गणित

अध्याय-8: चतुर्भुज

चतुर्भुजों का परिचय

एक चतुर्भुज की चार भुजाएँ, चार कोण और चार शीर्ष होते हैं। चतुर्भुज ABCD में, AB, BC, CD और DA चार भुजाएँ हैं: A, B, C और D चार शीर्ष हैं तथा ∠A, ∠B, ∠C और ∠D शीर्षों पर बने चार कोण हैं।

विकर्ण

अब सम्मुख शीर्षों A और C तथा B और D को जोड़िए। AC और BD चतुर्भुज ABCD के दो विकर्ण कहलाते हैं।

चतुर्भुज का कोण योग गुण

चतुर्भुज के कोणों का योग 360^0 होता है। हम इसकी जाँच चतुर्भुज का एक विकर्ण खींच कर उसे दो त्रिभुजों में विभाजित करके कर सकते हैं।

मान लीजिए ABCD एक चतुर्भुज है और AC उसका एक विकर्ण ह ΔADC के कोणों का क्या योग है?

हम जानते हैं कि

$\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180°$ (1)

इसी प्रकार Δ ABC में

$\angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180°$ (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर

$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180° + 180° = 360°$

अर्थात् चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है।

चतुर्भुज के प्रकार

आकर के आधार पर चतुर्भुज विभिन्न प्रकार के होते हैं:

वर्ग चार भुजाओं से घिरी वह आकृति जिसकी चारो भुजाएँ बराबर हों तथा प्रत्येक कोण समकोण अर्थात 90° का हो, उसे वर्ग कहते हैं।

1) आयत
2) समचतुर्भुज
3) समान्तर चतुर्भुज
4) विषमकोण समचतुर्भुज
5) समलम्ब चतुर्भुज
6) चक्रीय चतुर्भुज
7) पतंगाकार चतुर्भुज

वर्ग और आयत

वर्ग

वर्ग चार भुजाओं से घिरी वह आकृति जिसकी चारो भुजाएँ बराबर हों तथा प्रत्येक कोण समकोण अर्थात 90° का हो, उसे वर्ग कहते हैं।

आयत

ऐसा चतुर्भुज जिसके चारों अन्तःकोण समकोण (= 90° के) हों उसे आयत कहते हैं। आयत एक ऐसा चतुर्भुज है जिसकी आमने सामने की भुजाएं समांतर और बराबर होती है, “आयत” कहलाता है।

कुछ विशेष चतुर्भुज

समचतुर्भुज

वह समांतर चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हों।

समान्तर चतुर्भुज

जिस चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएँ समांतर तथा समान होती है उसे समान्तर चतुर्भुज कहते हैं।

विषमकोण समचतुर्भुज

वह समान्तर चतुर्भुज, जिसकी चारों भुजाएँ बराबर होती हैं, किन्तु कोई कोण समकोण अर्थात् 90º का नहीं होता है, विषमकोण समचतुर्भुज कहलाता है।

चतुर्भुजों की परिभाषा

समलम्ब चतुर्भुज

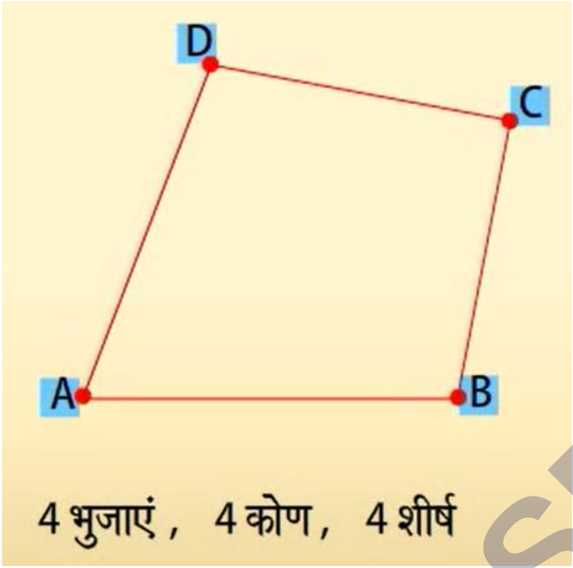
एक ऐसा चतुर्भुज जिसकी भुजाओं का एक युग्म समान्तर हो समलम्ब चतुर्भुज कहलाता हैं।

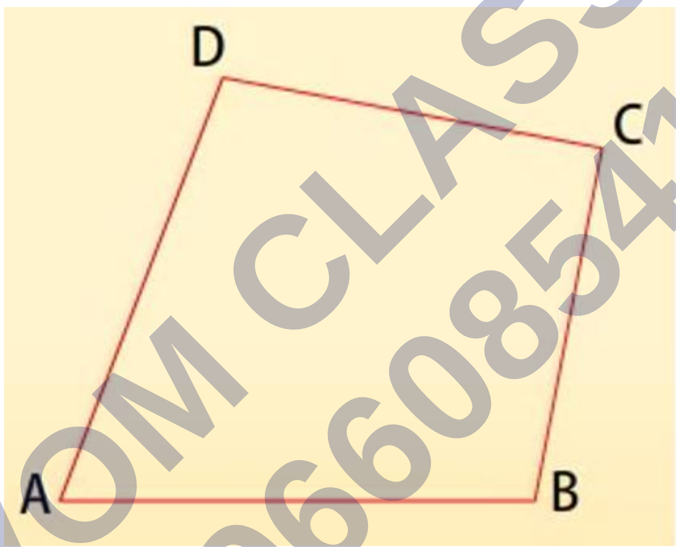
चक्रीय चतुर्भुज

चक्रीय चतुर्भुज ऐसे चतुर्भुज को कहते हैं जिसके चारो शीर्ष किसी वृत्त की परिधि पर स्थित हों। किसी चक्रीय चतुर्भुज के आमने-सामने के कोणों का योग 180° होता है।

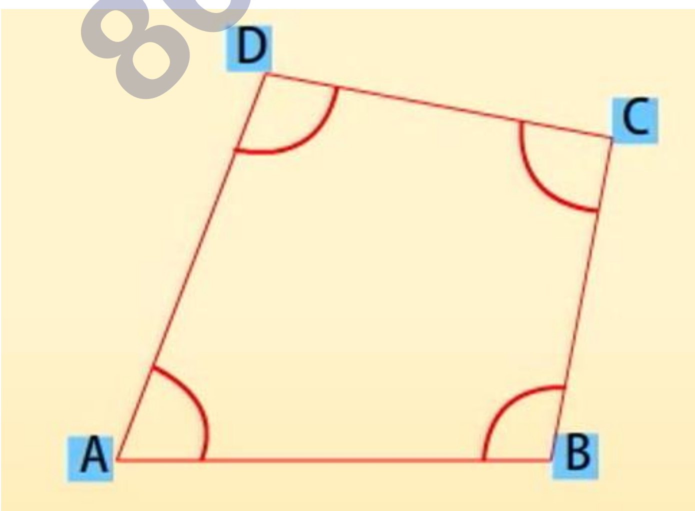
पतंगाकार चतुर्भुज

पतंगाकार में आसन्न भुजाओं के दो युग्म बराबर लम्बाई के होते हैं। अर्थात एक विकर्ण, चतुर्भुज को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता हैं। इसलिए समान भुजाओं के दो युग्मों के बीच के कोण बराबर होते हैं। और दोनों विकर्ण एक दूसरे के लम्बवत होते हैं।

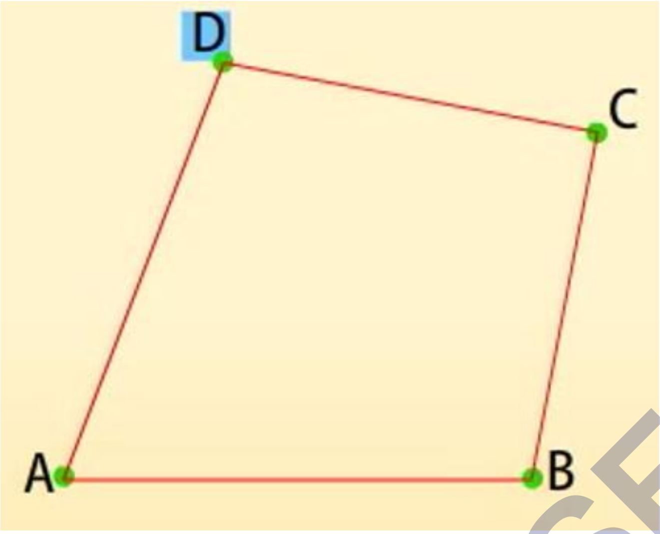




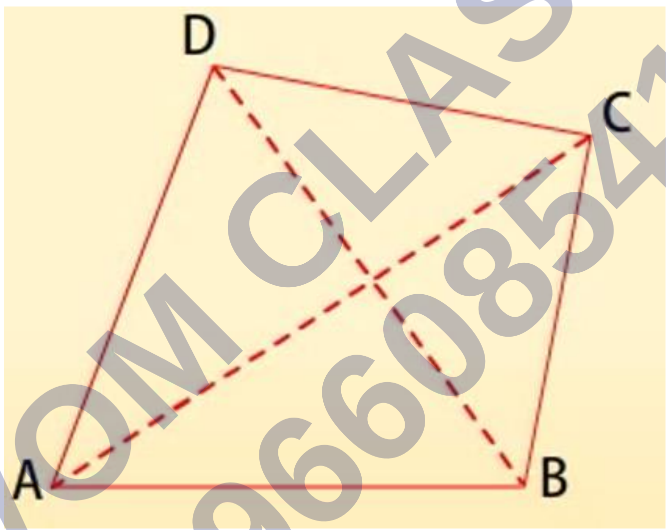
AB, BC, CD और DA चार भुजाएं हैं।



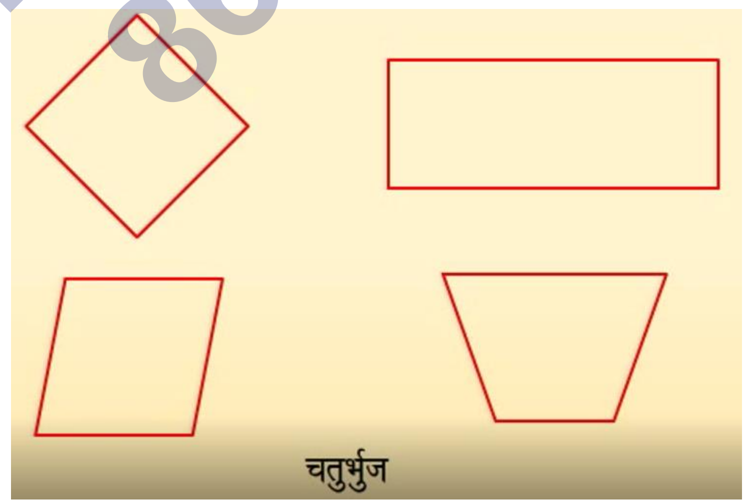
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ चार कोण हैं।



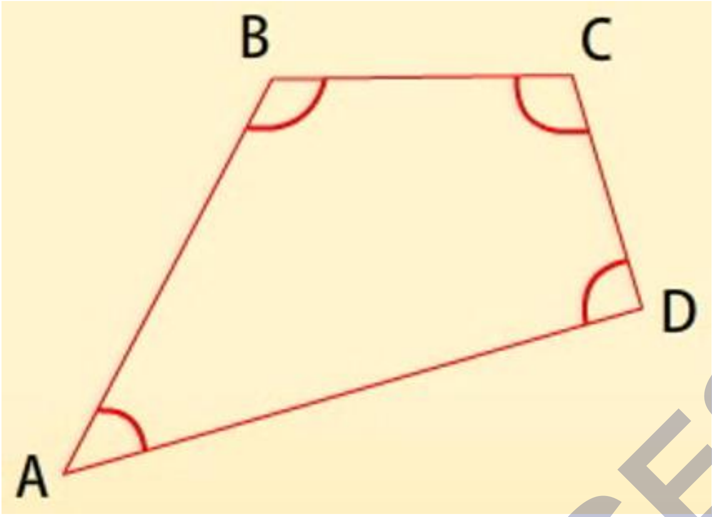
A, B, C और D चार शीर्ष हैं।



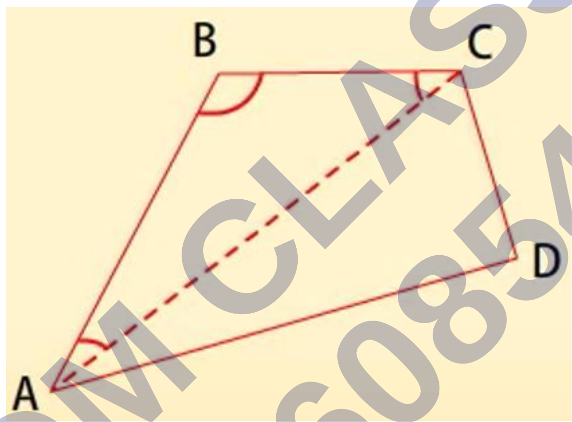
AC और BD विकर्ण हैं।



चतुर्भुज का कोण योग गुण



चतुर्भुज के सभी कोणों का योग 360 डिग्री होता है।



AC विकर्ण हैं

ABC और ADC दो त्रिभुज हैं।

त्रिभुज के सभी कोणों का योग 180 डिग्री होता है।

त्रिभुज ABC, $\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$ ....(i).

