2 अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिये

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{4 - y^2} \ (-2 < y < 2)$$

उत्तर- दिया है,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{4 - y^2} \ (-2 < y < 2)$$

चरों का पृथक्करण करके समाकलन करने पर,

$$\frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \int dx$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} \frac{y}{2} = x + C$$ या

$$\frac{y}{2} = \sin(x + C) \text{ या}$$

$$y = 2\sin(x + C)$$

जोकि अभीष्ट हल है।

प्रश्न 3 अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिये

$$\frac{dy}{dx} + y = 1 \ (y \neq 1)$$

उत्तर- दिया है,

$$\frac{dy}{dx} + y = 1 \ (y \neq 1)$$

चरों का पृथक्करण करने पर,

समाकलन करने पर,

$$\frac{dy}{1-y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{1-y} = \int dx$$

$$\Rightarrow -\log(1-y) = x + \log C$$

$$\Rightarrow x = -\log C - \log(1-y) = -\log C(1-y)$$

$$\therefore -x = \log C(1-y)$$

$$\therefore C(1-y) = e^{-x} \text{ या}$$

$$C(1-y)e^{x} = 1$$

$$\Rightarrow 1 - y = \frac{1}{C}e^{-x}, \text{ या}$$

$$y = 1 - \frac{1}{C}e^{-x}$$

$$-\frac{1}{C} = A \text{ रखने पर, } y = 1 + Ae^{-x}$$

जोकि अभीष्ट हल है।

प्रश्न 4 अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिये

$\sec^2 x \tan ydx + \sec^2 y \tan xdy = 0$

उत्तर- दिया है,

$\sec^2 x \tan ydx + \sec^2 y \tan xdy = 0$

$$\sec^2 x \tan ydx + \sec^2 y \tan xdy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = 0 \text{ (}\tan x.\tan y \text{ से भाग करने पर)}$$

समाकलन करने पर,

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx + \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = 0$$

$$\Rightarrow \log(\tan x) + \log(\tan y) = \log C$$

$$\Rightarrow \log(\tan x \tan y) = \log C$$

$$\Rightarrow \tan x \tan y = C$$

$$x, y \in R \neq \left[\frac{\pi}{2} \text{ का विषम गुणांक}\right] \text{ जोकि अभीष्ट हल है।}$$

प्रश्न 5 अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिये

$(ex + e^{-x})dy - (e^x - e^{-x})dx = 0$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण

$$(e^x + e^{-x})dy - (e^x - e^{-x})dx = 0 \text{ या}$$

$$(e^x + e^{-x})dy = (e^x - e^{-x})dx$$

$$\therefore dy = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int dy = \int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)dx \text{ या}$$

$$y = \log(e^x + e^{-x}) + C$$

प्रश्न 6 अवकल समीकरण को व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2)$$

उत्तर- दिया है,

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2)$$

जोकि अभीष्ट हल है।

चरों का पृथक्करण करने पर, $\frac{1}{1+y^2}dy = (1 + x^2)dx$

समाकलन करने पर,

$$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \int (1 + x^2)dx \text{ या}$$

$$\tan^{-1} y = \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C$$

प्रश्न 7 अवकल समीकरण को व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

y log ydx – xdy = 0

उत्तर- दिया है,

$$y \log y dx - x dy = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{1}{y \log y} dy = 0$$

समाकलन करने पर,

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{1}{y \log y} dy = 0$$

माना $\log y = t$ पर $\Rightarrow \frac{1}{y} dy = dt$

$\therefore \log x - \int \frac{1}{t} dt = 0$ या

$\log t = \log x + \log C$ या

$$\log(\log y) = \log Cx$$

$$\Rightarrow \log y = Cx$$

$$\therefore y = e^{Cx}$$

जोकि अभीष्ट हल है।

प्रश्न 8 अवकल समीकरण को व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$x^5 \frac{dy}{dx} = -y^5$$

उत्तर- दिया है,

$$x^5 \frac{dy}{dx} = -y^5$$

चरों का पृथक्करण करने पर, $\frac{dy}{y^5} = -\frac{dx}{x^5}$

समाकलन करने पर,

$$\int \frac{dy}{y^5} = -\int \frac{dx}{x^5}$$ या

$$\frac{y^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C'$$ या

$$-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{y^4} = \frac{1}{4}\frac{1}{x^4} + C'$$ या

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y^4} + \frac{1}{x^4}\right) = -C'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^4} + \frac{1}{x^4} = -4C'$$ या

$$x^{-4} + y^{-4} = A$$ जहाँ $-4C' = A$

जोकि अभीष्ट हल है।

प्रश्न 9 अवकल समीकरण को व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$$

उत्तर- दिया है,

$$\frac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$$

चरों का पृथक्करण करने पर, $dy = \sin^{-1}x dx$

समाकलन करने पर,

$$\int dy = \int \sin^{-1} x dx + C \text{ या}$$

$$y = \int (\sin^{-1} x).1dx + C$$

$\sin^{-1} x$ को पहला फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर,

$$y = x\sin^{-1} x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . xdx$$

$$= x\sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x\sin^{-1} x + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{1-x^2} + C$$

$$y = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

जोकि अभीष्ट हल है।

प्रश्न 10 अवकल समीकरण को व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$e^x \tan y dx + (1 - e^x)\sec^2 y dy = 0$

उत्तर- $(1 - e^x)\sec^2 y dy = -e^x \tan y dx$

$(1 - e^x)\tan y$

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = \frac{--e^x}{1-e^x} dx$$

$$\int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = \int \frac{-e^x}{1-e^x} dx$$

$$\therefore \log \tan y = \log(1 - e^x) + \log c$$

$$\log \tan y = \log c(1 - e^x)$$

$$\Rightarrow \tan y = c(1 - e^x)$$

प्रश्न 11 अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

$(x^3 + x^2 + x + 1)\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + x; y = 1$

यदि x = 0

उत्तर- दिया है

$$(x^3 + x^2 + x + 1)\frac{dy}{dx} = 2x^2 + x \text{ या}$$

$$(x^3 + x^2 + x + 1)dy = (2x^2 + x)dx$$

$$dy = \frac{(2x^2 + x)}{(x^3 + x^2 + x + 1)}dx$$

समाकलन करने पर,

$$\int dy = \int \frac{2x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1}dx$$

$$= \int \frac{2x^2 + x}{(x+1)(x^2+1)}dx \ldots (1) \text{ अब,}$$

$$\frac{2x^2 + x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{2x^2+x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

$$2x^2 + x = A(x^2 + 1) + B(x^2 + x) + C(x + 1) \ldots (2)$$

सर्वसमिका (2) में $x + 1 = 0$ से $x = -1$ रखने पर,

$$\Rightarrow 2 - 1 = A(1 + 1) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

सर्वसमिका (2) में दोनों ओर x^2 और x के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$2 = A+B \text{ और } 1 = B+C$$

$$\therefore B = 2 - A = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$C = 1 - B = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

A, B तथा C के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\therefore \frac{2x^2+x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2(x+1)} + \frac{3x-1}{2(x^2+1)}$$

$$\text{fdy} = \int \frac{2x^2+x}{(x+1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{3x-1}{x^2+1} dx \text{ या}$$

$$y = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{4}\int \frac{2x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(x + 1) + \frac{3}{4}\log(x^2 + 1) - \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C \ldots (3)$$

$\left[\text{नोट- समाकलन से; } \int \frac{2x}{x^2+1}dx,\ x^2+1=t \text{ रखने पर}\right]$

जब $y = 1$ तब $x = 0$

$$1 = \frac{1}{2}\log 1 + \frac{3}{4}\log 1 - \frac{1}{2}\tan^{-1} 0 + C$$

$\Rightarrow 1 = 0 + C, \Rightarrow C = 1$ है।

∴ समीकरण (3) से,

$$y = \frac{1}{2}\log(x+1) + \frac{3}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$$

$$= \frac{1}{4}2\log(x+1) + \frac{3}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$$

$$= \frac{1}{4}[\log(x+1)^2 + \log(x^2+1)^3] - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$$

$$= \frac{1}{4}\log(x+1)^2(x^2+1)^3 - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$$

जोकि अभीष्ट व्यापक हल है।

प्रश्न 12 अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

$x(x^2-1)\frac{dy}{dx} = 1;\ y = 0$

यदि $x = 2$

उत्तर- दिया हुआ अवकल समीकरण $(x^2-1)\frac{dy}{dx} = 1$

$$dy = \frac{dx}{x(x^2-1)} = \frac{dx}{x(x-1)(x+1)}$$

दोनों ओर समाकलन करने पर,

$$\int dy = \int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)} + c$$

$$\Rightarrow y = \int \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \right] dx + c \text{ अब,}$$

$$= -\log x + \frac{1}{2}\log(x-1) + \frac{1}{2}\log(x+1) + c \ldots (1)$$

जब $x = 2$, हो तो $y = 0$

$$\therefore 0 = -\log 2 + \frac{1}{2}\log 1 + \frac{1}{2}\log 3 + c$$

$$\Rightarrow c = \log 2 - \frac{1}{2}\log 3$$

$\therefore$ समीकरण (1) में c का मान रखने पर,

$$y = \frac{1}{2}\log(x^2 - 1) - \frac{1}{2}\log(x)^2 + \log 2 - \frac{1}{2}\log 3$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}(\log 3 - 2\log 2) \text{ या}$$

$$y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{3}{4}$$

यही अभीष्ट विशिष्ट हल है।

प्रश्न 13 अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

$$cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = a(a \in R);\ y = 1$$

यदि x = 0

उत्तर- दिया है,

$$cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = a$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos^{-1}(a)$$

$$\Rightarrow dy = \cos^{-1}(a)dx$$

दोनों ओर का समाकलन करने पर,

$$\int dy = \cos^{-1}(a)\int dx + c$$

$$\Rightarrow y = x\cos^{-1}(a) + c \ldots (1)$$

जब $x = 0,\ y = 2$

समीकरण (1) से,

$$2 = 0 + c \Rightarrow c = 2$$

$\therefore$ समीकरण (1) से $y = x\cos^{-1}a + 2$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{y-2}{x}\right) = a$$

यही अभीष्ट विशिष्ट हल है।

प्रश्न 14 अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} = y\tan x;\ y = 2$$

दि x = 0

उत्तर- दिया है,

$$\frac{dy}{dx} = y \tan x \Rightarrow \frac{dy}{y} = \tan x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx + c$$

