गणित

अध्याय-7 : समाकलन

समाकलन

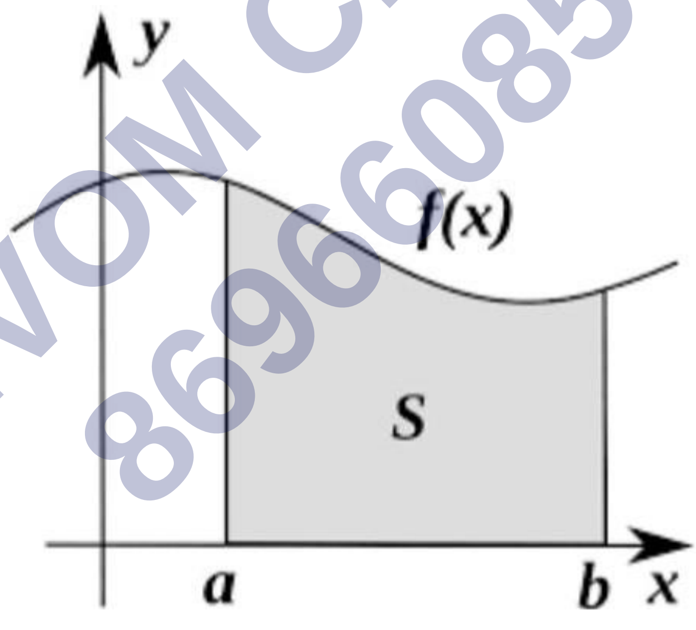
समाकलन, अवलोकन की विपरीत क्रिया है

अवलोकन गणित में हम एक फलन का अवलोकन गुणंक निकलता है, जबकी **समाकलन** गणित में हम उस फलन को ज़ात करते है जिसका अवलोकन गुणांक दिया हो।

समाकलन की परिभाषा

यह एक विशेष प्रकार की योग क्रिया है जिसमें अत्यणु (Infinitesimal) मान वाली किन्तु गिनती में अत्यधिक चर राशियों को जोड़ा जाता है।

इसका एक प्रमुख उपयोग वक्राकार क्षेत्रों का क्षेत्रफल तथा आयतन निकालने में होता है। समाकलन को अवकलन की व्युत्क्रम संक्रिया की तरह भी समझा जा सकता है।



समाकलन के प्रकार-

1. परिमेय फलन
2. अपरिमेय फलन
3. लघुगणकीय फलन

4. चरघातांकी फलन
5. त्रिकोणमित्तीय फलन
6. हाइपरबोलिक फलन
7. इन्वर्स हाइपरबोलिक फलन
8. प्रतिवर्तन सूत्र (रिकर्सन फॉर्मूले)

समाकलन के सूत्र (Integration Formulas)

- $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int e^x \cdot dx = e^x + C$
- $\int e^{-x} \cdot dx = -e^{-x} + C$
- $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \log x + C$
- $\int \text{Sin}x \cdot dx = -\text{Cos}x + C$
- $\int \text{Cos}x \cdot dx = \text{Sin}x + C$
- $\int \text{Tan}x \cdot dx = \log \text{Sec}x + C$
- $\int \text{Cot}x \cdot dx = \log \text{Sin}x + C$
- $\int \text{Sec}x \cdot dx = \log |\text{Sec}x + \text{Tan}x| + C$
- $\int \text{Cosec}x \cdot dx = \log |\text{Cosec}x - \text{Cot}x| + C$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \sin^{-1}x + C$

- $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \tan^{-1}x + C$

- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot dx = \sec^{-1}x + C$

- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot dx = \log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$

- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot dx = \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$

- $\int \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

- $\int \sqrt{a^2+x^2} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$

- $\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$

- $\int \frac{1}{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C$

- $\int \frac{1}{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$

- $\int Sec^2 x \cdot dx = Tan x + C$

- $\int Cosec^2 x \cdot dx = - Cot x + C$

- $\int Sec x \cdot Tan x \cdot dx = Sec x + C$

- $\int Cosec x \cdot Cot x \cdot dx = - Cosec x + C$

- $\int K \cdot dx = Kx + C$ (जहाँ K = अचर राशि)

- $\int \frac{1}{x^2 + a^2} \cdot dx = \frac{1}{a} Tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

समाकलन के मूलभूत प्रमेय

1. अवलोकन और समाकलन की क्रिया एक दूसरे को प्रकट करती है

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x).$$

प्रमाण (Proof) : माना कि

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x) \qquad ...(1)$$

तब समाकल की परिभाषा से,

$$\int f(x)dx=F(x) \qquad ...(2)$$

समी. (2) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}F(x)=f(x), \quad \text{[समी. (1) से]}$$

2. एक चर व् एक फलन के गुणनफल का समाकलन उस चर के बराबर होता है|

$$\int cf(x)dx=c\int f(x)dx.$$

प्रमाण (Proof) :

$$\frac{d}{dx}\left[c\int f(x)dx\right]=c\frac{d}{dx}\int f(x)dx$$

$$=cf(x), \qquad \text{[प्रमेय (i) से]}$$

$$\therefore \qquad \int cf(x)dx=c\int f(x)dx.$$

3. दो फलनों के योग तथा अंतर् का समाकलन

माना कि $\int f_1(x)dx=F_1(x)$

तथा $\int f_2(x)dx=F_2(x)$

तब $\frac{d}{dx}F_1(x)=f_1(x)$

तथा $\frac{d}{dx}F_2(x)=f_2(x)$

अत: $\frac{d}{dx}[F_1(x)\pm F_2(x)]=\frac{d}{dx}F_1(x)\pm\frac{d}{dx}F_2(x)$

$$=f_1(x)\pm f_2(x)$$

$$\therefore \int\{f_1(x)\pm f_2(x)\}dx = F_1(x)\pm F_2(x)$$
$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

अर्थात दो फलनों के योगफल या समाकलन उन फलनों के समाकलन के योगफल या अंतर् के बराबर होता है

$$\int\{f_1(x)\pm f_2(x)\pm f_3(x)\pm..........\pm f_n(x)\}dx$$
$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx \pm ....$$
$$\pm \int f_n(x)dx$$

इसके अतिरिक्त यदि $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ अचर राशियाँ हों, तो

$$\int\{c_1f_1(x)\pm c_2f_2(x)\pm c_3f_3(x)\pm........\pm c_nf_n(x)\}dx$$
$$= c_1\int f_1(x)dx \pm c_2\int f_2(x)dx \pm c_3\int f_3(x)dx \pm ....$$
$$\pm c_n\int f_n(x)dx.$$

उदाहरण: निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन

(i) 0, (ii) 1, (iii) x, (iv) x^{99}, (v) x^{-11}, (vi) $x^{3/2}$.