त्रिभुज ADC, $\angle CAD + \angle ACD + \angle ADC = 180^\circ$ ....(ii)

अब (i) और (ii) को योग करने पर हमें प्राप्त हुआ,

$\angle BAC + \angle ACB + \angle B + \angle CAD + \angle ACD + \angle D = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

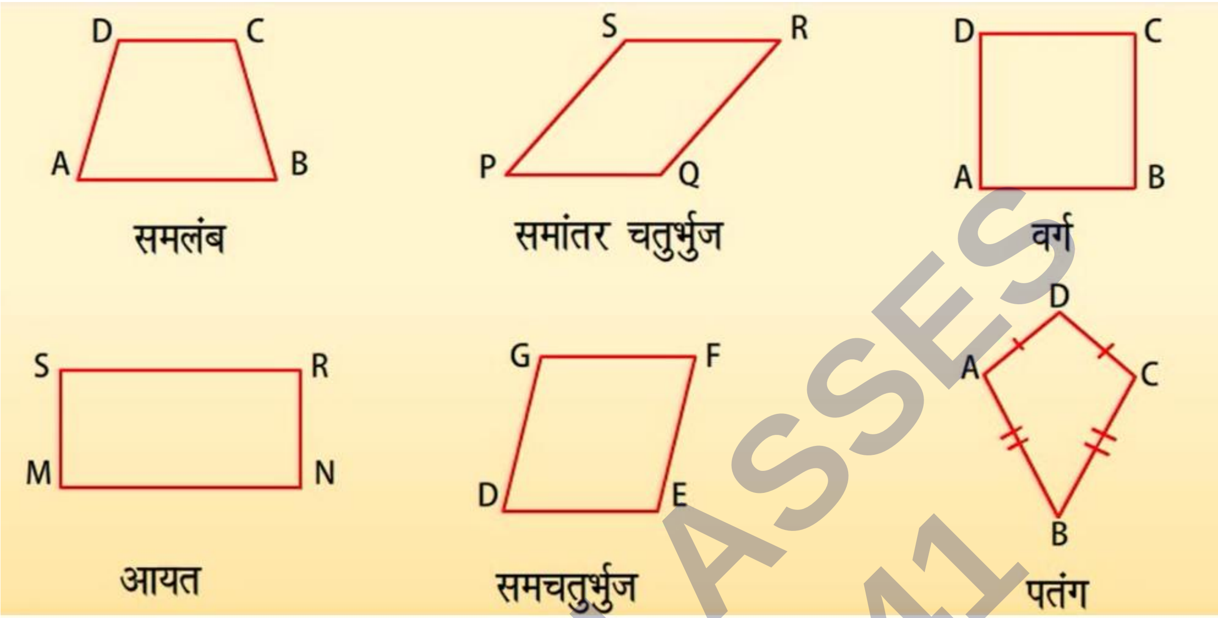
साथ ही, $\angle BAC + \angle CAD = \angle A$ और $\angle ACB + \angle ACD = \angle C$

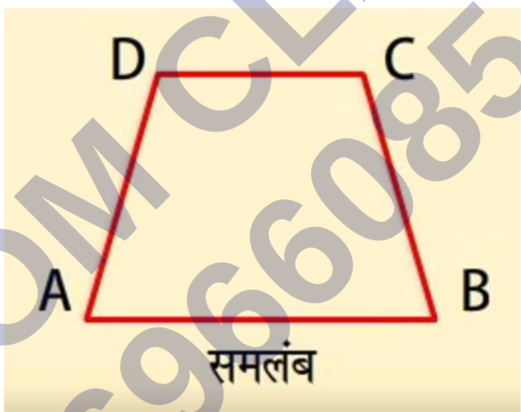
अत: $\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 360^\circ$

या $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

यानी चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है।

चतुर्भुज के प्रकार-।

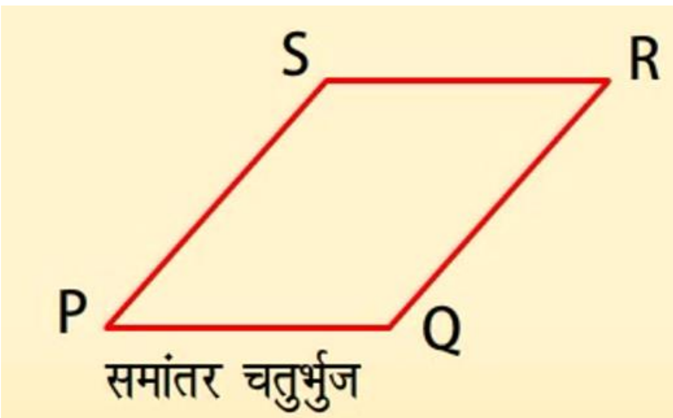




एक चतुर्भुज समलम्ब होता है यदि इसके सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर हो।

यहां, सम्मुख भुजाएं AB और CD समांतर हैं।

अतः ABCD एक समलम्ब है।



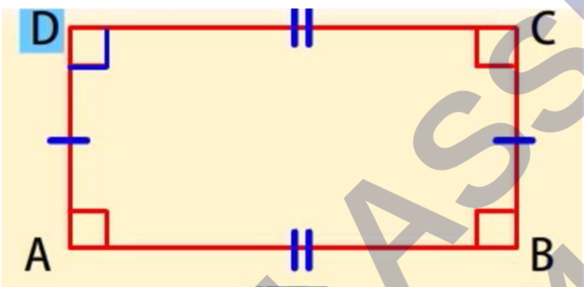
चतुर्भुज जब सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समांतर हों तो ऐसा चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज कहलाता है।

यहां सम्मुख भुजाएं PS और QR समांतर हैं।

तथा SR और PQ समांतर हैं।

अतः PORS एक समांतर चतुर्भुज है।

चतुर्भुज के प्रकार-II

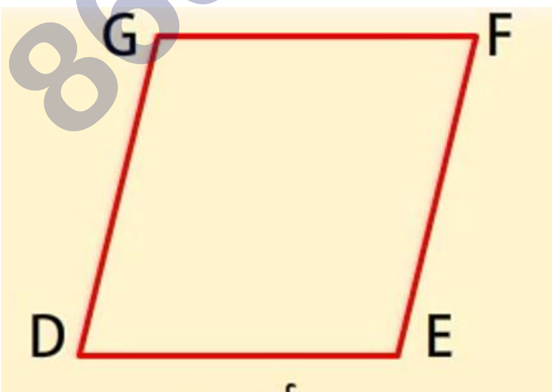


आयत

आयत में सम्मुख भुजाएं परस्पर समांतर होती हैं और लम्बाई में बराबर होती हैं। और सभी कोण 90 डिग्री के होते हैं।

AB II CD, AD II BC

∠A, ∠B, ∠C और ∠D = 90°

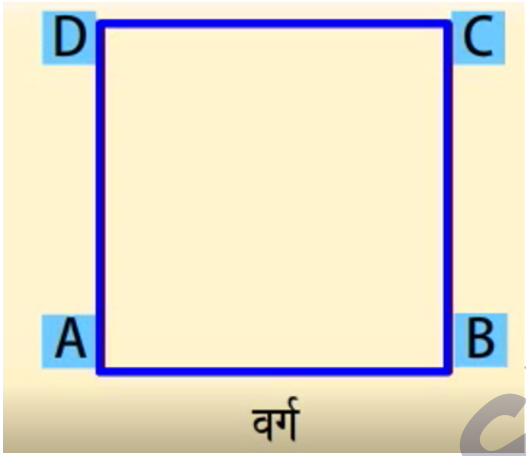


समचतुर्भुज

समचतुर्भुज समचतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज है जिसकी सभी भुजाओं की लम्बाई बराबर हो।

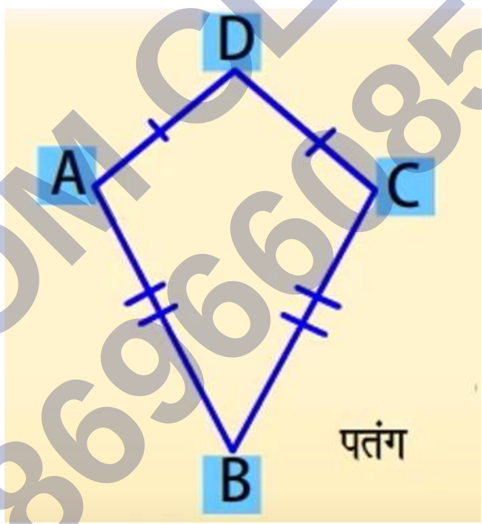
DE, EE, FG और GD लम्बाई में बराबर हैं।

DEFG एक समचतुर्भुज है।



एक वर्ग जिसकी सभी भुजाएं बराबर होती हैं।

ABCD एक वर्ग है।

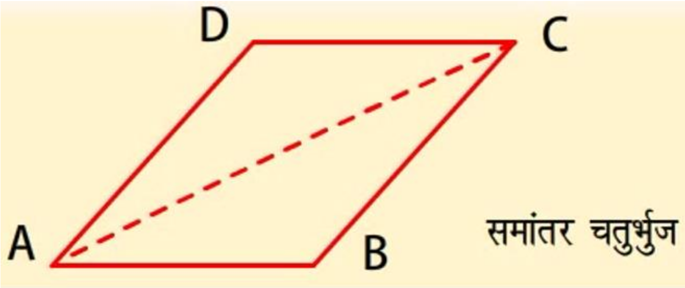


किसी पतंग की आसन्न भुजाएं बराबर होती हैं।

AD = DC तथा AB = BC

अतः ABCD एक पतंग है।

समांतर चतुर्भुज के गुण- ।



एक समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण इसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

सिद्ध करना है: △ABC और △CDA सर्वांगसम हैं।

BC | | AD और AC एक तिर्यक रेखा है।

इसलिए, ∠BCA = ∠DAC (क्योंकि ये एकांतर कोणों का युग्म है।)

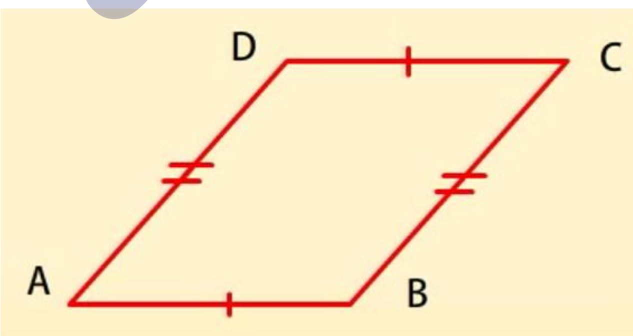
AB | | DC और AC एक तिर्यक रेखा है।

इसलिए, ∠BAC = ∠DCA (क्योंकि ये एकांतर कोणों का युग्म है।), और AC = CA (उभयनिष्ठ)

अतः △ABC = CDA (ASA नियम के प्रयोग से)

विकर्ण AC, समांतर चतुर्भुज ABCD को दो सर्वांगसम त्रिभुजों, त्रिभुज ABC और त्रिभुज CDA में विभाजित करती है।

समांतर चतुर्भुज के गुण- II



यदि हम समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं को मापेंगे तो हम देखेंगे कि

AB = DC और AD = BC

एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं।

यदि एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है तो इसके सम्मुख भुजाओं का युग्म बराबर होता है।

विपरीत: यदि एक चतुर्भज के विपरीत पक्षों की प्रत्येक जोड़ी भुजा बराबर है, तो यह एक समांतर चतुर्भुज है।

दिया है: एक चतुर्भुज ABCD, AB = CD और AD = BC.

