भौतिकी

अध्याय-8: गुरुत्वाकर्षण

गुरुत्वाकर्षण

ब्रह्मांड का प्रत्येक कण दूसरे सभी कणों को अपनी ओर आकर्षित करता है। इस आकर्षण बल को गुरुत्वाकर्षण कहते हैं। अथवा ब्रह्मांड के किन्हीं दो पिंडों के मध्य गुरुत्व के कारण लगने वाले बल को गुरुत्वाकर्षण बल कहते हैं।
गुरुत्वाकर्षण अध्याय से कुछ महत्वपूर्ण बिंदु-

- सौरमंडल का सबसे छोटा ग्रह प्लूटो है।
- सौरमंडल का सबसे गर्म ग्रह बुध है चूंकि यह सूर्य के सबसे निकट है।
- सबसे ज्यादा उपग्रह बृहस्पति के हैं जो संख्या में 63 है। जबकि पृथ्वी का एक ही उपग्रह है चंद्रमा।
- पृथ्वी तल से ऊपर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण का मान घटता जाता है। एवं पृथ्वी तल से नीचे जाने पर भी गुरुत्वीय त्वरण का मान घटता है।
- गुरुत्वीय त्वरण का मान पृथ्वी के ध्रुवों पर अधिकतम तथा भूमध्य रेखा पर न्यूनतम होता है।
- गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता का मात्रक न्यूटन/किग्रा तथा विमीय सूत्र $[LT^{-2}]$ होता है।

ग्रह

आकाश में सूर्य के चारों ओर विभिन्न पिंड अपनी-अपनी कक्षाओं में घूमती रहती हैं इन आकाशीय पिंडों को ग्रह कहते हैं। सूर्य के नौ ग्रह हैं।
बुध ग्रह सूर्य के सबसे निकट है इसलिए यह सबसे गर्म ग्रह है जबकि बृहस्पति सौरमंडल का सबसे बड़ा ग्रह है।

गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र में किसी बिंदु पर रखे एकांक द्रव्यमान के पिंड पर आरोपित बल को उस बिंदु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता कहते हैं। इसे I इसे प्रदर्शित करते हैं।

माना m द्रव्यमान की वस्तु पर लगने वाला बल d है तो

$$\boxed{I = \frac{F}{m}}$$

यह एक सदिश राशि है गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता का मात्रक न्यूटन/किग्रा होता है एवं विमीय सूत्र $[LT^{-2}]$ होता है।

ग्रहों की गति संबंधी केप्लर के नियम

केप्लर ने सौर परिवार में सूर्य के चारों ओर परिक्रमा करने वाले ग्रहों की गति संबंधी निम्नलिखित तीन नियम दिए, जो निम्न प्रकार से हैं।

(1) कक्षाओं का नियम

(2) क्षेत्रीय चाल का नियम

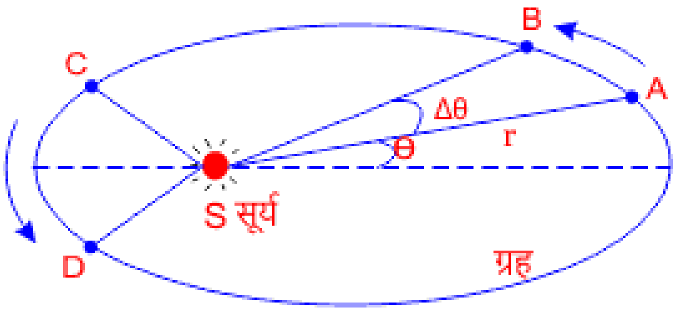
(3) परिक्रमण काल का नियम

1. प्रथम नियम (कक्षाओं का नियम)

प्रत्येक ग्रह सूर्य के परितः दीर्घ वृत्ताकार पथ पर गति करते हैं तथा सूर्य उस दीर्घ वृत्त के किसी एक फोकस पर होता है। विभिन्न ग्रहों की कक्षाएं भिन्न-भिन्न होती हैं। यह केप्लर का प्रथम नियम है इसे कक्षाओं का नियम (law of orbits) भी कहते हैं।

2. द्वितीय नियम (क्षेत्रीय चाल का नियम)

किसी ग्रह को सूर्य से मिलाने वाली रेखा बराबर समय अंतरालों में बराबर क्षेत्रफल पार करती है। अर्थात प्रत्येक ग्रह की क्षेत्रीय चाल नियत रहती है इसे केप्लर का द्वितीय नियम कहते हैं। एवं इसे क्षेत्रीय चाल का नियम (law of areal velocity) भी कहते हैं।



अतः चित्र द्वारा स्पष्ट होता है। कि जब ग्रह, सूर्य के नजदीक होता है तो उसकी चाल अधिकतम होती है। और जब ग्रह, सूर्य से दूर चला जाता है तो ग्रह की चाल न्यूनतम होती है। प्रस्तुत चित्र में ग्रह की कक्षा को ही दर्शाया गया है।

यदि कोई ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते हुए एक निश्चित समयांतराल में कक्षा के बिंदु A से B बिंदु तक जाता है एवं उतनी ही समयांतराल में बिंदु C से D बिंदु तक जाता है तब इस नियम के अनुसार
ΔASB का क्षेत्रफल = ΔCSD का क्षेत्रफल

3. *तृतीय नियम (परिक्रमण काल का नियम)*

सूर्य के परितः किसी भी ग्रह का परिक्रमण काल का वर्ग उस ग्रह की दीर्घवृत्ताकार कक्षा के अर्द्ध दीर्घ अक्ष की तृतीय घात के अनुक्रमानुपाती होता है। इसे केप्लर का तृतीय नियम कहते हैं। तथा इसे परिक्रमण काल का नियम (law of periods) भी कहते हैं।
माना किसी ग्रह का सूर्य के चारों ओर परिक्रमण काल T है तथा इसकी दीर्घ वृत्ताकार कक्षा का अर्द्ध दीर्घ अक्ष a है तो इस नियम के अनुसार
$\boxed{T \propto a^3}$

केप्लर के नियम से न्यूटन के निष्कर्ष

केप्लर के दूसरे नियम के अनुसार, किसी ग्रह का क्षेत्रफलीय वेग नियत रहता है तब दीर्घ वृत्ताकार कक्षा में ग्रह का वेग नियत होगा।

अतः ग्रह पर केंद्र (सूर्य) की ओर एक अभिकेंद्र बल F लगता है तो

अभिकेंद्र बल F = $\frac{mv^2}{r}$

यहां m द्रव्यमान, v ग्रह का रेखीय वेग है तथा r वृत्ताकार कक्षा की त्रिज्या है।

यदि T ग्रह का आवर्तकाल हो तब

v = $\frac{2\pi r}{T}$

(चूंकि $v = r\omega \Rightarrow 2\pi rn \Rightarrow \frac{2\pi r}{T}$)

v का मान रखने पर अभिकेंद्र बल

$F = \frac{m}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$

$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$

$F = \frac{m \times 4\pi^2 r}{kr^3}$ (चूंकि $T \propto a^3 \Rightarrow ka^3$ से)

$F = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)\left(\frac{m}{r^2}\right)$

अतः $F \propto \frac{m}{r^2}$

इस प्रकार केप्लर के नियम से न्यूटन ने तीन निष्कर्ष निकाले

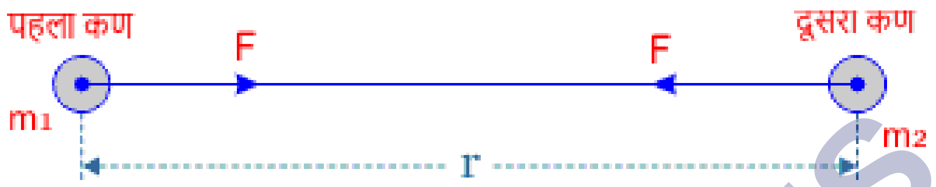
1. ग्रह पर एक बल कार्य करता है जिसकी दिशा सूर्य की ओर होती है।
2. यह बल ग्रह तथा सूर्य के बीच की औसत दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। $\left(F \propto \frac{1}{r^2}\right)$
3. यह बल ग्रह के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होता है। ($F \propto m$)

इस प्रकार हम देखते हैं कि केप्लर के नियम से न्यूटन ने तीन निष्कर्ष निकाले। यह तीनों निष्कर्ष $F \propto \frac{m}{r^2}$ सूत्र से ही बनाए गए हैं कोई अपने मन से नहीं है यहां प्रयोग किया गया बल अभिकेंद्र बल है।

न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का नियम

न्यूटन ने केप्लर के ग्रहों की गति संबंधी नियम से प्राप्त निष्कर्ष की व्याख्या करते हुए बताया कि ब्रह्मांड का प्रत्येक पिंड, किसी दूसरे पिंड को अपनी ओर आकर्षित करता है। इस आकर्षण के गुण को गुरुत्वाकर्षण कहते हैं।
न्यूटन ने गुरुत्वाकर्षण संबंधी एक नियम प्रस्तुत किया जिसे न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का नियम (Newton's law of gravitation) कहते हैं।

इस नियम के अनुसार, किन्ही दो पिंडों (कणों) के बीच लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल दोनों कणों के द्रव्यमानों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती होता है। एवं उनके कणों के बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।



माना दो कण जिनके द्रव्यमान m_1 व m_2 हैं। एक दूसरे से r दूरी पर हैं। यदि इनके बीच लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल F है।
तो इस नियमानुसार

$F \propto m_1 m_2$

तथा $F \propto \frac{1}{r^2}$

अतः $F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$

या $\boxed{F = G\frac{m_1 m_1}{r^2}}$

जहां एक G अनुक्रमानुपाती नियतांक है जिसे सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक कहते हैं। गुरुत्वाकर्षण बल की दिशा दोनों कणों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होती है।

सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक

यदि गुरुत्वाकर्षण की प्रक्रिया में भाग लेने वाले दोनों कणों के द्रव्यमान समान तथा एकांक हों एवं उनके बीच की दूरी भी एकांक हो तो
$m_1 = m_2 = 1$ एवं $r = 1$

