गणित

अध्याय-8: समाकलनों के अनुप्रयोग

सिद्ध करना कि निश्चित समाकल | F(x)ar,

वक्र y = f(x) X-अक्ष और कोटियों x = a तथा -x = b द्वारा घिरे क्षेत्रफल को निरूपित करता है

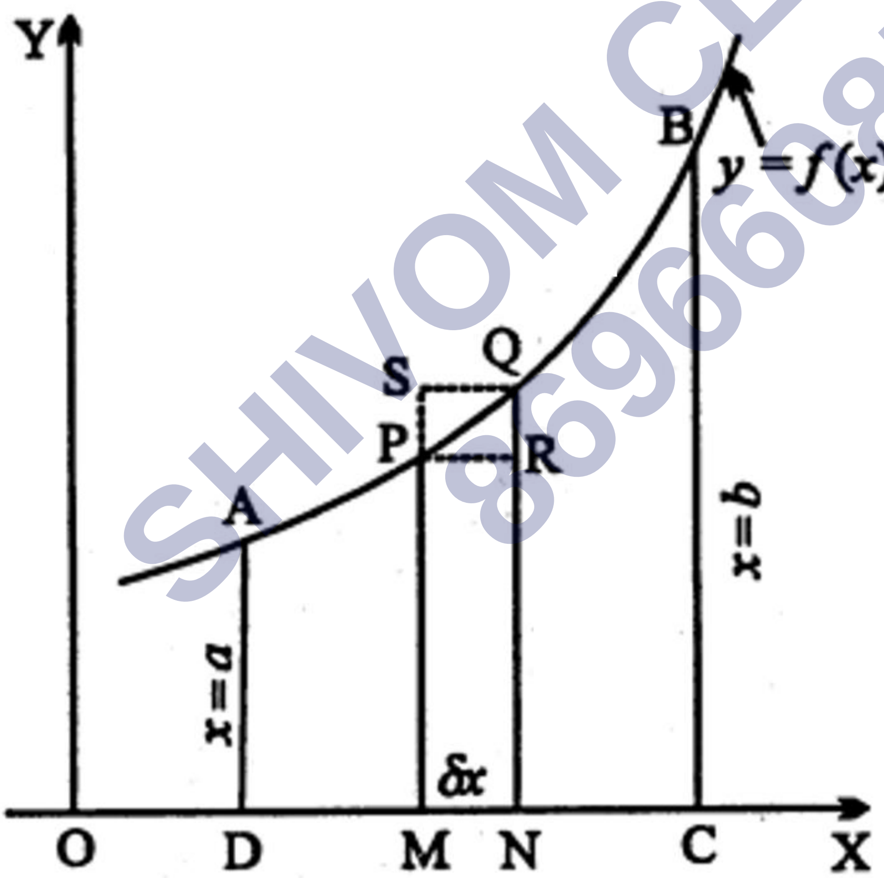
माना y = f(x), वक्र AB का समीकरण है।

माना कि CA और DB क्रमशः x = a और x = b पर दो कोटियाँ हैं। माना yx का अन्तराल [a, B] में वर्धमान फलन है।

माना P (xy) वक्र पर कोई बिन्दु है। माना $Q(x+\delta x, y+\delta y$ इसका कोई समीपवर्ती बिन्दु है। कोटियाँ PM तथा QN खींचा।

जैसे-जैसे x बदलता है, क्षेत्रफल ACMP भी बदलता है।

अतः यह स्पष्टतः x का एक फलन है।



माना कि A, क्षेत्रफल ACMP को प्रदर्शित करता है। तब, क्षेत्रफल ACNQ, $(A+\delta A)$ से निरूपित होगा।

∴ क्षेत्रफल PMNQ = δA

आयत PRQS को पूरा किया।

अब, क्षेत्रफल PMNQ दो आयत PMNR तथा SMNQ के मध्य स्थित है।

$$\therefore \quad y\delta x < \delta A < (y+\delta y)\delta x$$

$$\Rightarrow \quad y < \frac{\delta A}{\delta x} < y+\delta y, \quad [\delta y \text{ से भाग देने पर}]$$

सीमा $Q \to P$ की स्थिति में, जबकि $\delta x \to 0$ और $\delta y \to 0$,

$\lim\limits_{Q\to P} \frac{\delta A}{\delta x}$, y और $\lim\limits_{Q\to P} y+\delta y$ के मध्य स्थित है।

और y की प्रवृत्त एक राशि के मध्य स्थित है।

अब दोनों पक्षों का x के सापेक्ष x = a से x = b तक समाकलन करने पर,

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b \frac{dA}{dx}dx$$

$$= [A]_a^b$$

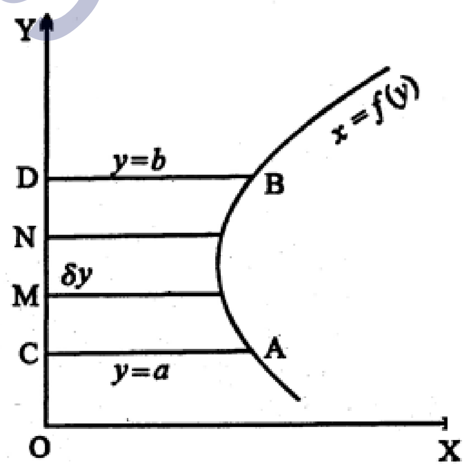
$= (A$ का मान जबकि $x = b)$

$\quad - (A$ का मान जबकि $x = a)$

$=$ क्षेत्रफल $ACDB - 0$

$=$ क्षेत्रफल $ACDB$

∴ क्षेत्रफल $ACDB = \int_a^b y\,dx.$



नोट- इसी तरह वक्र x = f(y), Y-अक्ष तथा भुज y = a और y = b के मध्य घिरा क्षेत्रफल

$$=\int_a^b x\,dy.$$

साधारण वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल:

(i) वक्र y = fx, x-अक्ष, तथा रेखाओं x = a और x = b b>a द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है: क्षेत्रफल = ∫abydx = ∫abfxdx

(ii) वक्र x = ϕ(y), y-अक्ष, तथा रेखाओं y = c, y = d द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है:

क्षेत्रफल = ∫cdxdy = ∫cdϕydy

दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल:

(i) दो वक्रों y=fx, y=gx और रेखाओं x=a,x=b के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है, क्षेत्रफल=∫abfx-gxdx, जहाँ [a, b] में f(x)≥g(x)

(ii) यदि [a, c] में f(x)≥g(x) और [c, b] में f(x)≤g(x) हो, a<c<b तब क्षेत्रफल =∫acfx-gxdx+∫cbgx-fxdx

वक्र

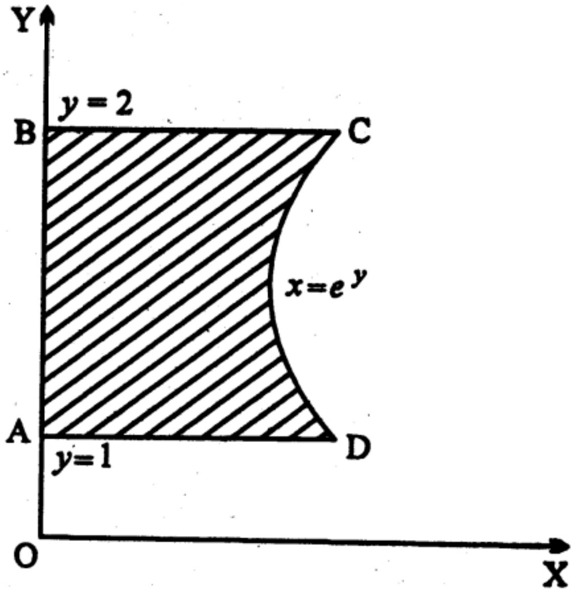
उदहारण 1

वक्र y = logx, y-अक्ष तथा भुजाओं y = 1, y = 2 के बिच स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ वक्र

$$y = \log x$$

$$\Rightarrow \quad x = e^y$$



$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= A_{ABCD}$

$$= \int_{y=1}^{2} x dy = \int_{1}^{2} e^y dy$$

$$= [e^y]_1^2 = e^2 - e^1$$

$$= e(e-1) \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदहारण 2

रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ तथा निर्देशांकों के बिच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा AB का समीकरण है :

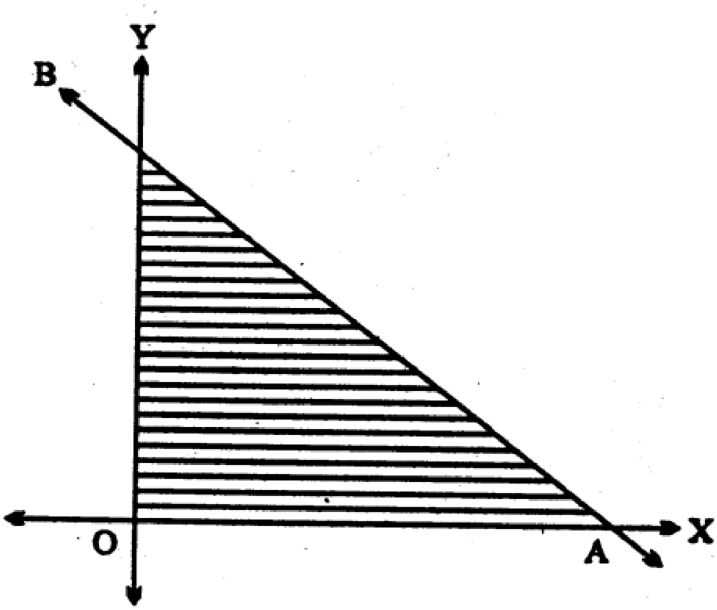
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$\Rightarrow$ $$bx + ay = ab$$

$\Rightarrow$ $$ay = ab - bx$$

$\Rightarrow$ $$y = \frac{ab - bx}{a}$$

यहाँ O के लिए $x = 0$ तथा A के लिए $x = a$.



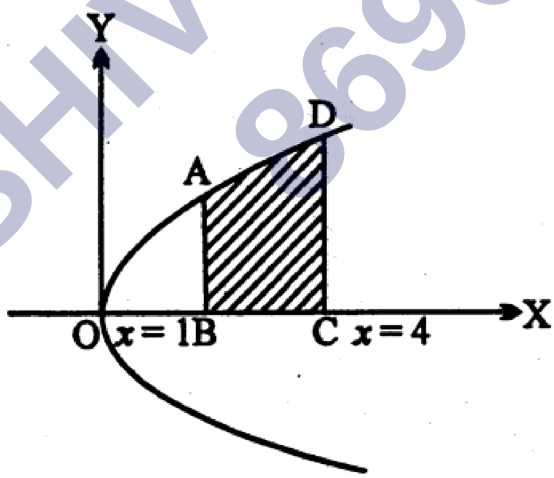
उदहारण 3

वक्र $y^2 = x$ रेखाओं $x = 1$, $x = 4$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का प्रथम पद से क्षेत्रफल ज़ात कीजिए।

हल : दिए गए वक्र का समीकरण है :

$$y^2 = x$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{x}$$



$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल = $ABCD$ का क्षेत्रफल

$$= \int_1^4 y\,dx = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{2}{3}\left[(2^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

$$= \frac{2}{3}[8-1]$$

$= \frac{14}{3}$ वर्ग इकाई।

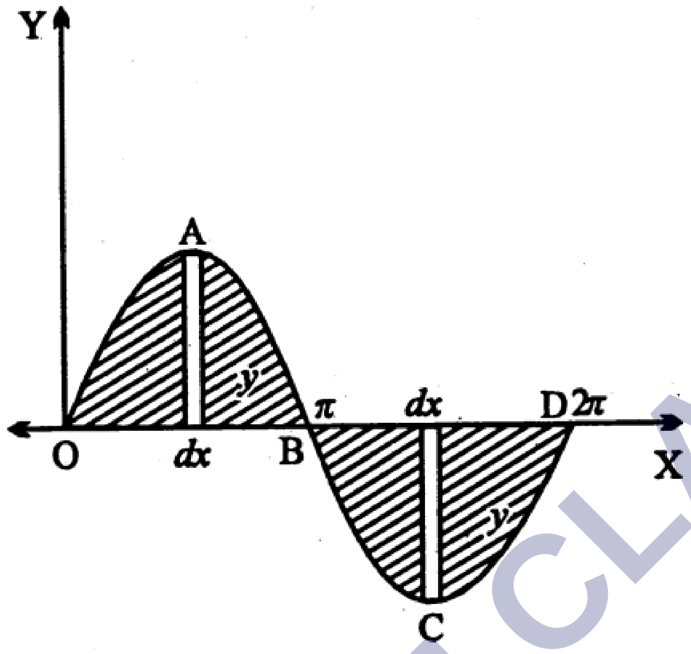
उदहारण 4

वक्र y = sin x और x = 0 तथा x = 2π से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : $y = f(x) = \sin x$

जब $x \in [0, \pi]$, $\sin x \geq 0$

जब $x \in [\pi, 2\pi]$, $\sin x \leq 0$



अतः अभीष्ट क्षेत्रफल

$= OAB$ क्षेत्रफल $+ BCD$ क्षेत्रफल

$$= \int_0^{\pi} y\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-y)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$$

$$= -[\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -[\cos \pi - \cos 0] + [\cos 2\pi - \cos \pi]$$

$$= -[-1-1] + [1-(-1)]$$

$= 2 + 2 = 4$ वर्ग इकाई।

उदहारण 5

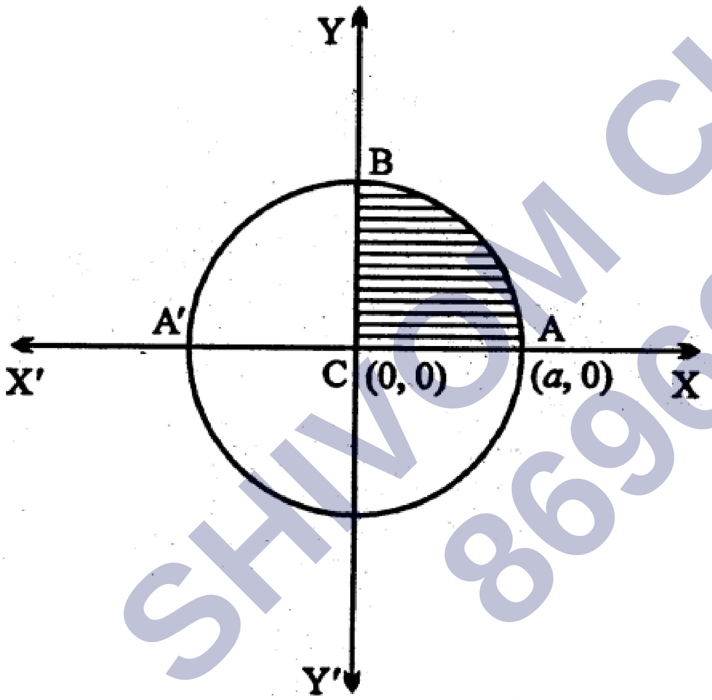
वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये वृत्त का समीकरण है :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

अतः $$y^2 = a^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}$$



$\therefore$ अतः वृत्त का क्षेत्रफल $= 4 \times ABC$ का क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a} - \left(0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{0}{a}\right)\right]$$

$$= 4\left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0\right]$$

$$= \frac{4}{2}a^2 . \frac{\pi}{2} = \pi a^2$$ वर्ग इकाई।

उदाहरण 6

समाकलन विधि से रेखाओं |x| + |y| = a से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दी गयी रेखाओं

$|x| + |y| = a$ द्वारा निरूपित रेखायें निम्न होंगी—

$$x + y = a \qquad \ldots(1)$$

$$-x - y = a \qquad \ldots(2)$$

$$x - y = a \qquad \ldots(3)$$

तथा $$-x + y = a \qquad \ldots(4)$$

$\Rightarrow$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1,\quad \frac{x}{-a} + \frac{y}{-a} = 1$

$\Rightarrow$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1,\quad \frac{x}{-a} + \frac{y}{a} = 1$

उदाहरण 7

वक्रो $y^2 = x$ और $y^2 = 4 - 3x$ के बीच का क्षेत्रफल समाकलन विधि से ज्ञात कीजिए।