सिद्ध करना है: ABCD समांतर चतुर्भुज है।

AB = CD (दिया है), और AD = BC (दिया है), AC = AC (उभयनिष्ठ)

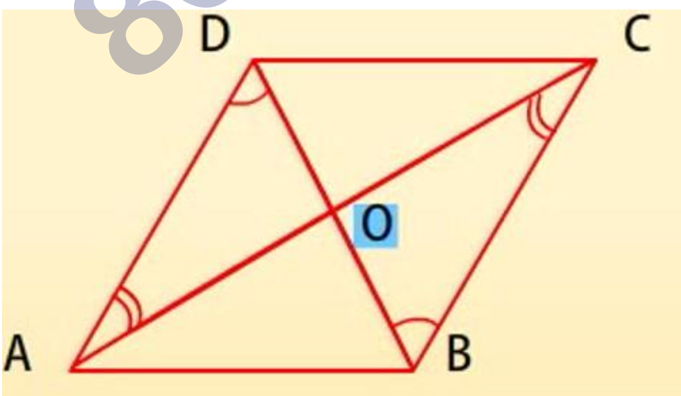
इसलिए नियम SSS से

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ तथा

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (क्योंकि सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग परस्पर सर्वांगसम होते हैं।)

AB II CD और AD II BC (एकांतर अंतः कोणों के प्रमेय का विलोम प्रयोग करके)। इस प्रकार ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

समांतर चतुर्भुज के गुण-III



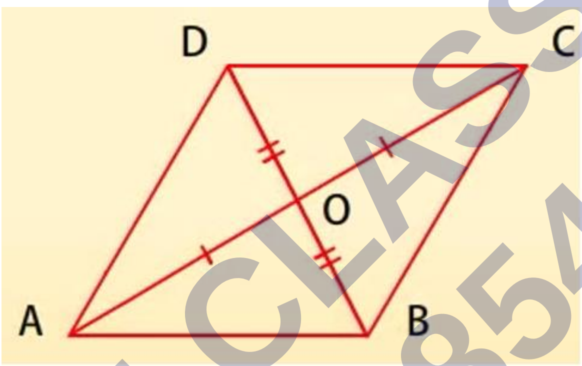
प्रमेय: एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

विलोमः यदि एक चतुर्भुज में सम्मुख कोणो का प्रत्येक युग्म परस्पर बराबर हों तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है।

यदि हम लम्बाईयां OA, OB, OC और OD मापें तो हम देखेंगे कि OA = OC और OB = OD है। O दोनों विकर्णों का एक मध्य-बिन्दु है।

समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

समांतर चतुर्भुज के गुण- IV



चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

विलोमः यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो यह एक समांतर चतुर्भुज है।

दिया है: OA = OC और OB = OD

∠AOB = ∠COD (शीर्ष कोण)

∠AOD = ∠BOC (शीर्ष कोण)

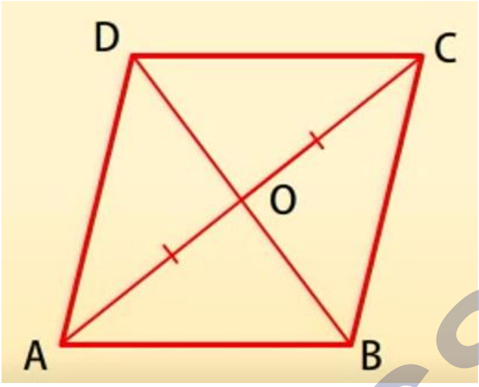
∠BDC ≅ ∠BAD (SAS नियम द्वारा)

∠BDC = ∠ABD (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग सर्वांगसम होते, है।

इसी प्रकार ∠ADB ≅ ∠CBD इससे हमें, प्राप्त हुआ AB || CD (एकांतर अंतः कोणों के गुण के विलोम का प्रयोग करते हुए)

इसी प्रकार, BC || AD अतः ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

समचतुर्भुज के विकर्ण-



समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।

हम जानते हैं कि AB = BC = CD = DA (समचतुर्भुज की सभी भुजाएं परस्पर बराबर होती हैं।)

अब ΔAOD और ΔCOD, OA = OC (क्योंकि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।)

OD = OD (उभयनिष्ठ)

AD = CD (समचतुर्भुज की भुजाएं)

इसलिए, $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (SSS नियम से)

$\angle AOD = \angle COD$ (CPCTC)

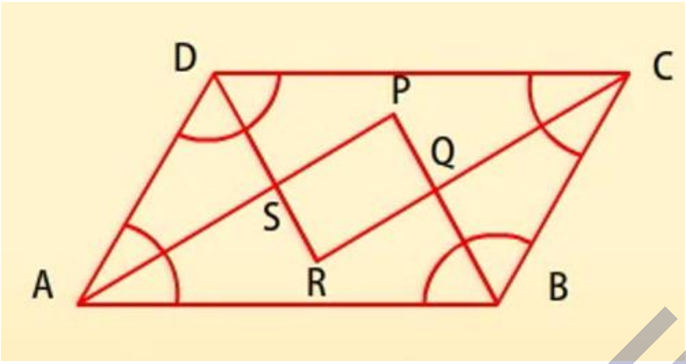
किन्तु $\angle AOD + \angle COD = 180°$ (क्योंकि ये कोणों के रैखिक युग्म हैं।)

अतः $2\angle AOD = 180°$ या, $\angle AOD = 90°$

अतः समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।

उदाहरण

सिद्ध कीजिए कि समांतर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजक एक आयत का निर्माण करते हैं।



माना ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

मान लीजिए कि $\angle A$ और $\angle B$, के समद्विभाजक का प्रतिच्छेद बिन्दु P है।

$\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक का प्रतिच्छेद बिन्दु Q है।

$\angle C$ और $\angle D$ के समद्विभाजक का प्रतिच्छेद बिन्दु R है।

$\angle D$ और $\angle A$ के समद्विभाजक का प्रतिच्छेद बिन्दु S है।

हम त्रिभुज ASD, में देख सकते हैं कि DS $\angle D$ को और AS $\angle A$ को समद्विभाजित करता है,

$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2} + \angle D$

$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

$= \frac{1}{2} \times 180^\circ$ ($\angle A$ और $\angle D$ तिर्यक के एक ही ओर के एकांतर कोण हैं।)

इसलिए हम पाते हैं कि $\angle DAS + \angle ADS = 90^\circ$

साथ ही, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^\circ$ (त्रिभुज का कोण योग गुण)

या, $90^\circ + \angle DSA = 180^\circ$

या, $\angle DSA = 90^\circ$

अतः ∠PSR = 90° (∠DSA का शीर्षाभिमुख कोण)।

इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं कि

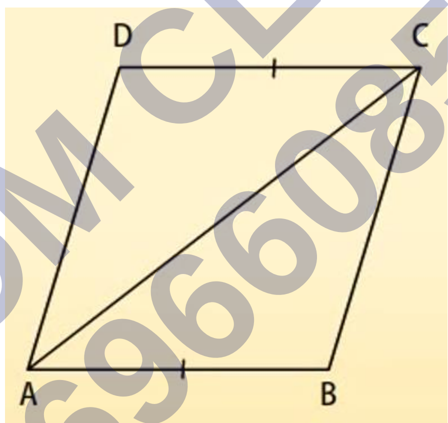
∠APB = 90° या, ∠SPQ = 90

और ∠PQR = 90° और ∠SRQ = 90°

∠PSR = ∠POR = 90° और ∠SPQ = ∠SRQ = 90°

अतः PORS एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें कम से कम एक कोण 90° का है और इसलिए PORS एक आयत है।

किसी चतुर्भुज के समांतर चतुर्भुज होने के लिए प्रतिबन्ध-



कोई चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है, यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर हो और समांतर हो।

दिया है: AB = CD और AB || CD

सिद्ध कीजिए: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

चूंकि AB = CD (दिया है)

AC = AC (उभयनिष्ठ)

$\angle BAC = \angle ACD$ (AB II CD)

इसलिए SAS सर्वांगसम नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$

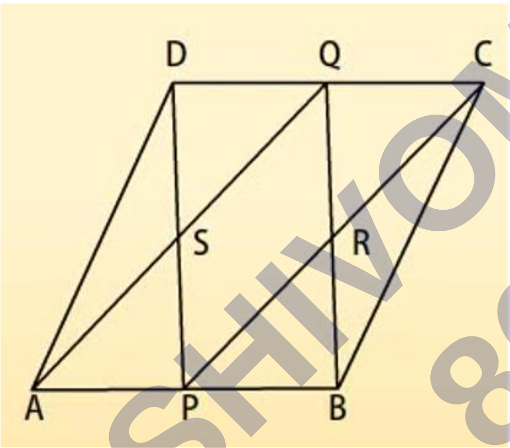
अतः $\angle CAD \cong \angle ACB$ (CPCTC)

इसलिए CB II AD (एकांतर अंतः कोण प्रमेय)

अतः ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

उदाहरण

यदि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें P और Q सम्मुख भुजाओं AB और CD के मध्य-बिन्दु हैं। AQ, DP को S पर प्रतिच्छेद करता है और BQ, CP को R पर प्रतिच्छेद करता है।



दर्शाइए कि: DPBQ एक समांतर चतुर्भुज है।

हल: एक समांतर चतुर्भुज DPBQ में

DQ || PB (क्योंकि DC || AB) ...(1)

$DQ = \frac{1}{2}DC$ (दिया है)

और $PB = \frac{1}{2}AB$ (दिया है)

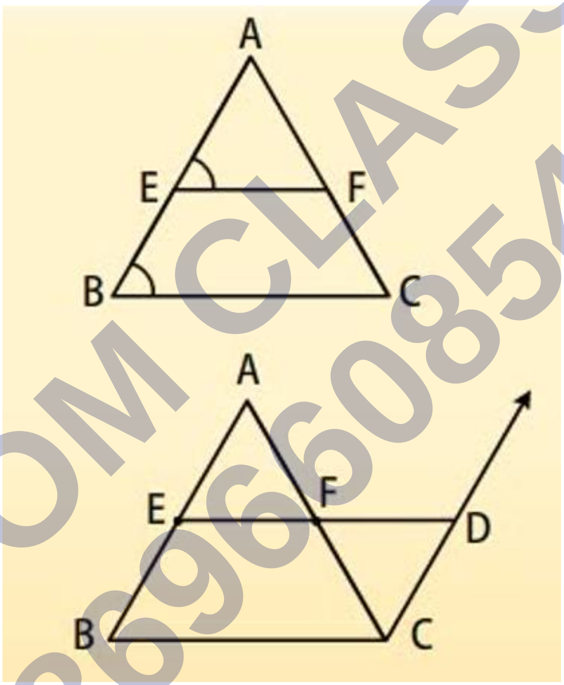
साथ ही, AB = CD (ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।)

अतः, DQ = PB ...(2)

अतः (1) और (2) से हम प्राप्त करते हैं कि DPBQ एक समांतर चतुर्भुज है।

मध्य बिन्दु प्रमेय-

मध्य बिन्दु प्रमेय: किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समांतर होता है।



सिद्ध करना है: EF || Bc

त्रिभुज AEF और त्रिभुज CDF की तुलना करने पर,

∠EAF = ∠FCD (एकांतर अंतः कोण हैं।)

AF = FC (F एक मध्य-बिन्दु है।)

∠AFE = ∠CFD (दोनों शीर्षाभिमुख कोण हैं।)

इसलिए ASA सर्वांगसमता नियम से,

$\Delta AEF \cong \Delta CDF$

अतः EF = DF और AE = DC (CPCTC)

इसलिए BE = AE = DC

इसलिए BCDE एक समांतर चतुर्भुज है।

यह दिया है EF || BC

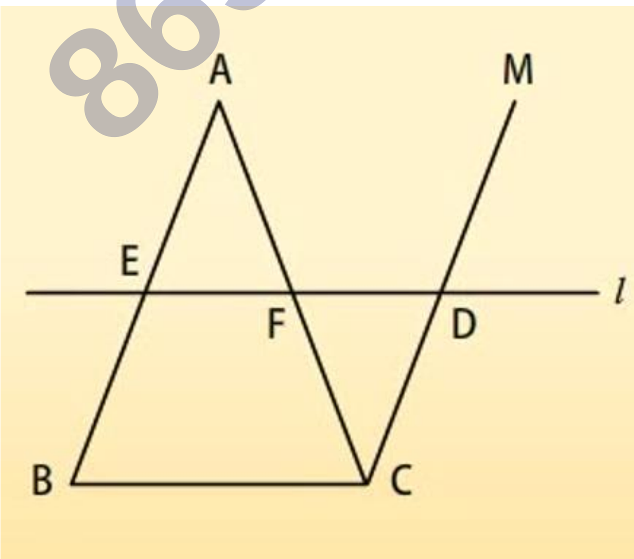
यह सिद्ध हुआ।

$$EF = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}BC$$

मध्य-बिन्दु प्रमेय का विलोम

किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिन्दु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

यहां E, AB का एक मध्य-बिन्दु है। रेखा i, E से होकर गुज़रती है और BC के समांतर है तथा CM || BA



सिद्ध कीजिए: AF = CF

त्रिभुज AEF और CDF की सर्वांगसमता के प्रयोग से AF = FC के (CPCTC)

क्या आप जानते हैं-

- एक वर्ग एक आयत और एक समचतुर्भुज होता है।
- एक समांतर चतुर्भुज एक समलम्ब होता है।
- एक पतंग एक समांतर चतुर्भुज नहीं होती।
- एक समलम्ब एक समांतर चतुर्भुज नहीं होता।
- एक आयत या एक समचतुर्भुज एक वर्ग नहीं होता।

सारांश-

आइये हमने जो कुछ सीखा है, उसे संक्षेप में दोहराएं।

- चतुर्भुज के कोणों का योग 360 होता है।
- एक समांतर चतुर्भुज का विकर्ण इसको दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
- एक समांतर चतुर्भुज में-
    - सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं।
    - सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
    - विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
- किसी आयत के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं।
- समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

सारांश-

आइये हमने जो कुछ सीखा है, उसे संक्षेप में दोहराएं।

- एक वर्ग का विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। और बराबर होते हैं।