तब $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

$\boxed{F = G}$

अतः एकांक दूरी पर रखे दो एकांक द्रव्यमानों के कणों के बीच गुरुत्वाकर्षण बल उसके सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक के बराबर होता है।

गुरुत्वाकर्षण नियतांक G का मात्रक

सूत्र $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ से

$$G = F\frac{r^2}{m_1 m_2}$$

यदि दूरी मीटर में, द्रव्यमान किग्रा में, तथा बल न्यूटन में हो तो सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक का एस आई मात्रक न्यूटन-मीटर^2/किग्रा^{2} होता है।

गुरुत्वाकर्षण नियतांक G का विमीय सूत्र

$$G = \frac{\text{न्यूटन}-\text{मीटर}^2}{\text{किग्रा}^2} \text{ से}$$

$$G = \frac{[MLT^{-2}]\,[L^2]}{[M^2]} \text{ से}$$

$$G = [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

अतः गुरुत्वाकर्षण नियतांक का विमीय सूत्र $[M^{-1}L^3T^{-2}]$ होता है।

गुरुत्वाकर्षण नियतांक **G** *का मान*

G का मान कणों की प्रकृति, द्रव्यमान, माध्यम तथा ताप एवं समय आदि पर निर्भर नहीं करता है। इसी कारण से इसे सार्वत्रिक नियतांक G कहते हैं।
प्रयोग द्वारा गुरुत्वाकर्षण नियतांक G का मान 6.67×10^{-11} न्यूटन-मीटर^2/किग्रा^{2} प्राप्त किया गया है। यह एक अदिश राशि है।

G के मान से इसका अर्थ निकलता है।
कि 1 मीटर की दूरी पर रखे दो 1-1 किग्रा द्रव्यमान के पिंड के बीच 6.67×10^{-11} न्यूटन का आकर्षण बल लगता है।

आशा करते हैं कि न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम संबंधी एवं सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक से संबंधित यह अध्याय आपको पसंद आया होगा। अगर आपको कोई परेशानी हो तो हमें कमेंट के माध्यम से बताएं।

गुरुत्वीय त्वरण g

गुरुत्व **(gravity)**

पृथ्वी द्वारा किसी वस्तु को अपने केंद्र की ओर आकर्षित करने को उसका गुरुत्व भी कहते हैं।
वास्तव में गुरुत्व, गुरुत्वाकर्षण का ही एक विशिष्ट उदाहरण है।

गुरुत्वीय त्वरण

पृथ्वी की ओर मुक्त रूप से गिरती किसी वस्तु के वेग में प्रति सेकंड से होने वाली वृद्धि को पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण (acceleration due to gravity) कहते हैं। इसे g से प्रदर्शित करते हैं।
गुरुत्वीय त्वरण का मान वस्तु के आकार, द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है यह केवल वस्तु के स्थान पर निर्भर करता है।
यदि किसी वस्तु का द्रव्यमान m हो तो उस पर आरोपित गुरुत्वीय बल
F = mg

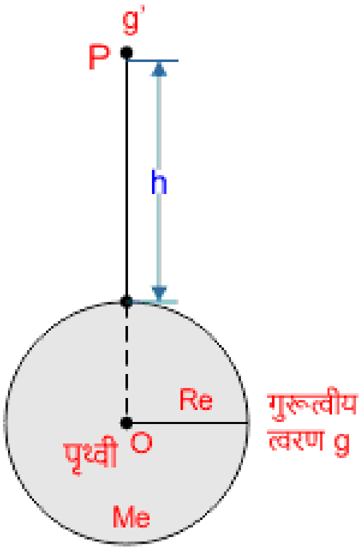
जहां g गुरुत्वीय त्वरण है तो

$$\boxed{g = \frac{F}{m}}$$

अतः गुरुत्वीय त्वरण का मात्रक मीटर/सेकंड^2 अथवा न्यूटन/किग्रा होता है। एवं विमीय सूत्र $[LT^{-2}]$ है गुरुत्वीय त्वरण एक सदिश राशि है।

पृथ्वी तल से ऊपर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण **g** का मान

माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e तथा त्रिज्या R_e है तो पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण
$g = G\frac{M_e}{R_e^2}$ समी.1



यदि पृथ्वी तल से h ऊंचाई पर गुरुत्वीय त्वरण g' है जैसा चित्र में दिखाया गया है तो

$g' = G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}$ समी.②

समी.② को समी.① से भाग देने पर

$$\frac{g'}{g} = \frac{GM_e}{(R_e+h)^2} \times \frac{R_e^2}{GM_e}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{R_e^2}{(R_e+h)^2}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{R_e^2}{R_e^2(1+h/R_e)^2}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{1}{(1+h/R_e)^2}$$

$$g' = \frac{g}{(1+h/R_e)^2}$$

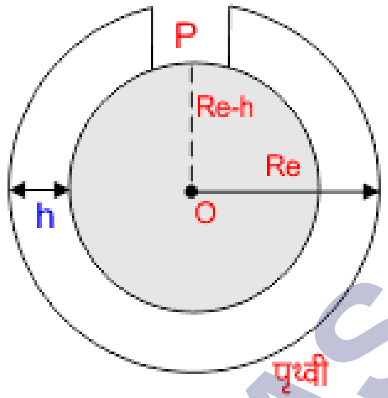
अर्थात $\boxed{g' < g}$

अतः समीकरण द्वारा स्पष्ट होता है कि पृथ्वी तल से ऊपर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण g का मान घटता है।

पृथ्वी तल से **नीचे** जाने पर गुरुत्वीय त्वरण **g** का मान

माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e तथा त्रिज्या R_e है तो पृथ्वी सतह पर गुरुत्वीय त्वरण

$g = G\frac{M_e}{R_e^2}$ समी.①



यदि हम पृथ्वी में सुरंग बनाकर h गहराई नीचे चले जाते हैं तो यह पृथ्वी $(R_e - h)$ त्रिज्या की रह जाएगी। एवं पृथ्वी का द्रव्यमान M'_e हो जाता है। यदि h गहराई पर गुरुत्वीय त्वरण g' है तो

$g' = G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}$ समी.②

समी.② को समी. ① से भाग देने पर

$$\frac{g'}{g} = \frac{GM'_e}{(R_e-h)^2} \times \frac{R_e^2}{GM_e}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{M'_e R_e^2}{M'_e (R_e-h)^2}$$

यदि पृथ्वी का घनत्व ρ है तो

$M_e = \frac{4}{3}\pi R_e^3 \rho$

(चूंकि पृथ्वी गोल है इसलिए यह गोले का घनत्व है जहां R_e त्रिज्या है।)

तथा $M'_e = \frac{4}{3}\pi(R_e - h)^3\rho$

अतः M_e तथा M'_e का मान रखने पर

$$\frac{g'}{g} = \frac{4/3\pi(R_e-h)^3\rho R_e^2}{4/3\pi R_e^3\rho(R_e-h)^2}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{R_e-h}{R_e}$$

$$\frac{g'}{g} = \left(1-\frac{h}{R_e}\right)$$

$$g' = g\left(1-\frac{h}{R_e}\right)$$

अर्थात $\boxed{g' < g}$

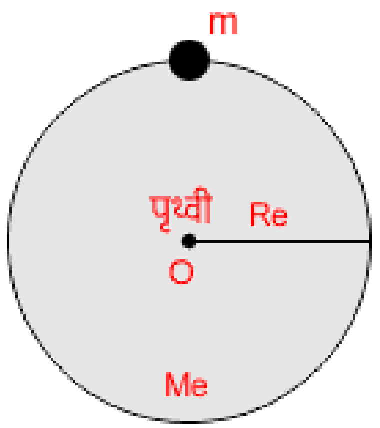
अतः इस समीकरण द्वारा स्पष्ट होता है कि पृथ्वी तल से नीचे जाने पर गुरुत्वीय त्वरण g का मान घटता है।

गुरुत्वीय त्वरण के मान में परिवर्तन

1. गुरुत्वीय त्वरण g का मान पृथ्वी के ध्रुवो पर अधिकतम होता है।
2. गुरुत्वीय त्वरण g का मान भूमध्य रेखा पर न्यूनतम होता है।
3. पृथ्वी के केंद्र पर गुरुत्वीय त्वरण का मान शून्य होता है।
4. पृथ्वी सतह से नीचे तथा ऊपर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण का मान घटता है।

G तथा g में संबंध

सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक G तथा गुरुत्वीय त्वरण g में संबंध क्या है इस अध्याय में स्थापित करेंगे। g and G relation



माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e तथा त्रिज्या R_e है जैसे चित्र से स्पष्ट है। माना पृथ्वी की सतह पर m द्रव्यमान की कोई वस्तु है। यदि पृथ्वी का द्रव्यमान उसके केंद्र पर केंद्रित है तो इस स्थिति में,
पृथ्वी द्वारा वस्तु पर लगाया गया आकर्षण बल

$F = G\frac{M_e m}{R_e^2}$ समी.①

यदि पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण g हो तो m द्रव्यमान की वस्तु पर लगने वाला गुरुत्व बल

$F = mg$ समी.②

समी.① व समी.② से

$F = F$

$mg = G\frac{M_e m}{R_e^2}$

$$\boxed{g = G\frac{M_e}{R_e^2}}$$

यही g तथा G में संबंध है इस सूत्र में m प्राप्त नहीं होता है इस प्रकार स्पष्ट होता है कि गुरुत्वीय त्वरण का मान वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

गुरुत्वीय विभव

एकांक द्रव्यमान को अनंत से गुरुत्वीय क्षेत्र के अंतर्गत किसी बिंदु O तक लाने में किए गए कार्य को उस बिंदु पर गुरुत्वीय विभव कहते हैं।
यदि m द्रव्यमान की किसी वस्तु को गुरुत्वीय क्षेत्र के किसी बिंदु तक लाने में किया गया कार्य W हो तो गुरुत्वीय विभव

$$\boxed{v = -\frac{W}{m}}$$

चूंकि यह कार्य हमें स्वयं ही प्राप्त हो रहा है इसलिए यह ऋणात्मक होता है। अतः गुरुत्वीय विभव सदैव ऋणात्मक ही होता है। क्योंकि यह हमें करना नहीं पड़ता, स्वयं ही प्राप्त हो जाता है।