दोनों ओर का समाकलन करने पर,

$$\log y = -\log \cos x + c$$

जब $x = 0,\ y = 1$

$\therefore$ समीकरण (1) से,

$$\log 1 = -\log \cos 0 + c$$

$$\Rightarrow 0 = -\log 1 + c = -0 + c \Rightarrow c = 0$$

$\therefore$ समीकरण (1) से,

$\log y + \log \cos x = 0$ या

$$\log y . \cos x = 0$$

$$\Rightarrow y \cos x = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow y = \sec x$$

यही अभीष्ट विशिष्ट हल है।

प्रश्न 15 बिन्दु (0, 0) से गुजरने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $y' = e^x \sin x$ है।

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण $y' = e^x \sin x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \sin x$$

$$\Rightarrow dy = e^x \sin x dx$$

दोनों ओर समाकलन करने पर,

$$\int dy = \int e^x \sin x dx + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c \ldots (1)$$

खण्डशः समाकलन करने पर

चूँकि वक्र (0, 0) से गुजरता है। अतः

$$0 = \frac{e^0}{2}(\sin 0 - \cos 0) + c = \frac{1}{2}(-1) + c$$

$$c = \frac{1}{2}$$

अतः समीकरण (1) से,

$$y = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2y - 1 = e^x(\sin x - \cos x)$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 16 अवकल समीकरण

$xy\frac{dy}{dx} = (x + 2)(y + 2)$ के लिए बिन्दु (1, -1) से गुजरने वाला वक्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण, $xy\frac{dy}{dx} = (x + 2)(y + 2)$

या $\frac{y}{y+2}dy = \frac{x+2}{x}dx$

चारों को पृथक करने पर,

या $\left(1 - \frac{2}{y+2}\right)dy = \left(1 + \frac{2}{x}\right)dx$

दोनों ओर समाकलन करने पर,

$\Rightarrow \int dy - 2\int \frac{dy}{y+2} = \int dx + 2\int \frac{dx}{x} + c$

जहाँ c समाकलन अचर है

$\Rightarrow y - 2\log(y+2) = x + 2\log x + c \ldots (1)$

यह वक्र (1, -1) से गुजरता है। अतः

$-1 - 2\log(-1+2) = 1 + 2\log 1 + c$

या $-1 - 2\log 1 = 1 + 0 + c$

या $-1 - 0 = 1 + c \Rightarrow c = -2$

अतः समीकरण (1) से

$y - 2\log(y+2 = x + 2\log(x) - 2$

$\Rightarrow y - x + 2 = 2\log(y+2) + 2\log x = \log[x^2(y+2)^2]$

$\therefore\ y - x + 2 = \log[x^2(y+2)^2]$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 17 बिन्दु (0, -2) से होकर जाने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता और उस बिन्दु के y निर्देशांक का गुणनफल उस बिन्दु के x निर्देशांक के बराबर है।

उत्तर- प्रश्नानुसार

$$y\frac{dy}{dx} = x$$

$$\Rightarrow ydy = xdx$$

दोनों ओर का समाकलन करने पर,

$\int ydy = \int xdx + c$ या

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \ldots (1)$$

क्योंकि वक्र (1) (0, -2) से गुजरता है।

$$\therefore\ \frac{4}{2} = 0 + c \Rightarrow c = 2$$

$\therefore$ समीकरण (1) से,

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + 2$$

$\Rightarrow y^2 = x^2 + 4$ या

$$y^2 - x^2 = 4$$

यही अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 18 एक वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता स्पर्श बिन्दु को बिन्दु (-4, -3) से मिलाने वाले रेखाखण्ड की प्रवणता की दुगुनी है। यदि यह वक्र बिन्दु (-2, 1) से गुजरता है तो इस वक्र की समीकरण ज़ात कीजिए।

उत्तर- प्रश्नानुसार

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y+3}{x+4}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y+3} = 2\frac{dx}{x+4}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{y+3} = 2\int \frac{dx}{x+4} + \log c$$

जहाँ $\log c$ समाकलन अचर है।

या $\log(y+3) = 2\log(x+4) + \log c$

$$\Rightarrow \log(y+3) = \log(x+4)^2 + \log c$$

या $(y+3) = c(x+4)^2$

क्योंकि यह बिंदु (-2, 1) से गुजरता है।

$$\therefore\ 1+3 = c(-2+4)^2 = 4c$$

$$\Rightarrow 4c = 4 \Rightarrow c = 1$$

या $(y+3) = (x+4)^2$

यही अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 19 एक गोलाकार गुब्बारे का आयतन जिसे हवा भरकर फुलाया जा रहा है, स्थिर गति से बदल रहा है। यदि आरम्भ में इस गुब्बारे की त्रिज्या 3 इकाई है और 3 सेकण्ड बाद 6 इकाई है, तो t सेकण्ड बाद उस गुब्बारे की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना किसी समय ‘t’ पर गुब्बारे की त्रिज्या r तथा आयतन V है।

तब $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \ldots (1)$$

दिया हुआ है,

$\frac{dV}{dt} = K$ (अचर)

$$\Rightarrow k = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 dr = kdt$$

दोनों ओर समाकलन करने पर,

$$4\pi \int r^2 dr = k \int dt + c$$

$$\Rightarrow 4\pi \frac{r^3}{3} = kt + c \ldots (2)$$

जब $t = 0,\ r = 3$ और जब $t = 3,\ r = 6$

$$\therefore\ 4\pi \frac{27}{3} = 0 + c$$

$$\Rightarrow c = 36\pi$$

समीकरण (2) में $c = 36\pi$ रखने पर,

$$\frac{4\pi r^3}{3} = kt + 36\pi \ldots (3)$$

पुनः जब $t = 3,\ r = 6,$

$\therefore$ समीकरण (2) से

$$\frac{4\pi}{3}(6 \times 6 \times 6) = 3k + 36\pi$$

$$\Rightarrow 3k = 36 \times 8\pi - 36\pi = 36 \times 7\pi$$

$$\Rightarrow k = 12 \times 7\pi = 84\pi$$

समीकरण (3) में k का मान रखने पर,

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 84\pi t + 36\pi \text{ या}$$

$$\frac{r^3}{3} = 21t + 9 \text{ या}$$

$$r^3 = 63t + 27$$

$$\Rightarrow r = (63t + 27)^{\frac{1}{3}}$$

अतः गुब्बारे की त्रिज्या $(63t + 27)^{\frac{1}{3}}$ है।

प्रश्न 20 किसी बैंक में मूलधन में वृद्धि r% वार्षिक की दर से होती है। यदि Rs 100, 10 वर्षों में दुगुने हो जाते हैं, तो r को मान ज्ञात कीजिए। ($\log_e 2$= 0.6931)

उत्तर- माना मूलधन P है, तब प्रश्नानुसार

$$\frac{dP}{dt} = P\left(\frac{r}{100}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{r}{100} dt$$

समाकलन करने पर,

$$\int \frac{dP}{dt} = \frac{r}{100} \int dt + c$$

$$\Rightarrow \log P = \frac{r}{100} t + c \ldots . (1)$$

माना जब t = 0, P = P_0

इसलिए $\log P_0 = c$

अतः (1) से

$$\log P = \frac{r}{100} t + \log P_0$$

$$\Rightarrow \log \frac{P}{P_0} = \frac{r}{100} t$$

$\Rightarrow P = P_0 e^{\frac{r}{100}}$ (यहाँ पर P_0 = Rs. 100, P = Rs. 200, t = 10 वर्ष)

$$\therefore 200 = 100 e^{\frac{r}{100} \times 10}$$

$$\Rightarrow 2 = e^{\frac{r}{100}}$$

$$\Rightarrow \log_e 2 = \frac{r}{10}$$

$$\Rightarrow r = 10 \log_e 2 = 10(0.6931) = 6.931$$

अतः $r = 6.39\%$

प्रश्न 21 किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि 5% वार्षिक की दर से होती है। इस बैंक में Rs. 1000 जमा कराए जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि 10 वर्ष बाद यह राशि कितनी हो जाएगी?($e^{0.5}$ = 1.648)

उत्तर-

दिया गया, $\frac{dP}{dt} = P\left(\frac{5}{100}\right)$ जहाँ P मूलधन है।

$\Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{1}{20}dt$

समाकलन करने पर, $\int \frac{dP}{P} = \frac{1}{20}dt$

$\int \frac{dP}{P} = \frac{1}{20}\int dt + c_1$

$\Rightarrow \log P = \frac{1}{20}t + c_1$

या $P = e^{\frac{t}{20}} . e^{c_1}$

अर्थात $P = ce^{\frac{t}{20}} \ldots (1)$

जहाँ $e^{c_1} = c$

अब p = 1000, t = 0

$\therefore$ समीकरण (1) से $1000 = ce^0 \Rightarrow c = 1000$

$\therefore P = 1000_e^{\frac{t}{20}}$

अब P = 1000, t = 0

$\therefore$ 10 वर्ष बाद मूलधन हो जायेगा

$P = 1000_e^{\frac{10}{20}} = 1000 \times e^{0.5}$

$= 1000 \times 1.648 = \text{Rs. } 1648$

प्रश्न 22 किसी जीवाणु समूह में जीवाणुओं की संख्या 1,00,000 है। 2 घण्टों में इनकी संख्या में 10% की वृद्धि होती है। कितने घण्टों में जीवाणुओं की संख्या 2,00,000 हो जाएगी, यदि जीवाणुओं के वृद्धि की दर उनकी उपस्थित संख्या के समानुपाती हैं?