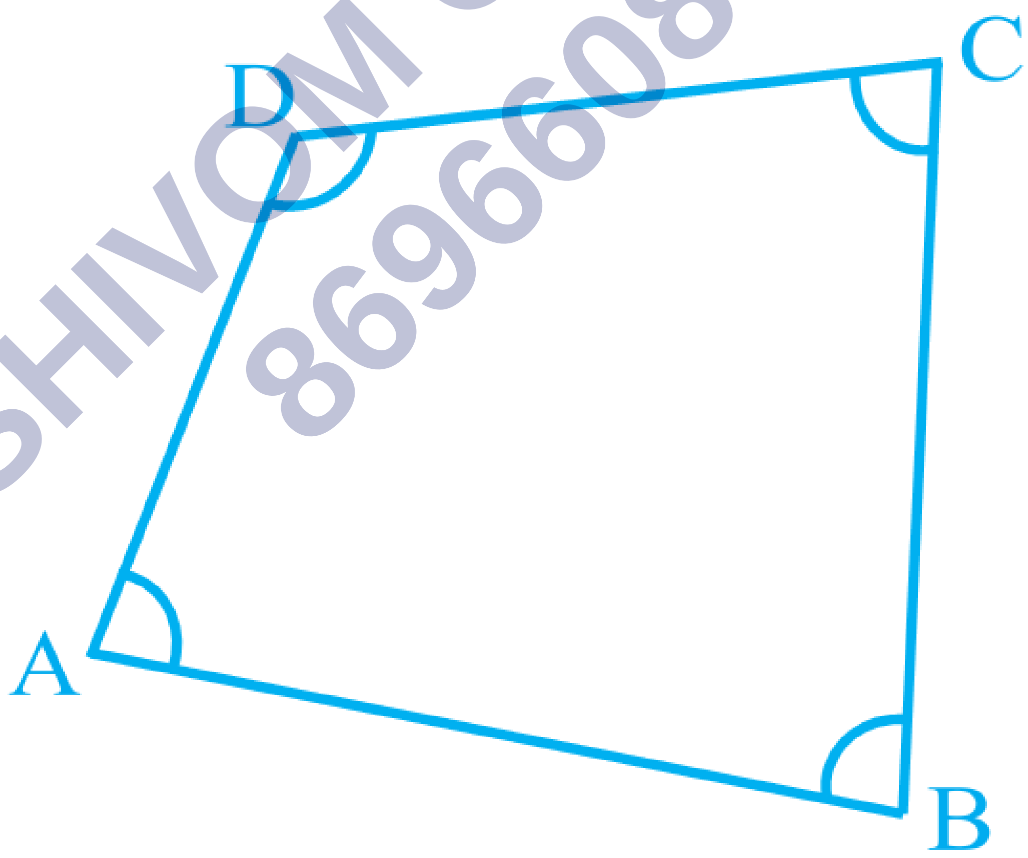
- त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समांतर और उसका आधा होता है।
- त्रिभुज की किसी एक भुजा के मध्य-बिन्दु से होकर जानी वाली तथा किसी अन्य भुजा के समांतर रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।
- किसी चतुर्भुज के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने से बनने वाला चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 8.1 (पृष्ठ संख्या 175-177)

प्रश्न 1 एक चतुर्भुज के कोण 3 : 5 : 9 : 13 के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना $\angle A = 3x,$

$\angle B = 5x$

$\angle C = 9x$ और

$\angle D = 13x$

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

(किसी चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है)

$\Rightarrow 3x + 5x + 9x + 13x = 360^\circ$

$\Rightarrow 30x = 360^\circ$

$x = \frac{360^\circ}{30} = 12^\circ$

अत: सभी कोण

$\angle A = 3x = 3 \times 12^\circ = 36^\circ$

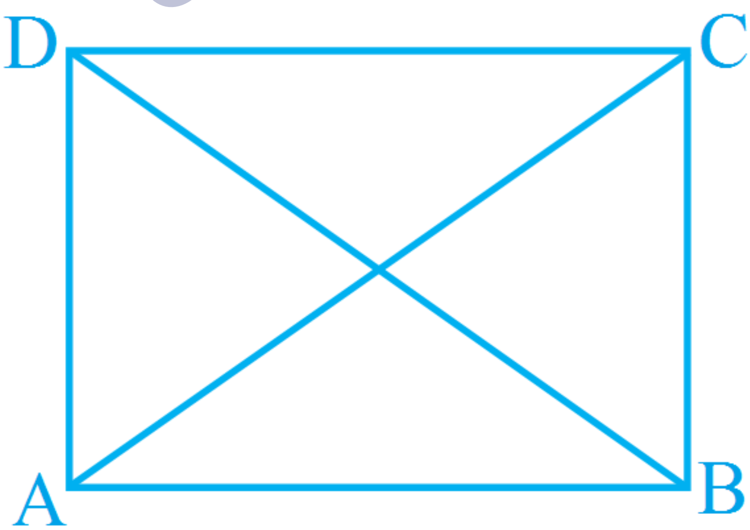
$\angle B = 5x = 5 \times 12^\circ = 60^\circ$

$\angle C = 9x = 9 \times 12^\circ = 180^\circ$

$\angle D = 13x = 13 \times 12^\circ = 156^\circ$

प्रश्न 2 एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो दर्शाइए कि वह एक आयत है।

उत्तर-



दिया है: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

जिसके विकर्ण AC = BD है।

सिद्ध करना है: ABCD एक आयत है।

प्रमाण: △ABD तथा △ABC में

AD = BC (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

AB = AB (उभयनिष्ठ)

BD = AC (दिया है)

SSS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABD \cong \triangle ABC$

$\therefore \angle A = \angle B \ldots\ldots (1)$

चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $AD \,||\, BC$ और AB एक तिर्यक रेखा है

अत: $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (अंत: आसन्न कोणों का योग)

$\Rightarrow \angle A + \angle A = 180^\circ$ समी. (1) से

$\Rightarrow 2\angle A = 180^\circ$

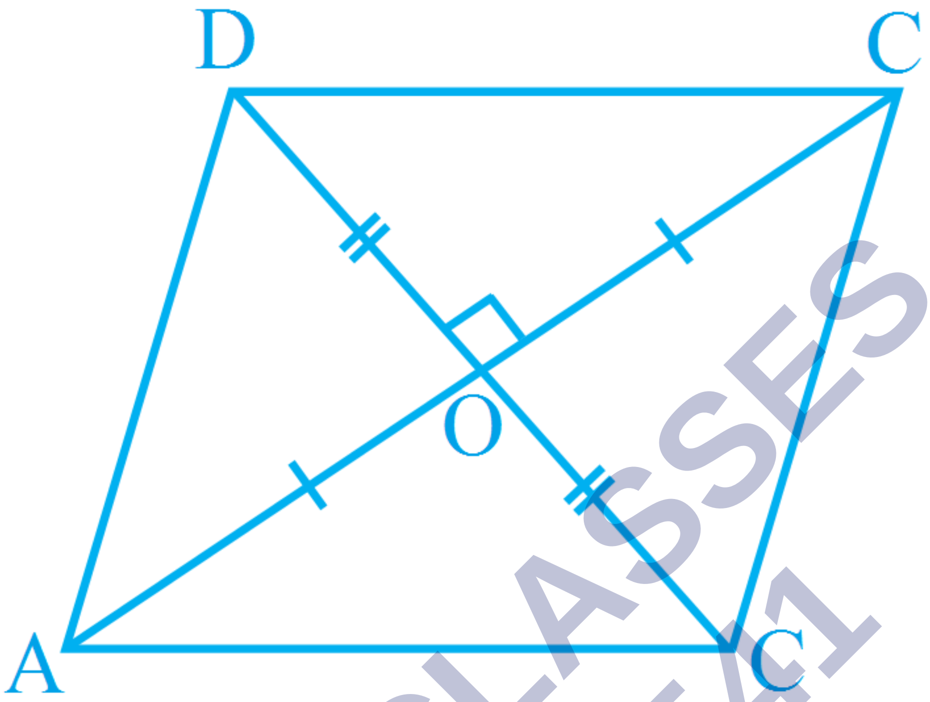
$\Rightarrow \angle A = 90^\circ$

(वह समांतर चतुर्भुज जिसकी एक कोण समकोण हो आयत कहलाता है)

अत: ABCD एक आयत है

प्रश्न 3 दर्शाइए कि यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करें, तो वह एक समचतुर्भुज होता है।

उत्तर-



दिया है: ABCD एक चतुर्भुज है|

जिसके विकर्ण AC तथा BD एक दुसरे को बिंदु O पर समद्विभाजित करते हैं| जहाँ $\angle COD$ = 90° है और AO = CO तथा BO = DO है|

सिद्ध करना है: ABCD एक आयत है|

प्रमाण: $\triangle AOB$ तथा $\triangle COD$ में

AO = CO (दिया है)

BO = DO (दिया है)

$\angle AOB = \angle COD$ (शिर्षाभिमुख कोण)

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle AOB \cong \triangle COD$

$\therefore AB = CD \ldots . (1)$

तथा $\angle BAO = \angle DCO$ (एकांतर कोण)

$\therefore AB \parallel CD \ldots (2)$ (एकांतर कोण बराबर हो तो रेखाएँ समांतर होती है)

समी० (1) तथा (2) से

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

(यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर एवं समान्तर हो तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है|)

$\therefore \ AD = BC \ldots . (3)$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा बराबर होती है)

अब $\triangle AOD$ तथा $\triangle COD$ में

AO = CO (दिया है)

DO = DO (उभयनिष्ठ)

$\angle AOD = \angle COD$ (90^0 प्रत्येक)

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ADO \cong \triangle COD$

$\therefore AD = CD \ldots \ldots (4)$

समी० (1), (3) तथा (4) से हम पाते हैं |

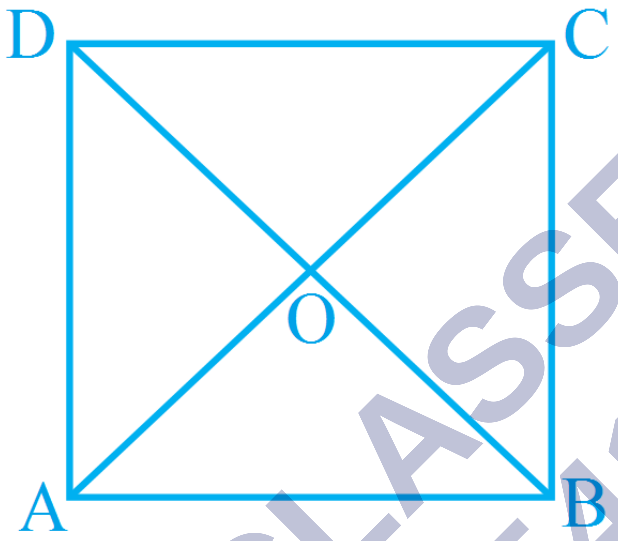
AB = BC = CD = AD

अत: ABCD एक समचतुर्भुज है |

(वह समान्तर चतुर्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर हो समचतुर्भुज होता है|)

प्रश्न 4 दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

उत्तर-



दिया है: ABCD एक वर्ग है जिसके विकर्ण AC तथा BD एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है।

सिद्ध करना है:

i. AO = CO तथा BO = DO
ii. AOB = 90^{o}

प्रमाण: $\triangle AOB$ तथा $\triangle COD$ में

AB = CD (वर्ग की भुजा)

$\angle BAO = \angle DCO$ (एकांतर कोण)

$\angle AOB = \angle COD$ (शिर्षाभिमुख कोण)

अत: ASA सर्वांगसमता नियम से

$\triangle AOB \cong \triangle COD$

$\triangle AOB \cong \triangle COD$

$\therefore AO = CO$ तथा $BO = DO$ (By COCT) $\ldots\ldots(1)$

पुन: $\triangle AOB$ तथा $\triangle BOC$ में

AB = BC (वर्ग की भुजा)

BO = BO (उभयनिष्ठ)

AO = CO समी. (1) से

अत: SSS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle AOB \cong \triangle BOC$

अत: $\angle AOB = \angle COB$ (By CPCT) $\ldots(2)$

अब $\angle AOB + \angle COB = 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

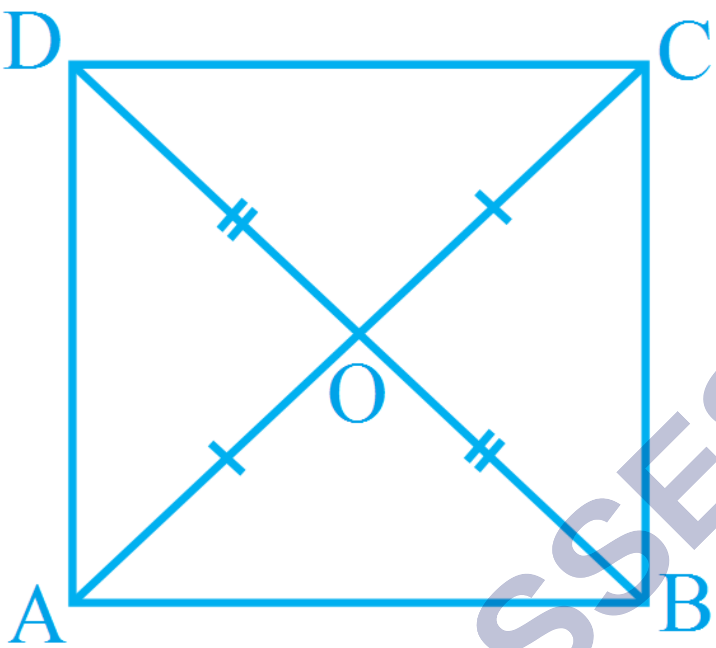
$\Rightarrow \angle AOB + \angle AOB = 180^\circ$ समी0 (2) से

$\Rightarrow 2\angle AOB = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$

प्रश्न 5 दर्शाइए कि यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हो और परस्पर समद्विभाजित करें, तो वह एक वर्ग होता है।