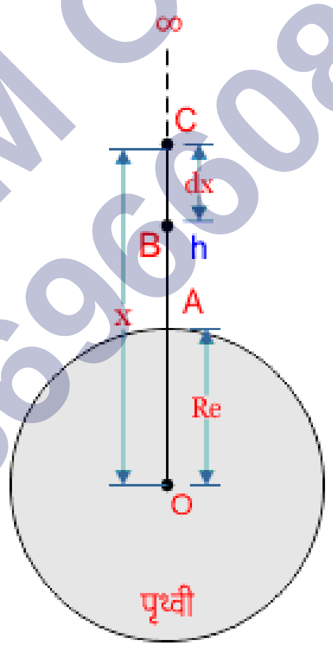
गुरुत्वीय विभव का मात्रक जूल/किग्रा होता है। एवं विमीय सूत्र $[L^2T^{-2}]$ है। गुरुत्वीय विभव एक अदिश राशि है।

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

किसी पिंड को अनंत से गुरुत्वीय क्षेत्र के अंतर्गत किसी बिंदु O तक लाने में किए गए कार्य को उस बिंदु पर उस वस्तु की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहते हैं। इसे U से प्रदर्शित करते हैं। इसका मात्रक जूल होता है तथा विमीय सूत्र $[ML^2T^{-2}]$ है। यह एक अदिश राशि है।

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा सदैव ऋणात्मक (-) ही होती है क्योंकि इसमें पिंड को अनंत से गुरुत्वीय क्षेत्र तक लाने में कार्य नहीं करना पड़ता है बल्कि स्वयं ही प्राप्त हो जाता है। इस कारण इसका मान सदैव ऋणात्मक ही होता है।

पृथ्वी पर किसी पिंड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा



माना पृथ्वी के केंद्र से x दूरी पर m द्रव्यमान का एक पिंड, बिंदु C पर स्थित है। जिसकी O से दूरी x है। यदि पृथ्वी का द्रव्यमान M_e तथा त्रिज्या R_e है तो पिंड पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल

$$F = G\frac{M_e m}{R_e^2}$$

अब यदि पिंड को बिंदु C से बिंदु B तक dx विस्थापित करने में पिंड पर किया गया कार्य W हो तो

$$W = F \cdot dx$$

$$W = G\frac{M_e m}{x^2}\,dx$$

इसी प्रकार पिंड को अनंत से पृथ्वी सतह A तक लाने में किया गया कार्य

$$W = \int_{R_e}^{\infty} \frac{GM_e m}{x^2}\,dx$$

$$W = GM_e m\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{R_e}^{\infty}$$

$$W = GM_e m\left[-\frac{1}{x}\right]_{R_e}^{\infty}$$

$$W = GM_e m\left[-\frac{1}{\infty}\right] + \frac{1}{R_e}$$

$$W = GM_e m\frac{1}{R_e}$$

$$W = \frac{GM_e m}{R_e}$$

गुरुत्वीय बल द्वारा पिंड को अनंत से पृथ्वी तल तक लाने में किया गया कार्य ही पिंड में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाती है। जिसे गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहते हैं।

अतः पृथ्वी की सतह पर m द्रव्यमान के पिंड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा इस कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर होगी। तब

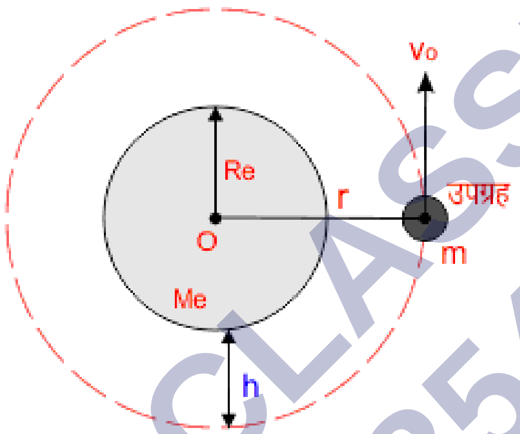
$$U = -W$$

$$\boxed{U = -G\frac{M_e m}{R_e}}$$

उपग्रह का कक्षा वेग/चाल

माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e तथा त्रिज्या R_e है पृथ्वी सतह से h ऊंचाई पर एक उपग्रह है जिसका द्रव्यमान m है। यह उपग्रह पृथ्वी के चारों ओर वृत्तीय कक्षा में परिक्रमण कर रहा है तो पृथ्वी द्वारा उपग्रह पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल

$F = G\frac{M_e m}{r^2}$ समी.①



चूंकि उपग्रह पृथ्वी के चारों ओर एक वृत्तीय पथ पर गति कर रहा है तो उस पर लगने वाला अभिकेंद्र बल

$F = \frac{mv_o}{r}$ समी.②

समी.① व समी.② से

$\frac{mv_o}{r} = G\frac{M_e m}{r^2}$

$v_o^2 = G\frac{M_e}{r}$

$v_o = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$

लेकिन $r = R_e + h$ है तो

$v_o = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e+h}}$

यदि पृथ्वी सतह पर गुरुत्वीय त्वरण g है तब

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2}$$

$GM_e = gR_e^2$

अब GM_e का मान उपरोक्त समीकरण में रखने पर

$$v_o = \sqrt{\frac{gR_e^2}{R_e+h}}$$

$$\boxed{v_o = \sqrt{R_e^2 \frac{g}{R_e + h}}}$$

यदि कोई उपग्रह पृथ्वी तल से इतने समीप है कि R_e की तुलना में h को शून्य (नगण्य) मान सकते हैं तो

$$v_o = \sqrt{\frac{gR_e^2}{R_e}}$$

$$\boxed{v_o = \sqrt{gR_e}}$$

यही कक्षीय वेग/चाल का सूत्र है कक्षीय वेग का मान उपग्रह के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है यह उपग्रह की ऊंचाई पर निर्भर करता है। उपग्रह की ऊंचाई बढ़ाने पर कक्षीय वेग का मान घटता है। कक्षीय वेग (orbital speed of satellite) को v_o से प्रदर्शित करते हैं।

कक्षीय वेग का मान

सूत्र $v_o = \sqrt{gR_e}$ से

पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण g = 9.8 मीटर/सेकंड^2 तथा पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6.4 \times 10^6$ मीटर होती है तो कक्षीय वेग का मान

$v_o = \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6}$

v_o = 7919.6 मीटर/सेकंड

v_o = 7.92 किमी/सेकंड

या $\boxed{v_o = \sqrt{8 \text{ किमी/सेकंड}}}$

अतः कक्षीय वेग का मान 8 किमी/सेकंड होता है।

परिक्रमण काल (**period of revolution of satellite**)

यदि उपग्रह का परिक्रमण काल T है एवं इसकी पृथ्वी के केंद्र से दूरी r है तो उपग्रह के परिक्रमण काल का सूत्र

$T = \frac{\text{उपग्रह की परिधि}}{\text{कक्षीय चाल}}$

$T = \frac{2\pi r}{v_o}$

चूंकि $r = R_e + h$ तथा v_o का मान रखने पर

$T = \frac{2\pi(R_e+h)}{\sqrt{GM_e/r}}$

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_e}} \times r^{3/2}$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_e + h)^3}{GM_e}}}$$

परंतु $GM_e = gR_e^2$ रखने पर

$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_e+h)^3}{gR_e^2}}$

अथवा $\boxed{T = \frac{2\pi}{R_e}\sqrt{\frac{(R_e + h)^3}{g}}}$

यदि उपग्रह, पृथ्वी के अति समीप है तो h<<R

अत: h को नगण्य मानने पर

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e^3}{gR_e^2}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_e}{g}}}$$

यह उपग्रह के परिक्रमण काल का सूत्र है। उपग्रह का परिक्रमण काल, उपग्रह की ऊंचाई h पर निर्भर करता है h बढ़ाने पर T का मान बढ़ जाता है।

परिक्रमण काल का मान

सूत्र $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$ से

$g = 9.8$ मीटर/सेकंड^2 तथा पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6.4 \times 10^6$ मीटर रखने पर परिक्रमण काल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{6.4\times10^6}{9.8}}$$

T = 5079 सेकंड

या $\boxed{T = 84.6 \text{ मिनट}}$

अत: परिक्रमण काल का मान 84.6 मिनट होता है।

भू-तुल्यकाली/स्थैतिक उपग्रह

पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमा कर रहे किसी उपग्रह का वह वृत्तीय पथ (कक्षा) जिस पर वह पृथ्वी के समान ही 24 घंटे में परिक्रमा करता है। एवं इसके घूर्णन की दिशा पश्चिम से पूर्व ही होती है। तो इस प्रकार की कक्षा को भू तुल्यकाली कक्षा कहते हैं। तथा इस कक्षा में परिक्रमण कर रहे उपग्रह को भू-तुल्यकाली उपग्रह (geo synchronous satellite) कहते हैं। भू तुल्यकाली उपग्रह का उपयोग संचार क्षेत्र में किया जाता है।

भू तुल्यकाली उपग्रह का परिक्रमण काल 24 घंटे होता है अर्थात यह उपग्रह पृथ्वी के परितः अपनी कक्षा में एक चक्कर पूरा करने में 24 घंटे का समय लेते हैं।

भू तुल्यकाली उपग्रह को भू स्थैतिक उपग्रह भी कहते हैं। क्योंकि यह उपग्रह पृथ्वी के समान चाल से ही तथा घूर्णन दिशा भी एक जैसी ही होती है जिस कारण पृथ्वी तल के किसी बिंदु के सापेक्ष यह उपग्रह स्थित प्रतीत होता है इसी कारण इसे भू स्थैतिक उपग्रह कहते हैं।