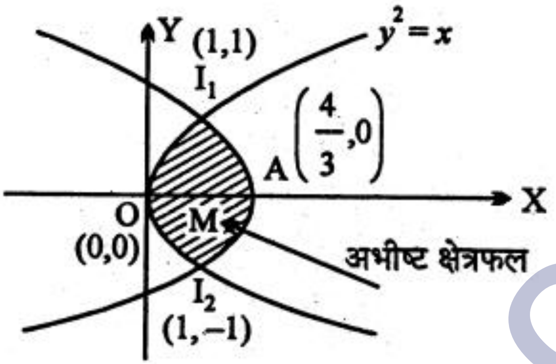
हल : दिये गये वक्र हैं—

$$y^2 = x \qquad ...(1)$$

$$y^2 = 4 - 3x \qquad ...(2)$$

$$y^2 = 4 - 3x$$

$$y^2 = -3\left(x - \frac{4}{3}\right)$$



जिसका शीर्ष $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

वक्र (1) और (2) एक-दूसरे को बिन्दु I_1 और I_2 पर प्रतिच्छेद करते हैं।

समी. (1) व (2) से,

$$x = 4 - 3x \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

समी. (1) से, $y^2 = x \Rightarrow y = \pm 1$

$\therefore \quad I_1(1,1)$ और $I_2(1,-1)$

अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2[$ क्षेत्र. $OI_1M +$ क्षेत्र. $I_1AM]$

$$= 2\left(\int_0^1 y_{c_1}\,dx + \int_1^{\frac{4}{3}} y_{c_2}\,dx\right)$$

जहाँ y_{c_1} वक्र (1) से, $y_{c_2} = \sqrt{x}$

y_{c_2} वक्र (2) से,

$$y_{c_2} = \sqrt{4 - 3x}$$

$$= 2\left(\int_0^1 \sqrt{x}\,dx + \int_1^{4/3} \sqrt{4 - 3x}\,dx\right)$$

$$= 2\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_0^1 + 2\left(\frac{(4-3x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}(-3)}\right)_1^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{4}{3}(1-0) + \left(-\frac{4}{9}\right)(4-4-1)$$

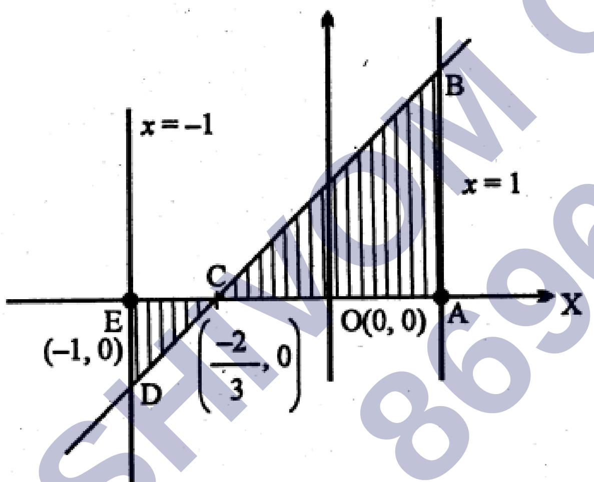
$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{9}(-1) = \frac{4}{3} + \frac{4}{9}$$

$$= \frac{12+4}{9} = \frac{16}{9}$$ वर्ग इकाई।

उदाहरण 8

वक्रो $x^2 + y^2 = 2$ और $x = y^2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज़ात कीजिए।

रेखा (1) X-अक्ष को $x = \frac{-2}{3}$ पर मिलती है।



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र $DECD$ का क्षेत्रफल
+ क्षेत्र $CBAC$ का क्षेत्रफल

$$= -\int_{-1}^{\frac{-2}{3}}(3x+2)\,dx + \int_{\frac{-2}{3}}^{1}(3x+2)\,dx$$

उदाहरण 9

वक्र $y = x^3$ और रेखा $y = x$ के बीच का क्षेत्रफल ज़ात कीजिए।

वक्र का समीकरण है:

$Y = x^3$

और रेखा का समीकरण है

$$= -\left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{\frac{-2}{3}} + \left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{\frac{-2}{3}}^{1}$$

$$= -\frac{3}{2}\left[x^2\right]_{-1}^{\frac{-2}{3}} - 2\left[x\right]_{-1}^{\frac{-2}{3}} + \frac{3}{2}\left[x^2\right]_{\frac{-2}{3}}^{1} + 2\left[x\right]_{\frac{-2}{3}}^{1}$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{4}{9}-1\right] - 2\left[\frac{-2}{3}+1\right] + \frac{3}{2}\left[1-\frac{4}{9}\right] + 2\left[1+\frac{2}{3}\right]$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{4-9}{9}\right] - 2\left[\frac{-2+3}{3}\right] + \frac{3}{2}\left[\frac{9-4}{9}\right] + 2\left[\frac{3+2}{3}\right]$$

$$= \frac{15}{18} + \frac{-2}{3} + \frac{15}{18} + \frac{10}{3} = \frac{3}{18} + \frac{75}{18}$$

$$= \frac{78}{18} = \frac{13}{3}$$ वर्ग इकाई ।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 8.1 (पृष्ठ संख्या 383)

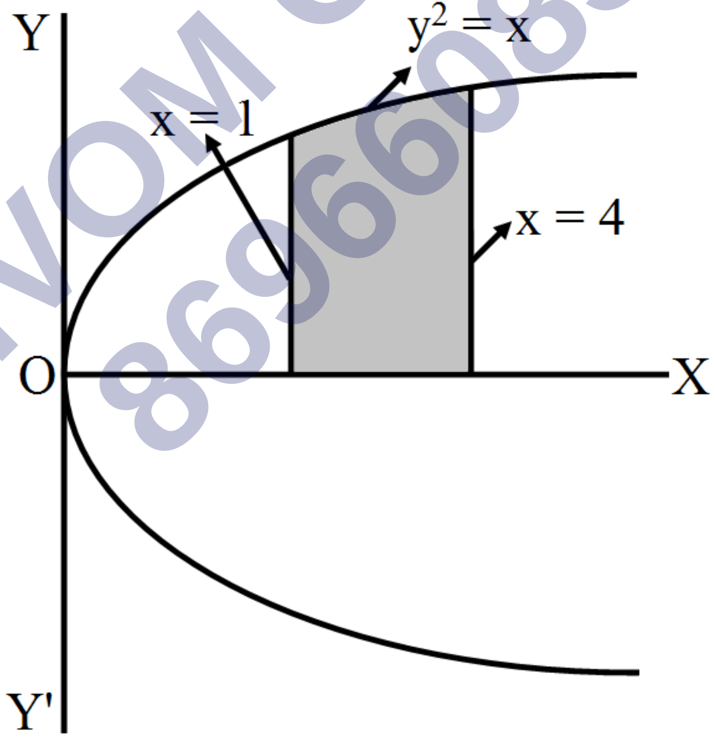
प्रश्न 1 वक्र $y^2 = x$, रेखाओं $x = 1$, $y = 4$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_{x=1}^{4} y\,dx == \int_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{4} = \frac{2}{3}\left[(4)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}[8-1] = \frac{14}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्न 2 प्रथम चतुर्थांश में वक्र $y^2 = 9x$, $x = 2$, $x = 4$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

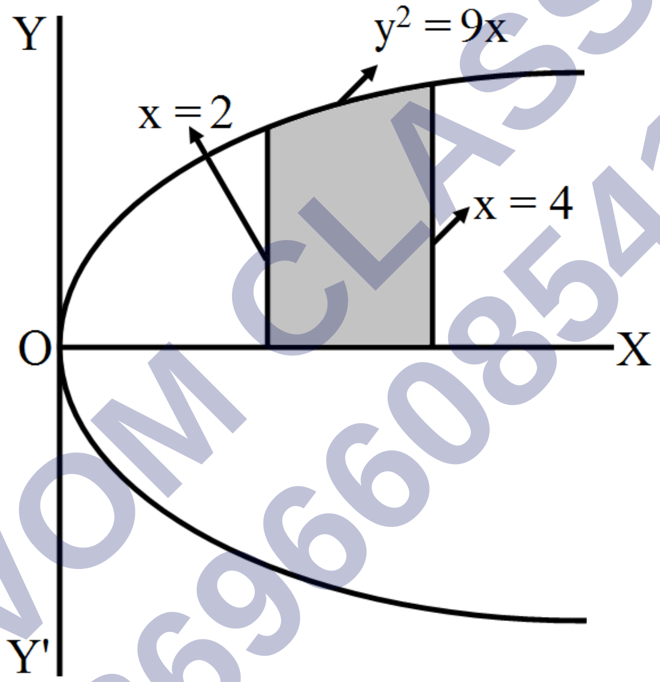
उत्तर- अभीष्ट क्षेत्रफल

$$\int_2^4 y\,dx = \int_2^4 \sqrt{9x}\,dx$$

$$= 3\int_2^4 \sqrt{x}\,dx = 3.\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = 2\left[4^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= [\sqrt{64} - \sqrt{8}] = 2[8 - 2\sqrt{2}]$$

$= (16 - 4\sqrt{2})$ वर्ग इकाई



प्रश्न 3 प्रथम चतुर्थांश में $x^2 = 4y$, $y = 2$, $y = 4$ एवं y-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया हुआ वक्र $x^2 = 4y$, y-अक्ष के प्रति सममित है। तथा हमें प्रथम चतुर्थांश में क्षेत्रफल ज्ञात करना

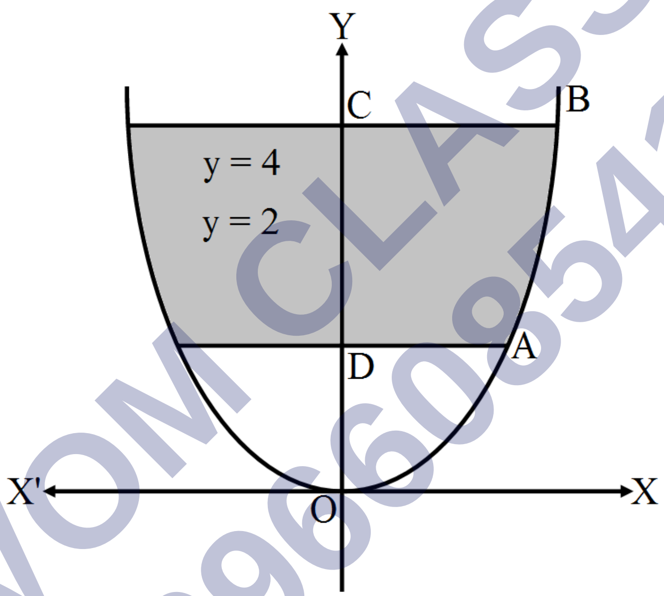
∴ अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल ABCDA

$$= \int_2^2 x\,dy = \int_2^4 2\sqrt{y}\,dy$$

$$= 2\left[\frac{y^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = \frac{4}{3}\left[(4)^{\frac{3}{2}} - (2^{\frac{3}{2}})\right]$$

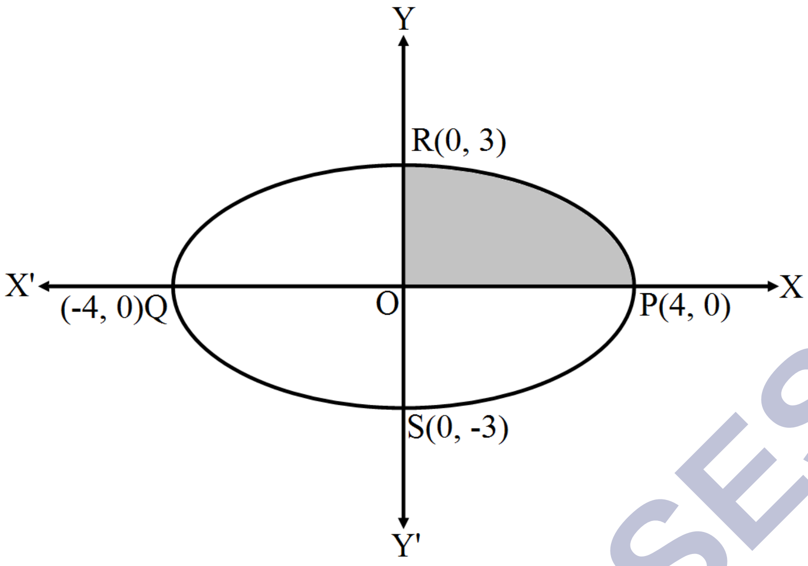
$$= \frac{4}{3}[\sqrt{64} - \sqrt{8}] = \frac{4}{3}[8 - 2\sqrt{2}]$$

$$= \frac{32-8\sqrt{2}}{3}$$ वर्ग इकाई



प्रश्न 4 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16+}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दिया गया दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{16+} + \frac{y^2}{9} = 1$

∵ वक्र दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है क्योकि समीकरण में x तथा y की समघात है

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\therefore \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} = \frac{16-x^2}{16}$$

$$\frac{y}{3} = \sqrt{\frac{16-x^2}{16}} = \frac{1}{4}.\sqrt{16 - x^2}$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$$

$$= 4\int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2\ dx}$$

$$= 3\int_0^4 \sqrt{16 - x^2 dx}$$

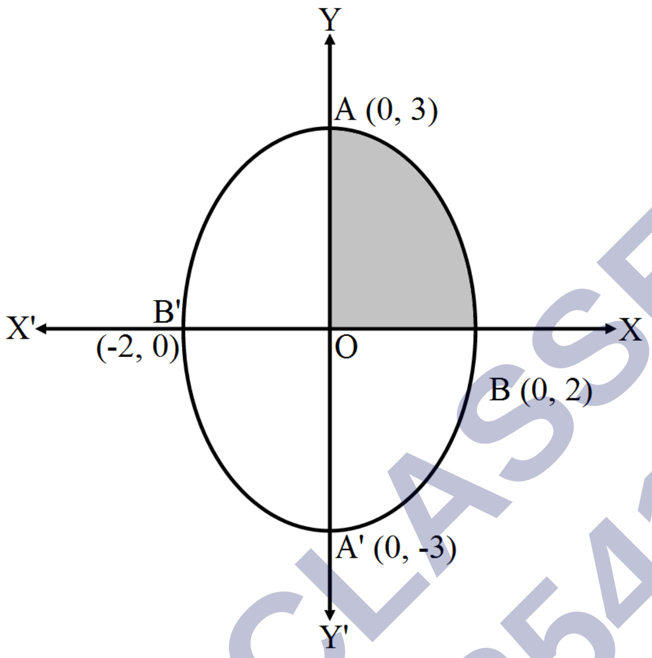
$$= 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_{10}^{4}$$

$$= 3\left[\left(0 + 8\sin^{-1}\frac{4}{4} - 0\right)\right] = 24\sin^{-1} 1$$

$$= 24 \times \frac{\pi}{2} = 12\pi \text{ वर्ग इकाई}$$

प्रश्न 5 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4+} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दिया गया दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{4+} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$\because 9 > 4$$

$$\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{4} = \frac{4-x^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{3} = \pm\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}$$

$$\therefore y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$$

इस दीर्घवृत्त का केन्द्र (0, 0) है। अर्द्धदीर्घ अक्ष की लम्बाई 3 और अर्द्धलघु अक्ष की लम्बाई 2 है।

दीर्घवृत्त द्वारा घिरा गया क्षेत्रफल = 4 × क्षेत्र AOB का क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^2 32\sqrt{4-x^2}dx = 6\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$$

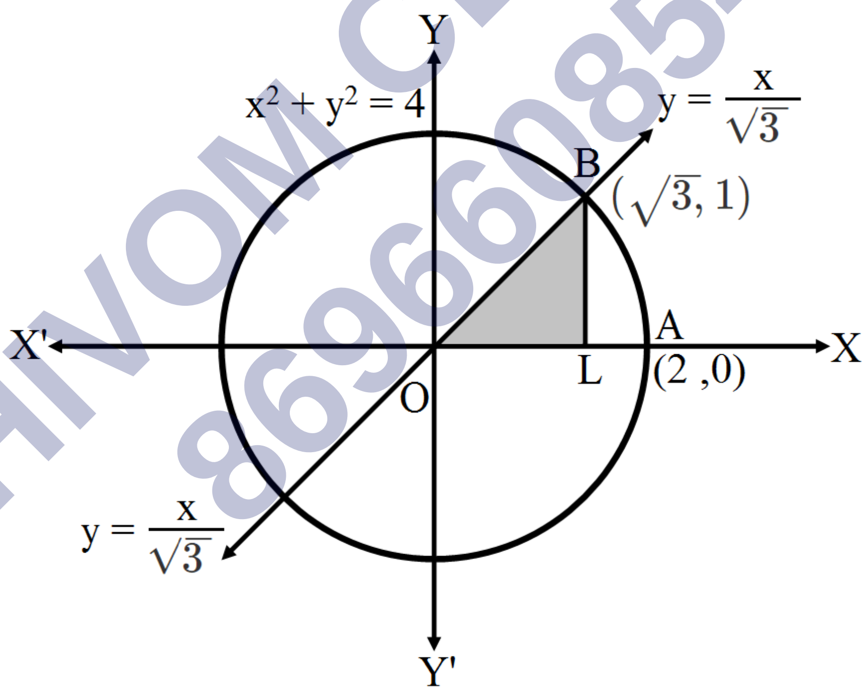
$$= 6\left[\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= 6[(0+2\sin^{-1}(1)) - (0+\sin^{-1}(0))] = 12\sin^{-1}1$$

$= 12 \times \frac{\pi}{2} = 6\pi$ वर्ग इकाई

प्रश्न 6 प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$, रेखा $x = \sqrt{3}y$ एवं x-अक्ष द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