उत्तर- माना जीवाणु समूह की संख्या जब t = 0 है, 1,00,000 और किसी समय t पर N है।

तब $\frac{dN}{dt} = kN, k \in R$

$$\Rightarrow \frac{dN}{N} = k\,dt$$

समाकलन करने पर,

$\int \frac{1}{N} dN = k \int dt + c$ या $\log N = kt + c \ldots (1)$

जब t = 0, N = 1,00,000

$\therefore$ (1) से $\log(1,00,000) = 0 + c$

$$\therefore \log N = kt + \log(1,00,000)$$

$$\Rightarrow \frac{N}{1,00,000} = kt \ldots (2)$$

जब t = 2 घंटे,

$$N = 1,00,000 + \frac{1,00,000 \times 10}{100}$$

$$= 1,00,000 + 10,000 = 1,10,000 \ldots (2)$$

$\therefore$ (2) से $\log \frac{1,10,000}{1,00,000} = 2k$

$$\Rightarrow 2k = \log\left(\frac{11}{10}\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}\log\left(\frac{11}{10}\right)$$

अतः $\log\frac{N}{1,00,000} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{11}{10}\right).t$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{\log\frac{11}{10}}\log\frac{N}{1,00,000}$$

जब N = 2,00,000,

तब माना t = T

$$T = \frac{2}{\log\frac{11}{10}}\log\frac{2,00,000}{1,00,000}$$

$$= \frac{2}{\log\left(\frac{11}{10}\right)}\log 2$$

$$T = \frac{2\log 2}{\log\left(\frac{11}{10}\right)}$$

प्रश्न 23 अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

का व्यापक हल है-

a. $e^{x} + e^{-y} = C$

b. $e^{x} + e^{y} = C$

c. $e^{-x} + e^{y} = C$

d. $e^{-x} + e^{-y} = C$

उत्तर-

a. $e^{x} + e^{-y} = C$

हल-

$$\frac{dy}{dx} = e^{x}.e^{y}$$

$$\Rightarrow \int e^{-y}dy = \int e^{x}dx$$

$$\Rightarrow e^{-y} = e^{x} + k$$

$$\Rightarrow e^{x} + e^{-y} = c$$

प्रश्नावली 9.5 (पृष्ठ संख्या 422-423)

प्रश्न 1 दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल सम्मकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए।

$(x^2 + xy)\,dy = (x^2 + y^2)dx$

उत्तर- दिया गया समीकरण-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x^2+xy}$$

$$= \frac{x^2\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}{x^2\left(1+\frac{y}{x}\right)}$$

$$= \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}}$$ जो की $x^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप का है।

दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है।

समीकरण में y = x तथा $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1+v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1+v} - v$$

$$= \frac{1+v^2-v-v-v^2}{1+v} = \frac{1-v}{1+v}$$

या

$$= \frac{1-v}{1+v}dv = \frac{dx}{x}$$

दोनों ओर समाकलन करने पर,

$$\int\left(-1+\frac{2}{1-v}\right)dv = \frac{dx}{x} + c$$

या $-v - 2\log(1-v) = \log x + c$

या $\log x + \log c + 2\log(1-v) = -v$

या $\log[cx(1-v)^2] = -v$

या $\Rightarrow cx(1-v)^2 = e^{-v}$

$$\Rightarrow cx\left(1-\frac{y}{x}\right)^2 = e^{\frac{-y}{x}}$$

$$\Rightarrow c(x-y)^2 = xe^{\frac{-y}{x}}$$

यही अभीस्ट हल है।

प्रश्न 2 दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल सम्मकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए।

$$y' = \frac{x+y}{x}$$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$

या $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$ जो की $x^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप का है।

अतः दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है।

$\therefore$ समीकरण में $y = vx$ तथा $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$$= v + x\frac{dv}{dx} = 1 + v$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow dv = \frac{dx}{x}$$

समाकलन करने पर, $\int dv = \int \frac{dx}{x} + c$

या $v = \log x + c$

या $\frac{y}{x} = \log x + c$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्न 3 दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल सम्मकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए।

(x - y) dy - (x + y)dx = 0

उत्तर-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \left(\frac{1+v^2}{1-v}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{v\text{-}1}{v^2+1} dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2v}{v^2+1} dv - \int \frac{dv}{v^2+1} = -\log x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) - \tan^{-1}\frac{y}{x} = -\log x + c$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - c$$

प्रश्न 4 1 से 10 तक के प्रत्येक प्रश्न में दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल सम्मकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए।

$(x^2 - y^2)$ dx + 2xydy = 0

उत्तर- दिया है, $(x^2 - y^2)$ dx + 2xydy = 0

या $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2-y^2}{2xy} = f(x,y)$

दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है।

अब, $\frac{dy}{dx} = \frac{-(x^2-y^2)}{2xy}$

माना y = vx रखने पर,

$\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-\left(x^2-v^2x^2\right)}{2x(vx)}$

$= \frac{-x^2(1-v^2)}{x^2.2\,v} = -\frac{1-v^2}{2v}$

$= x\frac{dv}{dx} = -\frac{1-v^2}{2v} - v$

$= x\frac{dv}{dx} = \frac{-1+v^2-2v^2}{2v} = \frac{-1-v^2}{2v}$

$\frac{2v}{v^2+1}dv = -\frac{dx}{x}$

समाकलन करने पर,

$\int \frac{2v}{v^2+1}dv = -\int \frac{dx}{x} + \log C$

या $\log(v^2+1) = -\log x + \log C$

$\Rightarrow \log\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = -\log x + \log C$

$\log\frac{x^2+y^2}{x^2} + \log x = \log C$

या $\therefore \log\left(\frac{x^2+y^2}{x^2} \times x\right) = \log C$

$\Rightarrow \left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) = C$

$\therefore x^2 + y^2 = Cx$

जो दिए गए अवकल समीकरण का विशिस्ट हल है।

प्रश्न 5 दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल सम्मकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए।

$$x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy$$

उत्तर- दिया हुआ है,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y^2 + xy}{x^2}$$

$$= 1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) = x^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$$

∴ अवकल समीकरण संमघातीय है।

∴ इसमें $y = mx$ और $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dy}{dx}$ रखने पर,

$$v + x\frac{dy}{dx} = 1 - 2v^2 + v$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = 1 - 2v^2$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{1-2v^2} = \frac{dx}{x}$$

दोनों ओर समाकलन करने पर,

$$\Rightarrow \frac{dv}{1-2v^2} = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\frac{1}{2} - v^2} = \int \frac{dx}{x} + c = \log x + c$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{1-2v^2} = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dv}{\frac{1}{2}-v^2} = \int \frac{dx}{x} + c = \log x + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2.\frac{1}{\sqrt{2}}} \log \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+v}{\frac{1}{\sqrt{2}}-v} \right] = \log x + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left(\frac{1+\sqrt{2}v}{1-\sqrt{2}v} \right) = \log x + c$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{x+\sqrt{2}y}{x-\sqrt{2}y} = \log x + c$$

यहीं अभीस्ट हल है।

प्रश्न 6 दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल सम्मकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए।

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

उत्तर- दिया है,

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

$$x \frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$ जो $x^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप का है।

अत: दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है।

$\therefore$ इसमें $y = vx$ और $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

या $x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$

$$\Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x}$$

दोनों और समाकलन करने पर,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int \frac{dx}{x} + c_1$$

या $\log\left[v + \sqrt{1 + v^2}\right] = \log x + \log c$ जहाँ $c_1 = \log c$

या $\log\left[\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right] = \log cx$

$$\Rightarrow \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} = cx$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$$

यही अभीस्ट हल है।

प्रश्न 7 दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल सम्मकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए।

$$\{x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y \sin\left(\frac{y}{x}\right)\}ydx = \{y \cos\left(\frac{y}{x}\right) - x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\}xdx$$

उत्तर- दिया गया समीकरण-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left\{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}{y\left\{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}$$

$$= \frac{\frac{y}{x}\left\{\cos\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}{\left\{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}$$

जो $x^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप का है।

अतः दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है।

$\therefore$ इसमें $y = vx$ और $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v(\cos v + v\sin v)}{(v\sin v - \cos v)}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + v^2\sin v}{v\sin v - \cos v} - v$$

$$= \frac{v\cos v + v^2\sin v - v^2\sin v + v\cos v}{v\sin x - \cos v}$$

$$= \frac{2v\cos v}{v\sin v - \cos v}$$

$$\Rightarrow \frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}dv = \frac{2dx}{x}$$

दोनों और समाकलन करने पर,

$$\text{या } \int \frac{\sin v}{\cos v} dv - \int \frac{1}{v} dv = 2 \int \frac{dx}{x} + c_1$$

$$-\log(\cos v) - \log v = 2\log(x) + c_1$$

$$\log \frac{1}{(v \cos v)} = \log x^2 + \log(c_2) = \log cx^2$$

$$\frac{1}{\left[\frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right]} = cx^2 \text{ या } \frac{x}{y \cos \frac{y}{x}} = cx^2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \sec \frac{y}{x} = cx^2$$

$$xy \cos\left(\frac{y}{x}\right) = K$$

यही अभीस्ट हल है।

प्रश्न 8 दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल सम्मकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए।

$$x\frac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

उत्तर- दिया गया समीकरण

$$x\frac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$\text{या } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

अत: दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है।

$\therefore$ इसमें $y = vx$ और $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - \sin v$$

या $x\frac{dv}{dx} = -\sin v$

दोनों और समाकलन करने पर,

$$\int \operatorname{cosec} v dv = -\int \frac{1}{x} dx + c$$

$$\Rightarrow \log \tan \frac{v}{2} = -\log x + \log c$$

या $\log \left[x \tan \frac{v}{2}\right] = \log c$

या $x \tan \frac{v}{2} = c$

या $x \tan \frac{y}{2x} = c$

यही अभीस्ट हल है।

प्रश्न 9 दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल सम्मकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए।

$$ydx + x\log\left(\frac{y}{x}\right)dy - 2xdy = 0$$

उत्तर- दिया गया समीकरण है,

$$\frac{y}{x} + \log\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 0$$

या $\frac{dy}{dx}\left[2 - \log\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \frac{y}{x}$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{2-\log\frac{y}{x}}$ जो की $f(x,y) = x^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप का है।

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{2-\log v}$$

या $x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{2-\log v} - v = \frac{v-2v\log v}{2-\log v}$

$$= \frac{v\log v - v}{2-\log v}$$

या $\frac{2-\log v}{v(\log v-1)}dv = \frac{dx}{x}$

दोनों ओर समाकलन करने पर,

$$2\int\frac{\frac{1}{v}}{\log v-1}dv - \int\frac{\log v}{v\log v - v}dv$$

$$= \int\frac{dx}{x} + c_1$$

या $2\log[\log v - 1] - \log[v(\log v - 1)]$

$= \log x + \log c$

या $\log\left[\frac{(\log v-1)}{v(\log v-1)}\right] = \log cx$

या $\frac{\log v-1}{v} = cx$

$\Rightarrow \log\frac{v}{x} - 1 = cx.\frac{y}{x} = cy \therefore cy\log\frac{y}{x} - 1$