सूत्र आवर्तकाल

T = $\frac{2\pi}{R_e}\sqrt{\frac{(R_e+h)^3}{g}}$ से

इससे हम भू-तुल्यकाली उपग्रह की पृथ्वी से ऊंचाई ज्ञात करेंगे।

चूंकि T = 24 घंटे = 24 × 3600 सेकंड

R_e = 6.4 × 10^6 मीटर

g = 9.8 मीटर/सेकंड^2 तो

24 × 3600 = $\frac{2\pi}{6.4\times10^6}\sqrt{\frac{(6.4\times10^6+h)^3}{9.8}}$

हल करने के पश्चात

$\boxed{h = 36000 \text{किमी.}}$

अतः भू तुल्यकाली उपग्रह की पृथ्वी तल से ऊंचाई 36000 किलोमीटर होती है।

भू तुल्यकाली (स्थैतिक) उपग्रह की विशेषताएं

1. इसका परिक्रमण काल पृथ्वी के समान ही 23 घंटे 56 मिनट 4 सेकंड (24 घंटे) ही होता है।
2. यह उपग्रह पृथ्वी तल से 36000 किलोमीटर की ऊंचाई पर स्थित होते हैं।
3. यह उपग्रह अपनी धूरी पर पश्चिम से पूरब की ओर परिक्रमण करते हैं।
4. यह उपग्रह लगभग 42200 किलोमीटर त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में परिक्रमा करते हैं।

धुवीय उपग्रह

वह उपग्रह जिनकी ऊंचाई पृथ्वी तल से काफी कम होती है। एवं जो अपनी धूरी पर पृथ्वी के परितः उत्तर ध्रुव से दक्षिण ध्रुव की ओर जाते हैं। अर्थात यह उत्तर-दक्षिण ध्रुव में परिक्रमा करते हैं। इस प्रकार के उपग्रह को ध्रुवीय उपग्रह (polar satellite) कहते हैं। एवं जिस कक्षा में ध्रुवीय उपग्रह परिक्रमा करते हैं उसे ध्रुवीय कक्षा कहते हैं।
ध्रुवीय उपग्रह का आवर्तकाल लगभग 100 मिनट होता है।

ध्रुवीय उपग्रह की विशेषताएं

1. इसका परिक्रमण काल 100 मिनट के लगभग होता है।
2. यह पृथ्वी तल से लगभग 500 से 800 किलोमीटर की ऊंचाई पर स्थित होते हैं।
3. यह उपग्रह अपनी कक्षा में उत्तर से दक्षिण ध्रुव की ओर परिक्रमण करते हैं।

ध्रुवीय उपग्रह का उपयोग

1. इसका उपयोग मौसम की जानकारी तथा जासूसी में किया जाता है।
2. पृथ्वी की सतह देखने तथा सैन्य परीक्षण में।
3. मानचित्र, जलवायु परिवर्तन में जानकारी तथा भू-भाग का भौगोलिक दृश्य में इसका उपयोग होता है।

पलायन वेग

जब हम पृथ्वी तल से किसी पिंड को ऊपर की ओर फेंकते हैं तो वह पिंड कुछ ऊंचाई पर जाने के पश्चात नीचे लौट आता है। अर्थात् वह न्यूनतम वेग जिससे किसी पिंड को पृथ्वी तल से ऊपर की ओर फेंकने पर वह पिंड पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र से बाहर निकल जाए, और वापस पृथ्वी पर न आ सके। तो पिंड के इस वेग को पलायन वेग (escape velocity) कहते हैं। इसे v_e से प्रदर्शित करते हैं। इसे पलायन चाल भी कहते हैं।

पलायन ऊर्जा

पलायन वेग वह न्यूनतम वेग होता है जिससे किसी पिंड को पृथ्वी तल से फेंकने पर वह पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र से बाहर निकल जाता है और पृथ्वी पर कभी वापस नहीं आता है

पलायन वेग से फेंकने के लिए पिंड को दी गई गतिज ऊर्जा को पलायन ऊर्जा (escape energy) कहते हैं।
माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e तथा त्रिज्या R_e है एवं पृथ्वी से फेंके गए पिंड का द्रव्यमान m है तो पलायन ऊर्जा का सूत्र निम्न होगा।

पलायन ऊर्जा $\boxed{U = \frac{GM_e m}{R_e}}$

पलायन वेग का सूत्र (व्यंजक)

माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e तथा त्रिज्या R_e है तो पृथ्वी तल पर स्थित m द्रव्यमान के पिंड की स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{GM_e m}{R_e}$$

अर्थात पिंड को पृथ्वी तल से अनंत पर भेजने के लिए $\frac{GM_e m}{R_e}$ कार्य करना होगा। यदि पिंड को $\frac{GM_e m}{R_e}$ गतिज ऊर्जा दे दी जाए, तो वह पिंड अनंत पर चला जाएगा। अर्थात पिंड सदैव के लिए पलायन कर जाएगा। यही पिंड की पलायन ऊर्जा होगी। अतः

पलायन ऊर्जा = $\frac{GM_e m}{R_e}$

यह पलायन ऊर्जा पिंड की गतिज ऊर्जा के बराबर होगी तो

$$\frac{GM_e m}{R_e} = \frac{1}{2} m v_e^2$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$$

अब $GM_e = gR_e^2$ रखने पर

$$v_e = \sqrt{\frac{2gR_e^2}{R_e}}$$

$$v_e = \sqrt{2gR_e}$$

$$\boxed{v_e = \sqrt{2gR_e}}$$

यही पलायन वेग का सूत्र है। पलायन वेग पिंड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है यह ग्रह की त्रिज्या तथा गुरुत्वीय त्वरण पर निर्भर करता है।

पलायन वेग का मान

सूत्र $v_e = \sqrt{2gR_e}$ से

पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण g = 9.8 मीटर/सेकंड^2 तथा त्रिज्या $R_e = 6.4 \times 10^6$ मीटर

तो पलायन वेग $v_e = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6}$ मीटर/सेकंड^2

$\boxed{v_e = 11.2}$ किमी/सेकंड

पलायन वेग का मान 11.2 किलोमीटर/सेकंड होता है।

पलायन वेग तथा कक्षीय वेग में संबंध

पृथ्वी के निकट किसी उपग्रह का कक्षीय वेग $v_o = \sqrt{gR_e}$ समी.①

पृथ्वी तल से फेंकी गई किसी वस्तु का पलायन वेग $v_e = \sqrt{2gR_e}$ समी.②

समी.② से समी.① को भाग देने पर

$$\frac{v_o}{v_e} = \frac{\sqrt{gR_e}}{\sqrt{2gR_e}}$$

$$\frac{v_o}{v_e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{gR_e}}{\sqrt{gR_e}}$$

$$\boxed{v_e = \sqrt{2}v_o}$$

यही कक्षीय वेग और पलायन वेग में संबंध है।

अतः पृथ्वी के निकट परिक्रमा कर रहे उपग्रह की कक्षीय चाल में अगर $\sqrt{2}$ की बढ़ोतरी हो जाए, तो वह उपग्रह अपनी कक्षा छोड़कर पलायन कर जाएगा और कभी वापस लौटकर पृथ्वी पर नहीं आएगा।

NCERT SOLUTIONS

अभ्यास (पृष्ठ संख्या 206-208)

प्रश्न 1 निम्नलिखित के उत्तर दीजिए-

a. आप किसी आवेश का वैद्युत बलों से परिरक्षण उस आवेश को किसी खोखले चालक के भीतर रखकर कर सकते हैं। क्या आप किसी पिण्ड का परिरक्षण, निकट में रखे पदार्थ के गुरुत्वीय प्रभाव से, उसे खोखले गोले में रखकर अथवा किसी अन्य साधनों द्वारा कर सकते हैं?
b. पृथ्वी के परितः परिक्रमण करने वाले छोटे अन्तरिक्षयान में बैठा कोई अन्तरिक्ष यात्री गुरुत्व बल का संसूचन नहीं कर सकता। यदि पृथ्वी के परितः परिक्रमण करने वाला अन्तरिक्ष स्टेशंन आकार में बड़ा है, तब क्या वह गुरुत्व बल के संसूचन की आशा कर सकता है?
c. यदि आप पृथ्वी पर सूर्य के कारण गुरुत्वीय बल की तुलना पृथ्वी पर चन्द्रमा के कारण गुरुत्व बल से करें, तो आप यह पाएँगे कि सूर्य का खिंचाव चन्द्रमा के खिंचाव की तुलना में अधिक है (इसकी जाँच आप स्वयं आगामी अभ्यासों में दिए गए आँकड़ों की सहायता से कर सकते हैं) तथापि चन्द्रमा के खिंचाव का ज्वारीय प्रभाव सूर्य के ज्वारीय प्रभाव से अधिक है। क्यों?

उत्तर-

a. गुरुत्वीय प्रभाव से किसी पिण्ड का परिरक्षण किसी भी प्रकार से अथवा साधन से नहीं किया जा सकता।
b. हाँ, यदि अन्तरिक्ष स्टेशन पर्याप्त रूप में बड़ा है तो (UPBoardSolutions.com) यात्री उस स्टेशन के कारण गुरुत्व बल का संसूचन कर सकता है।
c. किसी ग्रह के कारण ज्वारीय प्रभाव दूरी के घन के व्युत्क्रमानुपाती होता है; अत: यह गुरुत्वीय बल से मुक्त है। चूंकि सूर्य की पृथ्वी से दूरी, चन्द्रमा की पृथ्वी से दूरी की तुलना में बहुत अधिक है; अतः चन्द्रमा के कारण ज्वारीय प्रभाव अधिक होता है।

प्रश्न 2 सही विकल्प का चयन कीजिए-

a. बढ़ती तुंगता के साथ गुरुत्वीय त्वरण बढ़ता/घटता है।

b. बढ़ती गहराई के साथ (पृथ्वी को एकसमान घनत्व का गोला मानकर) गुरुत्वीय त्वरण बढता/घटता है।

c. गुरुत्वीय त्वरण पृथ्वी के द्रव्यमान/पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता।

d. पृथ्वी के केन्द्र से r_2, तथा r_1 दूरियों के दो बिन्दुओं के बीच स्थितिज ऊर्जा- अन्तर के लिए सूत्र – G Mm $(1/r_2 - 1/r_1)$ सूत्र mg $(r_2 - r_1)$ से अधिक/कम यथार्थ है।

उत्तर-

a. घटता है।

b. घटता है।

c. पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता।

d. अधिक यथार्थ है।

प्रश्न 3 मान लीजिए एक ऐसा ग्रह है जो सूर्य के परितः पृथ्वी की तुलना में दोगुनी चाल से गति करता है, तब पृथ्वी की कक्षा की तुलना में इसका कक्षीय आमाप क्या है?