1. $x^2 + y^2 = 4 \ldots (1)$

$$x = \sqrt{3}y \ldots (2)$$

समी (2) से x का समीकरण $x = \sqrt{3}y$ है जो बिंदु $(0,0), (\sqrt{3}, 1)$ से होकर जाता है।

$$(\sqrt{3}y)^2 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow 4y^2 = 4$$

$$\Rightarrow y \pm 1$$

$$\therefore x = \sqrt{3}$$

2. सरल रेखा का समीकरण $x = \sqrt{3}y$ है जो बिंदु $(0,0), (\sqrt{3}, 1)$ से होकर जाता है।

$$\therefore y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

∴ अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल OBL + क्षेत्रफल LBA

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} \times dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{x^2}{2}\right]^{\sqrt{3}} + \left[\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\sqrt{3}}^{2}$$

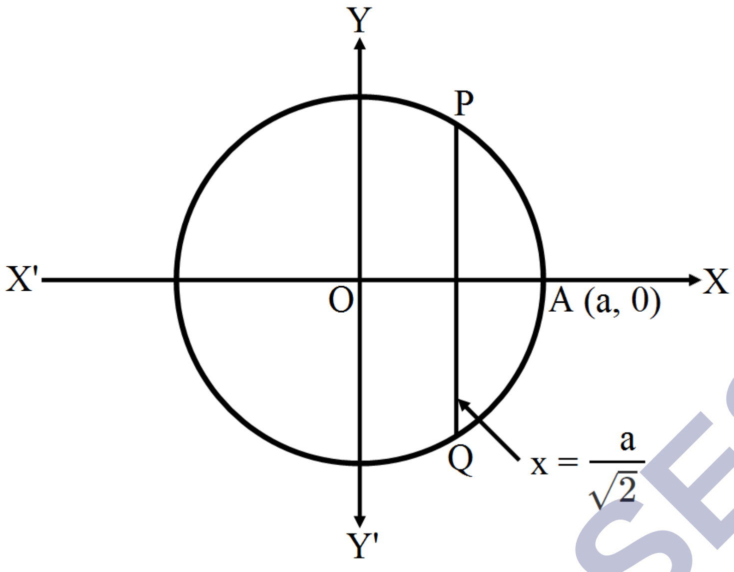
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}(3-0) + \left[\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\sin^{-1} 1 - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{3\pi - 2\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\pi}{6}$$

$= \frac{\pi}{3}$ वर्ग इकाई

प्रश्न 7 छेदक रेखा $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ द्वारा वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

उत्तर-



अभीष्ट क्षेत्रफल = 2 (क्षेत्रफल MAPM) (क्योंकि वृत्त x-अक्ष के प्रति सममित है)

$$= 2\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a} y\,dx = 2\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= 2\left|\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right|_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a}$$

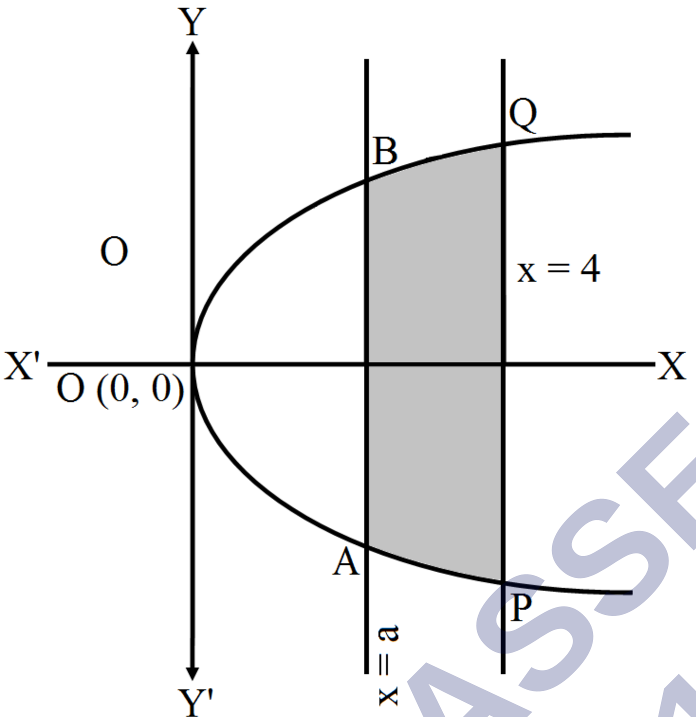
$$= 0 + a^2\sin^{-1}1 - \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} - a^2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= a^2 . \frac{\pi}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}} . \frac{a}{\sqrt{2}} - a^2 . \frac{\pi}{4} = \frac{a^2\pi}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{4}$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \text{ वर्ग इकाई}$$

प्रश्न 8 यदि वक्र $x = y^2$ एवं रेखा $x = 4$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल रेखा $x = a$ द्वारा दो बराबर भागों में विभाजित होता है। तो a का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दिया गया वक्र

x = y^2 .....(1)

x = 4 .....(2)

1. एक परवलय है जिसको शीर्ष (0, 0) है
2. एक रेखा है जो कि y-अक्ष के समान्तर है तथा इससे 4 इकाई दूरी पर है। माना रेखा x = a, क्षेत्रफल को दो बराबर भागों में विभाजित करती है। इसलिए कुल क्षेत्रफल

$$2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = 2.2\int_0^a \sqrt{x}\,dx$$

(क्योकि x = a, पुरे क्षेत्रफल को दो भागो में विभाजित करती है)

$$\Rightarrow \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}(a)^{\frac{3}{2}}$$

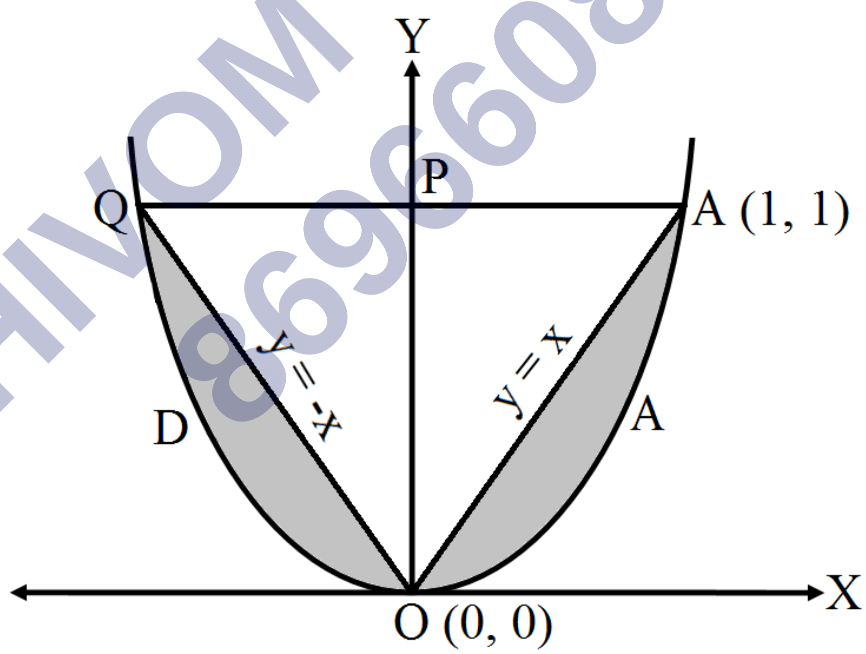
$$\Rightarrow \frac{8}{2} = (a)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow 4 = (a)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow a = (4)^{\frac{2}{3}}$$

प्रश्न 9 परवलय $y = x^2$ एवं $y = |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दिया हुआ परवलय

$y = x^2$ y-अक्ष के प्रति सममित है।

परवलय $y = x^2$ व $y = x$ के प्रतिच्छेद बिन्दु के लिए।

$y = x^2$ में $y = x$ रखने पर,

$\Rightarrow x = x^2$

$\Rightarrow x(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = 1$

पुन: चूँकि $y = |x|$ ∴ y = x, x, y = 1, -1

अत: अभीष्ट प्रतिच्छेद बिन्दु (-1, 1), (0, 0) व (1, 1

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल = 2 [क्षेत्रफल △APO - क्षेत्रफल △OAP]

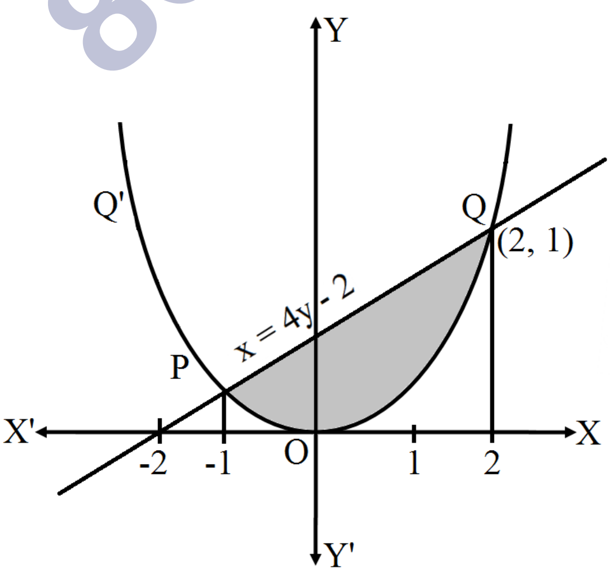
$$= \left[\int_0^1 x\,dy - \tfrac{1}{2}(1)(1)\right]$$

$$= \left[\int_0^1 \sqrt{y}\,dy - \frac{1}{2}\right] = 2\left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - 1$$

$$= \frac{4}{3}(1 - 0) - 1 = \frac{1}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

प्रश्न 10 वक्र $x^2 = 4y$ एवं रेखा $x = 4y - 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दिया गया वक्र $x^2 = 4y$ ....(1)

तथा दी गई रेखा $x = 4y - 2$ ....(2)

(1) और (2) को हल करने पर,

$(4y - 2)^2 = 4y$

या $16y^2 - 16y + 4 - 4y = 0$

या $16y^2 - 20y + 4 = 0$

या $4y^2 - 5y + 1 = 0$

या $(y - 1)(4y - 1) = 0$

$$y = 1, \frac{1}{4}$$

$$y = 1, x = 4 - 2 = 2$$

$$y = \frac{1}{4}, x = 1 - 2 = -1$$

∴ वक्र और रेखा के प्रतिच्छेद बिंदु $p\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ और Q(2,1) है

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_{-1}^{2} [y \text{ (रेखा PQ के लिए)} - y \text{ (परवलय के लिए)}]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(\frac{x+2}{4} - \frac{1}{4}x^2\right)dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{2}(x+2 - x^2)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{4}\left[\left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right)\right]$$

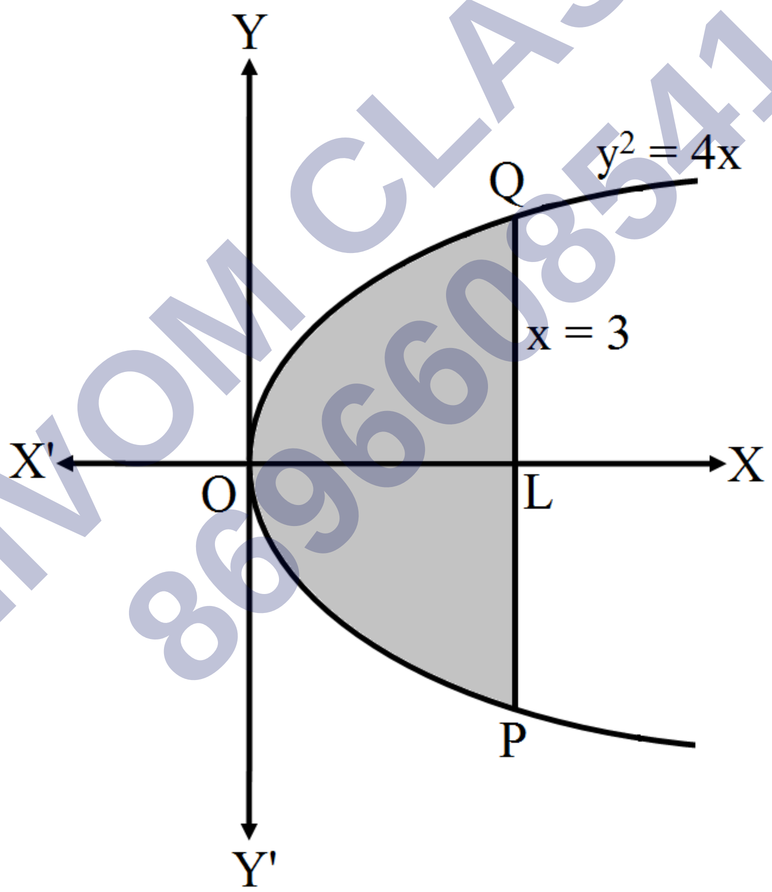
$$= \frac{1}{4}\left[\left(6 - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{5}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{10}{3} + 2 - \frac{5}{6}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{20+12-5}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{27}{6}\right) = \frac{9}{8} \text{ वर्ग इकाई}$$

प्रश्न 11 वक्र $y^2 = 4y$ एवं रेखा $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दिया गया वक्र $y^2 = 4x$, एक परवलय का समीकरण है। जिसका शीर्ष (0, 0) है और OX इसका अक्ष है जिसके सापेक्ष परवलय सममित है तथा रेखा का समीकरण $x = 3$ है।

$y^2 = 4x$ ...(1)

में x = 3 रखने पर,

$$y^2 = 4 \times 3 = 12$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{12}$$

∴ अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र OPQ का. क्षेत्रफल

= 2 × OLQ का क्षेत्रफल

(केवल प्रथम चतुर्थांश में छायांकित क्षेत्र)

$$= 2\int_0^3 y\,dx = 2\int_0^3 \sqrt{4x}\,dx$$

$$= 4\int_0^3 \sqrt{x}\,dx = 4\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = 4 \times \frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 0\right)$$

$$= \frac{8}{3} \times 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

प्रश्न 2 प्रथम चतुर्थांश में व्रत $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओ x = 0, x = 2 से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है-

a. π

b. $\frac{\pi}{2}$

c. $\frac{\pi}{3}$

d. $\frac{\pi}{4}$

उत्तर-

a. π

हल-

व्रत का समीकरण-

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

जब x = 0 हो, तब y = 2

और जब x = 2 हो, तब y = 0

अतः प्रतिच्छेद बिंदु (2, 0) और (0, 2) है

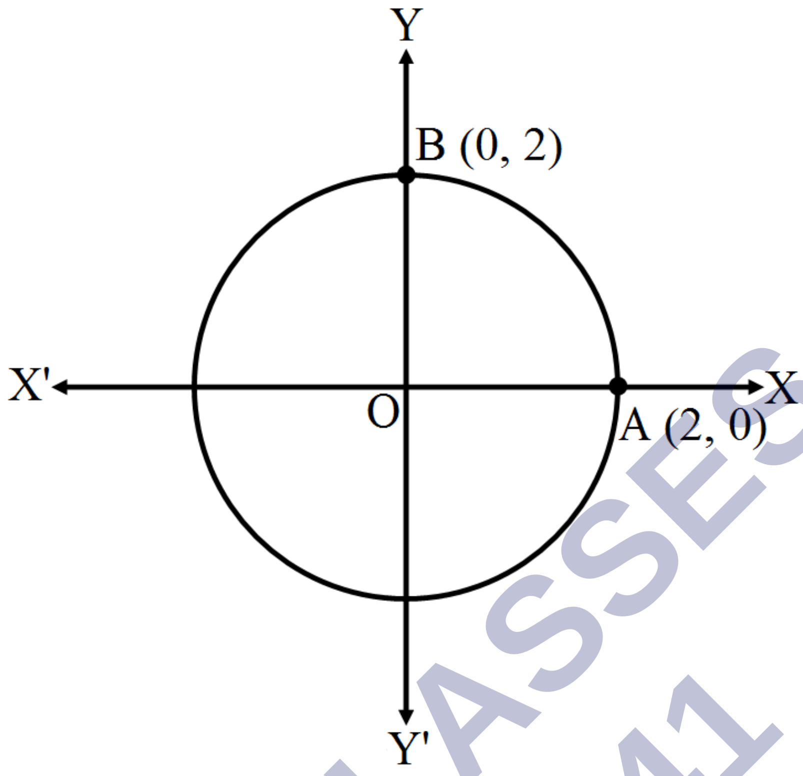
$$\therefore \text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0^2 y\,dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= 0 + 2\sin^{-1}$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्न 13 वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष एवं रेखाओ $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है-

a. 2

b. $\frac{9}{4}$

c. $\frac{9}{3}$

d. $\frac{9}{2}$

उत्तर-

b. $\frac{9}{4}$

हल-

दिया गया वक्र का समीकरण,

$$y^2 = 4x$$

$$x = \frac{1}{4}y^2$$

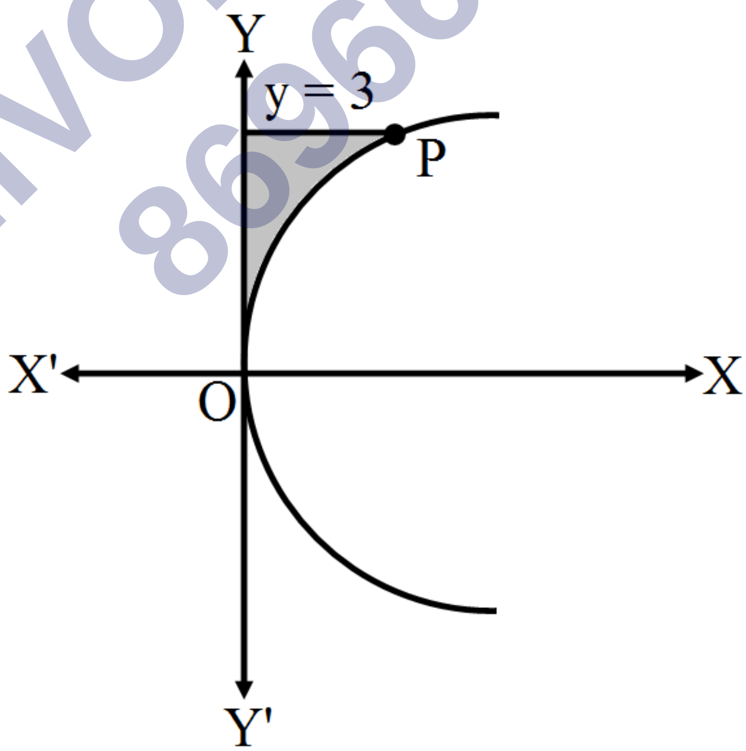
अब रेखा y = 3 तथा वक्र y^2 = 4x से घिर क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \int_0^3 x\,dy$$

$$= \int_0^3 \frac{y^2}{4}dy = \frac{1}{4}\int_0^3 dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]\int_0^3$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}[27 - 0]$$

$$= \frac{1}{12} \times 27 = \frac{9}{4} \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्नावली 8.2 (पृष्ठ संख्या 389)