उत्तर-



दिया है: ABCD एकचतुर्भुज है जिसमें विकर्ण AC = BD है और एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है। जहाँ AO = CO तथा BO = DO है।

सिद्ध करना है: ABCD एक वर्ग है।

प्रमाण: $\triangle \mathrm{AOB}$ तथा $\triangle \mathrm{COD}$ में

AO = CO (दिया है)

BO = DO (दिया है)

$\angle \mathrm{AOB} = \angle \mathrm{COD}$ (शिर्षाभिमुख कोण)

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle \mathrm{AOB} \cong \triangle \mathrm{COD}$

$\therefore \mathrm{AB} = \mathrm{CD}\ (\mathrm{By\ CPCT}) \ldots\ldots (1)$

तथा $\angle \mathrm{BAO} = \angle \mathrm{DCO}$ (एकांतर कोण) (By CPCT)

$\therefore \mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD} \ldots (2)$ (एकांतर कोण बराबर हो तो रेखाएँ समांतर होती है)

समी० (1) तथा (2) से

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

(यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर एवं समान्तर हो तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है |)

$\therefore \ AD = BC \ldots . (3)$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा बराबर होती है)

अब $\triangle AOD$ तथा $\triangle COD$ में

AO = CO (दिया है)

DO = DO (उभयनिष्ठ)

$\angle AOD = \angle COD$ (90^0 प्रत्येक)

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle AOD \cong \triangle COD$$

$$\therefore AD = CD \text{ (By CPCT)} \ldots \ldots (4)$$

समी० (1), (3) तथा (4) से हम पाते हैं।

AB = BC = CD = AD .... (5)

अब, $\triangle ABD$ तथा $\triangle ABC$ में

AD = BC (वर्ग की सम्मुख भुजा)

AB = AB (उभयनिष्ठ)

BD = AC (दिया है)

SSS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle ABD \cong \triangle ABD$$

$$\therefore \angle A = \angle B \text{ (By CPCT)} \ldots \ldots (6)$$

चूँकि ABCD एक वर्ग है।

$\therefore AD \parallel BC$ और AB एक तिर्यक रेखा है।

अत: $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (अंत: आसन्न कोणों का योग)

$\Rightarrow \angle A + \angle A = 180^\circ$ समी. (6) से

$\Rightarrow 2\angle A = 180^\circ$

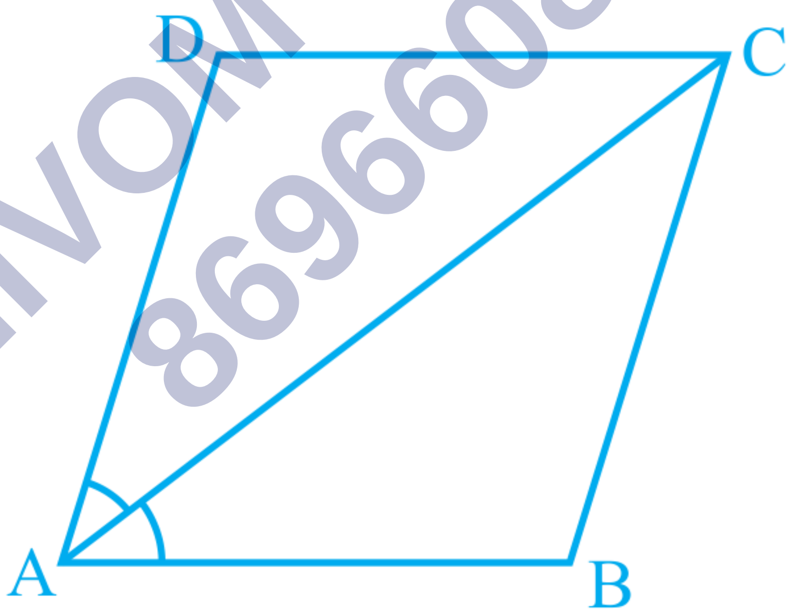
$\Rightarrow \angle A = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle A = 90^\circ \ldots\ldots (7)$

समी. (5) तथा (7) से स्पष्ट है कि ABCD एक वर्ग है।

प्रश्न 6 समांतर चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC कोण A को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि

i. यह ∠C को भी समद्विभाजित करता है।
ii. ABCD एक समचतुर्भुज है।



उत्तर-

दिया है: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसका

विकर्ण AC कोण A को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध करना है

i. $AC, \angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।
ii. ABCD एक समचतुर्भुज है

प्रमाण:

1. $\triangle ABC$ तथा $\triangle DAC$ में,

$\angle BAC = \angle BAC$ (दिया है)

$\angle B = \angle D$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते है)

AC = AC (उभयनिष्ठ)

अत: ASA सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABC \cong \triangle DAC$

$\therefore \angle BCA = \angle DCA$

अत: विकर्ण $AC, \angle C$ को समद्विभाजित करता है।

ii. पुन: AB = AD .... (1)

चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

$\therefore AB = CD$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा) ......(2)

और

BC = AD (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा) ......(3)

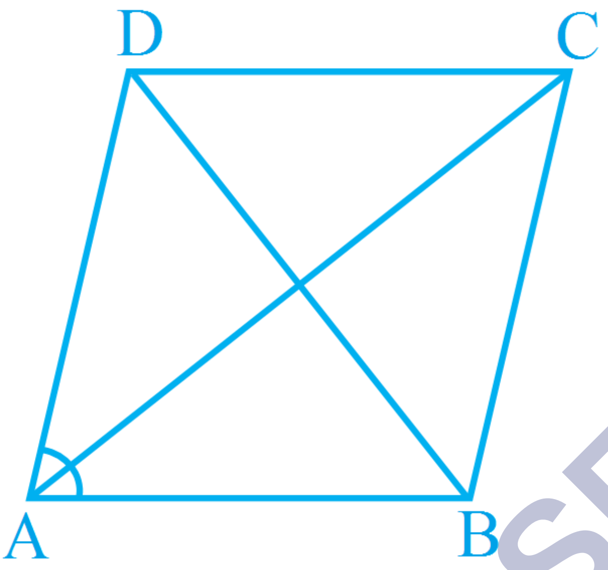
समीकरण (1), (2) तथा (3) से

AB = BC = CD = AD

अत: ABCD एक समचतुर्भुज है।

प्रश्न 7 ABCD एक समचतुर्भुज है। दर्शाइए कि AC कोणों A और C दोनों को समद्विभाजित करता है तथा विकर्ण BD कोणों B तथा D दोनों को समद्विभाजित करता है।

उत्तर-



दिया है: ABCD एक समचतुर्भुज चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है:

i. $AC, \angle A$ तथा $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।

ii. $BC, \angle B$ तथा $\angle D$ को भी समद्विभाजित करता है।

प्रमाण:

i. $\triangle ABC$ तथा $\triangle ADC$ में,

AB = AD (समचतुर्भुज की भुजाएँ)

$\angle B = \angle D$ (समचतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते है)

AC = AC (उभयनिष्ठ)

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$

$\therefore \angle BAC = \angle DAC \ldots (1)$

$\therefore \angle BCA = \angle DCA \ldots (2)$

समी० (1) तथा (2) से

विकर्ण $AC, \angle A$ तथा $\angle C$ को समद्विभाजित करता है।

इसी प्रकार हम

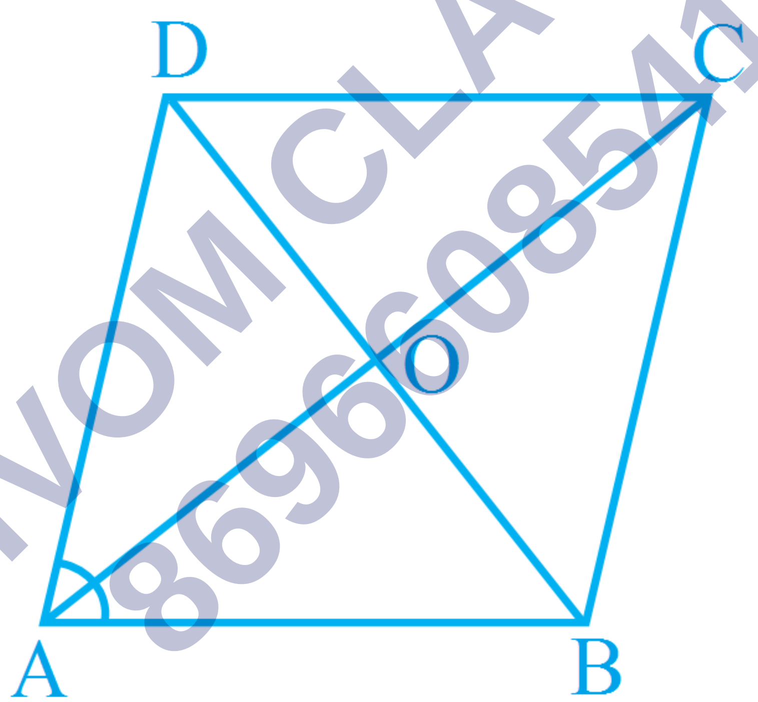
ii. BD, $\angle B$ तथा $\angle D$ को भी समद्विभाजित करता है।

को भी सिद्ध कर सकते हैं।

प्रश्न 8 ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोण A और C को समद्विभाजित करता है | दर्शाइए कि:

i. ABCD एक वर्ग है।
ii. विकर्ण BD दोनों कोण B और D को समद्विभाजित करता है।

उत्तर-



दिया है: ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोण A और C को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध करना है:

i. ABCD एक वर्ग है।
ii. विकर्ण BD दोनों कोण B और D को समद्विभाजित करता है।

प्रमाण:

i. चूँकि ABCD एक आयत है।

$\therefore\ AB = CD \ldots (1)$ आयत की सम्मुख भुजा

और AD = BC .... (2) आयत की सम्मुख भुजा

अब, $\triangle ABC$ तथा $\triangle ACD$ में,

$\angle BAC = \angle DAC$ (दिया है) चूँकि AC कोण A और C को समद्विभाजित करता है |

AC = AC (उभयनिष्ठ)

$\angle B = \angle D$ (प्रत्येक 90°) आयत के कोण

AAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABC \cong \triangle ACD$

$\therefore\ AB = AD \ldots\ldots (3)$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

समीकरण (1), (2) और (3) से

AB = BC = CD = AD

चूँकि ABCD एक आयत है और इसकी प्रत्येक भुजा बराबर भी है।

अतः ABCD एक वर्ग है।

ii. $\triangle ABD$ तथा $\triangle CBD$ में

AB = BC (वर्ग की भुजा)

BD = BD (उभयनिष्ठ)

$\angle A = \angle C$ (प्रत्येक 90°) वर्ग के कोण

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABD \cong \triangle CBD$

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$

$\angle ADB = \angle CDB$

(सर्वांगसम त्रिभुज के सांगत भाग)

प्रश्न 9 समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर दो बिंदु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि DP = BQ है। दर्शाइए कि

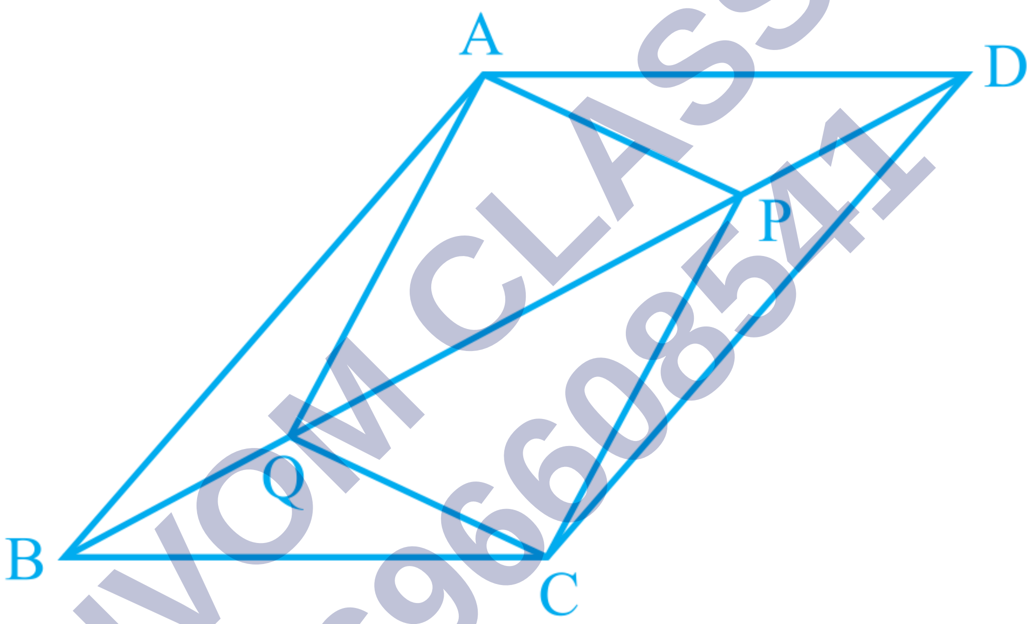
i. $\triangle APD \cong \triangle CQB$

ii. $AP = CQ$

iii. $\triangle AQB \cong \triangle CPD$

iv. $AQ = CP$

v. APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।



उत्तर-

दिया है: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और DP = BQ है।

सिद्ध करना है:

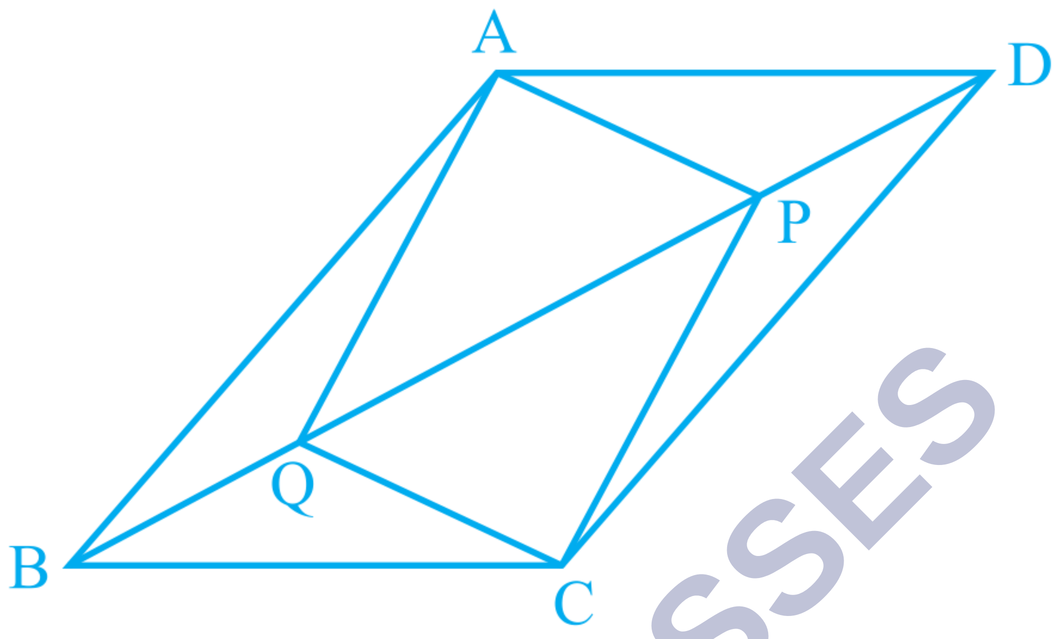
i. $\triangle APD \cong \triangle CQB$

ii. $AP = CQ$

iii. $\triangle AQB \cong \triangle CPD$

iv. $AQ = CP$

v. APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।



प्रणाम:

i. $\triangle APD$ तथा $\triangle CQB$

AD = BC (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

DP = BQ (दिया है)

$\angle ADP = \angle CBQ$ (एकांतर अत: कोण)

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

$\therefore \triangle APD \cong \triangle CQB$

ii. अत: AP = CQ .... (1) (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

iii. $\triangle AQB$ तथा $\triangle CPD$

AB = DC (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

BQ = DP (दिया है)

$\angle ABQ = \angle CDP$ (एकांतर अत: कोण)

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

$\therefore \triangle AQB \cong \triangle CPD$

xli. अत: AQ = CP .... (2) (By CPCT /सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

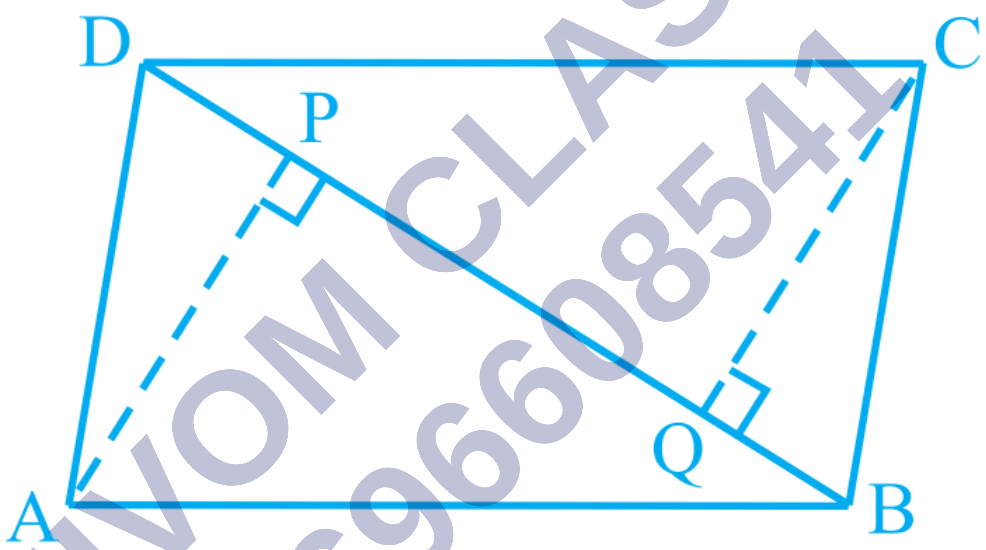
समी. (1) तथा (2) से

APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।

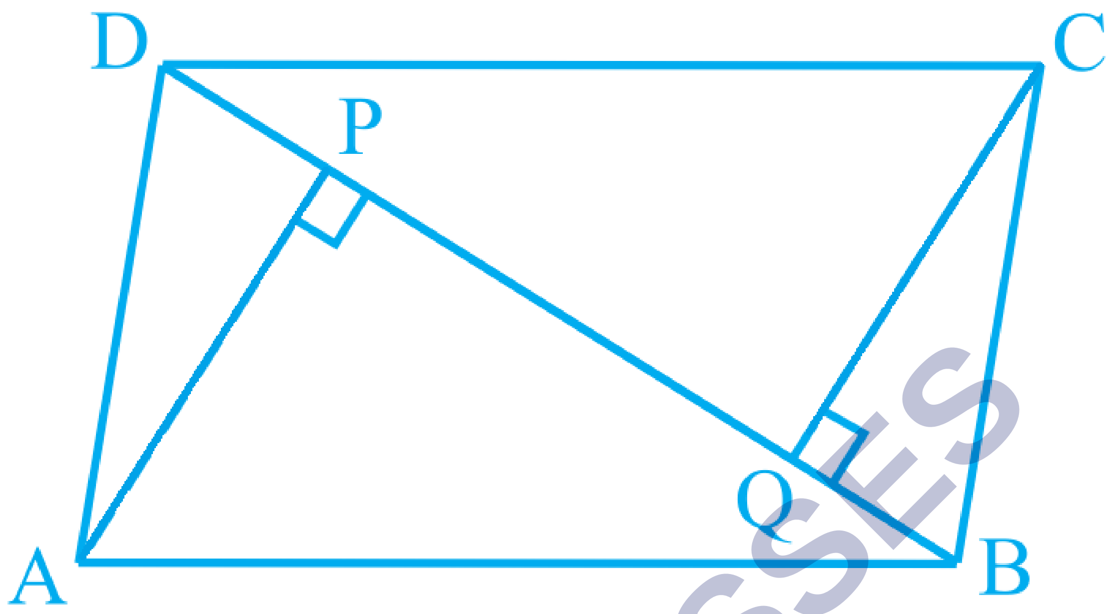
प्रश्न 10 ABCD एक समांतर चतुर्भज है तथा AP और CQ शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब हैं।

दर्शाइए कि:

i. $\triangle APB \cong \triangle CQD$
ii. AP = CQ



उत्तर-



दिया है: ABCD एक समांतर चतुर्भज है तथा AP और CQ शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब हैं।

सिद्ध करना है:

i. $\triangle APB \cong \triangle CQD$

ii. $AP = CQ$

प्रमाण:

1. $\triangle APB$ तथा $\triangle CQD$ में,

AB = CD (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

$\angle ABP = \angle CDQ$ (एकांतर अत: कोण)

$\angle APB = \angle CQD$ (प्रत्येक 90^0)

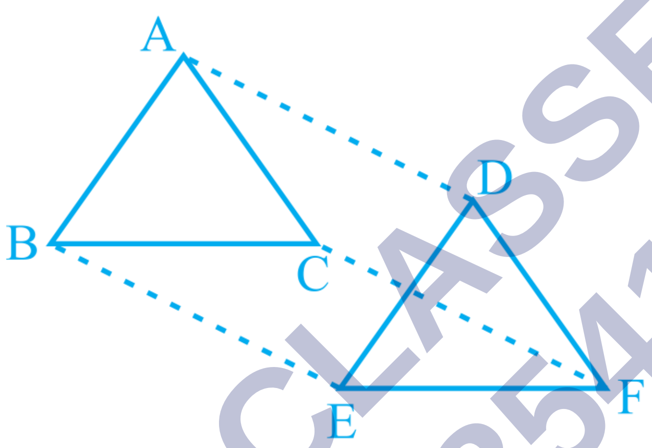
अत:, ASA सर्वांगसमता नियम से

$\triangle APB \cong \triangle CQD$

ii. इसलिए, AP = CQ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

प्रश्न 11 $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ में, AB = DE, AB||DF, BC = EF और BC || EF है। शीर्षों A, B और C को क्रमश: शीर्षों D, E और F से जोड़ा जाता है। दर्शाइए कि

i. चतुर्भुज ABED एक समांतर चतुर्भुज है।
ii. चतुर्भुज BEFC एक समांतर चतुर्भुज है।
iii. AD || CF और AD = CF है।
iv. चतुर्भुज ACFD एक समांतर चतुर्भुज है।
v. AC = DF है।
vi. △ABC ≅ △DEF है।

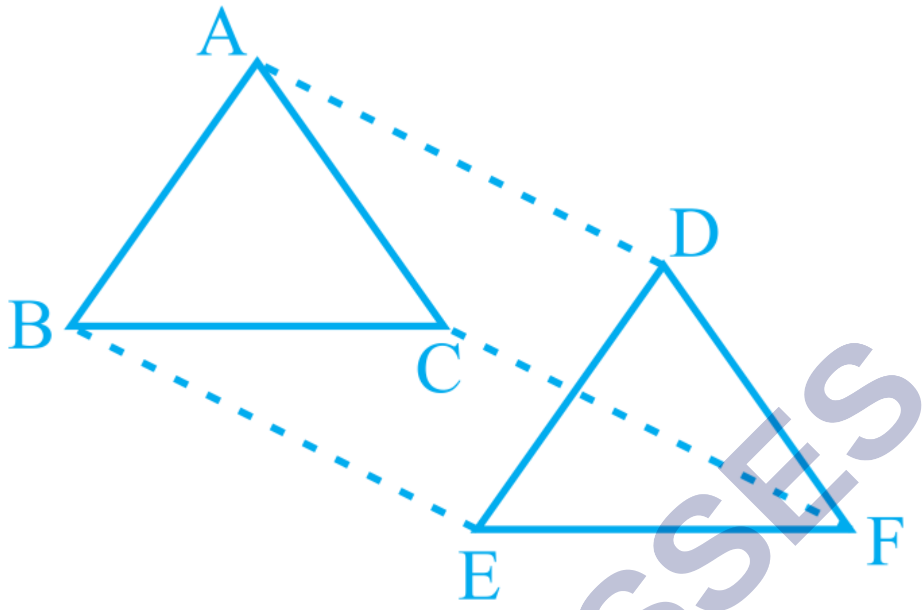


उत्तर- दिया है: △ABC और △DEF में, AB = DE, AB || DE, BC = EF और BC || EF है।

सिद्ध करना है:

i. चतुर्भुज ABED एक समांतर चतुर्भुज है।
ii. चतुर्भुज BEFC एक समांतर चतुर्भुज है।
iii. AD || CF और AD = CF है।
iv. चतुर्भुज ACFD एक समांतर चतुर्भुज है।
v. AC = DF है।
vi. △ABC ≅ △DEF है।

प्रमाण:



i. चतुर्भुज ABED में

AB = DE और AB||DF दिया है।

∴ चतुर्भुज ABED एक समांतर चतुर्भुज है।

(यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है)

अब, चूँकि ABED एक समांतर चतुर्भुज है

∴ AD = BE और AD || BE ......(1)

(समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा बराबर और समांतर होती है)

ii. इसी प्रकार से, चतुर्भुज BEFC में

BC = EF और BC || EF दिया है।

∴ चतुर्भुज BEFC एक समांतर चतुर्भुज है।

अत: CF = BE और CF || BE ..... (2) (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख)

iii. समी० (1) तथा (2) से

AD || CF और AD = CF है।

(चूँकि सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर है)

∴ चतुर्भुज ACFD एक समांतर चतुर्भुज है।

इसलिए, AC = DF और AC || DF .... (3)

iv. △ABC और △DEF में,

AB = DE (दिया है)

BC = EF (दिया है)

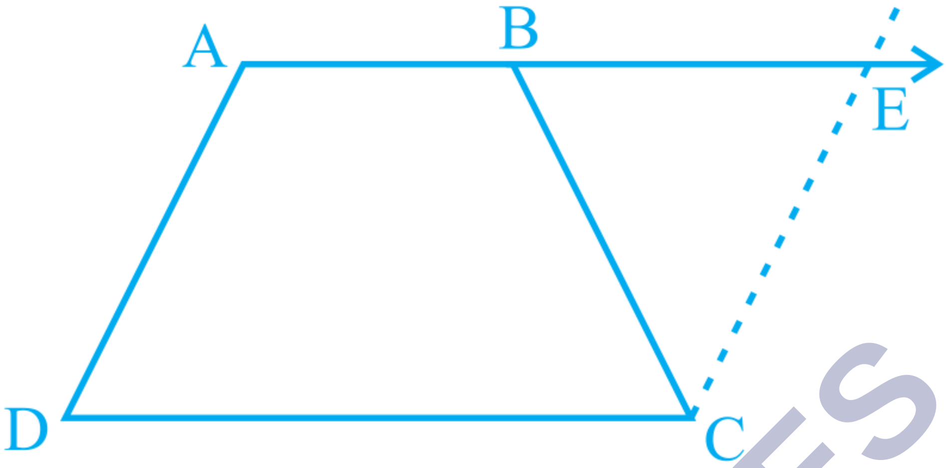
AC = DF (समी० 3 से)