उत्तर-

माना पृथ्वी का परिक्रमण काल = T_E

तब ग्रह का परिक्रमण काल $T_p = \frac{T_E}{2}$ (दिया है)

माना इनके कक्षीय आमाप क्रमशः R_E तथा R_P हैं,

$T^2 \propto R^3$ से

$$\frac{T_P^2}{T_E^2} = \frac{R_P^3}{T_E^3}$$

$$\Rightarrow \frac{R_p}{R_E} = \left(\frac{T_p}{T_E}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore R_p = R_E\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.631R_E$$

अर्थात् ग्रह का आमाप पृथ्वी के आमाप से 0.631 गुना छोटा है।

प्रश्न 4 बृहस्पति के एक उपग्रह, आयो (Io) की कक्षीय अवधि 1.769 दिन तथा कक्षा की त्रिज्या 4.22 × 108 m है। यह दर्शाइए कि बृहस्पति का द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान का लगभग $\frac{1}{100}$ गुना है।

उत्तर- बृहस्पति के उपग्रह का परिंक्रमण काल;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_J}}$$

(जहाँ My = बृहस्पति (Jupiter) का द्रव्यमान] दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_J}$$

$$\therefore M_J \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G}$$

यहाँ कक्षा की त्रिज्या, r = 4.22 × 108 मीटर

कक्षीय अवधि अर्थात् परिक्रमण काल

T = 1.769 दिन = 1.769 × 24 × 60 × 60 सेकण्ड

= 1.53 × 10% सेकण्ड

$$\therefore M_J = \left[\frac{4\times(3.14)^2(4.22\times10^8)^3}{(1.53\times10^5)^2\times(6.67\times10^{-11})}\right]\text{kg}$$

= 1.90 × 1027 किग्रा

परन्तु सूर्य का द्रव्यमान M, = 1.99 × 1030 किग्रा

$$\therefore \frac{M_J}{M_S} = \frac{1.90\times10^{27}\text{kg}}{1.99\times10^{30}\text{kg}} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

अर्थात् $M_J = \left(\frac{1}{1000}\right)M_S$ (यही सिद्ध करना था)

प्रश्न 5 मान लीजिए कि हमारी आकाशगंगा में एक सौर द्रव्यमान के 2.5 × 1011 तारे हैं। मंदाकिनीय केन्द्र से 50,000ly दूरी पर स्थित कोई तारा अपनी एक परिक्रमा पूरी करने में कितना समय लेगा? आकाशगंगा का व्यास 105ly लीजिए।

उत्तर- प्रश्नानुसार, तारा आकाशगंगा के परितः R = 50,000ly त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर घूमती है।
आकाशगंगा का द्रव्यमान $M = 2.5 \times 10^{11} \times$ सौर द्रव्यमान

$= 2.5 \times 10^{11} \times 2 \times 10^{30} kg$

$= 5.0 \times 10^{41} kg$

जबकि $R = 50{,}000ly = 5 \times 10^{41} \times 9.46 \times 10^{15} m$

$= 4.73 \times 10^{20} m$

$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM}$ से,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$= 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{(4.73 \times 10^{20})^3}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.0 \times 10^{41}}}$$

$$= 1.12 \times 10^{16} s$$

प्रश्न 6 सही विकल्प का चयन कीजिए–

a. यदि स्थितिज ऊर्जा का शून्य अनन्त पर है तो कक्षा में परिक्रमा करते किसी उपग्रह की कुल ऊर्जा इसकी गतिज/स्थितिज ऊर्जा का ऋणात्मक है।
b. कक्षा में परिक्रमा करने वाले किसी उपग्रह को पृथ्वी के गुरुत्वीय प्रभाव से बाहर निकालने | के लिए आवश्यक ऊर्जा समान ऊँचाई (जितनी उपग्रह की है) के किसी स्थिर पिण्ड को | पृथ्वी के प्रभाव से बाहर प्रक्षेपित करने के लिए आवश्यक ऊर्जा से अधिक/कम होती है।

उत्तर-

a. गतिज ऊर्जा का ऋणात्मक है।
b. कम होती है।

प्रश्न 7 क्या किसी पिण्ड की पृथ्वी से पलायन चाल

a. पिण्ड के द्रव्यमान,
b. प्रक्षेपण बिन्दु की अवस्थिति,
c. प्रक्षेपण की दिशा,
d. पिण्ड के प्रमोचन की अवस्थिति की ऊँचाई पर निर्भर करती है?

उत्तर-

a. नहीं,
b. नहीं,
c. नहीं,
d. हाँ, निर्भर करती है।

प्रश्न 8 कोई धूमकेतु सूर्य की परिक्रमा अत्यधिक दीर्घवृत्तीय कक्षा में कर रहा है। क्या अपनी कक्षा में धूमकेतु की शुरू से अन्त तक

a. रैखिक चाल,
b. कोणीय चाल,
c. कोणीय संवेग,
d. गतिज ऊर्जा,
e. स्थितिज ऊर्जा,
f. कुल ऊर्जा नियत रहती है? सूर्य के अति निकट आने पर धूमकेतु के द्रव्यमान में ह्रास को नगण्य मानिए।

उत्तर-

a. नहीं,

b. नहीं,
c. हाँ, कोणीय संवेग नियत रहता है,
d. नहीं,
e. नहीं,
f. हाँ, कुल ऊर्जा नियत रहती है।

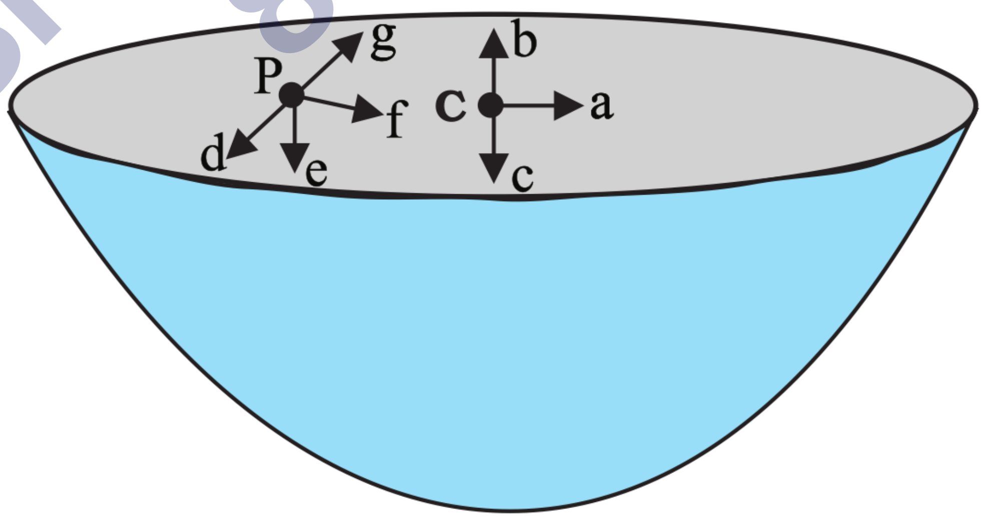
प्रश्न 9 निम्नलिखित में से कौन-से लक्षण अन्तरिक्ष में अन्तरिक्ष यात्री के लिए दुःखदायी हो सकते हैं?

a. पैरों में सूजन,
b. चेहरे पर सूजन,
c. सिरदर्द,
d. दिविन्यास समस्या।

उत्तर-

(b), (c) तथा (d)।

प्रश्न 10 एकसमान द्रव्यमान घनत्व के अर्द्धगोलीय खोलों द्वारा परिभाषित ढोल के पृष्ठ के केन्द्र पर गुरुत्वीय तीव्रता की दिशा [देखिए चित्र] (i) a, (ii) b, (iii) c, (iv) 0 में किस तीर द्वारा दर्शाई जाएगी?



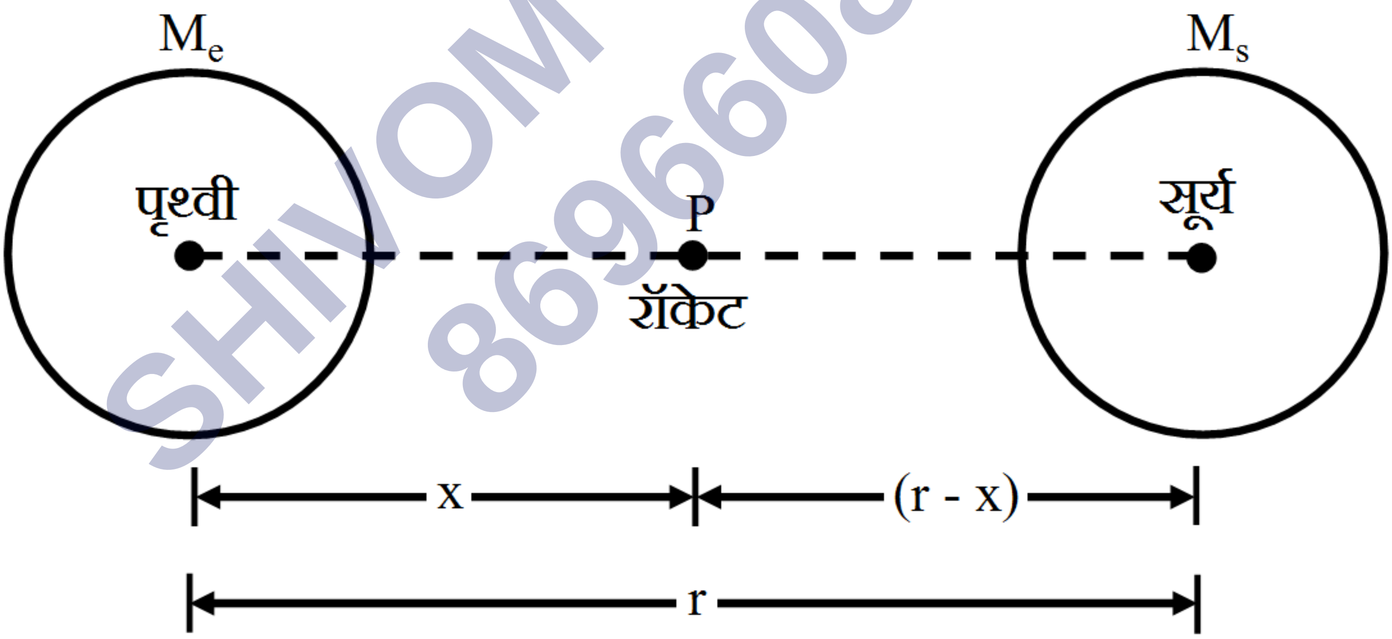
उत्तर- यदि हमे गोले को पूरा कर दें तो केन्द्र पर नेट तीव्रता शून्य होगी। इसका यह अर्थ है कि केन्द्र पर दोनों अर्द्धगोलों के कारण तीव्रताएँ परस्पर विपरीत तथा बराबर होंगी। अतः दिशा (iii) c द्वारा प्रदर्शित होगी।

प्रश्न 11 उपर्युक्त समस्या में किसी याद्दच्छिक बिन्दु P पर गुरुत्वीय तीव्रता किस तीर (i) d, (ii) e, (iii) f, (iv) g द्वारा व्यक्त की जाएगी?