प्रश्न 1 परवलय $x^2 = 4y$ और वृत्त $4x^2 + 4y^2 = 9$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दिए गए वृत्त का समीकरण $4x^2 + 4y^2 = 9$ तथा परवलय का समीकरण $x^2 = 4y$ है।

परवलय $x^2 = 4y$ का शीर्ष $(0, 0)$ है और oy सममित रेखा है।

वृत $4x^2 + 4y^2 = 9$ या $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

जिसका केंद्र $(0, 0)$ तथा त्रिज्या $\frac{3}{2}$ है।

$x^2 = 4y$ से x^2 माना $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ में रखने पर, $4y + y^2 = \frac{9}{4}$

$$\Rightarrow 4y^2 + 16y - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 2y(2y + 9) - 1(2y + 9) = 0$$

$$\Rightarrow (2y + 9)(2y - 1) = 0$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}, -\frac{9}{2}$$

$$\because y \neq -\frac{9}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}$$

∴ अभीष्ट क्षेत्रफल = छायांकित क्षेत्र OPRQ का क्षेत्रफल

= [क्षेत्र OPQ का क्षेत्रफल] + [क्षेत्र PQR का क्षेत्रफल]

= 2 × OPT क्षेत्र का क्षेत्रफल + 2 × क्षेत्र TPR का क्षेत्रफल

$$= 2 \times 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{y}\, dy + 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{9-4y^2}{4}} dy$$

$$\left[\because x^2 + y^2 = \frac{9}{4} \therefore x = \sqrt{\frac{9-4y^2}{4}}\right]$$

$$(x^2 = 4y \Rightarrow x = 2\sqrt{x})$$

$$= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{y} dy + 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{9}{4} - y^2} dy$$

$$= 4 \times \frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{1}}\right]_0^{\frac{1}{2}} + 2\left[\frac{y}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - y^2} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\left(\frac{y}{\frac{3}{2}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

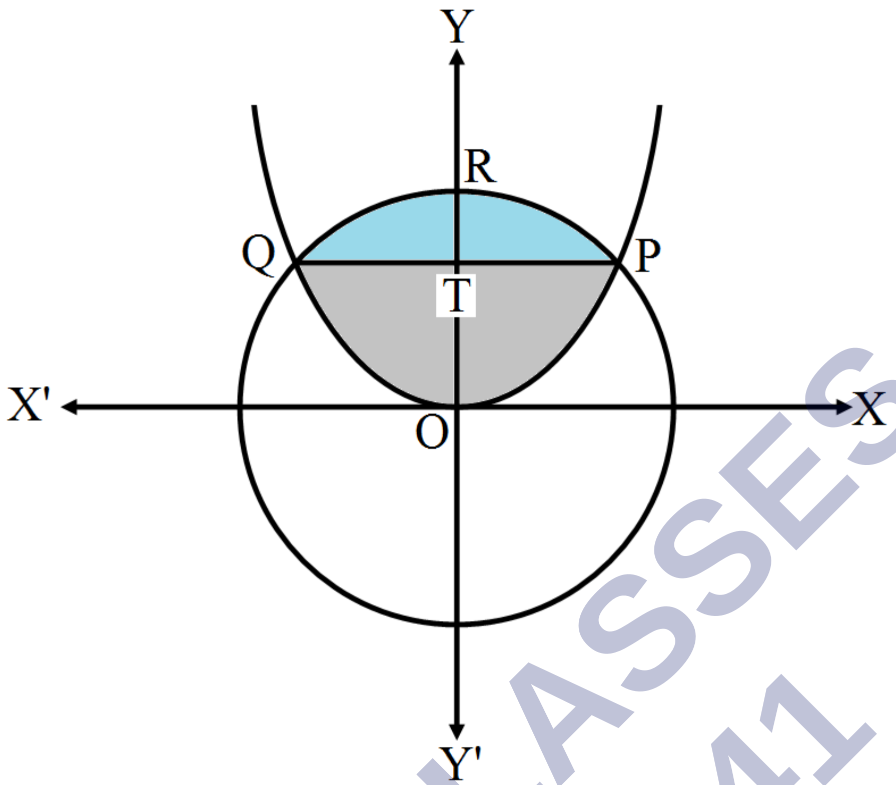
$$= \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + 2\left[\frac{y}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - y^2} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\left(\frac{y}{\frac{3}{2}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{8}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\left[\left(0 + \frac{9}{8}\sin^{-1}(1)\right) - \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{4}\left(\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(1.\frac{2\sqrt{2}}{3} - 0\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्न 2 दो वृत्तों $x^2 + y^2 = 1$ एवं $(x - 1)^2 + y = 1$ से आबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिए हुए वृत्तों के समीकरण हैं- $x^2 + y^2 = 1$ ...(1)

$(x - 1)^2 + y = 1$ ...(2)

समीकरण (1) ऐसा वृत्त है जिसका केन्द्र मूल बिन्दु O पर है। और जिसकी त्रिज्या 1 इकाई है। समीकरण (2) एक ऐसा वृत्त है।

जिसका केन्द्र C (1, 0) है और जिसकी त्रिज्या 1 इकाई है।

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर,

$(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + y^2$

या $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}$ जिससे $\mathbf{y} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ प्राप्त होता है।

अतः दिय हुए व्रतों के प्रतिच्छेदक बिंदु $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ और $A'\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ है जेसा चित्र में दर्शाया गया हैँ

वृत्तो के मध्यवर्ती क्षेत्र OACA'O का अभीष्ट क्षेत्रफल = 2 [क्षेत्रफल क्योंकी आकृति x-अक्ष के प्रति सममित है]

= 2 [क्षेत्र ODAO का क्षेत्रफल + क्षेत्र DCAD का क्षेत्रफल]

$$= 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} y \text{ (पहले वक्र के लिए) } dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} y \text{ (दूसरे वक्र के लिए) } dx\right]$$

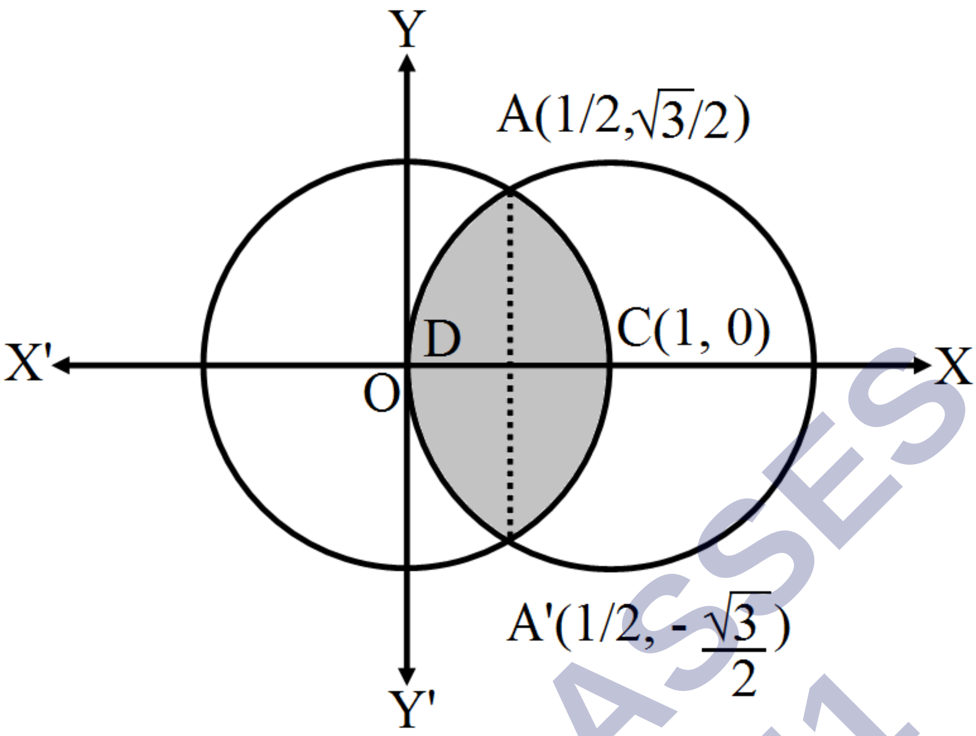
$$= 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-(x-1)^2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}dx\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{1-(1)^2} + \frac{1}{2} \times \sin^{-1}(x-1)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} + \frac{1}{2} \times \sin^{-1}(x-1)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) - \sin^{-1}(-1)\right] + \left[\sin^{-1}1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin^{-1}\frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right] + \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right] = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ वर्ग मात्रक}$$



प्रश्न 3 वक्रों $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$ एवं $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दिए गये वक्रों के समीकरण

$y = x^2 + 2$ ...(1)

$y = x$ ...(2)

$x = 0$ ...(3)

$x = 3$ ...(4)

अभीष्ट क्षेत्रफल = छायांकित क्षेत्रफल

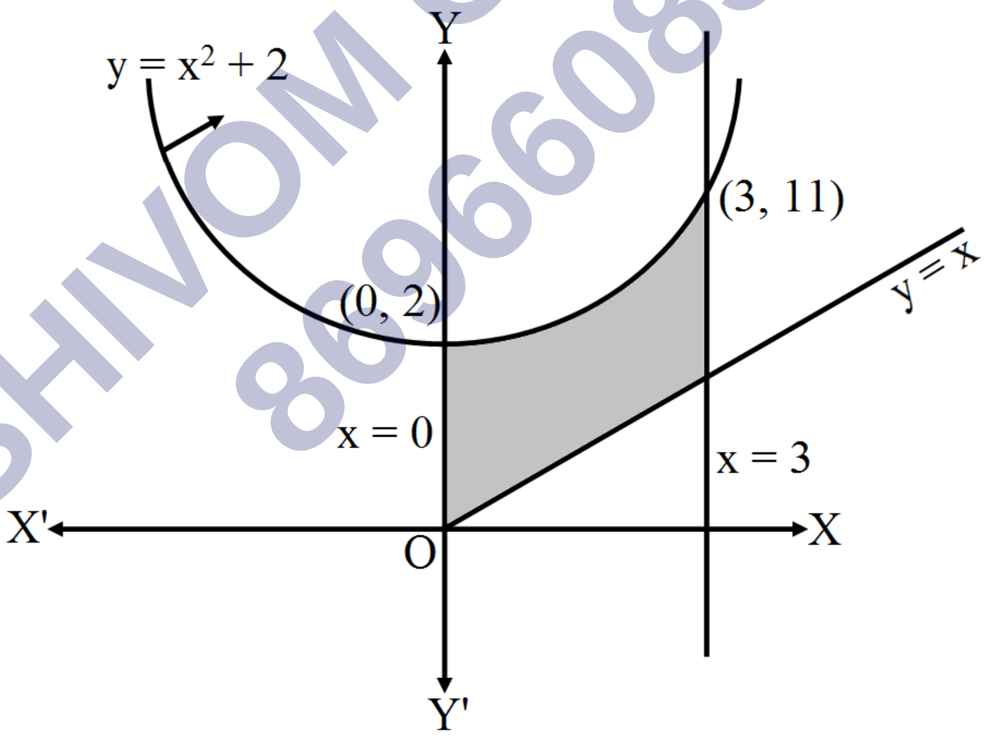
$$= \int_0^3 [y \text{ (परवलय के लिए) - } y\text{(रेखा के लिए)}dx$$

$$= \int_0^3 (x^2 + 2 - x)dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

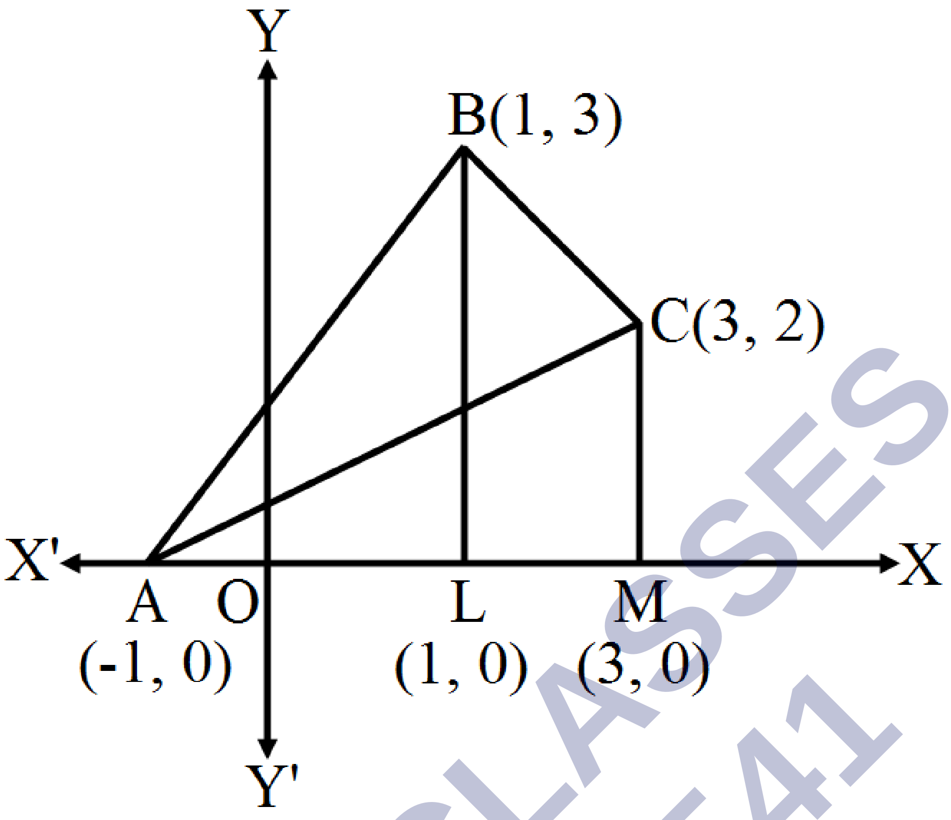
$$= 9 + 6 - \frac{9}{2} - 0 = 15 - \frac{9}{2}$$

$\frac{21}{2}$ वर्ग इकाई



प्रश्न 4 समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (-1, 0), (1, 3) एवं (3, 2) हैं।

उत्तर-



माना दिए हुए तीन बिन्दु A(-1, 0), B (1, 3) तथा C (3, 2) हैं।

हम जानते हैं कि, बिन्दु (x_1, y_1), (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा की समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ से}$$

बिंदु (-1, 0), (1, 3) को मिलाने वाली रेखा AB का समीकरण

$$y - 0 = \frac{3-0}{1+1}(x + 1)$$

$$y = \frac{3}{2}(x + 1) \,..\, (1)$$

बिंदु (1, 3), (3, 2) को मिलाने वाली रेखा BC का समीकरण

$$y - 0 = \frac{2-0}{3+1}(x + 1)$$

$$y = \frac{1}{2}(x + 1) \ldots (3)$$

$\triangle ABC$ का क्षेत्रफल

=△ABL का क्षेत्रफल + समलम्ब BLMC का क्षेत्रफल - △ACM का क्षेत्रफल .....(4)

$$\triangle ABL \text{ का क्षेत्रफल } \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}(x+1)dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+1+1\right] = 3$$