हल : (i) $\int 0dx = c, \left[\because \frac{d}{dx}(c) = 0\right]$

(ii) $\int 1dx = x.$

(iii) $\int xdx = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{1}{2}x^2 + c.$

(iv) $\int x^{99}dx = \frac{x^{99+1}}{99+1} = \frac{1}{100}x^{100} + c.$

(v) $\int x^{-11}dx = \frac{x^{-11+1}}{-11+1} = \frac{x^{-10}}{-10} = -\frac{1}{10}x^{-10} + c.$

(vi) $\int x^{3/2}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5}x^{5/2} + c.$

x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए :

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+........$$

हल : $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+.........=e^x$

$\therefore \int f(x)dx=\int e^x dx=e^x$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+.........$$

उदाहरण:

x के सापेक्ष समाकल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{x^3+3x^2+4}{\sqrt{x}}.$$

हल : $\int\frac{x^3+3x^2+4}{\sqrt{x}}dx$

$$=\int\left(\frac{x^3}{x^{1/2}}+3\frac{x^2}{x^{1/2}}+\frac{4}{x^{1/2}}\right)dx$$

$$=\int(x^{5/2}+3x^{3/2}+4x^{-1/2})dx$$

$$=\int x^{5/2}dx+\int 3x^{3/2}dx+\int 4x^{-1/2}dx$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+3\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+4\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+8\sqrt{x}+c.$$

उदाहरण:

$\int \cos^{-1}(\cos x)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $I = \int \cos^{-1}(\cos x)dx$

$I = \int x dx$

$I = \int \frac{x^2}{2} + c.$

उदाहरण:

$\int (\tan^{-1} x + \cot^{-1} x)dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $I = \int (\tan^{-1} x + \cot^{-1} x)dx$

$I = \int \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi}{2}\int dx = \frac{\pi}{2} x + c.$

उदाहरण:

x के सापेक्ष समाकलन कीजिए :

$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

हल : $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$

$= \int (\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x) dx$

$= \tan x + \cot x + c.$

उदाहरण:

$\int \frac{\sin x + \operatorname{cosec} x}{\tan x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\int \frac{\sin x + \operatorname{cosec} x}{\tan x} dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\tan x} dx + \int \frac{\operatorname{cosec} x}{\tan x} dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} dx + \int \frac{1}{\sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}} dx$$

$$= \int \cos x dx + \int \frac{\cos x}{\sin x . \sin x} dx$$

$$= \sin x + \int \cot x . \operatorname{cosec} x \, dx$$

$$= \sin x - \operatorname{cosec} x + c$$

उदाहरण:

$\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$ को हल कीजिए।

$\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$

$$= \int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} dx$$

$$= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx$$

$$= \int (\cos x - \sin x) dx$$

$$= \sin x + \cos x + c.$$

उदाहरण:

$\int \frac{dx}{1 + \cos x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I = \int \frac{dx}{1+\cos x}$

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)} dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx \Rightarrow I = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx$

$\Rightarrow \quad I = \int (\text{cosec}^2 x - \cot x \,\text{cosec}\, x) dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \text{cosec}^2 x dx - \int \cot x \,\text{cosec}\, x dx$

$\Rightarrow \quad I = -\cot x + \text{cosec} x + c.$

उदाहरण:

$\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : माना $I = \int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \tan^2 x dx$

$\Rightarrow \quad I = \int (\sec^2 x - 1) dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \sec^2 x dx - \int dx$

$\Rightarrow \quad I = \tan x - x + c.$

$\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x} dx$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : माना $I=\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$

$$=\int \frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$$

$$=\int \frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}dx$$

$$=\int \frac{1+\sin^2 x+2\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int \left\{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}\right\}dx$$

$$=\int \sec^2 x dx+\int \tan^2 x dx$$

$$+2\int \tan x \sec x dx$$

$$=\tan x+\int(\sec^2 x-1)dx+2\sec x$$

$$=\tan x+\int \sec^2 x dx-\int 1.dx+2\sec x$$

$$=\tan x+\tan x-x+2\sec x$$

$$=2\tan x+2\sec x-x+c.$$

प्रतिस्थापन विधि द्वारा समाकलन

जब हमें ऐसे फलनों का समाकल ज्ञात करना होता है जो किसी प्रामाणिक रूप में नहीं होते अथवा सरलता से प्रामाणिक रूप ग्रहण नहीं करते, तब हम समाकलन चर x को किसी दूसरे चर 1 के उचित फलन के रूप में व्यक्त करते हैं। ऐसा करना प्रतिस्थापन (Substitution) करना कहलाता है। उचित प्रतिस्थापन का कोई निश्चित निर्धारित नियम नहीं है। इस सन्दर्भ में अनुभव ही सर्वश्रेष्ठ निर्देश का कार्य करता है। उचित प्रतिस्थापन के बाद प्राप्त फलन ऐसा होता है कि प्रामाणिक सूत्रों की सहायता से उसका समाकलन करना सरल हो जाता है।

प्रतिस्थापन विधि

माना $I = \int f(x)dx$

$\therefore \quad \frac{dI}{dx} = f(x)$

माना $x = \phi(t)$, तब $\frac{dx}{dt} = \phi'(t)$

$\therefore \quad \frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$= f(x)\phi'(t)$