प्रश्न 10 दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल सम्मकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए।

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

उत्तर- दिया गया समीकरण है,

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

जो की समघातीय अवकल समीकरण है।

$\therefore$ इसमें $x = vy$ और $v.1 + y.\frac{dv}{dy}$ रखने पर,

$$\left(v+y\frac{dv}{dy}\right)(1+e^v)+e^v(1-v)=0$$

$$\Rightarrow v+ve^v+y\frac{dv}{dy}(1+e^v)+e^v-ve^v=0$$

$$\Rightarrow v+e^v+y\frac{dv}{dy}(1+e^v)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1+e^v}{v+e^v}dv+\frac{dy}{y}=0$$

$$\Rightarrow \int\frac{1+e^v}{v+e^v}dv+\int\frac{dy}{y}=\log c$$

$$\Rightarrow \log(v+e^v)+\log y=\log c$$

$$\Rightarrow y(v+e^v)=c$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{x}{y}+e^{\frac{x}{y}}\right)=c$$

$$\Rightarrow x+ye^{\frac{x}{y}}=c$$

प्रश्न 11 दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल सम्मकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए।

(x + y) dy + (x – y) dx = 0; y = 1 यदि x = 1

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण-

$\therefore$ इसमें $y = vx$ और $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1} - v = \frac{v-1-v^2-v}{v+1}$$

$$= -\frac{v^2+1}{v+1}$$

$$\Rightarrow \frac{v+1}{v^2+1}dv + \frac{dx}{x} = 0$$

दोनों और समाकलन करने पर,

$$\frac{1}{2}\int\frac{2v}{v^2+1}dv + \int\frac{dv}{v^2+1} + \int\frac{dv}{v} = c$$

या $\frac{1}{2}\log(v^2+1) + \tan^{-1}x + \log x = c$

जब x = 1, y = 1

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log(1+1) + \tan^{-1}1 + \log 1 = c$$

$$\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} = c$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$$

अतः $\frac{1}{2}\log\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right) + \log x + \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$$

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$$

$$\log(x^2+y^2) + 2\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \log 2$$

यही अभीस्ट हल है।

प्रश्न 12 दिए गए अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबन्धको सन्तुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

$x^2\,dy + (xy + y^2)\,dx = 0$, $y = 1$ यदि $x = 1$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण

$$x^2\frac{dy}{dx} + y(x+y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{xy+y^2}{x^2}$$

$$= \left[\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] = x^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$$

अतः दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है।

$\therefore$ इसमें $y = vx$ और $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$$v + x\frac{dv}{dx} = -(v + v^2)'$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -2v - v^2$$

या $\frac{dv}{v^2+2v} + \frac{dx}{x} = 0$

दोनों और समाकलन करने पर,

$$\int \frac{dv}{v(v+2)} + \int \frac{dx}{x} = \log c$$

या $\int \left(\frac{1}{2v} - \frac{1}{2(v+2)}\right)dv + \int \frac{dx}{x} = \log c$

या $\frac{1}{2}\log \frac{y}{y+2x} + \log x = \log c \ldots (1)$

$\left(v = \frac{y}{x} \text{ रखने पर}\right)$

जब $x = 1, y = 1$

$$\therefore \frac{1}{2}\log \frac{1}{3} + \log 1 = \log c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\log 3 = \log c$$

अब (1) से, $\log \frac{y}{y+2x} = 2\log x = 2\log c) = (-\log 3)$

या $\log\left(\frac{x^2y}{2x+y}\right)+\log 3=0$

या $\log\left(\frac{3x^2y}{2x+y}\right)=0$

या $\frac{3x^2y}{2x+y}=e^0=1$

$\Rightarrow 3x^2y=2x+y$

यही अभीस्ट हल है।

प्रश्न 13 दिए गए अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबन्धको सन्तुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

$\left[x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)-y\right]dx+x\,dy=0$

$y=\frac{\pi}{4}$ यदि $x=1$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण है,

$$\frac{dy}{dx}+\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}=0$$

या $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)=x^0f\left(\frac{y}{x}\right)$

अतः अवकल समीकरण समघातीय है।

$\therefore$ इसमें $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$v + x\frac{dv}{dx} = v - \sin^2 v$

या $x\frac{dv}{dx} = -\sin^2 v$

या $\operatorname{cosec}^2 v dv + \frac{dx}{x} = 0$

$\Rightarrow -\cot v + \log x = c$

या $\log x - \cot\frac{y}{x} = c$

जब $x = 1, y = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ (1) से, $\log 1 - \cot\frac{\pi}{4} = c$

या c = -1

$\therefore$ (1) से $\log x - \cot\frac{y}{x} = -1$

या $\log x + 1 = \cot\frac{y}{x}$

या $\cot\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + \log e$

या $\cot\frac{y}{x} = \log ex$

यही अभीस्ट हल है।

प्रश्न 14

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \text{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

Y = 0 यदि x = 1

उत्तर- दिया हुआ अवकल समीकरण-

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \text{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

अतः दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है।

$\therefore$ इसमें $y = vx$ और $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर,

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - \text{cosec } v$$

या $x\frac{dv}{dx} = -\text{cosec } v$

$$-\sin v\, dv = \frac{dx}{x}$$

दोनों ओर समाकलन करने पर,

$$\int -\sin v\, dv = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$\cos v = \log x + c$$

या $\cos \frac{y}{x} = \log x + c$

जब $x = 1, y = 0$

$\therefore$ (1) से $\cos(0) = \log 1 + c$

$\Rightarrow 1 = 0 + c$

$\Rightarrow c = 1$

अतः $\cos\frac{y}{x} = \log x + 1 = \log x + \log e$

$\therefore \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \log ex$

यही अभीस्ट हल है।

प्रश्न 15

$2y + y^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} = 0$

y = 2 यदि x = 1

उत्तर- दिया है,

$$2xy + y^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy+y^2}{2x^2}$$

मान लीजिए

$$y = vx$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

या $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

या $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2x.vx+v^2x^2}{2x^2}$

$= \frac{x^2(2v+v^2)}{2x^2}$

$= \frac{2v+v^2}{2}$

$= v + \frac{v^2}{2}$

$\therefore x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{2}$

या $v^{-2}dv = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$\int v^{-2}dv = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + c$

या $\frac{v^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{2}\log|x| + C$

या $-\frac{1}{v} = \frac{1}{2}\log|x| + C$

अब $x = \frac{y}{x}$ रखने पर,

$-\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\log|x| + C$

दिया है- $x = 1, y = 2$ रखने पर,

$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\log 1+C$$

$$\therefore C=-\frac{1}{2}$$

अतः अभीस्ट हल-

$$-\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\log|x|-\frac{1}{2}$$

या $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}[1-\log|x|]$

या $y=\frac{2x}{1-\log|x|}$.

प्रश्न 16

$$\frac{dx}{dy}=h\left(\frac{x}{y}\right)$$

के रूप वाले समंघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा प्रतिस्थापन किया जाता है-

a. y = vx
b. v = yx
c. x = vy
d. x = y

उत्तर-

c. x = vy

प्रश्न 17 निम्नलिखित में से कौन-सा संमघातीय अवकल समीकरण है?

a. $(4x + 6y + 5)dy - (3y + 2x + 4)dx = 0$

b. $(xy)dx - (x^3 + y^3)dy = 0$

c. $(x^3 + 2y^2)dx + 2xy\ dy = 0$

d. $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$

उत्तर-

d. $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$

प्रश्नावली 9.5 (पृष्ठ संख्या 429-430)

प्रश्न 1 दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$$

उत्तर- दी गई अवकल समीकरण रैखिक अवकल समीकरण है।

P = 2 तथा Q = sinx

अब समाकलन गुणक $I.F. = e\int p\,dx = e\int 2dx = e^2x$

अतः अभीस्ट व्यापक हल-

$$y \times I.F. = \int [Q \times I.F]dx + c$$

$$y \times e^{2x} = \int \sin x\, e^{2x} dx + c$$

या $y.\,e^{2x} = \frac{e^{2x}}{2^2+1}(2\sin x - \cos x) + c$

या $y = \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x) + ce^{-2x}$

प्रश्न 2 दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$$

उत्तर- दी गई अवकल समीकरण रैखिक अवकल समीकरण है।

$P = 3$ तथा $Q = e^{-2x}$

अब समाकलन गुणक $I.F. = e^{\int p\, dx} = e^{\int 3dx} = e^{3x}$

अतः अभीस्ट व्यापक हल-

$$y \times I.F. = \int [Q \times I.F] dx + c$$

या $ye^{3x} = \int [e^{-2x} \times e^{3x}] dx + c$

या $ye^{3x} = \int e^{x}\, dx + c$

या $y = e^{-2x} + ce^{-3x}$

प्रश्न 3 दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$$

उत्तर-

जहाँ $p = \frac{1}{x}$ और $Q = x^2$

$\therefore$ समाकलन गुणांक $I.F. = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log_e x} = x$

$\therefore$ अभीस्ट व्यापक हल-

$$y \times \text{I.F.} = \int [Q \times \text{I.F.}] dx + c$$

या $y.x = \int [x^2.x] dx + c$

या $xy = \frac{x^4}{4} + c$

प्रश्न 4 दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} + (\sec) = \tan x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

उत्तर- दी गई अवकल समीकरण रैखिक अवकल समीकरण है।

P = secx, Q = tanx

$\therefore$ समाकलन गुणक $\text{I.F.} = e \int \sec x \, dx$

$$= e^{\log}(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x$$

$\therefore$ अभीस्ट व्यापक हल-

$$y \times \text{I.F.} = \int [Q \times \text{I.F.}] dx + c$$

या $y(\sec x + \tan x) = \int \tan x (\sec x + \tan x) dx + c$

$$y(\sec x + \tan x) = \int [\tan x \ \sec x + \tan^2 x] dx + c$$

या $y(\sec x + \tan x) = \int \sec x \ \tan x \, dx$

$$+ \int (\sec^2 x - 1) dx + c$$

या $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + c$

प्रश्न 5 दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x\left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण-

$$\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

या $\dfrac{dy}{dx} + \sec^2 x.y = \tan x \sec^2 x$

जो की रैखिक अवकल समीकरण

जहाँ $P = \sec^2 x$ और $Q = \tan x \ \sec^2 x$

$\therefore$ समाकलन गुणक $I.F. = e\int \sec^2 xdx = e^{\tan x}$

व्यापक हल $y \times I.F. = \int[Q \times I.F.]dx + c$

या $y.e^{\tan x} = \int(\tan x \ \sec^2 x.e^{\tan x})dx + c$

या $ye^{\tan x} = \int(e^t.t)dx + c$

जहाँ $\tan x =$ t तब $\sec^2 xdx = dt$

या $ye^{\tan x} = [t.e^t - \int[1.e^t]dt]$

या $ye^{\tan x} = \tan xe^{\tan x} - e^{\tan x} + c$

या $y = (\tan x - 1) + ce^{-\tan x}$

प्रश्न 6 दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

या $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}.y = x \log x$ जो की रेखिक अवकल समीकरण है।