समलम्ब BLMC का क्षेत्रफल

$$= \int_{1}^{3} \frac{7-x}{2}dx = \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{4}\right]_{1}^{3}$$

$$= \frac{7}{2}(3-1) - \frac{1}{4}(9-1) = 7-2 = 5$$

$$\triangle ACM \text{ का क्षेत्रफल} = \int_{1}^{3} \frac{x+1}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{2}+x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \frac{7}{2}(3-1) - \frac{1}{4}(9-1) = 7-2 = 5$$

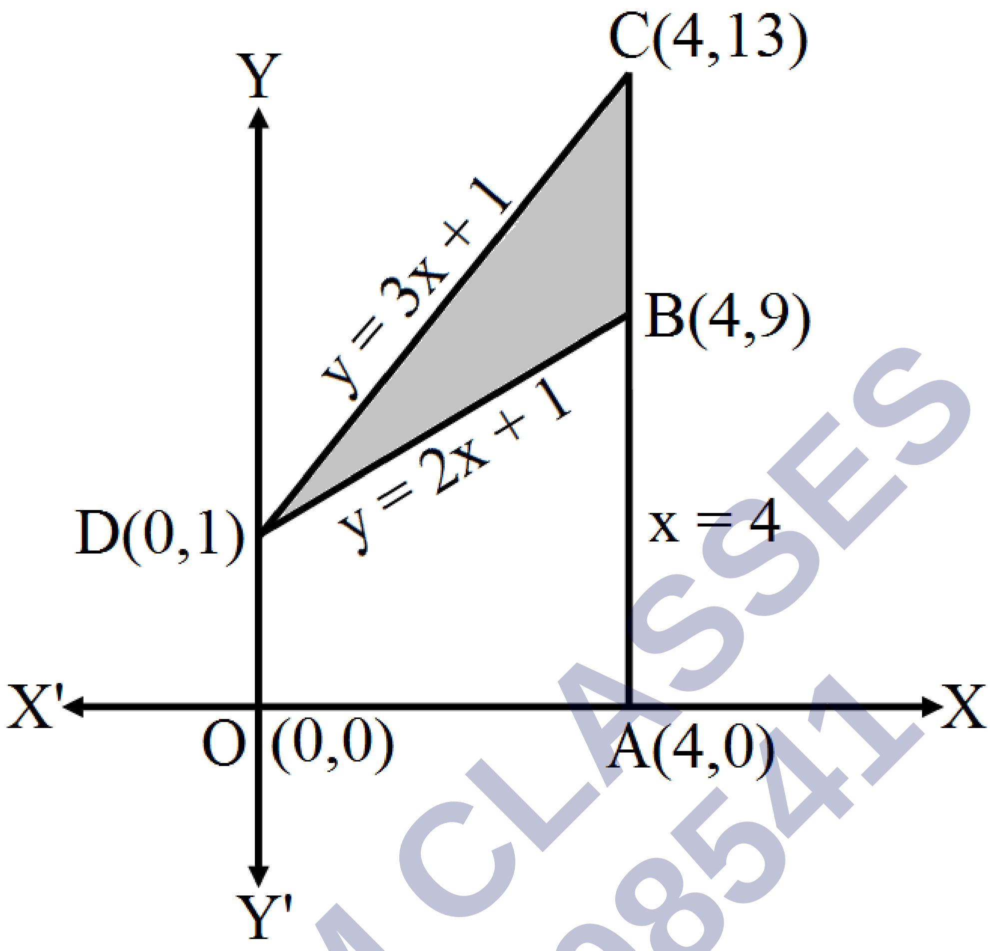
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{9-1}{2}+(3+1)\right] = \frac{1}{2}(4+4) = 4$$

समीकरण (4) में △ABC, समलम्ब △BCML तथा △ACM के क्षेत्रफलों के मान रखने पर,

△ABC का क्षेत्रफल = 3 + 5 – 4 = 4 वर्ग इकाई

प्रश्न 5 समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिकोणीय क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाओं के समीकरण y = 2x + 1, y = 3x + 1 एवं = 4 हैं।.

उत्तर-



भुजाओं के समीकरण

$y = 2x + 1$ .....(1)

$y = 3x + 1$ .....(2)

$x = 4$ .....(3)

(1) और (2) को हल करने पर,

$2x + 1 = 3x + 1 \Rightarrow x = 0 \therefore y = 1$

$\therefore$ (1) और (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु (0, 1) है।

(1) और (3) को हल करने पर,

$y = 8 + 1 = 9$

∴ (1) और (3) का प्रतिच्छेद बिन्दु (4, 9) है।

(2) और (3) को हल करने पर, y = 12 + 1 = 13; x = 4

∴ (2) और (3) का प्रतिच्छेद बिन्दु (4, 13) है

$$\text{अभीष्ट } \triangle ABC' \text{ का क्षेत्रफल} = \int_0^4 [(\text{रेखा AC के लिए}) - y\ (\text{रेखा AB के लिए})]\, dx$$

$$= \int_0^4 [(3x+1)-(2x+1)]dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{16}{2} = 8 \text{ वर्ग इकाई}$$

प्रश्न 6 वृत $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखा x + y = 2 से घिरे भाग का क्षेत्रफल है।

a. $2(\pi - 2)$

b. $\pi - 2$

c. $2\pi - 1$

d. $2(\pi + 2)$

उत्तर-

b. π – 2

हल-

△ABC का क्षेत्रफल = OABC का क्षेत्रफल - △OAB का क्षेत्रफल

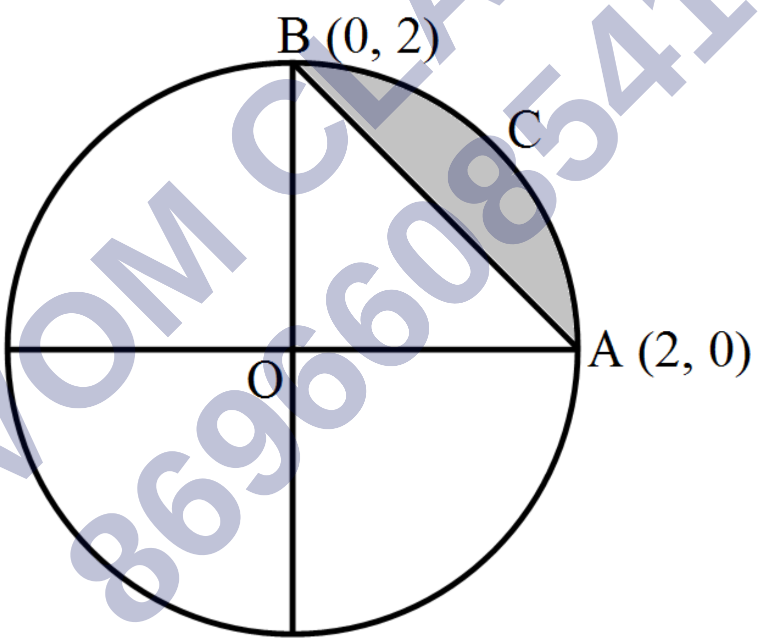
$$= \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx - \int_0^2 (2-x)dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= [2\sin^{-1} 1 - 0] + \left[4 - \frac{4}{2} - 0\right]$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{2} - 2$$

$$= \pi - 2$$



प्रश्न 7 वृत $y^2 = 4x$ एवं रेखा $y = 2x$ से घिरे भाग का क्षेत्रफल है।

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{4}$

d. $\frac{3}{4}$

उत्तर-

b. $\frac{1}{3}$

हल-

दिया गया वक्र है-

$$y^2 = 4x \ldots (1)$$

$$y = 2x \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) एक दूसरे को O(0, 0) तथा A(1, 2) पर प्रतिच्छेदक करते है।

वक्रो $y^2 = 4x$ तथा $y = 2x$ के मध्यवर्ती का क्षेत्रफल

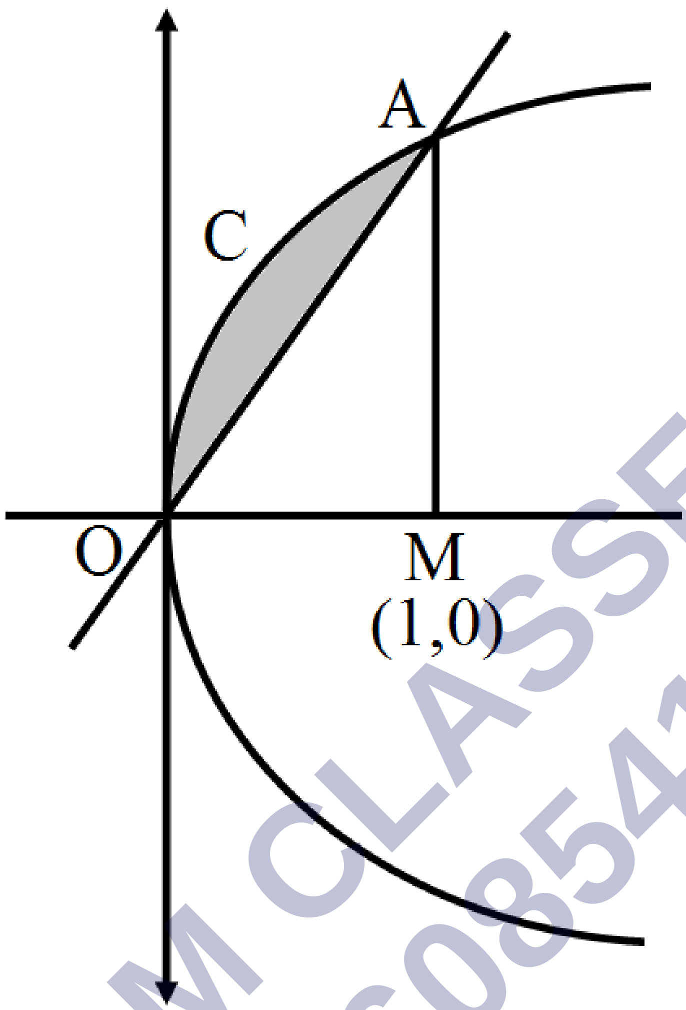
$=$ OMACO से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल - OMA का क्षेत्रफल

$$= \int_0^1 \sqrt{4x}\,dx = 2\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3} \times 1$$

$= \frac{4}{3}$ वर्ग इकाई

$$= \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1$$

$$= \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$



विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 392-393)

प्रश्न 1 दिए हुए वक्रो एवं रेखाओ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए-

1. $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$ एवं x-अक्ष
2. $y = x^4$, $x = 1$, $x = 5$ एवं x-अक्ष

उत्तर-

1. प्रश्नानुसार परवलय $y = x^2$ का शीर्ष (0, 0) है और सममित रेखा oy है।

   $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

   = क्षेत्र PQRS का क्षेत्रफल

$$= \int_{1}^{2} y dx$$

$$= \int_{1}^{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right]$$

$= \frac{7}{3}$ वर्ग इकाई

2. दिया है- $y = x^4$ बिंदु (0, 0) से होकर जाता है इसकी समिमत रेखा oy है

$y = x^4$ हेतु x तथा y के निम्नलिखित मान है

x	-1	0	1	2	3
y	1	0	1	16	81

तथा x-अक्ष का क्षेत्रफल

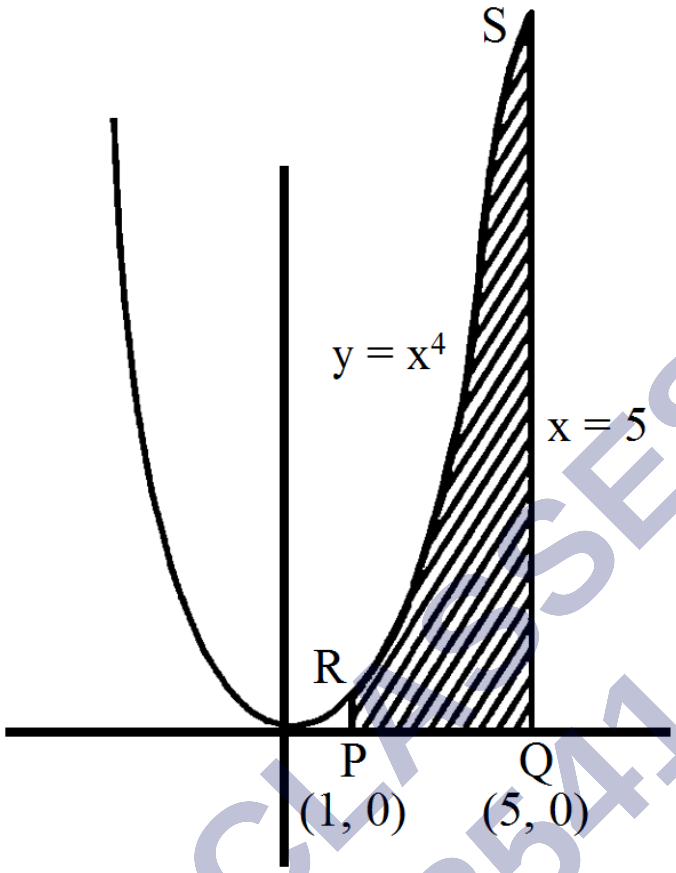
= क्षेत्र PQRS का क्षेत्रफल

$$= \int_{1}^{5} y dx = \int_{1}^{5} x^4 dx = \left|\frac{x^5}{5}\right|_1^5$$

$$= \left(\frac{5^5}{5} - \frac{1}{5}\right) = 625 - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3125-1}{5} = \frac{3124}{5}$$

$= 624.8$ वर्ग इकाई



प्रश्न 2 वक्रो $y = x$ एवं $y = x^2$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए-

उत्तर- दिया है- $y = x$

$y = x^2$

y का मान $y = x^2$ में रखने पर

$x = x^2$ या $x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$\therefore x = 0, x = 1$

जब $x = 0$ तो $y = 0$ तथा जब $x = 1$ तो $y = 1$

अतः $y = x^2$ एवं $y = x$ बिंदु $(0, 0)$ तथा $(1, 1)$ पर प्रतिछेदक करते है

वक्र $y = x^2$ एवं $y = x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

= क्षेत्र OCB का क्षेत्रफल

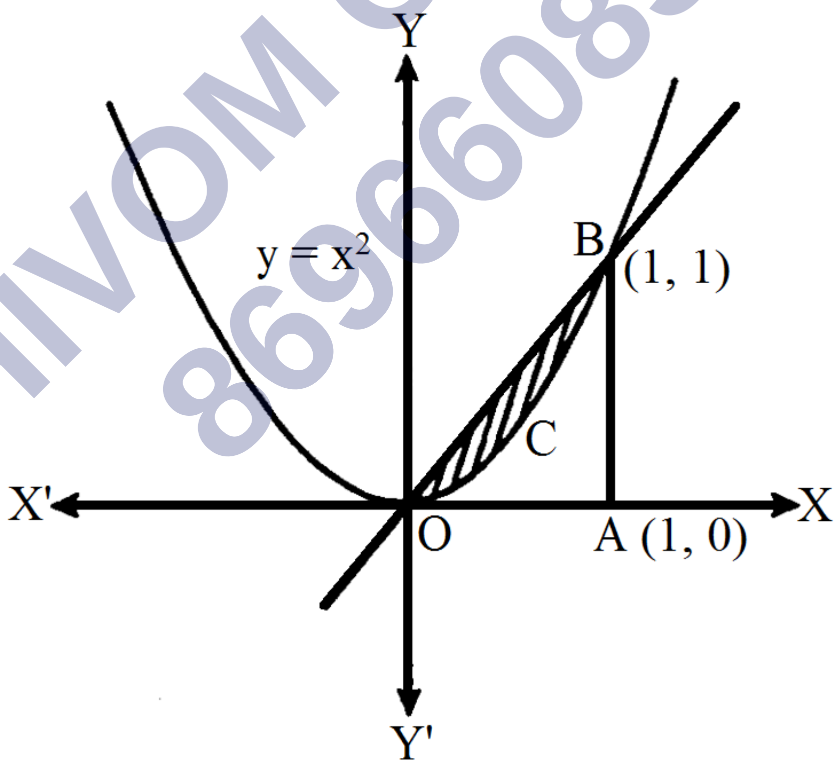
= क्षेत्र OAB का क्षेत्रफल - क्षेत्र OABC का क्षेत्रफल

$$= \int_0^1 y_1 dx - \int_0^1 y_2 dx$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट क्षेत्रफल } = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x_2 dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्न 3 प्रथम चतुर्थांश में सम्मिलित एवं $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 1$ तथा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