SSS सर्वांगसमता नियम से

∴ ABC ≅ △DEF

प्रश्न 12 ABCD एक समलम्ब है, जिसमें AB || DC और AD = BC है। दर्शाइए कि

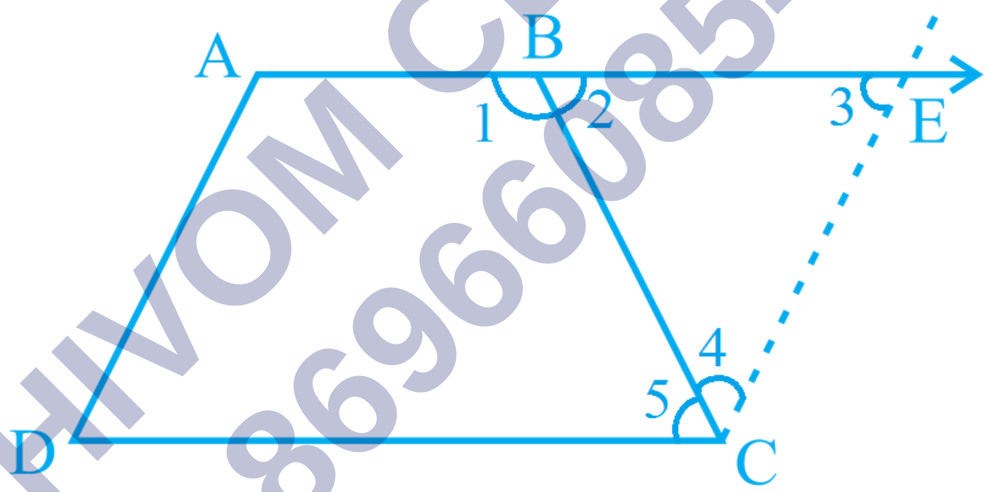
i. $\angle A = \angle B$
ii. $\angle C = \angle D$
iii. $\triangle ABC \cong \triangle BAD$
iv. विकर्ण AC = विकर्ण BD है।



उत्तर- दिया है: ABCD एक समलम्ब है,

जिसमें AB || DC और AD = BC है।

सिद्ध करना है:



i. $\angle A = \angle B$

ii. $\angle C = \angle D$

iii. $\triangle ABC \cong \triangle BAD$

iv. विकर्ण AC = विकर्ण BD है।

रचना : AD के समांतर CE खिंचा।

प्रमाण: AB || DC .... (1) दिया है।

AD || CE .... (2) रचना से

[चूँकि सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म समांतर हो तो वो समांतर चतुर्भुज होता है।]

समीकरण (1) तथा (2) से

AECD एक समांतर चतुर्भुज है।

$\therefore AD = CE \ldots . (3)$ [समांतर चतुर्भुज AECD की सम्मुख भुजा]

जबकि, AD = BC .... (4) दिया है।

समी. (3) तथा (4) से

BC = CE

$\therefore \angle 2 = \angle 3 \ldots \ldots (5)$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

AB || CD दिया है और BC एक तिर्यक रेखा है।

$\therefore \angle 2 = \angle 5 \ldots \ldots (6)$ [अंत: एकांतर कोण]

समी. (5) तथा (6) से हमें प्राप्त होता है।

$\therefore \angle 3 = \angle 5 \ldots \ldots (7)$

अब DBEC में,

बहिष्कोंण $\angle 1 = \angle 3 + \angle 4$

या $\angle 1 = \angle 5 + \angle 4$ समी. (7) से

या $\angle B = \angle ECD \ldots \ldots (8)$

चूँकि, AECD एक समांतर चतुर्भुज है।

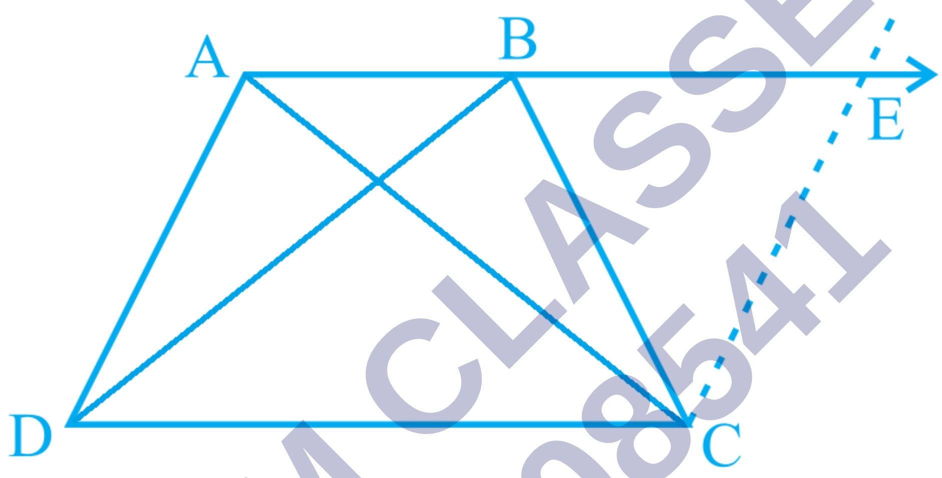
$\therefore A = \angle ECD \ldots\ldots (9)$ [समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण]

समी. (8) और (9) से

$\angle A = \angle B \ldots\ldots (10)$

ii. पुनः, $\angle D = \angle E$ [समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण]

या $\angle D = \angle 3 \ldots\ldots\ldots (11)$



समी. (7) और (11) से

$\angle D = \angle 5$

iii. या $\angle D = \angle C$

$\triangle ABC$ और $\triangle BAD$ में

AD = BC (दिया है)

AB = AB (उभयनिष्ठ भुजा')

$\angle A = \angle B$ समी. (10) से

अत: SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABC \cong \triangle BAD$

iv. विकर्ण AC = विकर्ण BD (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

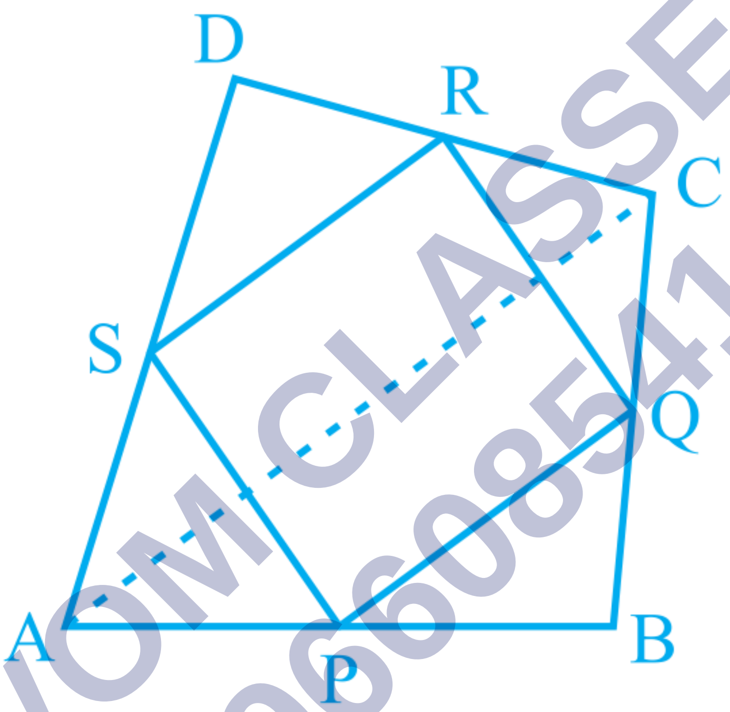
प्रश्नावली 8.2 (पृष्ठ संख्या 180-181)

प्रश्न 1 ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं। AC उसका एक विकर्ण है। दर्शाइए कि:

i. $SR || AC$ और $SR = \frac{1}{2}AC$ है।

ii. $PQ = SR$ है।

iii. $PQRS$ एक समांतर चतुर्भुज है।



उत्तर- दिया है: ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं।

सिद्ध करना है:

i. $SR || AC$ और $SR = \frac{1}{2} AC$ हैं।

ii. $PQ=SR$ हैं।

iii. $PQRS$ एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रमाण: त्रिभुज ADC में

AD तथा CD का मध्यबिंदु क्रमशः S तथा R है। (दिया है)

अतः मध्यबिंदु प्रमेय से

इसलिए SR || AC और $SR = \frac{1}{2} AC. \ldots (1)$

त्रिभुज ABC में,

AB तथा BC का मध्यबिंदु P तथा Q है। (दिया है)

इसलिए मध्यबिंदु प्रमेय से

PQ || AC और $PQ = \frac{1}{2} AC. \ldots . (2)$

समीकरण (i) तथा (ii) से

SR || PQ और SR = PQ

अर्थात PQ = SR

दिया है: ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमश: भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं|

सिद्ध करना है:

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म में से कोई भी एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वो समान्तर चतुर्भुज होता है)

इसलिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है|

प्रश्न 2 ABCD एक समचतुर्भुज है और P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक आयत है।

उत्तर- दिया है: ABCD एक समचतुर्भुज है और P, Q, R और S

क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु है।

सिद्ध करना है:

PQRS एक आयत है।

प्रमाण: त्रिभुज ADC में

AD तथा CD का मध्यबिंदु क्रमश: S तथा R है। (दिया है)

अतः मध्यबिंदु प्रमेय से

इसलिए SR || AC और $\mathrm{SR} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\ldots(1)$

त्रिभुज ABC में,

AB तथा BC का मध्यबिंदु P तथा Q है। (दिया है)

इसलिए मध्यबिंदु प्रमेय से

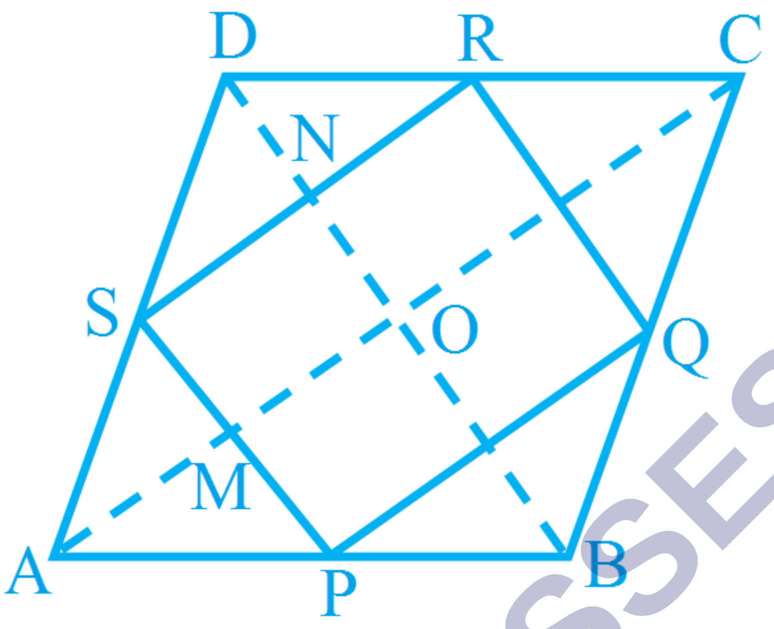
PQ || AC और $\mathrm{PQ} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\ldots(2)$

समीकरण (i) तथा (ii) से

SR || PQ और SR = PQ

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म में से कोई भी एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वो समान्तर चतुर्भुज होता है)

इसलिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।



चूँकि ABCD एक समचतुर्भुज है।

इसलिए, $\angle AOD = 90^\circ$

या $\angle MON = 90^\circ$

(समचतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।)

अब SR || AC और SP || BD है

तो SMON भी एक समान्तर चतुर्भुज है।

इसलिए $\angle MSN = \angle MON = 90^\circ$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

या $\angle PSR = 90^\circ$

अत: PQRS एक आयत है।

प्रश्न 3 ABCD एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमश: भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक समचतुर्भुज है।

उत्तर- दिया है: ABCD एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमश: भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं

सिद्ध करना है:

PQRS एक समचतुर्भुज है।

रचना : A को C से मिलाया

प्रमाण : त्रिभुज ADC में

AD तथा CD का मध्यबिंदु क्रमशः S तथा R है (दिया है)

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय से

इसलिए SR || AC और SR $= \frac{1}{2}$AC ... (1)

त्रिभुज ABC में,

AB तथा BC का मध्यबिंदु P तथा Q है। (दिया है)