उत्तर- (ii) e द्वारा प्रदर्शित होगी।

प्रश्न 12 पृथ्वी से किसी रॉकेट को सूर्य की ओर दागा गया है। पृथ्वी के केन्द्र से किस दूरी पर रॉकेट पर गुरुत्वाकर्षण बल शून्य है? सूर्य का द्रव्यमान = 2×10^{30}kg, पृथ्वी का द्रव्यमान = 6×10^{24}kg अन्य ग्रहों आदि के प्रभावों की उपेक्षा कीजिए (कक्षीय त्रिज्या = 1.5×10^{11}m)

उत्तर- माना पृथ्वी के केन्द्र से x मीटर की दूरी पर रॉकेट पर गुरुत्वाकर्षण बल शून्य है। इस क्षण रॉकेट की सूर्य से दूरी = (r - x) मीटर



जहाँ r = सूर्य तथा पृथ्वी के बीच की दूरी अर्थात्

पृथ्वी की कक्षीय त्रिज्या = 1.5×10^{11} मीटर यह तब भी सम्भव है जबकि पृथ्वी द्वारा रॉकेट पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल = सूर्य द्वारा रॉकेट पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल

अर्थात $\frac{GM_e.m}{x^2} = \frac{GM_s.m}{(r-x)^2}$

(जहाँ m = रॉकिट का द्रव्यमान; M = पृथ्वी का द्रव्यमान)

= 6 × 10^{24} किग्रा तथा Ms = सूर्य का द्रव्यमान = 2 × 10^{30} किग्रा)

अतः $\left(\frac{r-x}{x}\right)^2 = \frac{M_s}{M_e}$

$$= \frac{2\times10^{30}kg}{6\times10^{24}kg} = \frac{1}{3} \times 10^6$$

$$\therefore \left(\frac{r-x}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{3} \times 10^6} = \frac{10^3}{1.732} = 577.37$$

अथवा r - x = 577.37x या 578.37x = r

$$\therefore x = \left(\frac{r}{578.37}\right) = \frac{1.5\times10^{11}m}{578.37} = 2.593 \times 10^8 m$$

$$= 2.6 \times 10^8 m$$

प्रश्न 13 आप सूर्य को कैसे तोलेंगे, अर्थात् उसके द्रव्यमान का आकलन कैसे करेंगे? सूर्य के परितः पृथ्वी की कक्षा की औसत त्रिज्या 1.5 × 10^8 km है।

उत्तर- पृथ्वी के परितः उपग्रह के परिक्रमण काल के सूत्र $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_e}}$, के अनुरूप सूर्य के परितः पृथ्वी का परिक्रमण काल

$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_e}}$ (जहाँ M_s = सूर्य का द्रव्यमान)

$$\therefore T^2 = \frac{4\pi^2r^3}{G.M_s}$$

अतः सूर्य का द्रव्यमान $M_s = \frac{4\pi r^3}{T^2.G} \ldots(1)$

यहाँ पृथ्वी की कक्षा की त्रिज्या r = 1.5 × 10^8 किमी = 1.5 × 10^{11} मीटर

पृथ्वी का सूर्य के परितः परिक्रमण काल T = 1 वर्ष = 3.15 × 10 Sec.

$$\therefore \mathrm{M_s} = \left[\frac{4\times(3.14)^2(1.5\times10^{11})^3}{(3.15\times10^7)^2(6.67\times10^{-11})}\right]\mathrm{kg}$$

$$= 2.0 \times 10^{30}\mathrm{kg}$$

प्रश्न 14 एक शनि-वर्ष एक पृथ्वी-वर्ष का 29.5 गुना है। यदि पृथ्वी सूर्य से 1.5 × 10^8 km दूरी पर है, तो शनि सूर्य से कितनी दूरी पर है?

उत्तर- पृथ्वी की सूर्य से दूरी R_{SE} = 1.5 × 10^8km

माना पृथ्वी का परिक्रमण काल = T_E

तब शनि का परिक्रमण काल TS = 29.5T_E

शनि की सूर्य से दूरी R_{SS} = ?

परिक्रमण कालों के नियम से,

$$\therefore \left(\frac{T_S}{T_E}\right)^2 = \left(\frac{R_{SS}}{R_{SE}}\right)^3$$

अतः $\frac{R_{SS}}{R_{SE}} = \left(\frac{T_S}{T_S}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$\Rightarrow R_{SS} = R_{SE}\left(\frac{T_S}{T_S}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= 1.5 \times 10^8 \times (29.5)^{\frac{2}{3}}\mathrm{km}$$

$$= 1.5 \times 10^8 \times 9.55\mathrm{km} = 1.43 \times 10^9\mathrm{km}$$

अतः शनि की सूर्य से दुरी 1.43 × 10^9 है।

प्रश्न 15 पृथ्वी के पृष्ठ पर किसी वस्तु का भार 63N है। पृथ्वी की त्रिज्या की आधी ऊँचाई पर पृथ्वी के कारण इस वस्तु पर गुरुत्वीय बल कितना है?

उत्तर- यदि पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण g हो, तो पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g^I = g\left(1 + \frac{h}{Re}\right)^2$$

यदि वस्तु का द्रव्यमान m हो तो दोनों पक्षों में m से गुणा करने पर,

$$mg^I = \frac{mg}{\left(1 + \frac{h}{Re}\right)^2}$$

(जहाँ Re = पृथ्वी की त्रिज्या)

यहाँ mg = पृथ्वी के पृष्ठ पर वस्तु का भार = 63 न्यूटन

mg' = पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर वस्तु का भार अर्थात् पृथ्वी के कारण वस्तु पर गुरुत्वीय बल Fg

तथा $h = \frac{R_e}{2}$

$$\therefore F_g = \frac{63N}{\left(1+\frac{\frac{R_e}{2}}{R_e}\right)}$$

$$= \frac{63n}{\frac{9}{4}} = \left(\frac{63\times4}{9}\right)N = 28N$$

प्रश्न 16 यह मानते हुए कि पृथ्वी एकसमान घनत्व का एक गोला है तथा इसके पृष्ठ पर किसी वस्तु का भार 250N है, यह ज्ञात कीजिए कि पृथ्वी के केन्द्र की ओर आधी दूरी पर इस वस्तु का भार क्या होगा?

उत्तर- पृथ्वी तल से h गहराई पर गुरुत्वीय त्वरण

$g^I = g\left(1 - \frac{h}{R_e}\right)$ (जहाँ Re = पृथ्वी की त्रिज्या)

अथवा

$mg^1 = mg\left(1 - \frac{h}{R_e}\right)$

यहाँ पृथ्वी के पृष्ठ पर वस्तु का भार mg = 250 N

$h = \frac{R_e}{2}$ (जहाँ Re = पृथ्वी की त्रिज्या)

mg' = इस गहराई पर वस्तु का भार w'

= 125N

प्रश्न 17 पृथ्वी के पृष्ठ से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर कोई रॉकेट 5km s^{-1} की चाल से दागा जाता है। पृथ्वी पर वापस लौटने से पूर्व यह रॉकेट पृथ्वी से कितनी दूरी तक जाएगा? पृथ्वी का द्रव्यमान = 6.0×10^{24}kg; पृथ्वी की माध्य त्रिज्या = 6.4×10^6m तथा G = 6.67 × 10^{-11}N-m^2/ kg^{-2}.