उत्तर- दिया है- $y = 4x^2$ एक परवलय शीर्ष (0, 0) है

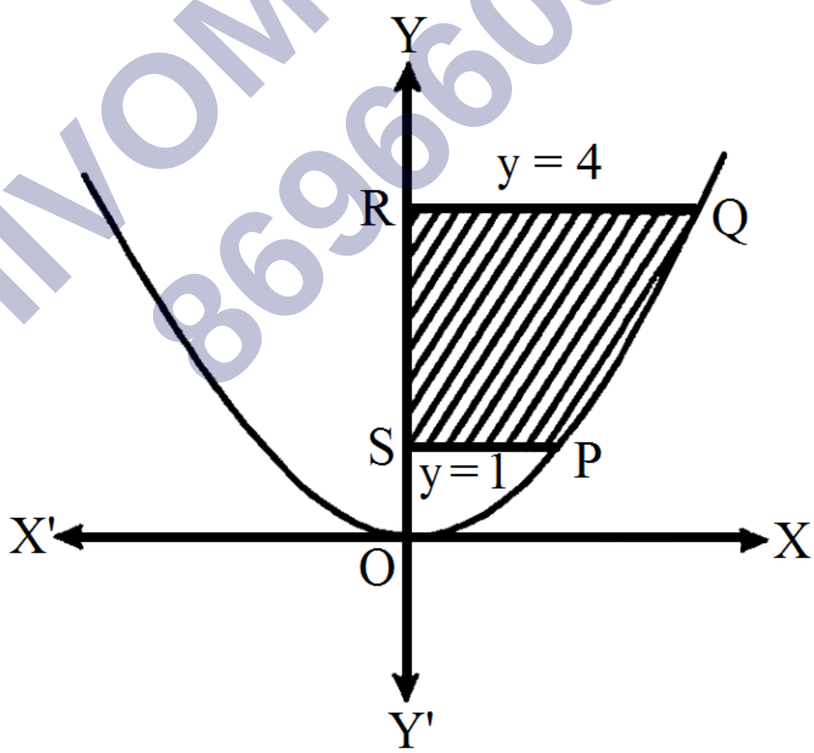
अब $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 1$ तथा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \int_1^4 x\,dy = \int_1^4 \sqrt{\frac{y}{4}}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{4}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(8-1)$$

$= \frac{7}{3}$ वर्ग इकाई



प्रश्न 4 $y = |x + 3|$ का ग्राफ खीचिए एवं $\int_{-6}^{0} |x+3|dx$ का मान ज्ञात कीजिए

उत्तर- दिया है- y = |x + 3|

$$= \begin{cases} (x+3), & x \geq -3 \\ -(x+1), & x \geq -3 \end{cases}$$

जब x < -3 अर्थात y = -x − 3

x	-4	-5	-6
y	1	2	3

और जब x ≥ −3

x	-1	-5	-6
y	1	2	3

अभीष्ट क्षेत्रफल,

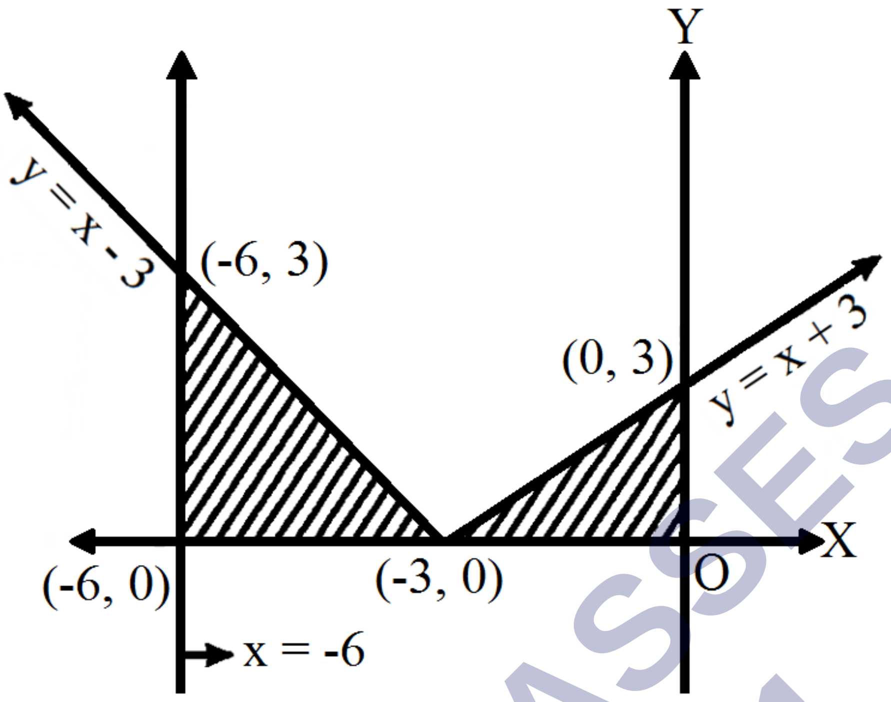
$$\therefore \int_{-6}^{0} |x+2|dx = \int_{-6}^{0} |x+3|dx + \int_{-1}^{0} |x+3|dx$$

$$= -\int_{-6}^{-3} (x+3)dx + \int_{-1}^{0} |x+3|dx$$

$$= -\left|\frac{x^2}{2} + 3x\right|_{-6}^{-3} + \left|\frac{x^2}{2} + 3x\right|_{-3}^{0}$$

$$= -\left[\frac{9}{2} - 9 - 18 + 18\right] + \left[0 + 0\frac{9}{2} + 4\right]$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9 \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्न 5 x = 0 एवं x = 2π तथा वक्र y = sinx से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

उत्तर- y = sinx के ग्राफ पर x के कुछ मानो के सगत y के मान निम्न प्रकार है इन बिन्दुओ को वक्र द्वारा मिलाने से निम्नानुसार ग्राफ प्राप्त होता है

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
y	0	0.5	0.7	0.8	1	0.5	0.7	0.8	0

अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^{\pi} y dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-y) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$$

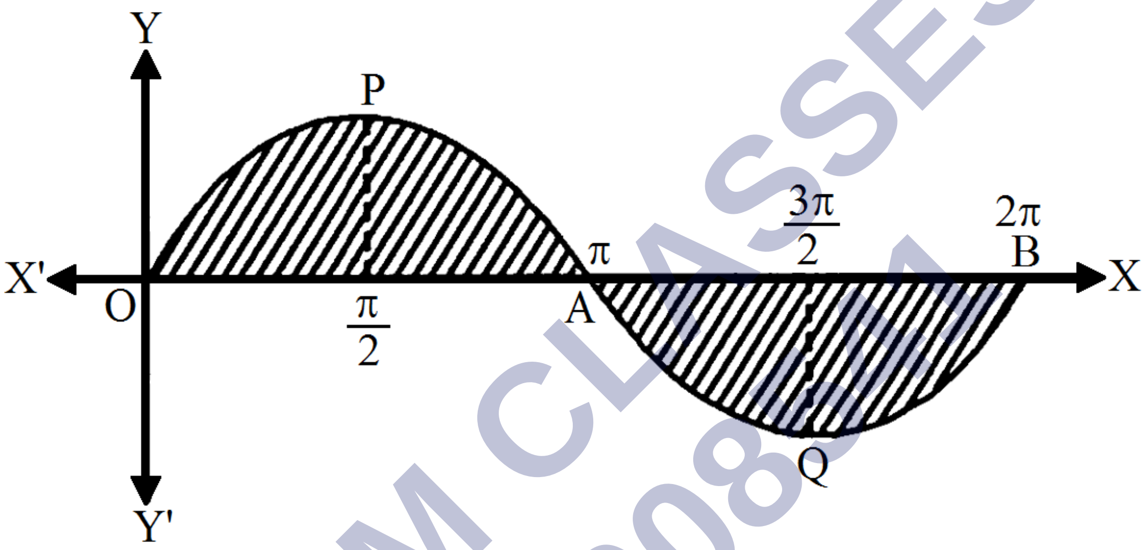
$$= |-\cos x|_0^{\pi} - |-\cos|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= (-\cos\pi + \cos\theta) + (\cos 2\pi - \cos\pi)$$

$$= [-(-1) + 1] + [1 - (-1)]$$

$$= (1 + 1) + (1 + 1)$$

$$= 4 \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्न 6 परवलय $y^2 = 4ax$ एवं रेखा $y = mx$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

उत्तर- दिय हुए वक्र और सरल रेखा का समीकरण

$y^2 = 4ax$

$y = mx$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$m^2x^2 = 4ax \text{ या } x = \frac{4a}{m^2}, \text{ और } x = 0$$

इस प्रकार वक्र $y^2 = 4ax$ और रेखा $y = mx$ बिंदु $O(0, 0)$ तथा $p\left(\frac{4a}{m^2}, \frac{4a}{m}\right)$ पर प्रतिछेदक करते है

अतः $y^2 = ax$ तथा $y = mx$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

= क्षेत्र OCB का क्षेत्रफल

= क्षेत्र ABCO का क्षेत्रफल - △OAB का क्षेत्रफल

$$= \int_0^{\frac{4a}{m^2}} y_1 dx - \int_0^{\frac{4a}{m^2}} y_1 dx$$

जबकि y^1 वक्र $y^2 = 4ax$ और y^2 रेखा $y = mx$ के लिए पप्रयुक्त करने पर

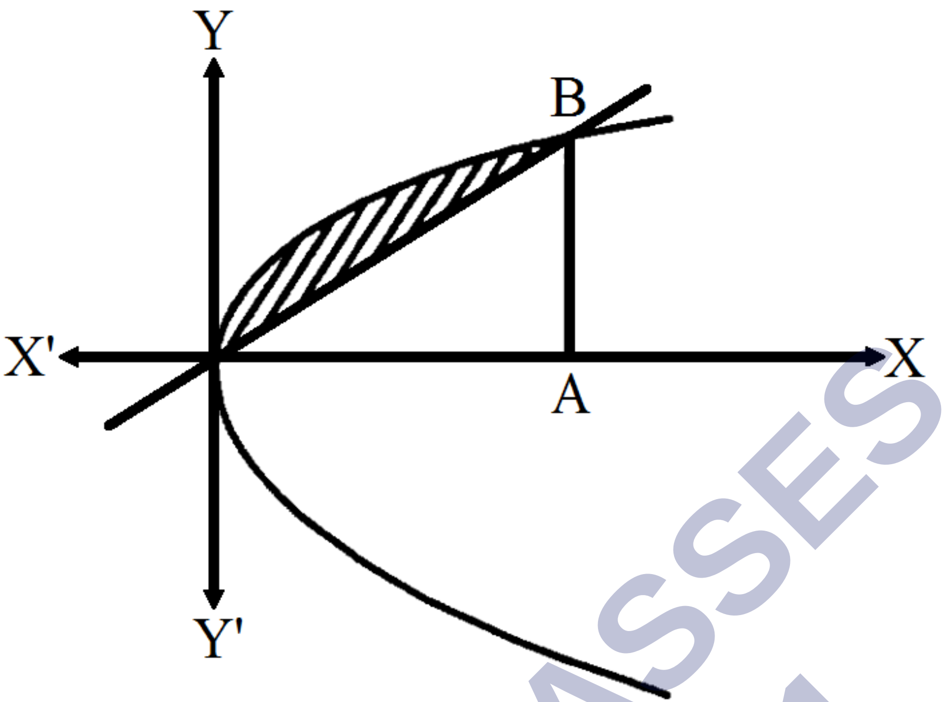
$$= \int_0^{\frac{4a}{m^2}} \sqrt{4ax}dx - \int_0^{\frac{4a}{m^2}} mxdx$$

$$= 2\sqrt{a} \times \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{4a}{m^2}} - \frac{m}{2}\left[x^2\right]_0^{\frac{4a}{m^2}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a} - \left(\frac{4a}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{m}{2}\left(\frac{4a}{m^2}\right)^2$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}8.\frac{a^{\frac{3}{2}}}{m^2} - \frac{m}{2}\frac{16a^2}{m^4} = \frac{32}{3} - \frac{a^2}{m^3} = \frac{8a^2}{m^3}$$

$$= \frac{(32-24)a^2}{3m^2} = \frac{8a^2}{3m^2}$$ वर्ग इकाई



प्रश्न 7 परवलय $4y = 3x^2$ एवं रेखा $2y = 3x + 12$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

उत्तर- परवलय तथा रेखा का समीकरण

$4y = 3x^2$

$2y = 3x + 12$

2y का मान समीकरण (1) में रखने पर

$2(3x + 12) = 3x^2$ या $3x^2 - 6x - 24 = 0$

$x^2 - 2x - 8 = 0$ या $(x - 4)(x + 2) = 2$

$\therefore x = 4, -2$

जब $x = 4$ तो $2y = 12 + 12 = 24$ या $y = 12$

तथा जब $x = -2$ तो $2y = -6 + 12 = 6$ या $= 3$

इस प्रकार पवलय और रेखा एक दूसरे को P(-2, 3) तथा Q(4, 12) पर प्रतिच्छेदक करते है

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र AOD का क्षेत्रफल

= समलम्ब चतुर्भज ABCD का क्षेत्रफल - क्षेत्रफल ABCDA

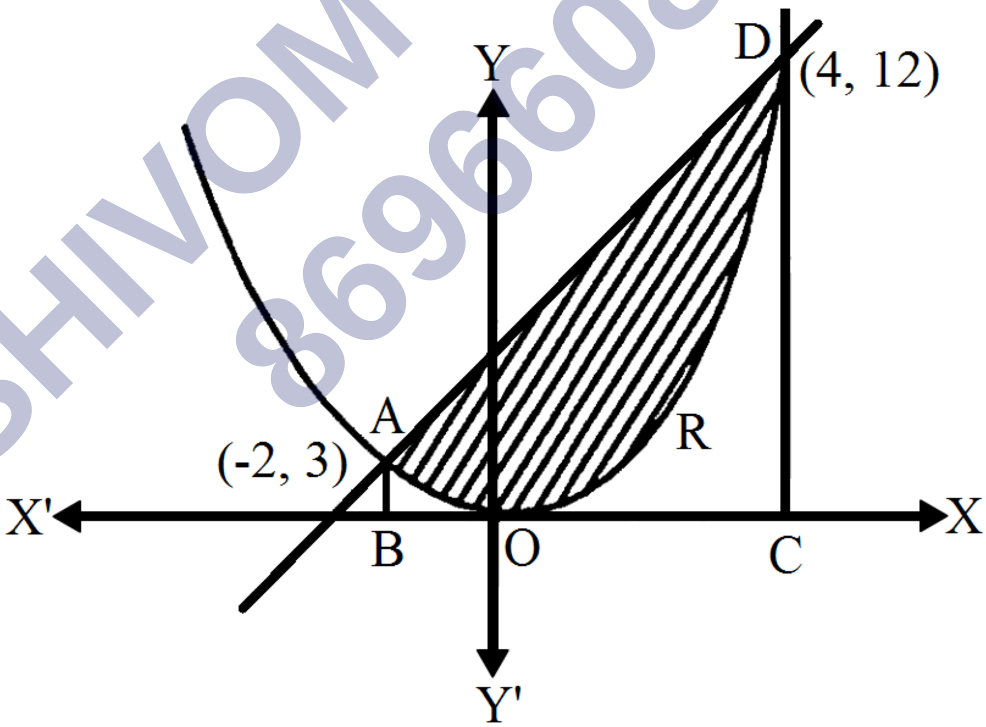
$$= \int_{-2}^{4} y_1 dx \text{ (रेखा के लिए)} - \int_{-2}^{4} y_2 dx \text{ (परवलय के लिए)}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} (3x + 12)dx - \int_{-2}^{4} \frac{3x^2}{4} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3x^2}{2} + 12x \right]_{-2}^{4} - \frac{3}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{4}$$

$$= \frac{1}{2} [2 = 72 + 18] - \frac{3}{7} . \frac{72}{3}$$

$$= \frac{90}{2} - 18 = 45 - 18 = 27 \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्न 8 दीर्घवृत $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ एवं रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

उत्तर- दिया है- दीर्घवृत $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

रेखा $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

दोनों समीकरण से प्राप्त बिंदु A(3, 0), B(0, 2) एक दूसरे को प्रतिच्छेदक करते है

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0^1 y_1\,dx \text{ (दीर्घ वृत के लिए)} - \int_0^3 y_2\,dx \text{ (रेखा के लिए)}$$