$= f\{\phi(t)\}\phi'(t)$

दोनों पक्षों का t के सापेक्ष समाकलन करने पर,

$I = \int f\{\phi(t)\}\phi'(t)dt$

अतः $I = \int f(x)dx \; f(x) = \int f\{\phi(t)\}\phi'(t)dt.$

उदाहरण:

$\int e^{2x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I = \int e^{2x}dx$

$2x = t$ रखने पर,

$2\frac{d}{dx}x = \frac{dt}{dx}$

$\Rightarrow \quad 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + c$

अतः $I = \frac{1}{2}e^{2x} + c.$

उदाहरण:

$\int (3x+2)^5 dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I=\int(3x+2)^5dx$

$3x+2=t$ रखने पर,

$$3\frac{d}{dx}x=\frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad 3.1=\frac{dt}{dx}\Rightarrow dx=\frac{1}{3}dt$$

$$\therefore \quad I=\frac{1}{3}\int t^5dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{5+1}}{5+1}+c=\frac{t^6}{18}+c$$

अत: $$I=\frac{(3x+2)^6}{18}+c, \quad [\because t=3x+2].$$

उदाहरण:

$\int\frac{1}{1+\cos x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I=\int\frac{1}{1+\cos x}dx$

$$=\int\frac{1}{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int\sec^2\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}+c \quad =\tan\frac{x}{2}+c.$$

उदाहरण:

$\int\sqrt{1-\cos x}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I=\int\sqrt{1-\cos x}dx$

$\Rightarrow \quad I=\int\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}dx$

$\Rightarrow \quad I=\sqrt{2}\int\sin\frac{x}{2}dx$

$\Rightarrow \quad I=-\sqrt{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}+c$

$\therefore \quad I=-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}+c.$

उदाहरण:

$\int\sin 4x\sin 8x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I=\int\sin 4x\sin 8x\, dx$

$\Rightarrow \quad I=\frac{1}{2}\int 2\sin 8x\sin 4x\, dx$

$\Rightarrow \quad I=\frac{1}{2}\int[\cos(8x-4x)-\cos(8x+4x)]dx$,

$[\because 2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$\Rightarrow \quad I=\frac{1}{2}\int(\cos 4x-\cos 12x)dx$

$=\frac{1}{2}\int\cos 4x dx-\frac{1}{2}\int\cos 12x dx$

$=\frac{\sin 4x}{2\times 4}-\frac{\sin 12x}{2\times 12}+c$

$\therefore \quad I=\frac{\sin 4x}{8}-\frac{\sin 12x}{24}+c.$

उदाहरण:

$\int \sin^4 \theta \, d\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I = \int \sin^4 \theta \, d\theta$

$$= \int (\sin^2 \theta)^2 \, d\theta$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int (3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\left(3\theta - 4.\frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 4\theta}{4}\right)$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{8}\left(3\theta - 2\sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{4}\right).$$

उदाहरण:

$\int \sec^2 x \tan^3 x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I=\int \sec^2 x \tan^3 x dx$

$\tan x = t$ रखने पर,

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \sec^2 x = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \sec^2 x dx = dt$$

$$\therefore \quad I = \int t^3 dt$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{t^4}{4} + c$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\tan^4 x}{4} + c.$$

उदाहरण:

$\int 2x \sin(x^2+1)dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I = \int 2x \sin(x^2+1)dx$

$x^2+1=t$ रखने पर,

$$\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \frac{dt}{dx} \Rightarrow 2xdx = dt$$

$$\therefore \quad I = \int \sin t dt = -\cos t + c$$

$$\Rightarrow \quad I = -\cos(x^2+1) + c.$$

उदाहरण:

$\int \sin x \sin(\cos x)dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I = \int \sin x \sin(\cos x) dx$

$\cos x = t$ रखने पर,

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad -\sin x = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \sin x dx = -dt$$

$$\therefore \quad I = -\int \sin t dt \quad = \cos t + c$$

$$\Rightarrow \quad I = \cos(\cos x) + c.$$

उदाहरण:

$\int \sin^4 x \cos x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\quad I = \int \sin^4 x \cos x dx$

पुनः माना $\quad \sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} = \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$$

उदाहरण:

$\int \frac{\sin^2(\log x)}{x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I=\int \frac{\sin^2(\log x)}{x}dx$

पुन: माना $\log x = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$

$\therefore$ $I=\int \sin^2 t dt = \int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt$

$=\frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int \cos 2t\, dt$

$=\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{2} + c$

अत: $I=\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4}\sin(2\log x) + c.$

उदाहरण:

$\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I=\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}dx$

$\Rightarrow$ $I=\int \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x \times \cos^2 x}dx$

$\Rightarrow$ $I=\int \tan^6 x \sec^2 x dx$

$\tan x = t$ रखने पर,

$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{dt}{dx}$

$\Rightarrow$ $\sec^2 x = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \sec^2 x dx = dt$

$\therefore$ $I=\int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + c$

अत: $I=\frac{\tan^7 x}{7} + c.$

उदाहरण:

$\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I = \int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx$

पुनः माना $\tan^{-1} x^3 = t$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^6} \times 3x^2 dx = dt$

$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{1}{3} dt$

$\therefore \quad I = \frac{1}{3}\int t dt = \frac{1}{6} t^2 + c$

अतः $\quad I = \frac{1}{6}(\tan^{-1} x^3)^2 + c.$

उदाहरण:

$\int \tan^4 x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I = \int \tan^4 x dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \tan^2 x . \tan^2 x dx$

$\Rightarrow \quad I = \int (\sec^2 x - 1) \tan^2 x dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx$

$\therefore \quad I = \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx$

$\tan x = t$ रखने पर,

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \sec^2 x = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow (\sec^2 x)dx = dt$$

$$\therefore \quad I = \int t^2 dt - \int (\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \frac{t^3}{3} - \int \sec^2 x dx + \int dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c.$$

उदाहरण:

$\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\quad I = \int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}$

पुनः माना $x^2 = t$, तब $2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{2^2 - t^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + c$$

अतः $\quad I = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right) + c.$

उदाहरण:

$\int \frac{x^2}{1+x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I = \int \frac{x^2}{1+x} dx = \int \frac{x^2-1+1}{1+x} dx$

$$= \int \left[\frac{(x-1)(x+1)}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right] dx$$

$$= \int \left[x - 1 + \frac{1}{1+x}\right] dx$$

$\therefore \quad I = \frac{x^2}{2} - x + \log_e(1+x).$

उदाहरण:

$\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x^m}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\quad I = \int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x^m}} dx$

पुन: माना $\quad x^m = t$

$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} x^m = \frac{dt}{dx}$

$\Rightarrow \quad m x^{m-1} dx = dt \Rightarrow x^{m-1} dx = \frac{1}{m} dt$

$\therefore \quad I = \frac{1}{m} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{1}{m} \int (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$

$$= \frac{1}{m} \frac{(1-t)^{-\frac{1}{2}+1}}{(-\frac{1}{2}+1)(-1)} = -\frac{2}{m}\sqrt{1-t}$$

अत: $\quad I = -\frac{2}{m}\sqrt{1-x^m}$

उदाहरण:

$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

$= \int \frac{e^x}{(e^x + e^{-x})e^x} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + e^0} dx$

∴ $I = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$

पुनः माना $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

∴ $I = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \tan^{-1} t$

अतः $I = \tan^{-1}(e^x)$.

उदाहरण:

$\tan x$ का समाकलन (Integration of $\tan x$)

माना $I = \int \tan x dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{\frac{d}{dx}\cos x}{\cos x} dx$

$= -\log \cos x,$ [§7(A)·11से]

$= \log\left(\frac{1}{\cos x}\right), \left[\because -\log x = \log \frac{1}{x}\right]$

$= \log \sec x$

∴ $\boxed{\int \tan x dx = \log(\sec x) = -\log(\cos x)}$

उदाहरण:

$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

$\cos x + \sin x = t$ रखने पर,

$$-\sin x + \cos x = \frac{dt}{dx}$$

$\Rightarrow \quad (\cos x - \sin x)dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{t} = \log t$

अतः $\quad I = \log(\cos x + \sin x).$

उदाहरण:

$\int \frac{dx}{x(1 + \log x)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I = \int \frac{dx}{x(1 + \log x)}$

$1 + \log x = t$ रखने पर,

$$\frac{d}{dx}(1 + \log x) = \frac{dt}{dx}$$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{t}$

$$I = \log(t) + c$$

अतः $\quad I = \log(1 + \log x) + c.$

उदाहरण:

$\int\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I=\int\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)dx$

$e^x+e^{-x}=t$ रखने पर,

$$(e^x-e^{-x})dx=dt$$

$\therefore \quad I=\int\frac{dt}{t}=\log t$

अत: $\quad I=\log(e^x+e^{-x}).$

उदाहरण:

$\int\frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}}$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{\left\{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right\}}}$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{2\sin^2\left[\left(\frac{\pi}{2}+x\right)/2\right]}},$$

$$\left[\because 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\text{cosec}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)dx$$

$\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}=t$ रखने पर,

$$dx=2dt$$

$\therefore$ $$I=\frac{2}{\sqrt{2}}\int \operatorname{cosec} t\,dt \;=\sqrt{2}\log\tan\frac{t}{2}$$

अतः $$I=\sqrt{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{4}\right).$$

$\int\frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

उदाहरण:

हल : माना $$I=\int\frac{1}{x+\sqrt{x}}dx \;=\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$\sqrt{x}+1=t$ रखने पर,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt$$

$\therefore$ $$I=2\int\frac{dt}{t}=2\log t$$

अतः $$I=2\log(\sqrt{x}+1).$$

उदाहरण:

$\int\frac{\sin x\cos x}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $$I = \int \frac{\sin x \cos x}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{\sin x \cos x}{a(1-\sin^2 x) + b\sin^2 x} dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{\sin x \cos x}{a - a\sin^2 x + b\sin^2 x} dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{\sin x \cos x}{a + (b-a)\sin^2 x} dx$$

$a+(b-a)\sin^2 x = t$ रखने पर,

$$\frac{d}{dx}[a+(b-a)\sin^2 x] = \frac{dt}{dx}$$

$$0+(b-a)\frac{d}{dx}\sin^2 x = \frac{dt}{dx}$$

$\sin x = u$ रखने पर,

$$(b-a)\frac{d}{dx}u^2 = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad (b-a)\frac{d}{du}u^2 \frac{du}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

उदाहरण:

$$\Rightarrow \quad (b-a)2u.\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad (b-a)\times 2\sin x \cos x = \frac{dt}{dx}$$

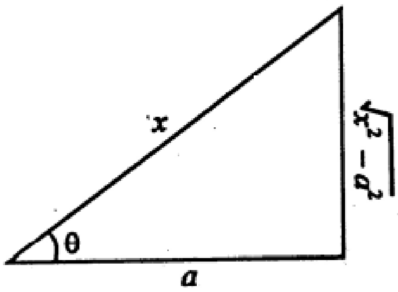
$$\Rightarrow \quad \sin x \cos x dx = \frac{dt}{2(b-a)}$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2(b-a)}\int \frac{dt}{t} \Rightarrow I = \frac{1}{2(b-a)}\log t + c$$

अत: $$I = \frac{1}{2(b-a)}\log[a+(b-a)\sin^2 x)] + c.$$

उदाहरण:

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ का मान ज्ञात करना (To Find the Value of $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$) the Value of $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$)



माना $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

अब $x = a\sec\theta$

तब $dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$

$\therefore \quad I = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}}$

$$= \log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$$

$\Rightarrow \quad I = \log\left[x+\sqrt{x^2-a^2}\right] - \log a$

$\Rightarrow \quad I = \log\left[x+\sqrt{x^2-a^2}\right] - \log a$

समाकलन अचर के रूप में $-\log a$ को छोड़ने पर,

$$I = \log[x+\sqrt{x^2-a^2}]$$

हम जानते हैं कि $\cosh^{-1}\frac{x}{a} = \log[x+\sqrt{x^2-a^2}]$

$$\therefore \quad \boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log[x+\sqrt{x^2-a^2}] = \cosh^{-1}\frac{x}{a}}$$

नोट : $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \frac{1}{b}\log[bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}]$.