जहाँ $P = \frac{2}{x}$ और $Q = x \log x$

$\therefore$ समाकलन गुणक $I.F. = e\int pdx = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^2 \log x = x$

$\therefore$ अभीस्ट व्यापक हल

$$y \times I.F. = \int [Q \times I.F] dx + c$$

या $y.x^2 = \int [x \log x. x^2] dx + c$

या $x^2 y = \int (x^3 \log x) dx + c$

या $x^2 y = \log x. \frac{x^4}{4} - \int \frac{1}{x}. \frac{x^4}{4} dx + c$

या $x^2 y = \frac{x^4}{4} \log x - \frac{1}{4 \times 4}.x^4 + c$

या $y = \frac{1}{4}x^2 \log x - \frac{1}{16}x^2 + cx^{-2}$

या $y = \frac{x^2}{16}(4 \log x - 1) + cx^{-2}$

प्रश्न 7 दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x$$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण

$$x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x$$

या $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x \log x} . y = \frac{2}{x^2}$

जो की $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के रूप का अवकल समीकरण है जहाँ $P = \frac{1}{x \log x}$ और $Q = \frac{2}{x^2}$

$\therefore$ समाकलन गुणक $I.F. = e \int P\, dx$

$= \int e^{\frac{1}{x} \log x} dx\, dx = e^{\int \frac{1}{t}} dt$

जहाँ $\log x = t$

$= e^{\log} t = t = \log x$

$\therefore$ अभीस्ट व्यापक हल- $y \times I.F. = \int [Q \times I.F] dx + c$

अर्थात $y(\log x) = \int \left(\frac{2}{x^2} \log x) dx + c = 2 \int \log x . \frac{1}{x^2} dx + c$

$$= 2 \left[\log x \left(-\frac{1}{x} \right) - \int \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x} dx \right] + c = \frac{-2 \log x}{x} - \frac{2}{x} + c$$

$\therefore y \log x = -\frac{2}{x} (\log x + 1) + c$

प्रश्न 8 दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$(1 + x^2)dy + 2xy\,dx = \cot x\,dx, (x \neq 0)$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण $(1 + x^2)dy + 2xy\,dx = \cot x\,dx, (x \neq 0)$

या $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2} \cdot y = \frac{\cot x}{1+x^2}$

जो की $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है।

जहाँ $p = \frac{2x}{1+x^2}$ तथा $Q = \frac{\cot x}{1+x^2}$

$\therefore$ समाकलन गुणक $I.F = e\int Pdx = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\log(1+x^2)}$
$= (1 + x^2)$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल $y \times I.F. = \int [Q \times I.F]dx + c$

या $y \times (1 \times x^2) = \int \left[\frac{\cot x}{1+x^2}(1 + x^2)\right] dx + c$

या $y(1 + x^2) = \int \cot x dx + c$

या $y(1 + x^2) = \log \sin x + c$

या $y = (1 + x^2)^{-1} \log \sin x + c(1 + x^2)^{-1}$

प्रश्न 9 दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$x\frac{dy}{dx} + y - x + xy \cot x = 0, (x \neq 0)$$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण-

$$x\frac{dy}{dx} + y - x + xy\cot x = 0$$

या $\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{1+x\cot x}{x}\right) = 1$

जो की $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है।

जहाँ $P = \left(\frac{1}{x} + \cot x\right)$ तथा $Q = 1$

$\therefore$ I.F. $= e\int P\,dx = e^{\int\left(\frac{1}{x}+\cot x\right)}$

$= e^{(\log x+\log\sin x)} = e^{\log x\sin x} = x\sin x$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल $y \times$ I.F. $= \int[Q \times \text{I.F}]dx + c$

या $y.\,x\sin x = \int(1.x\sin x)dx + c$

या $y.\,x\sin x = x.\,(-\cos x) + \int 1.(-\cos x) + c$

या $y.\,x\sin x = -x\cos x - \sin x + c$

या $y = -\frac{x\cos x}{x\sin x} - \frac{\sin x}{x\sin x} + \frac{c}{x\sin x}$

या $y = -\cot x - \frac{1}{x} + \frac{c}{x\sin x}$

प्रश्न 10 दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$(x+y)\frac{dy}{dx}=1$$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण-

$$(x+y)\frac{dy}{dx}=1$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=x+y$$

या $\frac{dx}{dy}-x=y$ जो की x में रैखिक अवकल समीकरण है।

यहाँ पर R = -1 और s = y

$\therefore$ समाकलन गुणक $I.F.=e\int R\,dy=e\int -1.dy=e^{-y}$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल $y\times I.F.=\int[Q\times I.F]dx+c$

$$x.e^{-y}=\int y.e^{-y}dy+c$$

$$=\frac{y.e^{-y}}{-1}-\int 1.\frac{e^{-y}}{-1}dy+c$$

$$=-ye^{-y}+\frac{e^{-y}}{-1}+c$$

$$\Rightarrow x=-y-1+ce^{y}$$

या $x+y+1=ce^{y}$

प्रश्न 11 दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

y dx + (x - y²)dy = 0

उत्तर- y dx + (x - y²)dy = 0

या $\frac{dx}{dy} + \frac{x - y^2}{y} = 0$

या $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = y$ जो की x में रैखिक अवकल समीकरण है।

यहाँ पर $R = \frac{1}{y}$ और $S = y$

$\therefore$ समाकलन गुणक $I.F. = e\int R\, dy = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\log y} = y$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल $y \times I.F. = \int [Q \times I.F] dx + c$

या $x.y = \int (y.y) dy + c$

या $xy = \frac{1}{3} y^3 + c$ या $x = \frac{1}{3} y^2 + \frac{c}{y}$

प्रश्न 12 दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$(x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = y, (y > 0)$$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण

$$(x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = y, (y > 0)$$

या $y\frac{dx}{dy} = x + 3y^2$

या $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 3y$ जो की x में रैखिक अवकल समीकरण है।

यहाँ पर $R = -\frac{1}{y}$ और $S = 3y$

$\therefore$ समाकलन गुणक $I.F. = e\int R\,dy = e^{\int -\frac{1}{y}}\,dy$

$= e^{-\log y} = e^{\log y^{-1}} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल-

$y \times I.F. = \int [Q \times I.F] dx + c$

या $x\frac{1}{y} = \int \left(3y.\frac{1}{y}\right) dy + c$

या $\frac{x}{y} = 3y + c\}$

या $x = 3y^2 + cy$

प्रश्न 13 दिए गए अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबन्धको सन्तुष्ट करने वाला विशिष्ट हुल ज्ञात कीजिए।

$\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x, y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{3}$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x,$$

जो 'y' में रैखिक अवकल समीकरण है-

जहाँ $P = 2\tan x$ तथा $Q = \sin x$

$$\text{I.F} = e\int P dx = e^{\int P} dx = e^{2\log \sec x}$$

$$= e^{\log \sec^2 x} = \sec^2 x$$

$\therefore$ समीकरण का व्यापक हल $y \times \text{I.F.} = \int [Q \times \text{I.F}] dx + c$

या $y.\sec^2 x = \int \sec^2 . \sin x \, dx + c$

$$= \int \sec x . \tan x \, dx + c$$

$$= \sec x + c$$

या $y = \frac{1}{\sec x} + c\cos^2 x = \cos x + c \cos^2 x$

पुनः जब $x = \frac{\pi}{3}, y = 0$

$$\therefore \; 0 = \cos\frac{\pi}{3} + c\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{c}{4}$$

$$\Rightarrow \; c = -2$$

$\therefore y = \cos x - 2\cos^2 x$ विशिष्ट हल है।

प्रश्न 14 दिए गए अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबन्धको सन्तुष्ट करने वाला विशिष्ट हुल ज्ञात कीजिए।

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2}$$

$y = 0$ यदि $x = 1$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण-

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{1}{(1+x^2)^2}$$ जो 'y' में रैखिक अवकल समीकरण है।

यहाँ पर $P=\frac{2x}{1+x^2}$ तथा $Q=\frac{1}{(1+x^2)^2}$

$\therefore$ समाकलन गुणक $I.F=e\int Pdx=e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}$

$=e^{\log(1+x^2)}=1+x^2$

$\therefore$ समीकरण का व्यापक हल

$y\times I.F.=\int[Q\times I.F]dx+c$

या $y(1+x^2)=\int(1+x^2).\frac{1}{(1+x^2)^2}dx+c$

$=\int\frac{dx}{1+x^2}+c$

या $y(1+x^2)=\tan^{-1}x+c$

जब $x=1, y=1$

$0=\tan^{-1}1+c=\frac{\pi}{4}+c\Rightarrow c=-\frac{\pi}{4}$

अतः $y(1+x^2)=\tan^{-1}x-\frac{\pi}{4}$ विशिष्ट हल है

प्रश्न 15 दिए गए अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबन्धको सन्तुष्ट करने वाला विशिष्ट हुल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} - 3y \cot x = \sin 2x, y = 2$$