उत्तर- माना रॉकेट का द्रव्यमान = m;

पृथ्वी से ऊर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर रॉकेट का प्रक्षेप्य वेग v = 5 किमी-से-1 = 5×10^3 मी-से$^{-1}$

माना रॉकेट पृथ्वी पर वापस लौटने से पूर्व पृथ्वी से अधिकतम दूरी H ऊँचाई तक जाता है। अत: इस ऊँचाई पर रॉकेट का वेग शून्य हो जाता है।

ऊर्जा संरक्षण सिद्धान्त से पृथ्वी तल से महत्तम ऊँचाई पर पहुँचने पररॉकेट की गतिज ऊर्जा में कमी = उसकी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि-

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \left(-\frac{GM_em}{R_e+H}\right) - \left(-\frac{GM_em}{R_e}\right)$$

अथवा $\frac{1}{2}mv^2 = GM_em\left[\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_e+H}\right]$

$$= \frac{GM_em(R_e+H-R_e)}{R_e(R_e+H)}$$

अथवा $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_emH}{R_e^2+ReH}$

अथवा $v^2 = \frac{2GM_eH}{R_e^2+R_eH}$

वज्रगुणन करके सरल करने पर, $H = \frac{R_e^2 \times v^2}{2GM_e - R_e v^2}$

इस सूत्र में ज्ञात मान रखने पर,

$$H = \left[\frac{(6.4\times10^6)^2(5\times10^3)^2}{2\times(6.67\times10^{-11})\times(6.0\times10^{24})-(6.4\times10^6)(5\times10^3)^2}\right]m$$

$$= 1.6 \times 10^6 m = 1600 \times 10^3 m = 1600 km$$

प्रश्न 18 पृथ्वी के पृष्ठ पर किसी प्रक्षेप्य की पलायन चाल 11.2kms^{-1} है। किसी वस्तु को इस चाल की तीन गुनी चाल से प्रक्षेपित किया जाता है। पृथ्वी से अत्यधिक दूर जाने पर इस वस्तु की चाल क्या होगी? सूर्य तथा अन्य ग्रहों की उपस्थिति की उपेक्षा कीजिए।

उत्तर- पृथ्वी के पृष्ठ पर पलायन चाल $v_e \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$ ...(1)

यहाँ पृथ्वी के पृष्ठ पर वस्तु का प्रक्षेप्य वेग) v = 3ve;

माना पृथ्वी से अत्यधिक दूर (अनन्त पर) चाल = vf

ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्त से, पृथ्वी तल पर कुल ऊर्जा = अनन्त पर कुल ऊर्जा

अर्थात् पृथ्वी तल पर (गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा) = अनन्त पर (गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा)

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{-GM_em}{R_e}\right)$$

$$= \frac{1}{2}mv_f^2 + \left(\frac{-GM_em}{\infty}\right)$$

अथवा $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_em}{R_e} = \frac{1}{2}mv_f^2$

अथवा $\frac{1}{2}m(3v_e)^2 - \frac{GM_em}{R_e} = \frac{1}{2}mv_f^2$

परन्तु समीकरण (1) से ,

$$\frac{GM_e}{R_e} = \frac{v_e^2}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}m(3v_e)^2 - \frac{v_e^2m}{2} = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$\frac{1}{2}\left[9mv_e^2 - mv_e^2\right] = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$\Rightarrow v_f^2 = 8v_e \text{ or } v_f = v_e\sqrt{8}$$

परन्तु समीकरण (1) से ,

$$\frac{GM_e}{R_e} = \frac{v_e^2}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}m(3v_e)^2 - \frac{v_e^2m}{2} = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$\frac{1}{2}\left[9mv_e^2 - mv_e^2\right] = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$\Rightarrow v_f^2 = 8v_e \text{ or } v_f = v_e\sqrt{8}$$

परन्तु

$$v_e = 11.2 km/sec$$

$$v_f = 11.2 km/sec \times \sqrt{8}$$

$$= 11.2 \times 2\sqrt{2} \ \ km/sec$$

$$= 11.2 \times 2 \times 1.414 \, km/sec$$

$$= 31.674 km/sec$$

प्रश्न 19 कोई उपग्रह पृथ्वी के पृष्ठ से 400km ऊँचाई पर पृथ्वी की परिक्रमा कर रहा है। इस उपग्रह को पृथ्वी के गुरुत्वीय प्रभाव से बाहर निकालने में कितनी ऊर्जा खर्च होगी? उपग्रह का द्रव्यमान = 200 kg; पृथ्वी का द्रव्यमान = 6.0×10^{24}kg; पृथ्वी की त्रिज्या = 6.4×10^6 m तथा G = 6.67×10^{-11}N m^2 kg^{-2}.

उत्तर- पृथ्वी के परितः उपग्रह की कक्षा की त्रिज्या r = Re + h

r = 6.4 × 106 मीटर + 400 × 103 मीटर

= 68 × 105 मीटर = 6.8 × 106

मीटर अतः इस कक्षा में घूमते हुए उपग्रह की कुल ऊर्जा

$$E = -\left(\frac{GM_{em}}{2r}\right)$$

(जहाँ m = उपग्रह का द्रव्यमान, Me = पृथ्वी का द्रव्यमान)

पृथ्वी के.गुरुत्वीय प्रभाव से उपग्रह को बाहर निकालने के लिए इसको दी जाने वाली आवश्यक ऊर्जा

$$E_B = -E = +\frac{GM_{em}}{2r}$$

(चूँकि बाहर निकलने पर उपग्रह की कुल ऊर्जा = शून्य आवश्यक ऊर्जा (बंधन ऊर्जा)

ज्ञात मान रखने पर,

$$E_B = \left[\frac{(6.67\times10^{-11})(6.0\times10^{24})\times200}{2\times6.8\times10^{6}}\right]J$$

$$= 5.89\times10^{9J}$$

प्रश्न 20 दो तारे, जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान (2×10^{30}kg) के बराबर है, एक-दूसरे की ओर सम्मुख टक्कर के लिए आ रहे हैं। जब वे 10^9km दूरी पर हैं तब इनकी चाल उपेक्षणीय है। ये तारे किस चाल से टकराएँगे? प्रत्येक तारे की त्रिज्या 10^4km है। यह मानिए कि टकराने के पूर्व तक तारों में कोई विरूपण नहीं होता (G के ज्ञात मान का उपयोग कीजिए)।

उत्तर- दिया है, प्रत्येक तारे को द्रव्यमान (माना) $M = 2 \times 10^{30}$ किग्रा तथा तारों के बीच प्रारम्भिक दूरी (माना) $r_1 = 10^9$ किमी $= 10^{12}$ मी।

तारों की प्रारम्भिक कुल ऊर्जा E_i = प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा + प्रारम्भिक स्थितिज ऊर्जा

जब दोनों तारे परस्पर टकराते हैं, तो उनके बीच की दूरी $r_2 = 2 \times x$ तारे की त्रिज्या = 2R यदि तारों का ठीक टकराने से पूर्व वेग v हो अर्थात् वे v चाल से टकराते हैं, तो तारों की कुल अन्तिम ऊर्जा E_f = अन्तिम गतिज ऊर्जा + अन्तिम स्थितिज ऊर्जा

$$= 0 + \left[-\frac{GMM}{r_1}\right] = -\left[\frac{GM^2}{r_1}\right]$$

$$= 2\times\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) + \left[-\frac{GMM}{2R}\right]$$

$$= Mv^2 - \frac{GM^2}{2R}$$

∵ ऊर्जा संरक्षण सिद्धांत से, $E_i = E_f$

अथवा

$$\therefore -\left(\frac{GM^2}{r_1}\right) = Mv^2 - \left(\frac{GM^2}{2R}\right)$$

अथवा $v^2 = \left(\frac{GM}{2R}\right) - \left(\frac{GM}{r_1}\right)$

अथवा $v^2 = GM\left[\frac{1}{2R} - \frac{1}{r_1}\right]$

अब ज्ञात मान रखने पर,

$$v^2 = (6.67 \times 10^{-11})(2 \times 10^{30}) \times \left[\frac{1}{2\times10^7} - \frac{1}{10^{12}}\right]$$

$$= 6.67 \times 12$$

$$\therefore v = \sqrt{6.67 \times 10^{12}} m/ sec$$

$$= 2.58 \times 10^6 m/ sec$$

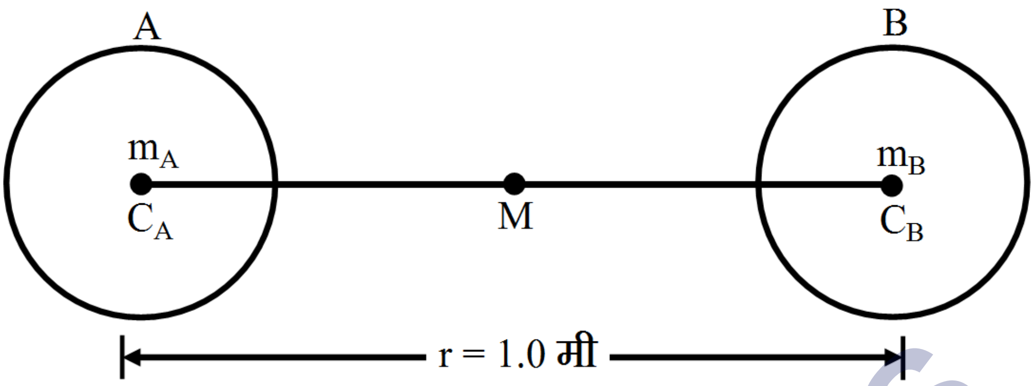
प्रश्न 21 दो भारी गोले जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान 100kg तथा त्रिज्या 0.10m है किसी क्षैतिज मेज पर एक-दूसरे से 1.0m दूरी पर स्थित हैं। दोनों गोलों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा। के मध्य बिन्दु पर गुरुत्वीय बल तथा विभव क्या है? क्या इस बिन्दु पर रखा कोई पिण्ड सन्तुलन में होगा? यदि हाँ, तो यह सन्तुलन स्थायी होगा अथवा अस्थायी?