उदाहरण:

$\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ का मान ज्ञात करना (To Find the Value of $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$)

माना $\quad I = \int\sqrt{a^2-x^2}dx$

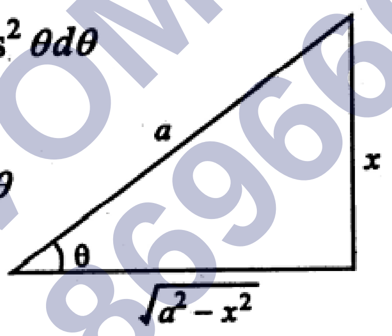
अब $x = a\sin\theta$, तब $dx = a\cos\theta d\theta$

$$\therefore \quad I = \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}.a\cos\theta d\theta$$

$$= \int a\cos\theta.a\cos\theta d\theta$$

$$= a^2\int\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int 2\cos^2\theta d\theta$$



$$= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{a}.\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right]$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\therefore \quad \boxed{\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}}$$

नोट : $\int\sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx$

$$=\frac{1}{b}\left[\frac{bx}{2}\sqrt{a^2-b^2x^2}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{bx}{a}\right].$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 7.1 (पृष्ठ संख्या 315-316)

निम्नलिखित फलन के प्रतिअवकलज (समाकलन) निरीक्षण विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. sin 2x

उत्तर-

$$\int \sin 2x \, dx$$

हम जानते हैं कि, $\frac{d}{dx}\cos 2x = -2\sin 2x$

या $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) = -\frac{1}{2}(-\sin 2x) \times 2 = \sin 2x$

$\therefore \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

प्रश्न 2. cos 3x

उत्तर-

$$\int \cos 3x \, dx$$

हम जानते हैं कि, $\frac{d}{dx}\sin 3x = 3\cos 3x$

या $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right) = \cos 3x$

$\therefore \int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$

प्रश्न 3. e^{2x}

उत्तर-

$$\int e^{2x} dx$$

हम जानते हैं कि,

$\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x}$ या $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = e^{2x}$

$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

प्रश्न 4. $(ax + b)^2$

उत्तर-

$\int(ax + b)^2 dx$

हम जानते हैं कि, $\frac{d}{dx}(ax + b)^3 = 3a(ax + b)^2$

या $\frac{d}{dx}\frac{1}{3a}(ax + b)^3 = (ax + b)^2$

$\int(ax + b)^2 dx = \frac{1}{3a}(ax + b)^3 + C$

प्रश्न 5. $\sin 2x - 4e^{3x}$

उत्तर-

$\int(\sin 2x - 4e^{3x})dx = \int \sin 2x\, dx - 4\int e^{3x} \ldots (1)$

$\because \frac{d}{dx}\cos 2x = -2\sin 2x$ या $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) = \sin 2x$

$\therefore \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \ldots (2)$

तथा $\frac{d}{dx}(e^{3x}) = 3e^{3x}$ या $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) = e^{3x}$

$\therefore \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \ldots (3)$

समीकरण (1), (2) तथा (3) से,

$\therefore \int(\sin 2x - 4e^{3x})dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{4}{3}e^{3x} + C$

निम्नलिखित समाकलन को ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 6. $\int(4e^{3x} + 1)dx$

उत्तर-

$\int(4e^{3x}+1)dx = 4\int e^{3x}dx + \int 1dx$

$= 4.\frac{e^{3x}}{3} + x + C = \frac{4}{3}e^{3x} + x + C$

प्रश्न 7. $\int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$

उत्तर-

$\int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \int(x^2-1)dx = \int x^2dx - \int 1dx$

$= \frac{x^{2+1}}{2+1} - x + C = \frac{x^3}{3} - x + C$

प्रश्न 8. $\int(ax^2+bx+c)dx$

उत्तर-

$\int(ax^2+bx+c)dx = a\int x^2dx + b\int x\,dx + c\int 1dx$

$= a\frac{x^{2+1}}{2+1} + b\frac{x^{1+1}}{1+1} + c.x + D$

$= \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + D$ (जहाँ D एक अचर है)

प्रश्न 9. $\int(2x^2+e^x)dx$

उत्तर-

$\int(2x^2+e^x)dx = 2\int x^2dx + \int e^xdx$

$= \frac{2.x^{2+1}}{2+1} + e^x + C = \frac{2x^3}{3} + e^x + C$

प्रश्न 10. $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

उत्तर-

$$\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx=\int\left[(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right]dx$$

$$=\int\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx=\int x\,dx-2\int 1dx+\int\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\log x+C$$

प्रश्न 11. $\int\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}dx$

उत्तर-

$$\int\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}dx=\int\left(\frac{x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)dx$$

$$=\int x\,dx+5\int 1dx-4\int x^{-2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+5x-4.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$$

प्रश्न 12. $\int\frac{x^3+3x+4}{\sqrt{x}}dx$

उत्तर-

$$\int\frac{x^3+3x+4}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int\left(\frac{x^3}{\sqrt{x}}+\frac{3x}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=\int\left(x^{3-\frac{1}{2}}+3x^{1-\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\int x^{\frac{5}{2}}dx+3\int x^{\frac{1}{2}}dx+4\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+4\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+4\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+8\sqrt{x}+C$$

प्रश्न 13. ṣ $\int \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}dx$

उत्तर-

$$\int \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}dx$$
$$= \int \frac{x^2(x-1)+1(x-1)}{x-1}dx$$
$$= \int \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)}dx$$
$$= \int (x^2+1)dx = \int x^2 dx + \int 1 dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + x + C$$

प्रश्न 14. $\int (1-x)\sqrt{x}\, dx$

उत्तर-

$$\int (1-x)\sqrt{x}\, dx$$
$$= \int (\sqrt{x} - x\sqrt{x})dx$$
$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{1+\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{3}{2}} dx$$
$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