इसलिए मध्यबिंदु प्रमेय से

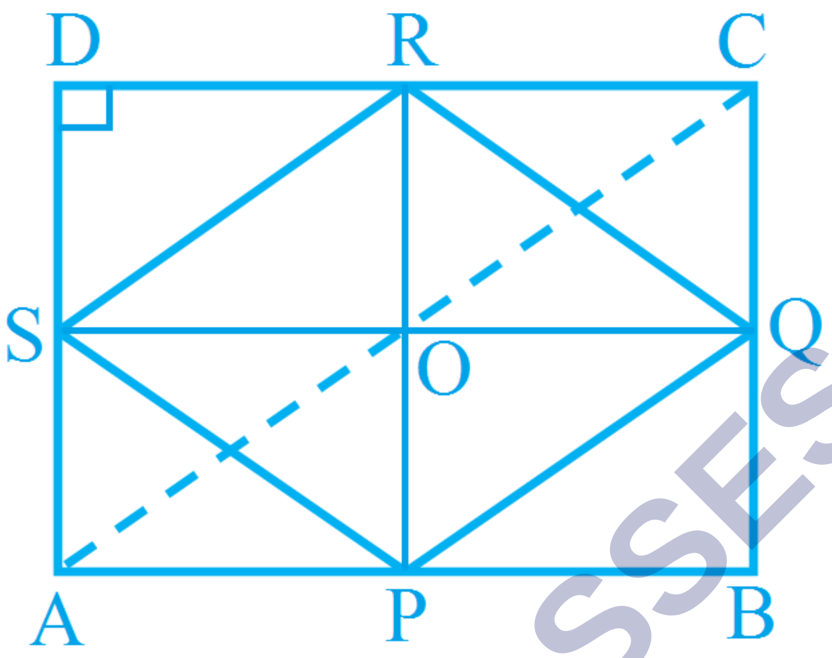
PQ || AC और PQ $= \frac{1}{2}$AC ..... (2)

समीकरण (i) तथा (ii) से

SR || PQ और SR = PQ

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म में से कोई भी एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वो समान्तर चतुर्भुज होता है)

इसलिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।



अब, चूँकि ABCD एक आयत है।

इसलिए, AB || CD या SQ || CD ...(i)

(क्योंकि S तथा Q AD तथा BC के मध्य-बिंदु है।)

इसी प्रकार AD || PR ...... (ii)

अत: समीकरण (i) तथा (ii) से

DSOR एक समान्तर चतुर्भुज है।

इसलिए, $\angle SOR = \angle D$ (समान्तर चतुर्भुज कि सम्मुख भुजा)

जबकि, $\angle D = 90°$ (आयत का प्रत्येक कोण)

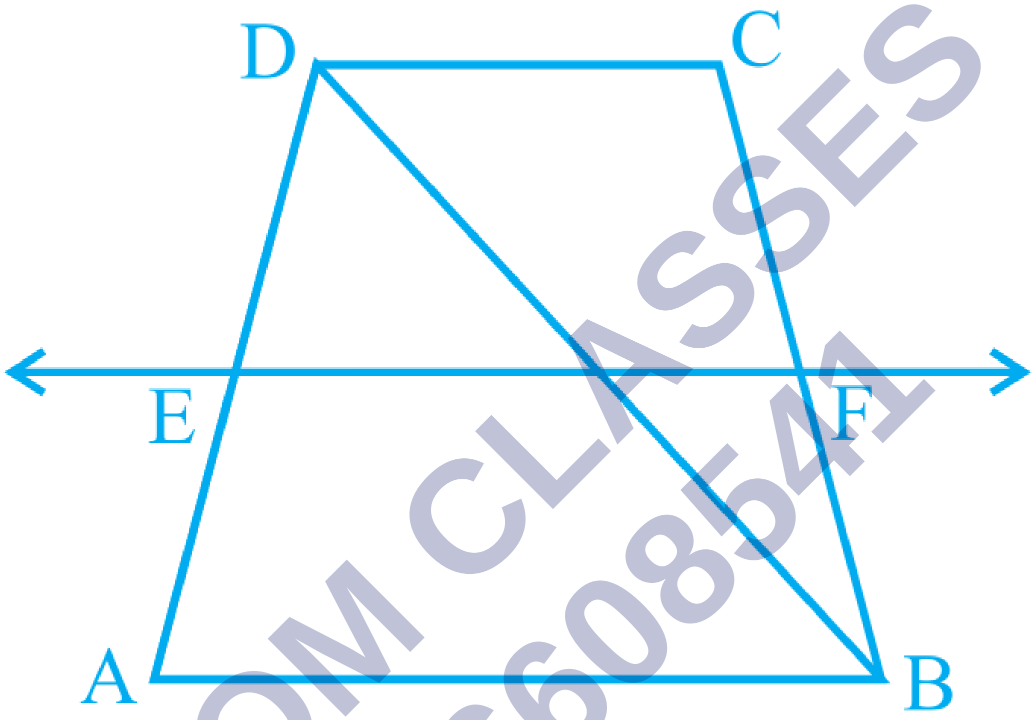
इसलिए $\angle SOR = 90°$

चूँकि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अत: PQRS एक समचतुर्भुज है।

(वह समांतर चतुर्भुज जिसके विकर्ण समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं समचतुर्भुज कहलाता है।

प्रश्न 4 ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है। साथ ही, BD एक विकर्ण है और E भुजा AD का मध्य-बिंदु है। E से होकर एक रेखा AB के समांतर खींची गई है, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है । दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य-बिंदु है।



उत्तर- दिया है: ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है।

साथ ही, BD एक विकर्ण है और E भुजा AD का

मध्य-बिंदु है। E से होकर एक रेखा AB के समांतर

खींची गई है, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है: CF = BF

रचना: D को B से मिलाया जो EF को G पर प्रतिच्छेद करता है।

प्रमाण:

DABD में,

AB || EF ..... (i) (दिया है)

और E भुजा AD का मध्य-बिंदु है।

(किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खिंची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है)

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से

इसलिए बिंदु G भुजा BD का मध्य-बिंदु है .... (i)

अब AB || CD .... (ii) (दिया है)

समीकरण (i) तथा (ii) से

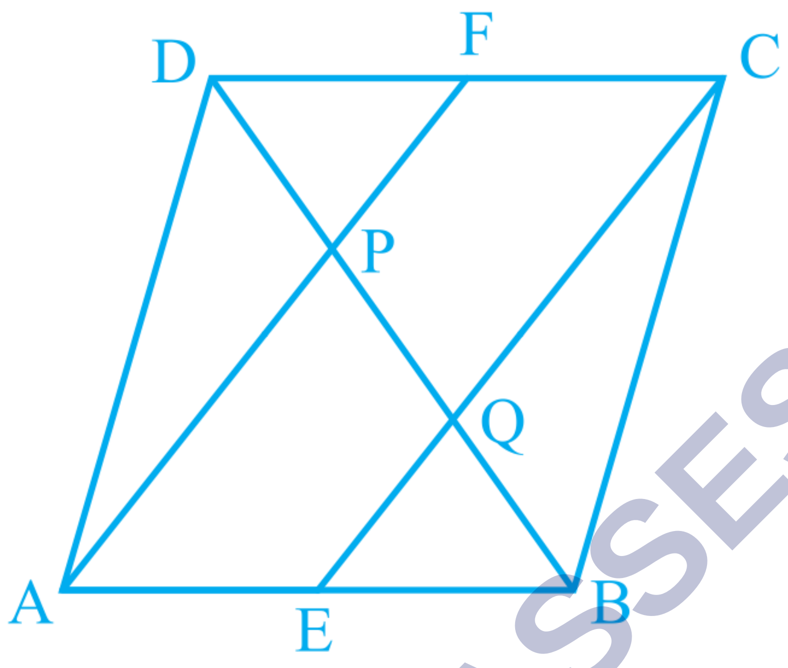
CD || EF और बिंदु G भुजा BD का मध्य-बिंदु है [समीकरण (i) से]

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से DBCD में

F भुजा BC का मध्य-बिंदु है।

इसलिए CF = BF

प्रश्न 5 एक समांतर चतुर्भुज ABCD में E और F क्रमश: भुजाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं। दर्शाइए कि रेखाखंड AF और EC विकर्ण BD को समत्रिभाजित करते हैं।



उत्तर- दिया है: एक समांतर चतुर्भुज ABCD में E और F

क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं।

सिद्ध करना है: DP = PQ = QB

प्रमाण:

DABP में,

E भुजा AB का मध्य-बिंदु है और AF || EC दिया है।

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से

Q भुजा PB का मध्य-बिंदु है।

अत: PQ = QB .... (i)

(किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खिंची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है)

अब, DCDQ में,

F भुजा CD का मध्य-बिंदु है और AF || EC दिया है।

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से

P भुजा DQ का मध्य-बिंदु है।

इसलिए, DP = PQ .... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

DP = PQ = QB

प्रश्न 6 दर्शाइए कि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

उत्तर- दिया है: ABCD एक चतुर्भुज है जिसके भुजाएँ

AB, BC, CD और DA का मध्य-बिंदु क्रमश:

P, Q, R और S है।

सिद्ध करना है: विकर्ण PR और SQ एक दुसरे को समद्विभाजित करते है।

रचना: P, Q, R और S को मिलाया और A को C से मिलाया

प्रमाण: त्रिभुज ADC में

AD तथा CD का मध्यबिंदु क्रमशः S तथा R है। (दिया है।)

अतः मध्यबिंदु प्रमेय से

इसलिए SR || AC और $SR = \frac{1}{2}AC \ldots .(1)$

त्रिभुज ABC में,

AB तथा BC का मध्यबिंदु प्रमेय से

PQ || AC और PQ = $\frac{1}{2}$AC .....(2)

समीकरण (i) तथा (ii) से

अर्थात PQ = SR

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म में से कोई भी एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वो समान्तर चतुर्भुज होता है)

इसलिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

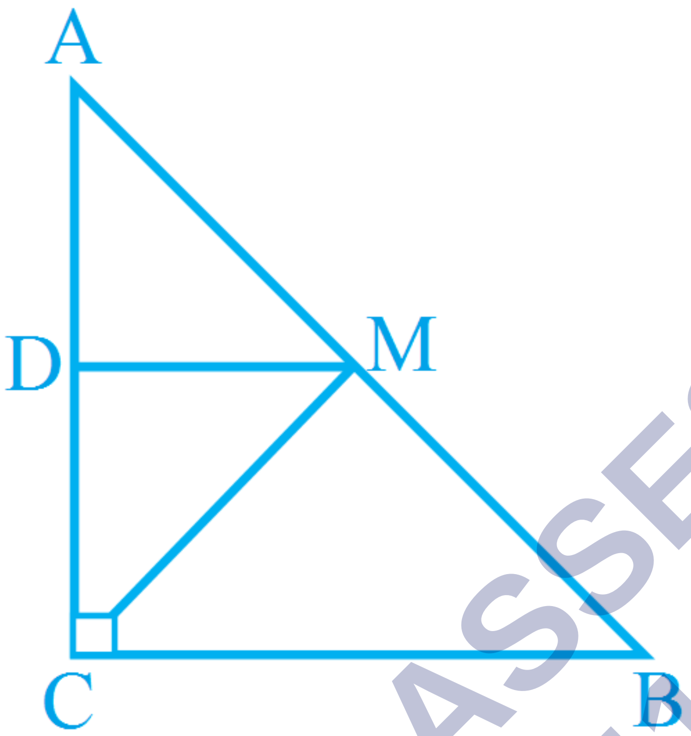
अब चूँकि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है तो इसके विकर्ण PR और SQ एक दुसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समद्विभाजित करते है।)

प्रश्न 7 ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। कर्ण AB के मध्य-बिंदु M से होकर BC के समांतर खिंची गई रेखा AC को D पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि:

i. D भुजा AC का मध्यबिंदु है।
ii. $MD \perp AC$ है।
iii. $CM = MA = \frac{1}{2}AB$ है।

उत्तर-



दिया है: ABC एक त्रिभुज है जिसका

कोण C समकोण है| कर्ण AB के मध्य-बिंदु

M से होकर BC के समांतर खिंची गई रेखा

AC को D पर प्रतिच्छेद करती है|

सिद्ध करना है:

i. D भुजा AC का मध्यबिंदु है।
ii. $\mathrm{MD} \perp \mathrm{AC}$ है।
iii. $\mathrm{CM} = \mathrm{MA} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$ है।

प्रमाण: (i) DABC में

M भुजा AB का मध्य-बिंदु है और MD || BC है|

अत: मध्य-बिंदु प्रमेय 8.10 से

(किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खिंची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है)

इसलिए, D भुजा AC का मध्य-बिंदु है|

अत: AD = CD .... (i)

MD || BC दिया है और AC एक तिर्यक रेखा है|

इसलिए $\angle ADM = \angle ACB$ (संगत कोण)

$\angle ADM =$[चूँकि $\angle ACB = 90^\circ$]

अत: $MD \perp AC$ है।

$\triangle ADM$ तथा $\triangle CDM$ में

AD = DO ......समी.(1) से

MD = MD (उभयनिष्ट भुजा)

$\angle ADM = \angle CDM$ (प्रत्येक 90°)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ADM \cong \triangle CDM$

इसलिए MA = CM .....(ii) नितम से

अब MA + MB = AB

MA + MA = AB [चूँकि MA = MB]

2 MA = AB

$MA = \frac{1}{2} AB$

$CM = MA = \frac{1}{2} AB$ समी. (ii) से