उत्तर- प्रत्येक गोले का द्रव्यमान इसके केन्द्र पर निहित माना जा सकता है।

अत:! CACB = r = 1.0 मीटर तथा mA = mB = 100 किग्रा

दोनों गोलों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु M की प्रत्येक गोले के केन्द्र से

दूरी $= r_A = r_B = \frac{r}{2} = \frac{1.0m}{2} = 0.5m$



गोले A के कारण बिन्दु M पर गुरुत्वीय बल क्षेत्र (गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता)

$$|\overrightarrow{I_A}| = I_A = \left(\frac{Gm_A}{r_A^2}\right)$$ [दिशा M से CA की दिशा में] ...(1)

गोले B के कारण बिन्दु M पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

$$|\overrightarrow{I_B}| = I_B = \left(\frac{Gm_B}{r_A^2}\right)$$ [दिशा M से Cg की दिशा में] ...(2)

∵ यहाँ mA = mB तथा rA = rB, अत: समीकरण (1) तथा समीकरण (2) से स्पष्ट है कि $|\overrightarrow{I_A}| = |\overrightarrow{I_B}|$. इसके साथ-साथ यह भी स्पष्ट है कि $\overrightarrow{I_A}$ तथा $\overrightarrow{I_B}$ दोनों परस्पर विपरीत दिशा में हैं।

अत: ये एक-दूसरे को निरस्त कर देगी। इसलिए M पर परिणामी गुरुत्व क्षेत्र की तीव्रता = शून्य। परन्तु गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता की परिभाषा से यह M बिन्दु पर रखे एकांक द्रव्यमान पर लगने वाले गुरुत्वीय बल को व्यक्त करेगी। इसलिए गोले के मध्य बिन्दु M पर रखे किसी भी पिण्ड पर गुरुत्वीय बल शून्य होगा। गोले A के कारण बिन्दु M पर गुरुत्वीय बिभव:

$$V_A = \left(\frac{Gm_A}{r_A}\right) = -G\left(\frac{100}{0.5}\right) = -200G \text{ जुल/ किग्रा}$$

गोले B के कारण बिंदु M पर गुरुत्वीय विभव

$$V_B = \left(\frac{Gm_B}{r_B}\right) = -G\left(\frac{100}{0.5}\right) = -200G \text{ जुल/ किग्रा}$$

∴ बिंदु पर परिणामी गुरुत्वीय विभव V = VA + VB

= [(-200G) + (-200G)] जुल/ किग्रा

= -400G जुल/किग्रा

= $-400 \times 6.67 \times 10^{-11}$ जुल/ किग्रा

= -2.668×10^{-8} जुल/ किग्रा

$\approx -2.67 \times 10^{-8}$ जुल/ किग्रा

चूँकि ऊपर सिद्ध किया जा चुका है कि मध्य बिन्दु M पर रखे किसी भी पिण्ड पर परिणामी गुरुत्वीय बल शून्य होगा।

अतः मध्य बिन्दु M पर रखा पिण्ड सन्तुलन में होगा।।

अब यदि पिण्ड को थोड़ा-सा मध्य बिन्दु से किसी भी गोले की ओर विस्थापित कर दिया जाये तो वह एक नेट गुरुत्वीय बल के कारण इस बिन्दु से दूर विस्थापित होता चला जायेगा। अतः पिण्ड का सन्तुलन अस्थायी है।

अतिरिक्त अभ्यास (पृष्ठ संख्या 208)

प्रश्न 22 जैसा कि आपने इस अध्याय में सीखा है कि कोई तुल्यकाली उपग्रह पृथ्वी के पृष्ठ से लगभग 36,000km ऊँचाई पर पृथ्वी की परिक्रमा करता है। इस उपग्रह के निर्धारित स्थल पर पृथ्वी के गुरुत्व बल के कारण विभव क्या है? (अनन्त पर स्थितिज ऊर्जा शून्य लीजिए) पृथ्वी का द्रव्यमान= 6.0×10^{24} kg, पृथ्वी की त्रिज्या= 6400km.

उत्तर- दिया है : पृथ्वी की त्रिज्या RE = 6400km = 6.4×10^{6}m,

पृथ्वी तल से ऊँचाई h = 360×10^{6}m,

पृथ्वी का द्रव्यमान ME = 6.0×10^{24}kg

उपग्रह के निर्धारित स्थल पर गुरुत्वीय विभव

$$V = -\frac{GM_E}{(R_E+h)}$$

$$= -\frac{6.67\times10^{-11}\times6.0\times10^{24}}{(6.4\times10^{6}+36.0\times10^{6})}$$

$$= -9.4\times10^{6} J\ kg^{-1}$$

प्रश्न 23 सूर्य के द्रव्यमान से 2.5 गुने द्रव्यमान का कोई तारा 12km आमाप से निपात होकर 1.2 परिक्रमण प्रति सेकण्ड से घूर्णन कर रहा है (इसी प्रकार के संहत तारे को न्यूट्रॉन तारा कहते हैं। कुछ प्रेक्षित तारकीय पिण्ड, जिन्हें पल्सार कहते हैं, इसी श्रेणी में आते हैं)। इसके विषुवत वृत्त पर रखा कोई पिण्ड, गुरुत्व बल के कारण, क्या इसके पृष्ठ से चिपका रहेगा? (सूर्य का द्रव्यमान = 2 × 10^{30}kg)

उत्तर- घूर्णन करते तारे की विषुवतं तल पर रखे पिण्ड पर निम्न दो बल कार्य करते हैं

- गुरुत्वीय बल FG = mg (अन्दर की ओर)
- अपकेन्द्र बल $F_e = m\omega^2R$

अब तारे पर गुरुत्वीय त्वरण,

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G.(2.5M_s)}{R^2}$$

परन्तु यहाँ सूर्य का द्रव्यमान Ms = 2 × 10^{30} किग्रा

तथा तारे की त्रिज्या R = 12 किमी = 12 × 10^3 मीटर

$$g = \left[\frac{\left(6.67\times10^{-11}\right)\left(2.5\times2\times10^{30}\right)}{\left(12\times10^{3}\right)^{2}}\right] \text{मी/ से}^2$$

$= 23 \times 10^{12}$ मी/ से^{2}

अत: गुरुत्वीय बल FG = $m \times g = m \times 2.3 \times 10^{12}$ न्यूटन

$= (2.3 \times 10^{12} m)$ न्यूटन

तारे पर अपकेन्द्र बल

$$F_e = m\omega^2 R = m(2\pi n^2)R = 4\pi^2 n^2 mR$$

$= 4 \times (3.14)^2 \times (1.2)^2 \times m \times (12 \times 10^3)$ न्यूटन

$= 6.8 \times 10^5 m$ न्यूटन

प्रश्न 24 कोई अन्तरिक्षयान मंगल पर ठहरा हुआ है। इस अन्तरिक्षयान पर कितनी ऊर्जा खर्च की जाए कि इसे सौरमण्डल से बाहर धकेला जा सके। अन्तरिक्षयान का द्रव्यमान = 1000 kg; सूर्य का द्रव्यमान = 2×10^{30}kg; मंगल का द्रव्यमान= 6.4×10^{23}kg; मंगल की त्रिज्या = 3395km; मंगल की कक्षा की त्रिज्यां = 228×10^8km तथा $G = 6.67 \times 10^{-11} N\ m^2\ kg^{-2}$.

उत्तर- दिया है-

यान का द्रव्यमान $m = 1000kg = 10^3kg$

सूर्य का द्रव्यमान $M_S = 2 \times 10^{30}kg$,

मंगल का द्रव्यमान $M_M = 6.4 \times 10^{23}kg$

मंगल की त्रिज्या $R = 3395\ km = 3395 \times 10^6 m$,

मंगल की कक्षा की त्रिज्या $r = 2.28 \times 10^{11} m$

∵ यान मंगल की सतह पर है; अत: इसकी सूर्य से दूरी r_M के बराबर होगी।

∴ सूर्य के कारण यान की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $-\frac{GM_{S}m}{r}$ तथा मंगल के कारण यान की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $= -\frac{GM_{M}m}{R}$ यान की कुल ऊर्जा $= -Gm\left(\frac{M_S}{r}+\frac{M_M}{R}\right)$

माना इस यान पर K ऊर्जा खर्च की जाती है, जिसे पाकर यह सौरमण्डल से बाहर चला जाता है। सौरमण्डल से बाहर, सूर्य तथा मंगल के सापेक्ष इसकी कुल ऊर्जा शून्य हो जाएगी। ऊर्जा संरक्षण के नियम से,

$$K - Gm\left(\frac{M_S}{R_M}+\frac{M_M}{R}\right) = 0$$

$$= 6.67 \times 10^{-11} \times 10^{3}\left[\frac{2.0\times10^{30}}{2.28\times10^{11}}+\frac{6.4\times10^{23}}{3.395\times10^{6}}\right]$$

$$= 6.67 \times 10^{-8} \times 10^{17}[87.72 + 1.88]$$

$$= 5.97 \times 10^{11} J$$

प्रश्न 25 किसी रॉकेट को मंगल ग्रह के पृष्ठ से $2 kms^{-1}$ की चाल से ऊध्र्वाधर ऊपर दागा जाता है। यदि मंगल के वातावरणीय प्रतिरोध के कारण इसकी 20% आरम्भिक ऊर्जा नष्ट हो जाती है, तब मंगल के पृष्ठ पर वापस लौटने से पूर्व यह रॉकेट मंगल से कितनी दूरी तक जाएगा? मंगल का द्रव्यमान = 6.4×10^{23}kg; मंगल की त्रिज्या = 3395km तथा G = $6.67 \times 10^{-11} N\, m^2\, kg^{-2}$.

उत्तर- रॉकेट का मंगल के पृष्ठ से प्रक्षेप्य वेग) = 20 किमी-से$^{-1}$

= 2×10^3 मी-से$^{-1}$

∴ रॉकेट की आरम्भिक ऊर्जा Ei = गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}mv^2$

परन्तु 20% आरम्भिक ऊर्जा नष्ट हो जाती है।

अतः केवल वह अवशेष गतिज ऊर्जा जो स्थितिज ऊर्जा में रूपान्तरित होती है = E_i का 80%

$$\frac{80}{100} = \frac{2}{5}mv^2$$

इसलिए ऊर्जा संरक्षण के नियम से,

रूपान्तरित गतिज ऊर्जा = स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

अर्थात् $\frac{2}{5}mv^2 = -\left(\frac{GMm}{R+H}\right) - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$

जहाँ M = मंगल का द्रव्यमान = 6.4×10^{23} किग्रा, R = इसकी त्रिज्या = 3395 किमी = 3395×10^3 मीटर तथा H = मंगल से रॉकेट के पहुंचने की अधिकतम ऊँचाई

अर्थात् दूरी

$$\therefore \frac{2}{5}v^2 = GM\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right]$$

$$= GM\left[\frac{(R+H)-R}{(R+H)R}\right.$$

या $\frac{2}{5}v^2 = \frac{GMH}{R^2+RH}$

या $2v^2R^2 + 2v^2RH = 5GMH$

अथवा $H(5GM - 2v^2R) = 2v^2R^2$

$$\therefore H = \frac{2v^2R^2}{5GM-2v^2R}$$

ज्ञात मान रखने पर,

$$H = \left[\frac{2\times(2.0\times10^3)^2(3395\times10^3)^2}{5\times6.67\times10^{-11}\times6.4\times10^{23}-2\times(2.0\times10^2)^2\times3395\times10^3}\right] \text{मी}$$

$$0.4949 \times 10^6 m = 494.9 \times 10^3 m \approx 495 km$$