प्रश्न 15. $\int \sqrt{x}\,(3x^2+2x+3)dx$

उत्तर-

$$\int \sqrt{x}(3x^2 + 2x + 3)dx$$
$$= \int \left(3x^{2+\frac{1}{2}} + 2x^{1+\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$= 3\int x^{\frac{5}{2}}dx + 2\int x^{\frac{3}{2}} + 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= 3\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + 2.\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 3.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= 3\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$
$$= 3 \times \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2 \times \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 3 \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + C$$

प्रश्न 16. $\int(2x - 3\cos x + e^x)dx$

उत्तर-

$$\int(2x - 3\cos x + e^x)dx$$
$$= 2\int x\,dx - 3\int \cos x\,dx + \int e^x dx$$
$$= 2.\frac{x^{1+1}}{1+1} - 3.\sin x + e^x + C \left[\because \int \cos x\,dx = \sin x\right]$$
$$= \frac{2x^2}{2} - 3\sin x + e^x + C$$
$$= x^2 - 3\sin x + e^x + C$$

प्रश्न 17. $\int\left(2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right)dx$

उत्तर-

$$\int(2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x})dx$$
$$= 2\int x^2 dx - 3\int \sin x\,dx + 5\int \sqrt{x}dx$$
$$= 2.\frac{x^{2+1}}{2+1} - 3(-\cos x) + 5\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{2x^3}{3} + 3\cos x + 5.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3\cos x + 5 \times \frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3\cos x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

प्रश्न 18. $\int \sec x(\sec x + \tan x)dx$

उत्तर-

$$\int \sec x(\sec x + \tan x)dx$$

$$= \int(\sec^2 x + \sec x \tan x)dx$$

$$= \int(\sec^2 x\, dx)$$

$$= \int \sec x \tan x\, dx$$

$$\tan x + \sec x + C$$

प्रश्न 19. $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} dx$

उत्तर-

$$\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \tan^2 x\, dx \left[\because \tan^2 x = \sec^2 x - 1\right]$$

$$= \int(\sec^2 x - 1)dx = \int \sec^2 x\, dx - \int 1dx$$

$$= \tan x - x + C$$

प्रश्न 20. $\int \frac{2-3\sin x}{\cos x} dx$

उत्तर-

$$\int \frac{2-3\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x}{\cos^2 x}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}\right) dx$$

$$= \int (2\sec^2 x - 3\sec x \tan x) dx$$

$$= 2\int \sec^2 x\, dx - 3\int \sec x \tan x\, dx$$

$$= 2\tan x - 3\sec x + C$$

सही उत्तर का चयन कीजिए:

प्रश्न 21.

$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का प्रतिअवकलज है:

a. $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

b. $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^2 + C$

c. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

d. $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

उत्तर-

c. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

हल-

$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का प्रतिअवकलज

$$= \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

अब विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 22.

यदि $\frac{d}{dx} f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ जिसमें f(2) = 0 तो f(x) है:

a. $x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$

b. $x^3 + \frac{1}{x^4} + \frac{129}{8}$

c. $x^4 + \frac{1}{x^3} + \frac{129}{8}$

d. $x^3 + \frac{1}{x^4} - \frac{129}{8}$

उत्तर-

a. $x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$

हल-

$$\frac{d}{dx} f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$$

$$\therefore f(x) = \int \left(4x^3 - \frac{3}{x^4}\right) dx$$

$$= \frac{4}{4} x^4 - \frac{3}{-3} \cdot \frac{1}{x^3} + C = x^4 + \frac{1}{x^3} + C$$

परन्तु f(2) = 0

$$\therefore (2)^4 + \frac{1}{(2)^3} + C = 0$$

$$\Rightarrow 16 + \frac{1}{8} + C = 0$$

$$\Rightarrow C = -\frac{129}{8}$$

$$\therefore f(x) = x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$$

अतः विकल्प (a) सही है।

प्रश्नावली 7.2 (पृष्ठ संख्या 321-322)

फलन का समाकलन ज्ञात कीजिए-

प्रश्न 1. $\frac{2x}{1+x^2}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{2x}{1+x^2} dx$

माना $1 + x^2 = t$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$(0 + 2x)\frac{dx}{dt} = 1$

$\Rightarrow 2x\, dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \frac{dt}{t} = \log t + C = \log(1 + x^2) + C$

प्रश्न 2. $\frac{(\log x)^2}{x}$

उत्तर-

माना $\log x = t$ तब $\frac{1}{x}dx = dt$

$\int \frac{(\log x)^2}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$

$= \frac{1}{3}(\log x)^3 + C$

प्रश्न 3. $\frac{1}{x + x\log x}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{1}{x + x\log x} dx = \int \frac{1}{x(1+\log x)} dx$

माना $1 + \log x = t$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन पर,

प्रश्न 4. sin x sin(cos x)

उत्तर-

माना $I = \int \sin x \sin(\cos x)dx \ldots (1)$

माना $\cos x = t$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$-\sin x\, dx = dt \Rightarrow \sin x\, dx = -dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \sin(\cos x)(\sin x)dx = -\int \sin t\, dt$

$= \cos t + C = \cos(\cos x) + C$

प्रश्न 5. $\sin(ax + b)\cos(ax + b)$

उत्तर-

माना $I = \int \sin(ax + b)\cos(ax + b)dx$

माना $\sin(ax + b) = t$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$a\cos(ax + b)dx = dt$

या $\cos(ax + b)dx = \frac{dt}{a}$

$\therefore I = \int \frac{1}{a} t\, dt = \frac{1}{a}\int t\, dt = \frac{1}{a}\frac{t^2}{2} + C$

$= \frac{1}{2a}\sin^2(ax + b) + C$

प्रश्न 6. $\sqrt{ax + b}$

उत्तर-

माना $a + bx = t$ तब $b\, dx = dt$ या $dx = \frac{1}{b}dt$

$\therefore \int \sqrt{(a + bx)}dx = \int \sqrt{t}.\, \frac{1}{b}dt = \frac{1}{b}\int t^{\frac{1}{2}}dt$

$= \frac{1}{b}.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{3b} \cdot (a + bx)^{\frac{3}{2}} + C$ जहाँ C समाकलन अचर है।