यदि $x = \frac{\pi}{2}$

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण-

$\frac{dy}{dx} - 3y \cot x = \sin 2x$ जो 'y' में रैखिक अवकल समीकरण है।

यहाँ पर $P = -3 \cot x$ तथा $Q = \sin 2x$

$\therefore$ समाकलन गुणक

$$\text{I.F} = e^{\int P dx} = e^{-3 \int \cot x \, dx} = e^{-3 \log \sin x}$$

$$= e^{\log(\sin x)^{-3}} = \frac{1}{\sin^3 x}$$

$\therefore$ समीकरण का व्यापक हल

$$y \times \text{I.F.} = \int [Q \times \text{I.F}] dx + c$$

या $y. \frac{1}{\sin^3 x} = \int \frac{1}{\sin^3 x} .2 \sin x \cos x \, dx + c$

$$= 2 \int \frac{\cos x}{\sin x . \sin x} dx + c$$

$$= 2 \int \text{cosec} x . \cot x \, dx + c$$

$$= -2 \text{cosec } x + c$$

$$\Rightarrow \quad = -2 \sin^2 x + c \sin^3 x$$

जब $x = \frac{\pi}{2}, y = 2$

$$\therefore \; 2 = -2(1) + c(1)$$

$$\Rightarrow \; 4 = c$$

अतः $y = -2 \sin^2 x + 4 \sin^3 x$ विशिष्ट हल है।

प्रश्न 16 मूल विन्दु से होकर जाने वाले एक वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिन्दु के निर्देशांकों के योग के बराबर है।

उत्तर- माना दिया गया वक्र y = f(x) है,

तब प्रश्नानुसार $\frac{dy}{dx} = x + y$ जो 'y' में रैखिक अवकल समीकरण है।

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y = x$$

यहाँ पर $P = -1$ तथा $Q = x$

$$I.F. = e^{\int P\,dx} = e^{\int -dx} = e^{-x}$$

$\therefore$ समीकरण का व्यापक हल-

$$ye^{-x} = \int xe^{-x}\,dx + c = \frac{xe^{-x}}{-1} - \int 1.\frac{e^{-x}}{-1}\,dx + c$$

$$= xe^{-x} + \frac{e^{-x}}{-1} + c = -(x+1)e^{-x} + c$$

$$x + y + 1 = ce^{x}$$

क्योंकि यह मूलबिंदु अर्थात (0, 0) से गुजरता है।

इसलिए $0 + 0 + 1 = c^{0} = c \Rightarrow c = 1$

अतः $x + y + 1 = e^{x}$

यही अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 17 बिंदु (0, 2) से होकर जाने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिंदु के निर्देशांकों का योग उस बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के परिमाण से 5 अधिक है।

उत्तर- माना दिया गया वक्र y = f(x) है।

तब प्रश्नानुसार $x + y = \frac{dy}{dx} + 5$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y = x - 5$$

यहाँ पर $\Rightarrow P = -1$ तथा $Q = x - 5$

$$\therefore \text{ I.F.} = e^{\int P\,dx} = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$$

$\therefore$ समीकरण का व्यापक हल-

$$ye^{-x} = \int e^{-x}(x-5)dx + c$$

$$= \int xe^{-x}\,dx - 5\int e^{-x}\,dx + c$$

$$= \frac{x.e^{-x}}{-1} - \int \frac{1.e^{-x}}{-1}\,dx - \frac{-5e^{-x}}{-1} + c$$

$$= xe^{-x} + \frac{e^{-x}}{-1} + 5e^{-x} + c$$

या $y = -x + 4 + ce^{x}$

क्योंकि यह वक्र बिंदु (0, 2) से गुजरता है।

$$\therefore 2 = -0 + 4 + xe^{0} \;\Rightarrow\; c$$

$$y = -x + 4 - 2e^{x}$$

या $y = 4 - x - 2e^{x}$ अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 18 अवकल समीकरण

$$x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2$$

का समाकलन गुणक है-

a. e^{-x}

b. e^{-y}

c. $\frac{1}{x}$

d. x

उत्तर-

c. $\frac{1}{x}$

हल-

$$x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2$$

या $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 2x$

इसकी तुलना $\frac{dy}{x} + Py = Q$ से करने पर,

$P = -\frac{1}{x}$ तथा $Q = 2x$

अब समाकलन गुणक $= e^{-\int \frac{1}{x}\, dx}$

$= e^{-\log x} = e^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

अतः विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 19 अवकल समीकरण

$$(1-y^2)\frac{dx}{dy} + yx = ay(-1 < y < 1)$$

का समाकलन गुणक है-

a. $\frac{1}{y^2-1}$

b. $\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$

c. $\frac{1}{1-y^2}$

d. $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

उत्तर-

d. $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

हल-

दिया है-

$$(1-y^2)\frac{dx}{dy} + yx = ay$$

या $\frac{dx}{dy} + \frac{y}{1-y} \cdot x = \frac{ay}{1-y^2}$

इसकी तुलना $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ से करने पर,

$$P = \frac{y}{1-y^2}$$

$$\therefore \quad \int P\,dy = \int \frac{y}{1-y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1-y^2}\,dy$$

मान लीजिए- $1 - y^2 = t$

तब $-2y\,dy = dt$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{2}\log t$$

$$= -\frac{1}{2}\log(1-y^2)$$

अब समाकलन गुणक- $= e^{\int P\,dy}$

$$= e^{-\frac{1}{2}\log(1-y^2)}$$

$$e^{\log \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

अतः विकल्प (D) सही है।

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 436-437)

प्रश्न 1 निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से प्रत्येक की कोटि एवं घात (यदि परिभाषीत हो) ज्ञात कीजिए।

a. $\frac{d^{2y}}{dx^2} + 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = \log x$

b. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 7y = \sin x$

c. $\frac{d^{4y}}{dx^4} - sin\ \left(\frac{d^{3y}}{dx^3}\right) = 0$

उत्तर-

a. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = \log x$ की कोटि 2 है तथा घात 1 है।

b. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 7y = \sin x$ की कोटि 1 तथा घात 3 है।

c. $\frac{d^4y}{dx^4} - \sin\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$ की कोटि 4 परन्तु घात के लिए यह परिभाषित नहीं है।

प्रश्न 2 निम्नलिखित प्रशन में से सत्यापित कीजिए की दिया हुआ फलन (अस्पष्ट अथवा स्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है-

a. $xy = a\,e^x + b\,e^{-x} + x^2\ :$
$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$

b. $y = e^x\,(a\ \cos x + b\ x)\ :\ \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

c. $y = x\sin 3x\ :\ \frac{d^2y}{dx^2} + 9y - 6\cos 3x = 0$

d. $x^2 = 2y^2\ \log y\ :\ (x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$

उत्तर-

a.

दिया है-

$$y = ae^x + be^{-x} + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = ae^x - be^{-x} + 2x$$

तथा $\frac{d^2y}{dx^2} = ae^x + be^{-x} + 2$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2$$

$$= x(ae^x + be^{-x} + 2) + 2(ae^x - be^{-x} + 2x)$$

$$- x(ae^x + be^{-x} + x^2) + x^2 - 2$$

$$= e^x(ax + 2a - ax) + e^{-x}(bx - 2b - bx)$$

$$- x^3 + x^2 + 2x + 4x - 2$$

$$= 2ae^x - 2be^{-x} - x^3 + x^2 + 6x - 2 \neq 0$$

$y = ae^x - be^{-x} + x^2$ अवकल समीकरण

अतः $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$ का हल नहीं है।

b.

दिया है-

$$y=e^{x}(a\ \cos x+b\ \sin x)$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{x}(a\ \cos x+b\ \sin x)+e^{x}(-a\sin x+b\cos x)$$

$$=e^{x}[(a+b)\cos x+(b-a)\sin x]$$

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=e^{x}[(a+b)\cos x+(b-a)\sin x]$$

$$+e^{x}[-(a+b)\sin x+(b-a)\cos x]$$

$$=e^{x}[(b+a)+(b-a)]\cos x+\{(b-a)-(b-a)\}\sin x$$

$$=2e^{x}[b\ \cos x-a\sin x]$$

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}-2\frac{dy}{dx}+2y=0$$

$$=2e^{x}(b\cos x-a\sin x]-2e^{x}[a+b\ \cos x+(b-a)\sin x]$$

$$+2e^{x}[a\cos x+b\sin x]$$

$$=e^{x}[(2b-2a-2b+2a)\cos x$$

$$+(-2a-2b+2a+2b)\sin x]$$

$$=0$$

अतः $y=e^{x}(a\ \cos x+b\ \sin x)$ अवकल समीकरण

$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}-2\frac{dy}{dx}+2y=0$ का हल है।

c.

दिया है-

$$y = x \sin 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin 3x + x(\cos 3x)3$$

$$= \sin 3x + 3x \cos 3x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3\ \cos 3x + 3[\cos 3x - x \sin 3x.3]$$

$$6 \cos\ 3x - 9x\ \sin\ 3x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6\ \cos 3x - y$$

अथवा $\frac{d^2y}{dx^2} + y - 6 \cos 3x = 0$

अतः $y = x\ \sin 3x$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y - 6 \cos 3x$

$= 0$ का हल है।

d.

दिया है-

$$x^2 = 2y^2 \log y$$

$$2x = 2\left[2y + y^2 \times \frac{1}{y}\right]\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y(1+2\log y)}$$

$$(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - xy$$

$$= \frac{x(x^2+y^2)}{y(1+2\log y)} - xy$$

$$= \frac{x^3+xy^2-xy^2-2xy^2\log y}{y(1+2\log y)}$$

$$= \frac{x(x^2-2y^2\log y)}{y(1+2\log y)} = 0 \ [\because \ x^2 = 2y^2 \log y]$$

अतः $x^2 = 2y^2 \log y$ अवकल समीकरण $(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - xy$

$= 0$ का हल है।

प्रश्न 3 $(x-a) + 2y^2 = a^2$ द्वारा निरूपित वक्रो के कुल का अवकल समीकरण निर्मित कीजिए जहाँ a एक स्वेछ अचर है।

उत्तर- दिया गया वक्र समीकरण-

$$(x - a) + 2y^2 = a^2$$

या $x^2 + 2y^2 - 2xa = 0$

अवकलन करने पर,

$$2x + 4y\frac{dy}{dx} - 2a = 0$$

या $2x^2 + 4xy\frac{dy}{dx} - 2xa = 0$

समीकरण (iii) में से समीकरण (i) को घटाने पर,

$$4xy\frac{dy}{dx} + x^2 - 2y^2 = 0$$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - x^2}{4xy}$

जो की अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्न 4 सिद्ध कीजिऐ की $x^2 - y^2 = C(x^2 + y^2)$ जहाँ C एक प्राचल है, अवकल है, अवकल समीकरण $(x^3 - 3xy^2)dx = (y^3 - 3x^2y)dy$ का व्यापक हल है।