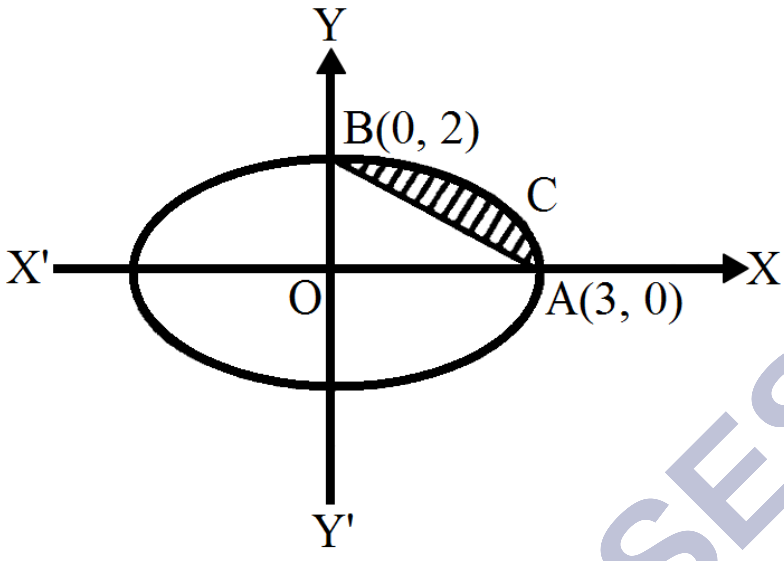
$$= \int_0^3 \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx - \int_0^3 2\left(1-\frac{x}{3}\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(0+\frac{9}{2}\sin^{-1}1\right)-(0)\right] - \frac{2}{3}\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\left[9-\frac{9}{2}\right] = \frac{3}{2}\pi - \frac{2}{3}\times\frac{9}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\pi - 3 = \frac{3}{2}(\pi-2) \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्न 9 दीर्घवृत $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ एवं रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

उत्तर- दिया है- रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

दीर्घवृत $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

दोनों समीकरण से प्राप्त बिंदु A(a, 0), B(0, b) एक दूसरे को प्रतिच्छेदक करते है

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र BAC का क्षेत्रफल

= क्षेत्र OACB का क्षेत्रफल - क्षेत्र OAB का क्षेत्रफल

$$=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx-\int_0^a b\left(1-\frac{x}{a}\right)dx$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx-\frac{b}{a}\int_0^a (a-x)dx$$

$$=\frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-b^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a-\frac{b}{a}\left[ax-\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{a}{2}\sin^{-1} 1 - 0\right] - \frac{b}{a}\left[a^2 - \frac{a^2}{2}\right]$$

$$= \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}$$

$$= \frac{ab}{4}(\pi - 2) \text{ वर्ग इकाई}$$

प्रश्न 10 परवलय $x^2 = y$, रेखा $y = x + 2$ और x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

उत्तर- दिया है- $x^2 = y$

$y = x + 2$

समीकरण (1) तथा (2) से

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2, x = -1$

$\therefore$ $x = 2$ तो $y = (2)^2 = 4$

$x = -1$ तो $y = (-1)^2 = 1$

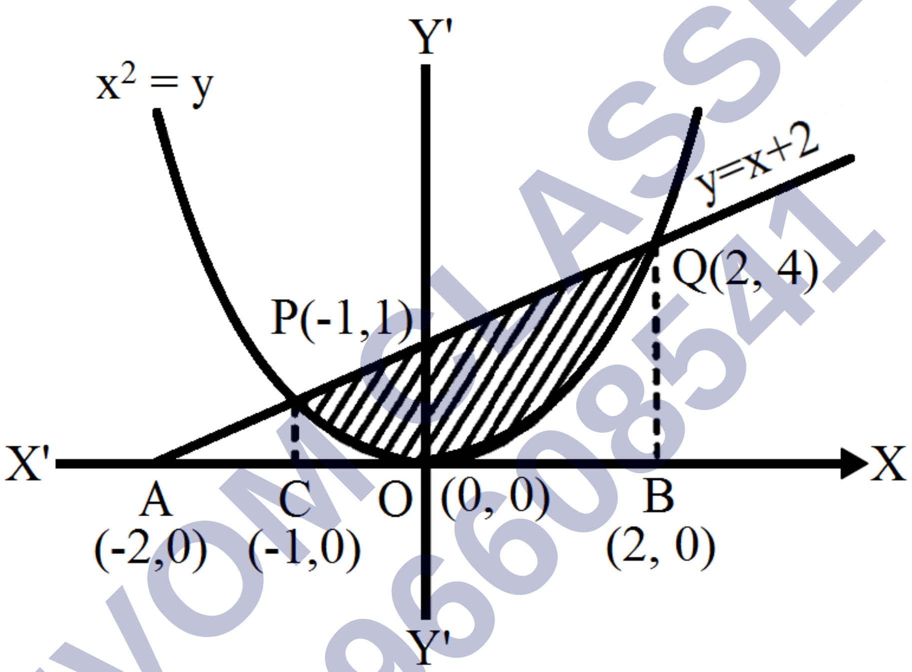
अतः बिंदु (2, 4) और (-1, 1) प्रतिच्छेदक बिंदु है

अभीष्ट क्षेत्रफल $\int_{-1}^{2}$ [y(रेखा के लिए) - y (परवलय के लिए)

$$\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left|2_{-1}(4-1)+2(2+1)-\frac{1}{3}(8+1)\right|$$

$$= \frac{3}{2}+6-3 = \frac{9}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्न 11 समाकलन विविध का उपयोग करते हुए वक्र |x| + |y| = 1 से घिरे क्षेत्र ज्ञात कीजिए

उत्तर- दिए गए समीकरण

x + 1 = 1 .....(1)

x - y = 1 .....(2)

-x + y = 1 .....(3)

-x - y = 1 .....(4)

इनमे घिरे क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल

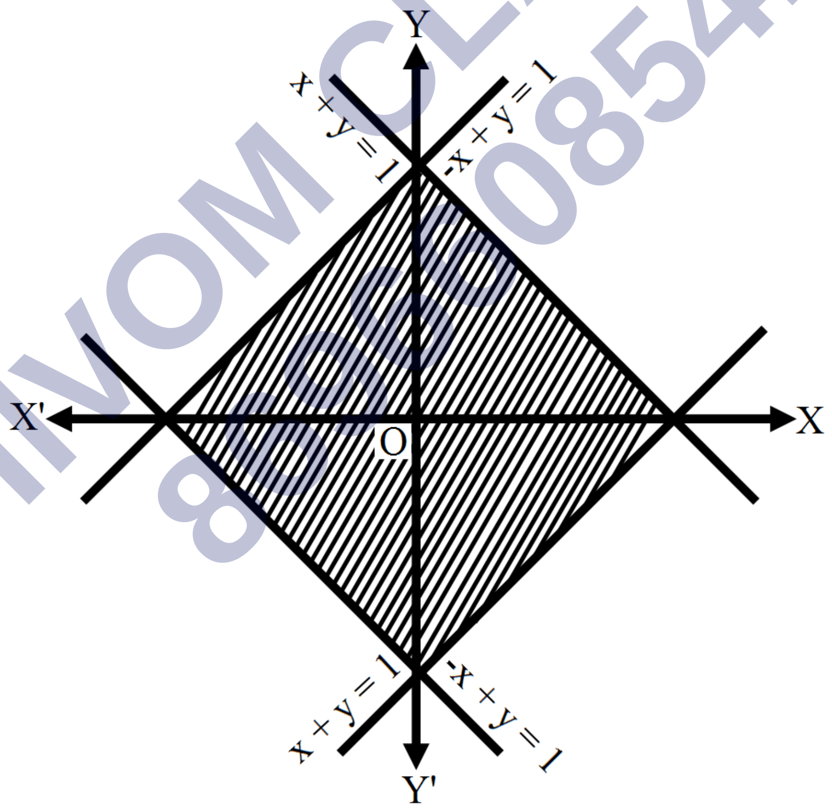
$$= 4\int_0^1 y \text{ (रेखा (1) के लिए)}$$

क्योकि आकृति x अक्ष तथा y अक्ष दोनों के लिए सममित है

$$= 4\int_0^1 (1 - x)dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)_0^1$$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{2} - 0\right)$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्न 12 वक्रो {(x, y), y > x^2 तथा y = |x|} से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है वक्र x^2 = y एक परवलय है जिसका शीर्ष (0, 0) है तथा सममित अक्ष oy है

समीकरण y = |x| दो रेखाओ को निरूपित करता है

जब x > 0 तो y = x

तथा जब x < 0, y = -x

अर्थात y = x, x^2 = y को (0, 0), (-1, 1) पर प्रतिच्छेद करती है

और y = -x, x^2 = y को (0, 0), (-1, 1) पर प्रतिच्छेद करती है

अभीष्ट क्षेत्रफल = 2 × OPQ का क्षेत्रफल

=2[△OLQ को क्षेत्रफल - क्षेत्र OLQPO का क्षेत्रफल

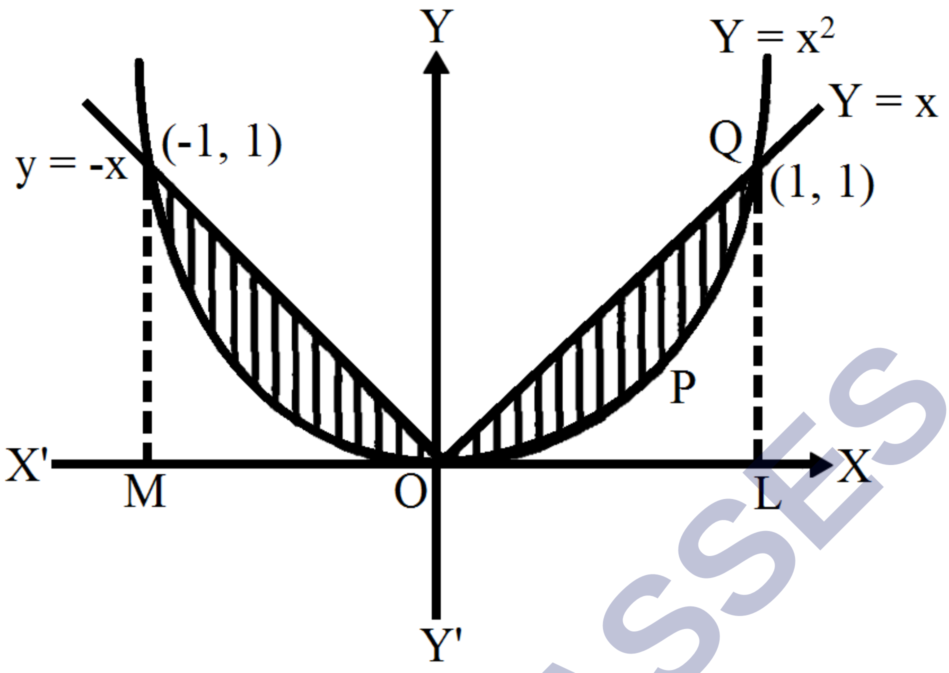
$$= 2\left[\int_0^1 y_1 dx = \int_0^1 dx\right] y_1$$ रेखा y = x तथा y_2

वक्र x^2 = y के लिए प्रयुक्त करने पर

$$= 2\left[\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx\right]$$

$$= \left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{2}\right]_0^1\right\} = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$ वर्ग इकाई



प्रश्न 13 समाकलन विधि का उपयोग करते हुए, एक ऐसे त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष के निर्देशांक A(2, 0), B(4, 5) एवं C(6, 3) है

उत्तर-दिया है रेखा AB का समीकरण

$$y - 0 = \frac{5-0}{4-2}(x-2)$$

अर्थता $y = \frac{5}{2}(x-2)$

इसी प्रकार रेखा BC का समीकरण है

$$y - 5 = \frac{3-5}{6-4}(x-4)$$

$$y = -x + 9$$

तथा रेखा CA का समीकरण है

$$y - 3 = \frac{0-3}{2-6}(x-6)$$

$$y = \frac{3}{4}(x-2)$$

अभीष्ट क्षेत्रफल = △ABC द्वारा घेरा गया क्षेत्र का क्षेत्रफल

= क्षेत्र △APB का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज

BPQC का क्षेत्रफल - क्षेत्र △AQC का क्षेत्रफल

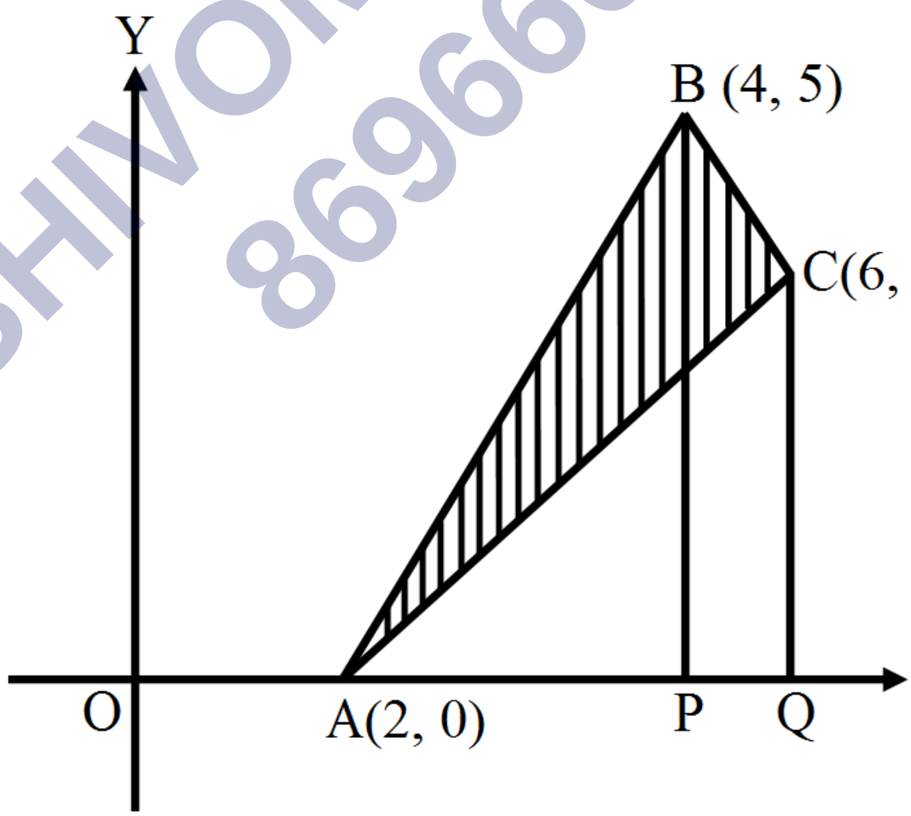
$$= \frac{5}{2}\int_2^4 (x-2)dx + \int_4^6 -(x-9)dx - \frac{3}{4}\int_2^6 (x-2)dx$$

$$= \frac{5}{2}\left[\frac{(x-2)^2}{2}\right]_2^4 - \left[\frac{(x-9)^2}{2}\right]_4^6 - \frac{3}{4}\left[\frac{(x-2)^2}{2}\right]_2^6$$

$$= \frac{5}{4}[2^2 - 0] - \frac{1}{2}[(-3)^2 - (-5)^2] - \frac{3}{8}[(4)^2 - 0]$$

$$= \frac{5}{4} \times 4 - \frac{1}{2}(9 - 25) - \frac{3}{8}(16 - 0)$$

$= 5 + 8 - 6 = 7$ वर्ग इकाई



प्रश्न 14 समाकलन विधि का उपयोग करते हुए, रेखाओ $2x + y = 4$, $3x - 2y = 6$ एवं $x - 3y + 5 = 0$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-दिया है दिय गए समीकरण है

$2x + y = 4$ .....(1)

$3x - 2y = 6$ .....(2)

$x - 3y = -5$ .....(3)

समीकरण (1) को 2 गुणा करके (2) में जोड़ने पर

$7x = 14$ या $x = 2$

अब समीकरण (1) से

$4 + y = 4$ या $y = 0$

अत बिंदु C के निर्देशाकं = (2, 0).