प्रश्न 7. $x\sqrt{x+2}$

उत्तर-

माना $I = \int x\sqrt{x+2}dx = \int (x + 2 - 2)\sqrt{x+2}dx$

$= \int (x+2)^{\frac{3}{2}} dx - 2\int (x+2)^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 2\frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

$= \frac{(x+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{2(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C$

प्रश्न 8. $x\sqrt{1+2x^2}$

उत्तर-

माना $I = \int x\sqrt{1+2x^2}\, dx$

माना $1 + 2x^2 = t$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$4x\, dx = dt \therefore\ dx = \frac{1}{4x}dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \sqrt{t}. \frac{x\, dt}{4x}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

$= \frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

प्रश्न 9. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$

उत्तर-

माना $I=\int(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$

$=2\int(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$

माना $x^2+x+1=t$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$(2x+1)dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{2x+1}$

$\therefore$ (1) से, $I=2\int\sqrt{t}.\frac{dt}{2x+1}(2x+1)$

$\Rightarrow I=2\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$

$=\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{4}{3}(x^2+x+1)+C$

प्रश्न 10. $\frac{1}{x-\sqrt{x}}$

उत्तर-

$\int\frac{1}{x-\sqrt{x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}dx=I$

अब $\sqrt{x}-1=t$

$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx=dt$

$I=2\int\frac{dt}{t}$

$=2\log t+C$

$=2\log(\sqrt{x}-1)+C$

प्रश्न 11. $\frac{x}{\sqrt{x+4}}, x>0$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx = \int \frac{x+4-4}{\sqrt{x+4}} dx$

$= \int \frac{x+4}{\sqrt{x+4}} dx - \int \frac{4}{\sqrt{x+4}} dx$

$= \int \sqrt{x+4}\, dx - 4\int (x+4)^{-\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} - 4.2(x+4)^{-\frac{1}{2}+1} + C$

$= \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} - 8(x+4)^{\frac{1}{2}} + C$

प्रश्न 12. $(x^3 - 1)^{\frac{1}{3}x^5}$

उत्तर-

माना $I = \int (x^3 - 1)^{\frac{1}{3}} x^5 dx$

$= \int (x^3 - 1)^{\frac{1}{3}} x^3 . x^2 dx$

माना $x^3 - 1 = t$ तथा दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$x^3 = 1 + t$

$\therefore 3x^2 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3x^2}$

$\therefore$ समीकरण (1) से,

$I = \int t^{\frac{1}{3}}(1+t)\frac{x^2 dt}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}(1+t)dt$

$= \frac{1}{3}(t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{4}{3}})dt$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{t^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}\right] + C$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}}\right] + C$

$= \frac{1}{4} t^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{7} t^{\frac{7}{3}} + C$

$= \frac{1}{4}(x^3 - 1)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{7}(x^3 - 1)^{\frac{7}{3}} + C$

प्रश्न 13. $\frac{x^2}{(2+3x^3)^3}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{x^2}{(2+3x^3)^3} dx$

$2 + 3x^3 = t$ रखने पर, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$9x^2 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{9x^2}$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \frac{1}{t^3} \times \frac{x^2 dt}{9x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{1}{t^3} dt$

$= \frac{1}{9} \int t^{-3} dt = \frac{1}{9} \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C$

$= \frac{1}{9} \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{18} \frac{1}{t^2} + C$

$= -\frac{1}{18(2+3x^3)^2} + C$

प्रश्न 14. $\frac{1}{x(\log x)^m}, x > 0, m \neq 1$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{1}{x(\log x)^m} dx$

$\log x = t$ रखने पर, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{1}{x} dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \frac{dt}{t^m} = \int t^{-m} dt = \frac{t^{-m+1}}{-m+1} + C$

$= \frac{(\log x)^{-m+1}}{1-m} + C$

प्रश्न 15. $\frac{x}{9-4x^2}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{x}{9-4x^2} dx$

$9 - 4x^2 = t$ रखने पर,

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $-8x\ dx = dt$ या $dx = -\frac{1}{8x} dt$

$\therefore$ समीकरण (1) से, $I = \int \frac{x}{t}\left(-\frac{1}{8x} \times dt\right) = -\frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{8}\log|t| + C$

$= \frac{1}{8}\log(t)^{-1} + C = \frac{1}{8}\log\frac{1}{t} + C = \frac{1}{8}\log\frac{1}{(9-4x^2)} + C$

प्रश्न 16. e^{2x+3}

उत्तर-

$\int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2}\int e^t dt$

$= \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C$

प्रश्न 17. $\frac{x}{e^{x^2}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{x}{e^{x^2}} dx$

$x^2 = t$ रखने पर, तब $2x\ dx = dt$ या $x\ dx = \frac{1}{2} dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{e^t} = \frac{1}{2}\int e^{-t} dt = \frac{1}{2}\frac{e^{-t}}{-1} + C$

$= -\frac{e^{-x^2}}{2} + C = -\frac{1}{2e^{x^2}} + C$

प्रश्न 18. $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$

उत्तर-

$\tan^{-1}x = t$ तब $\frac{1}{1+x^2} dx = dt$

$\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\tan^{-1}x} + C$

प्रश्न 19. $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x(e^x-e^{-x})}{e^x(e^x+e^{-x})}dx$

$= \int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

$e^x + e^{-x} = t$ रखने पर तथा दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $(e^x - e^{-x})dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log(e^x + e^{-x}) + C$

प्रश्न 20. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

उत्तर-

दिया है- $e^{2x} - e^{-2x} = t$

ताकि $(2e^{2x} - 2e^{-2x})dx = dt$

$\therefore \int \frac{e^{2x}-e^{2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\log|t| + C$

$= \frac{1}{2}\log + |e^{2x} + e^{-2x}| + C$

प्रश्न 21. $\tan^2(2x-3)$

उत्तर-

$I = \int \tan^2(2x-3)dx$

$= \int[\sec^2(2x-3) - 1]dx = \int \sec^2(2x-3)dx - \int 1dx \ldots (1)$

माना $(2x-3) = t$ तथा दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \frac{1}{2}\int \sec^2 t\, dt - \int 1dx = \frac{1}{2}\tan t - x + C$