उत्तर- दिया है-

$(x^3 - 3xy^2)dx = (y^3 - 3x^2y)dy$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 3xy^2}{y^3 - 3x^2y}$$

यह एक संमघातीय समीकरण है।

मान लीजिए $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^3 - 3x.v^2x^2}{v^3x^3 - 3x^2.vx}$$

$$= \frac{x^3(1-3v^2)}{x^3(v^3-3v)}$$

$$= \frac{1-3v^2}{v^3-3v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-3v^2}{v^3-3v} - v$$

$$= \frac{1-3v^2-v^2-v^4+3v^2}{v^3-3v}$$

$$= \frac{1-v^4}{v^3-3v}$$

या $\frac{v^3-3v}{1-v^4}dv = \frac{dx}{x}$

दोनों पक्षों में समाकलन करने पर

$$\int \frac{v^3-3v}{1-v^4}dv = \int \frac{dx}{x} + \log C'$$

$$\int \frac{v^3dv}{1-v^4} - 3\int \frac{v}{1-v^4}dv = \log x + \log C' = \log C'x$$

मान लीजिए-

$$I_1 + I_2 = \log Cx$$

अब $I_1 = \int \frac{v^3}{1-v^4}dv$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{-4v^3}{1-v^4}\,dv$$

मान लीजिए-

$$1 - v^4 = t$$

$$-4v^3 dv = dt$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{4}\log t$$

$$= -\frac{1}{4}\log(1 - v^4)$$

$$I_2 = -\frac{3}{2}\int \frac{2v}{1-v^4}\,dv$$

पुनः लीजिए- $v^2 = z$

$$2v.\,dv = dz$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{dz}{1-z^2}$$

$$= -\frac{3}{2}.\,\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$= -\frac{3}{4}\log\frac{1+v^2}{1-v^2}$$

I_1 तथा I_2 के मान समीकरण (i) में रखने पर-

$$-\frac{1}{4}\log(1-v^4)-\frac{3}{4}\log\frac{1+v^2}{1-v^2}=\log C'x$$

$$\text{या } -\frac{1}{4}\log\left[\frac{(1+v^2)^3}{(1-v^2)^2}\times(1-v^2)(1+v^2)\right]=\log C'x$$

$$\text{या } -\frac{1}{4}\log\frac{(1+v^2)^4}{(1-v^2)^2}=\log C'x$$

$$\text{या } \log\left[\frac{(1-v^2)^2}{(1+v^2)^4}\right]=\log C'x$$

$$\text{या } \log C'x=\log\left[\frac{(1-v^2)^{2\times\frac{1}{4}}}{(1+v^2)^{4\times\frac{1}{4}}}\right]=\log\frac{\sqrt{1-v^2}}{1+v^2}$$

$$\text{पर, } \log C'x=\log\left(\frac{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)$$

$$=\log\frac{\sqrt{x^2-y^2}\times x}{x^2+y^2}$$

$$C'x=\frac{x\sqrt{x^2-y^2}}{x^2+y^2}$$

$$\text{या } C'(x^2+y^2)=\sqrt{x^2-y^2}$$

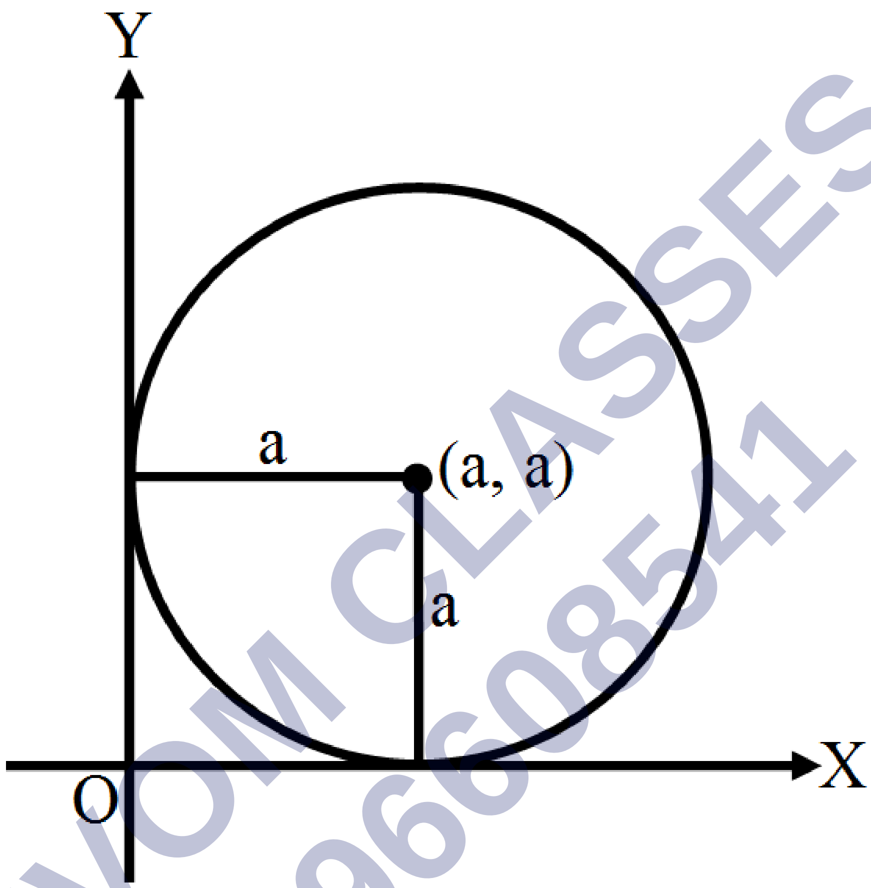
वर्ग करने पर C' = C रखने पर-

$$C(x^2+y^2)=x^2-y^2$$

$$x^2-y^2=C(x^2+y^2)^2 \text{ इति सिद्धम्}$$

प्रश्न 5 प्रथम चतुर्थांश में ऐसे व्रतो के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षो को स्पर्श करते है।

उत्तर-



प्रथम चतुर्थांशों में व्रतों के कुल का समीकरण जो निर्देशांक अक्षो का स्पर्श करता हो।

जहाँ a स्वेछ अचर है।

अब x के सापेक्ष समीकरण (i) का अवकल करने पर-

$$2(x-a)+2(y-a)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\text{या } x-a+(y-a)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\text{या } a\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=x+y\frac{dy}{dx}$$

$$\text{या } a=\frac{x+y\frac{dy}{dx}}{1+\frac{dy}{dx}}=\frac{x+Ay}{1+A}$$

a का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$$\left(x-\frac{x+Ay}{1+A}\right)^2+\left(y-\frac{x+Ay}{1+A}\right)^2=\left(\frac{x+Ay}{1+A}\right)^2$$

$$\text{या } A^2(x-y)^2+(y-x)^2=(x+Ay)^2$$

$$\text{या } (x-y)^2(A^2+1)=(x+Ay)^2$$

$$\text{या } (x-y)^2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]=\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)^2$$

प्रश्न 6 अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$$

है जबकि $x \neq 1$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है-

$$\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$$

या $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

दोनों पक्षों में समाकलन करने पर-

$$\sin^{-1} y = -\sin^{-1} x + C$$

अतः अभीस्ट हल $\sin^{-1} x = -\sin^{-1} y + C$

या $\sin^{-1} y = -\sin^{-1} x = C$

प्रश्न 7 दर्शाइए की अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y^2+y+1}{x^2+x+1} = 0$$

का व्यापक हल (x + y + 1) = A(1 – x – y – 2 xy) है, जिसमे A एक प्राचल है।

उत्तर- दिया गया अवकल समीकरण-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+y+1}{x^2+x+1}$$

या $\frac{1}{y^2+y+1}dy = -\frac{dx}{x^2+x+1}$

या $\frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dy = -\frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर-

$$\int \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = -\int \frac{dx}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + C$$

या $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$

या $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = C$

या $\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{2y+1}{\sqrt{3}} + \tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right] = C$

या $\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2y+1}{\sqrt{3}}+\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}\right)\right] = C$

या $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}(2y+1+2x+1)}{3-(2y+1)(2x+1)}\right) = C$

या $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}(x+y+1)}{2(t-x-y-2xy)}\right) = C$

या $\frac{2\sqrt{3}(x+y+1)}{(1-x-y-2xy)} = \tan\frac{\sqrt{3}}{2}C$

या $\frac{(x+y+1)}{(1-x-y-2xy)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\sqrt{3}}{2}C = A$ (मान लिया)

अतः अभीस्ट हल $(x+y+1) = A(1-x-y-2xy)$ इति सिद्धम्

प्रश्न 8 बिंदु $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण sin x cos x ydx + cos x sin ydy = 0 है।

उत्तर- दिया है-

$$\sin x \cos x y dx + \cos x \sin y dy = 0$$

या $\frac{\sin x}{\cos x} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$

समाकलन करने पर-

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \log C$$

$$\int \tan x . dx + \int \tan y dy = \log C$$

$$\log \sec x + \log \sec y = \log C$$

या $\log \sec x \sec y = \log C$

या $\sec x \ \sec y = C$

चूँकि बिंदु $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ से गुजरता है, अतः $x = 0$ तथा $y = \frac{\pi}{4}$ रखने पर-

$$1. \sec \frac{\pi}{4} = C$$

या $C = \sqrt{2}$

$\therefore$ अभीस्ट वक्र का समीकरण-

$$\sec x \ \sec y = \sqrt{2}$$

या $\cos y = \frac{\sec x}{\sqrt{2}}$

प्रश्न 9 अवकल समीकरण $(1 + e^{2x})dy + (1 + y^2)ex\ dx = 0$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 1$ यदि $x = 0$.