समीकरण (3) को (2) से गुणा करके समीकरण (1) में से घटाने पर

$7y = 4$ या $y = 2$

पुनः समीकरण (1) से

$2x + 2 = 4$ या $x = 1$

अतः बिंदु A के निर्देशक़ = (1, 2)

समीकरण (3) को 3 से गुणा करके समीकरण 2 में घटाने पर,

$7y = 21$ या $y = 3$

अब समीकरण (2) से $3x - 6 = 6$ या $x = 4$

अतः बिंदु B के निर्देशांक (4, 3) है

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = समलम्ब चतुर्भुज ALMB का क्षेत्रफल - △ALC का क्षेत्रफल - △BCM का क्षेत्रफल

$$= \int_1^4 \frac{x+5}{3}dx - \int_1^2 (4-2x)dx - \int_2^4 \frac{3x-6}{2}dx$$

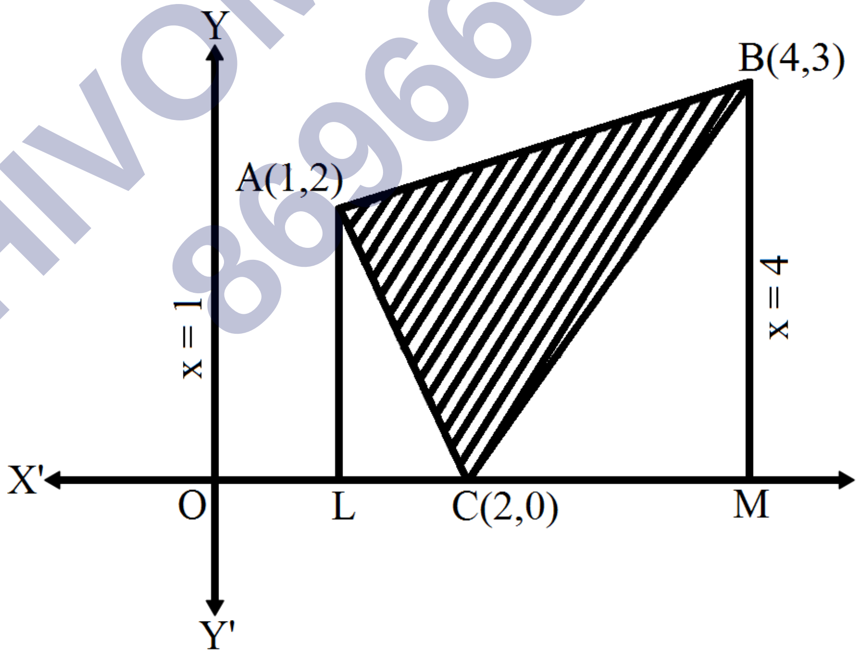
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} + 5x\right]_1^4 - [4x - x^2]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{3x^2}{2} - 6x\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{3}\left([8+20] - \left(\frac{1}{2}+5\right)\right) - [(8-4)-(4-1)]$$

$$-\frac{1}{2}[(24-24)-(6-12)]$$

$$= \frac{1}{3}\left[28 - \frac{11}{2}\right] - [4-3] - \frac{1}{2}(0+6)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{45}{2} - 1 - 3 = \frac{15}{2} - 4 = \frac{7}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$



प्रश्न 15 क्षेत्र $\{(x, y) : y^2 \le 4x, 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

उत्तर- दिया है $y^2 = 4x$ एक परवलय है जिसका शीर्ष मूल बिंदु (0, 0) है जिसका अक्ष x-अक्ष है साथ ही $4x^2 + 4y^2 = 9$ एक वृत्त को निरूपित करता है जिसका केंद्र (0, 0) और त्रिज्या = $\frac{3}{2}$ है

अतः $y^2 = 4x \ldots (1)$

और $x^2 + y^2 = \frac{9}{4} \ldots (2)$

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर,

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर,

$A\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$ और $B\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$ प्राप्त होते है दोनों ही वक्र x-अक्ष के सापेक्ष सममित है

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल = छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{xdx} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}\, dx\right)$$

$$= 4\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} + 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\frac{3}{2}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

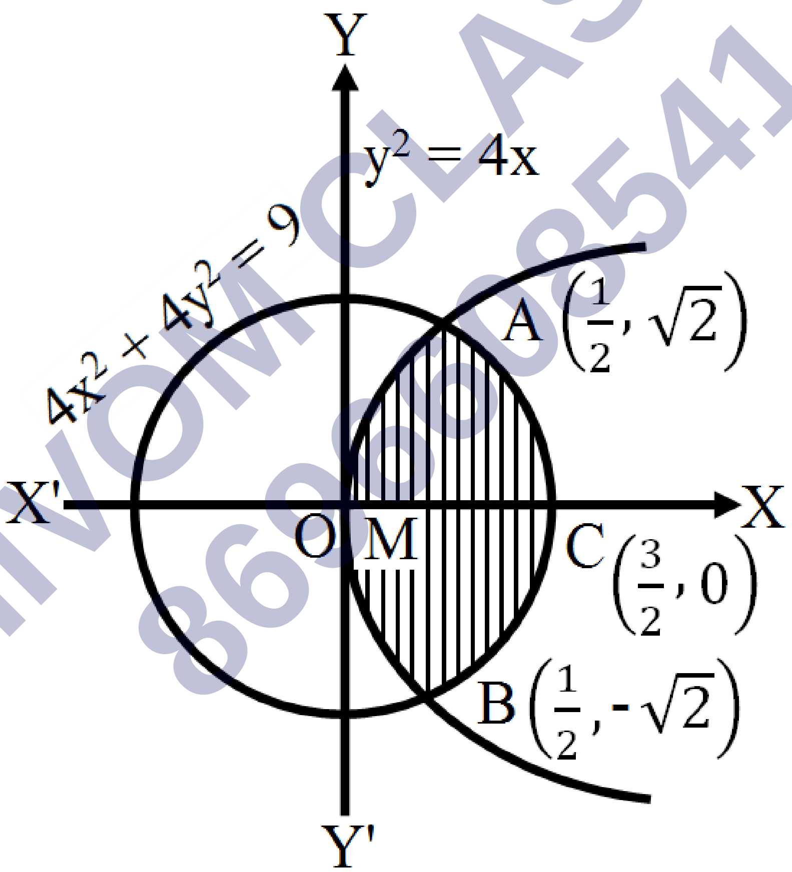
$$= \frac{8}{3}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - 0\right) + \left[x\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + 0 + \frac{9}{4}\sin^{-1}(1)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3\sqrt{2}}$$



प्रश्न 16 वक्र $y = x^3$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -2$, $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है

a. -9

b. $-\frac{15}{4}$

c. $\frac{15}{4}$

d. $\frac{17}{4}$

उत्तर-

d. $\frac{17}{4}$

हल-

दिया गया वक्र $y = x^3$

अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ = धनात्मक है

$\therefore$ दिया वक्र वर्द्धमान है

$\frac{dy}{dx} = 0, \; x = 0$

$\therefore$ x-अक्ष पर स्पर्श रेखा है

$f(-x) = -f(x) \therefore (-x)^3 = -x^3$

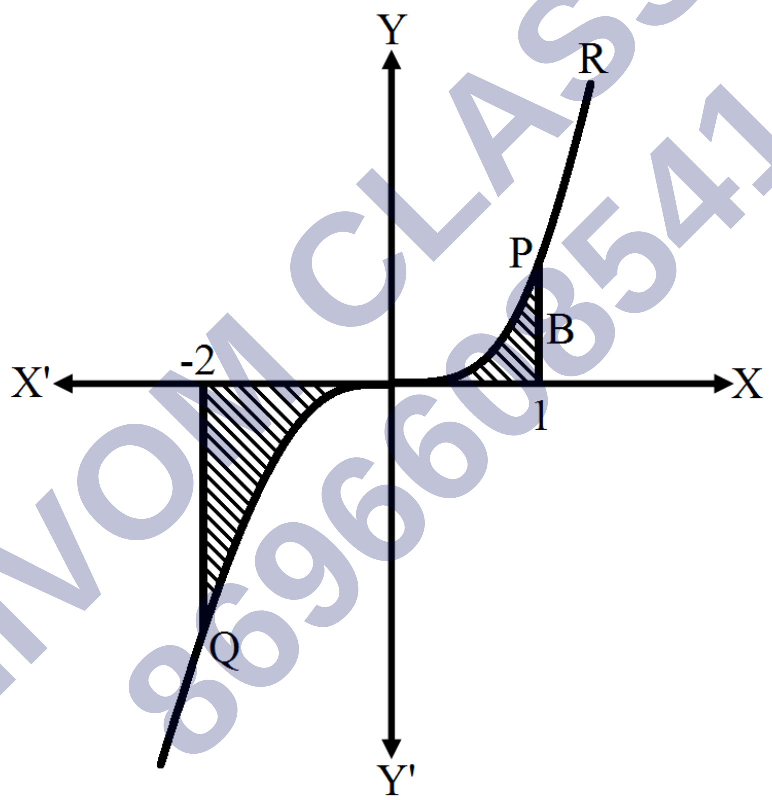
$y = x^3$, द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= AQOA$ का क्षेत्रफल + BPO का क्षेत्रफल

$$= \int_{-2}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = 0 - \frac{(-2)^4}{4} + \left(\frac{1}{4} - 0\right)$$

$$= \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$



प्रश्न 17 वक्र y = x|x|, x-अक्ष एवं कोटियों x = −1 तथा x = 1 से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है

a. 0

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{2}{3}$

d. $\frac{4}{3}$

उत्तर-

c. $\frac{2}{3}$

हल-

जब $x > 0$, $|x| = x$

$\therefore$ वक्र का दिया गया समीकरण है $y = x^2$

$y = x^2$

जब $x < 0$, $|x| = x$

$\therefore$ वक्र का दिया गया समीकरण है $y = -x^2$

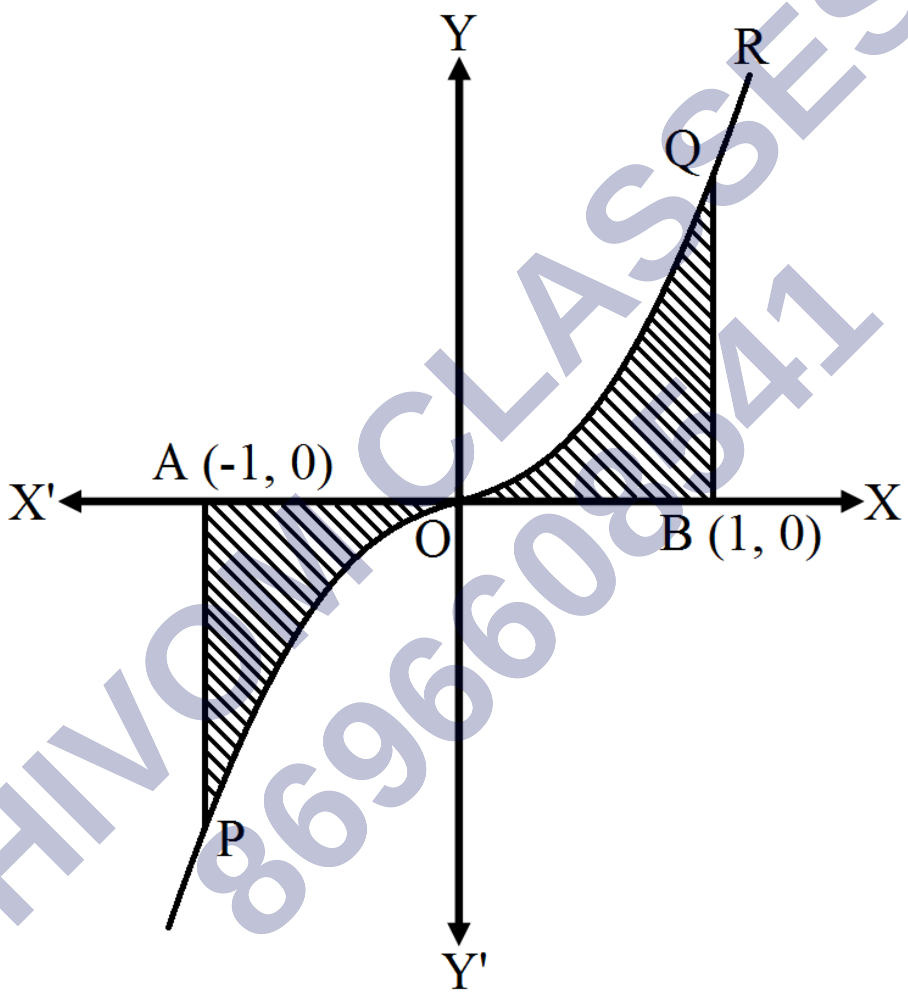
$y = -x^2$

x-अक्ष से घिरा क्षेत्रफल

$= \mathrm{POA}$ का क्षेत्रफल + $\triangle \mathrm{BQO}$ का क्षेत्रफल

$$= \int_{-1}^{0} -x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx = 2 \times \int_{0}^{1} x^2 dx$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$



प्रश्न 18 क्षेत्र $y^2 \geq 6x$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ में सम्मिलित क्षेत्र का क्षेत्रफल है

a. $\frac{4}{3}(4\pi-\sqrt{3})$

b. $\frac{4}{3}(4\pi+\sqrt{3})$

c. $\frac{4}{3}(8\pi-\sqrt{3})$

d. $\frac{4}{3}(8\pi+\sqrt{3})$

उत्तर-

c. $\frac{4}{3}(8\pi-\sqrt{3})$

हल-

वक्रो के समीकरण है

$$x^2+y^2=16\ldots(1)$$

$$y^2=6x\ldots(2)$$

समीकरण (1) में $y^2=6x$ रखने पर

$$x^2+6x=16$$

$$(x+8)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-8,2$$

$$x\neq-8$$

परवलय तथा वृत्त के अन्दर का क्षेत्रफल

= POQAP का क्षेत्रफल

= 2(POM का क्षेत्रफल + PMA का क्षेत्रफल)

$$= 2\left[\int_0^2 \sqrt{6x}\,dx + \int_2^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{6}.\ \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 + + \left[\frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_2^4\right]$$

$$= \left\{\frac{2}{4}\sqrt{6}\left(2^{\frac{3}{2}} - 0\right) + \left[(0 + 8\sin^{-1}(1) - \left(\sqrt{12} + 8\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{6}.\sqrt{8} + 2\left(8 + \frac{\pi}{2} - \sqrt{12} - 8 \times \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{16}{3}\sqrt{3} + 8\pi - 2\sqrt{12} - \frac{8\pi}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3}$$

अब वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ का क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx$$

$$= 4\left[\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4$$

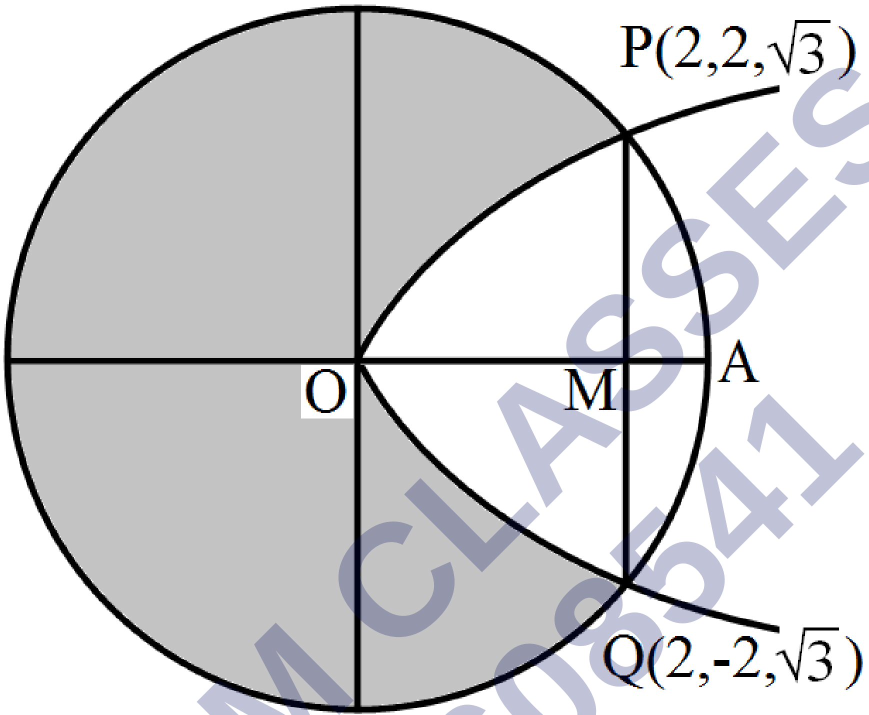
$$= 4[(0 + 8\sin^{-1}1) - 0] = 32 \times \frac{\pi}{2}$$

$$= 16\pi$$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल - POQAP का क्षेत्रफल

$$= 16\pi - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{16}{3}\pi\right)$$

$$= \frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$$



प्रश्न 19 y-अक्ष, y = cosx एवं y = sinx, 0≤ x ≤ $\frac{\pi}{2}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है-

a. $2(\sqrt{2} - 1)$

b. $\sqrt{2} - 1$

c. $\sqrt{2} + 1$

d. $\sqrt{2}$

उत्तर-

b. $\sqrt{2} - 1$

हल-

दिया वक्र है

Y = sinx, 0≤ x ≤π2

y का मान रखने पर,

sinx = cosx

tanx = 1

$$\Rightarrow \mathrm{x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y- अक्ष पर, $\mathrm{y} = \cos \mathrm{x}$ तथा $\mathrm{y} = \sin \mathrm{x}\left(0 \leq \mathrm{x} \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$\triangle\mathrm{OPBO}$ का क्षेत्रफल

$\triangle\mathrm{PAO}$ का क्षेत्रफल + APBA का क्षेत्रफल

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{x}_1 \mathrm{dy} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \mathrm{x}_2 \mathrm{dy}$$

जहाँ x_1 वक्र $\mathrm{y} = \sin \mathrm{x}$ या $\mathrm{x} = \sin^{-1} \mathrm{y}$

और x वक्र $\mathrm{y} = \cos \mathrm{x}$ अथवा $\mathrm{x} = \cos^{-1} \mathrm{y}$.

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin^{-1} \mathrm{ydy} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \cos^{-1} \mathrm{dy}$$

$$= \left[y \sin^{-1} y - \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} y \, dy\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[y \cos^{-1} y + \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} y \, dy\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

$$= \left[y \sin^{-1} y + \sqrt{1-y^2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[y \cos^{-1} y - \sqrt{1-y^2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - 1\right] + \left[(\cos^{-1} - 0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1 \text{ वर्ग इकाई}$$