उत्तर- दिया है

$(1 + e^{2x})dy + (1 + y^2)e^x\ dx = 0$

या $\frac{1}{1+y^2}dy + \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = 0$

समाकलन करने पर-

$\int \frac{1}{1+y^2}dy + \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = 0$

$\Rightarrow \quad \tan^{-1} y + \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dxdx = 0$

मान लीजिए- $e^x = t$

$e^x\ dx = dt$

$\therefore \quad \tan^{-1} y + \int \frac{dt}{1+t^2} = C$

या $\tan^{-1} y + \tan^{-1} t = C$

या $\tan^{-1} y + \tan^{-1} e^x = C$

अब दिया हुआ है- $x = 0, y = 1$ रखने पर-

या $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 1 = C$

या $2\tan^{-1} 1 = C$

या $2 \times \frac{\pi}{4} = C$

या $C = \frac{\pi}{2}$

अतः अभीस्ट हल $\tan^{-1} y + \tan^{-1} e^x = \frac{\pi}{2}$

प्रश्न 10 अवकल समीकरण

$$ye^{\frac{x}{y}}dx = \left(xe^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dy, (y \neq 0)$$

का हल ज्ञात कीजिए

उत्तर-

दिया गया है-

$$ye^{\frac{x}{y}}dx = \left(xe^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dy$$

$$ye^{\frac{x}{y}}\frac{dx}{dy} = xe^{\frac{x}{y}} + y^2$$

या $$\frac{ye^{\frac{x}{y}}\frac{dx}{dy} - xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} = 1$$

या $$\frac{e^{\frac{x}{y}}\left(y\frac{dx}{dy} - x\right)}{y^2} = 1$$

मान लीजिए-

$$e^{\frac{x}{y}} = z$$

$$e^{\frac{x}{y}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dz}{dy}$$

या $$e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{\frac{dx}{dy} - y - x.1}{y^2}\right) = \frac{dz}{dy}$$

समीकरण (i) व (ii) से, $\frac{dz}{dy} = 1$

$$\therefore \ dz = dy$$

समाकलन करने पर-

$$\int dz = \int dy + 0$$

या $z = y + C$

$\therefore$ अभीस्ट हल $e^{\frac{x}{y}} = y + C.$

प्रश्न 11 अवकल समीकरण (x - y) (dx + dy) = dx - dy का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है की y = -1 यदि x = 0 (संकेत- x - y = t रखे)।

उत्तर- दिया है-

(x - y) (dx + dy) = dx - dy

या (x - y - 1)dx + (x - y + 1)dy = 0

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = -\frac{x-y-1}{x-y+1}$$

मान लीजिए- x – y = t

$$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

या $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dt}{dx}$

या $1-\frac{dt}{dx}=-\frac{t-1}{t+1}$

या $\frac{dt}{x}=\frac{t+1+t-1}{t+1}=\frac{2t}{t+1}$

$\frac{t+1}{t}dt=2dx$

समाकलन करने पर-

$\int\frac{t+1}{t}dt=2\int dx+C$

या $\int\left(1+\frac{1}{t}\right)dt=2x+C$

या $\int dt+\int\frac{1}{t}dt=2x+C$

$\therefore\ t=x-y$ रखने पर-

$x-y+\log|x-y|=2x+C$

$\log|x-y|=x+y+C$

अब दिया है- $x=0$ तथा $y=-1$ रखने पर-

$0=0-1+C$ या $C=1$

$\log|x-y|=x+y+1$

प्रश्न 12 अवकल समीकरण

$$\left[\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right]\frac{dx}{dy} = 1, (x \neq 0)$$

का हल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है

$$\left[\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right]\frac{dx}{dy} = 1$$

या $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \dfrac{y}{\sqrt{x}}$

या $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}y = \dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

इसकी तुलना $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर-

$P = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ तथा $x = \dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

$$\int P\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}$$

$$I.F. = e^{\int P\,dx} = e^{2\sqrt{x}}$$

अतः अवकल समीकरण का हल-

$$y \times I.F. = \int [Q \times I.F]dx + c$$

या $y \times e^{2\sqrt{x}} = \int \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \times e^{2\sqrt{x}}\, dx + C$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx + C$$

$$= 2\sqrt{x} + C$$

$$ye^{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

प्रश्न 13 अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x\, \text{cosec} x (x \neq 0)$$

का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि y = 0 यदि $x = \frac{\pi}{2}$

उत्तर- दिया है-

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x\, \text{cosec} x$$

इसकी तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से तुलना करने पर-

$P = \cot x$ तथा $Q = 4x\, \text{cosec} x$

$$\int P\, dx = \int \cot x\, dx = \log \sin x$$

$$\text{I.F.} = e^{\int P\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

अतः दी गयी अवकल समीकरण का हल-

$$y \times \text{I.F.} = \int [Q \times \text{I.F}] dx + c$$

$$y \times \sin x = \int 4x\, \text{cosec} x \times \sin x\, dx + C$$

$$= \int 4x\,dx + C = 2x^2 + C$$

अब दिया हुआ है-

$x = \frac{\pi}{2}, y = 0$ तब-

$$0 = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + C$$

या $C = -\frac{\pi^2}{2}$

$$y \sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}. (\sin x \neq 0)$$

प्रश्न 14 अवकल समीकरण

$(x+1)\frac{dy}{dx} = 2e^y - 1$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

दिया हुआ है कि y = 0 यदि x = 0

उत्तर- दिया है-

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = 2e^y - 1$$

या $\frac{1}{2e^{-y}-1}dy = \frac{dx}{x+1}$

$$\frac{e^y}{2-e^y}dy = \frac{dx}{x+1}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर-

$\int \frac{e^y}{2-e^y} dy = \int \frac{dx}{x+1}$

मान लीजिए- $2 - e^y = t$

$e^y dy = dt$

$-\int \frac{dt}{t} = \log|x+1| + C$

$-\log|t| = \log|x+1| + C$

$-\log|2-e^y| = \log|x+1| + C$

$\log|2-e^y| + \log|x+1| = -C$

$\log|(2-e^y)(x+1) = -C = \log A$ (मान लिया)

$(2-e^y)(x+1) = A$

दिया हुआ है-

$x = 0, y = 0$ रखने पर-

$1 \times 1 = A$ या $A = 1$

$\therefore\ (2-e^y)(x+1) = 1$

या $2 - e^y = \frac{1}{x+1}$

$e^y = 2 - \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$

$y = \log\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|, x \neq -1.$

प्रश्न 15 किसी गाँव की जनसंख्या की वृद्धि की दर किसी भी समय उस गाँव के निवासियों की संख्या के समानुपाती है। यदि सन् 1999 में गाँव की जनसंख्या 20,000 थी और सन् 2004 में 25,000 थी, तो ज्ञात कीजिए कि सन् 2009 में गाँव की जनसंख्या क्या होगी?

उत्तर- माना t समय में गांव की जनसंख्या y होगी।

दिया है-

जनसँख्या में वृद्धि की दर ∝ निवासियो की संख्या

$$\frac{dy}{dt} \propto y$$

या $\frac{dy}{dt} = ky$

जहाँ k एक समानुपाती नियतांक है।

या $\frac{dy}{y} = k\,dt$

$$\int \frac{dy}{y} = \int kt + C$$

$$\therefore \quad \log 20,000 = 0 + C$$

$$\therefore \quad C = \log 20,000$$

C का मान समीकरण (i) में रखने पर-

$$\log y = kt + \log 20,000$$

या $\log y - \log 20,000 = kt$

$$\therefore \quad \log \frac{y}{20000} = kt$$

वर्ष 2004 में,$t = 5$ तथा $y = 25,000$

$$\therefore \quad \log \frac{25000}{250000} = k \times 5$$

$$\log \frac{5}{4} = k \times 5$$

या $k = \frac{1}{5} \log \frac{5}{4}$

k का मान समीकरण (ii) में रखने पर-

$$\log \frac{y}{20000} = \left(\frac{1}{5} \log \frac{5}{4}\right) t$$

वर्ष 2009 में, $t = 10$

$$\log \frac{y}{20000} = \left(\frac{1}{5} \log \frac{5}{4}\right) \times 10$$

$$= 2 \log \frac{5}{4}$$

$$= \log \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \log \frac{25}{16}$$

या $\frac{y}{20000} = \frac{25}{16}$

$$y = \frac{25}{16} \times 20000$$

$$= 25 \times 1250 = 31250$$

प्रश्न 16 अवकल समीकरण

$\frac{y\,dx - x\,dy}{y} = 0$ का व्यापक हल है-

a. xy = C

b. $x = Cy^2$

c. y = Cx

d. $y = cx^2$

उत्तर-

c. y = Cx

हल-

दिया है- $\frac{y\,dx - x\,dy}{y} = 0$

या $dx - \frac{x}{y} dy = 0$

या $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$

अवकलन करने पर-

$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dy}{y} = C'$

$\log x - y = C'$

$\frac{x}{y} = C'$

$$C' = \frac{1}{C} \text{ रखने पर}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{C}, y = Cx \text{ वांछित हल है।}$$

प्रश्न 17

$$\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$$

के रूप वाले अवकल समीकरण का व्यापक हल है-

a. $ye^{\int P_1 dy} = \int (Q_1 e^{\int P_1 dy}) dy + C$

b. $ye^{\int P_1 dx} = \int (Q_1 e^{\int P_1 dx}) dx + C$

c. $xe^{\int P_1 dy} = \int (Q_1 e^{\int P_1 dy}) dy + C$

d. $xe^{\int P_1 dx} = \int (Q_1 e^{\int P_1 dx}) dx + C$

उत्तर-

c. $xe^{\int P_1 dy} = \int (Q_1 e^{\int P_1 dy}) dy + C$

हल-

अवकल समीकरण का व्यापक हल है

$$\frac{dx}{dy} + P_1 y = Q_1$$

जहाँ P_1 और Q_1 क्रमशः y के फलन है।

$$\therefore\ \text{I.F.} = e^{\int P_1\, dy}$$

$$x.\, e^{P_1 dy} = \int (Q_1 \times e^{P_1 dy})dy + C$$

$\therefore$ अतः विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 18 अवकल समीकरण $e^x dy + (y\, e^x + 2x)dx = 0$ का व्यापक हल है-

a. $xe^y + x^2 = C$

b. $xe^y + y^2 = C$

c. $ye^x + x^2 = C$

d. $ye^y + x^2 = C$

उत्तर-

c. $y\ e^x + x^2 = C$

हल-

दिया है-

$$e^x dy + (y\ e^x + 2x)dx = 0$$

या $$e^x \frac{dy}{dx} + e^x\ y = -2x$$

या $$\frac{dy}{dx} + 1.y = -2x\ e^x$$

$\therefore$ अभीस्ट हल है- $\text{I.F.} = e^{\int dx} = e^x$

$$y\ e^x = \int (-2x)\ e^{-x} \times\ e^x\ dx + C$$

$$= -\int 2x \, dx + C$$

$$= -x^2 + C$$

या $y\ e^x + x^2 = C$

अतः विकल्प (C) सही है