$= \frac{1}{2}\tan(2x-3) - x + C$

प्रश्न 22. $\sec^2(7-4x)$

उत्तर-

माना

$I = \int \sec^2(7-4x) \ldots (1)$

माना $7-4x = t$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

या $-4dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{1}{4}dt$

$\therefore$ (1) से, $I = -\frac{1}{4}\int \sec^2 t\, dt = -\frac{1}{4}\tan t + C$

$= -\frac{1}{4}\tan(7-4x) + C$

प्रश्न 23. $\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx \ldots (1)$

माना $\sin^{-1} x = t$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\sin^{-1} x)^2}{2} + C$

प्रश्न 24. $\frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x} dx$

$= \int \frac{2\cos x - 3\sin x}{2(2\sin x + 3\cos x)} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x} \ldots (1)$

माना $2\sin x + 3\cos x = t$,

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $(2\cos x - 3\sin x)dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\log + [t] + C$

$= \frac{1}{2}\log(2\sin x + 3\cos x) + C$

प्रश्न 25. $\frac{1}{\cos^2 x(1-\tan x)^2}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{1}{\cos^2 x(1-\tan x)^2} dx = \int \frac{\sec^2 x}{(1-\tan x)} dx \ldots (1)$

माना $1 - \tan x = t$ दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow (0 - \sec^2 x)dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sec^2 x}$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \frac{\sec^2 x\, dt}{t^2(-\sec^2 x)} = -\int \frac{1}{t^2} dt$

$= -\int t^{-2} dt = -\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C$

$= -\frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{1-\tan x} + C$

प्रश्न 26. $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

माना $\sqrt{x} = t$ दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2dt$

$\therefore$ (1) से, $I = 2\int \cos t\, dt = 2(-\sin t) + C$

$= -2\sin t + C = -2\sin\sqrt{x} + C$

प्रश्न 27. $\sqrt{\sin 2x}\cos 2x$

उत्तर-

मान $I = \int \sqrt{\sin 2x}.\cos 2x\, dx \ldots (1)$

माना $\sin 2x = t$ दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow 2\cos 2x\, dx = dt \Rightarrow \cos 2x\, dx = \frac{dt}{2}$

$\therefore$ (1) से, $I = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

$= \frac{1}{2}.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{1}{3}(\sin 2x)^{\frac{3}{2}} + C$

प्रश्न 28. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx \ldots (1)$

माना $1 + \sin x = t$ दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\cos x\, dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$

$= \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2t^{\frac{1}{2}} + C$

$= 2(1+\sin x)^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{1+\sin x} + C$

प्रश्न 29. $\cot x \log \sin x$

उत्तर-

माना $I = \int \cot x \log \sin x\, dx \ldots (1)$

माना $\log \sin x = t$ तथा दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{1}{\sin x}\cdot \cos x\, dx = dt \Rightarrow \cot x\, .\, dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \log \sin x(\cot x\, dx) = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C$

$= \frac{(\log \sin x)^2}{2} + C$

प्रश्न 30. $\frac{\sin x}{1+\cos x}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx \ldots (1)$

माना $1 + \cos x = t$ रखने पर,

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $-\sin x\, dx = dt$ या $\sin x\, dx = -dt$

$\therefore$ (1) से, $I = -\int \frac{dt}{t} = -\log t + C$

$= \log t^{-1} + C = \log \frac{1}{t} + C$

$= \log \left|\frac{1}{1+\cos x}\right| + C$

प्रश्न 31. $\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} dx \ldots (1)$

माना $1 + \cos x = t$ तथा

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $-\sin x\, dx = dt \Rightarrow \sin x\, dx = -dt$

$\therefore$ (1) से, $I = -\int \frac{dt}{t^2} = -\int t^{-2} dt = -\frac{t^{-1}}{-1} + C$

$= \frac{1}{t} + C = \frac{1}{1+\cos x} + C$

प्रश्न 32. $\frac{1}{1+\cot x}$

उत्तर-

मान $I = \int \frac{1}{1+\cot x} dx = \int \frac{1}{1+\frac{\cos x}{\sin x}} dx$

$= \int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\sin x}{\sin x+\cos x} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x+\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x} dx - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x} dx$

$I = \frac{1}{2}\int 1dx - \frac{1}{2}\int - \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x} dx \ldots (1)$

$\sin x + \cos x = t$ रखने पर,

तथा दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $(\cos x - \sin x)dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \frac{1}{2}\int 1.dx - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log t + C$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log(\sin x + \cos x) + C$

प्रश्न 33. $\frac{1}{1-\tan x}$

उत्तर-

मान $I = \int \frac{1}{1-\tan x} dx = \int \frac{1}{1-\frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{\cos x}{\cos x-\sin x} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\cos x-\sin x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x-\sin x+\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x-\sin x)}{(\cos x-\sin x)} dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x} dx$

$= \frac{1}{2}\int 1dx - \frac{1}{2}\int \frac{-\cos x-\sin x}{\cos x-\sin x} dx$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \frac{-\sin x-\cos x}{\cos x-\sin x} \ldots (1)$

$\cos x - \sin x = t$ रखने पर,

तथा दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $(-\sin x - \cos x)dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log t + C$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log(\cos x - \sin x) + C$

प्रश्न 34. $\frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x} dx$ $\left(\frac{\cos x}{\cos x} = 1, \text{ हर में गुणा करने पर} \right)$

$= \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\tan x} \sec^2 x \, dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}} dx \ldots (1)$

माना $\tan x = t$, तब $\sec^2 x \, dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{t} + C$

$= 2\sqrt{\tan x} + C$

प्रश्न 35. $\frac{(1+\log x)^2}{x}$

उत्तर-

दिया है- $1 + \log x = t$

$\Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$

$\int \frac{(1+\log x)^2}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^2}{3} + C$

$= \frac{1}{3}(1 + \log x)^3 + C$

प्रश्न 36. $\frac{(x+1)(x+\log x)^2}{x}$

उत्तर-

$\int \frac{(x + 1)(x + \log x)^2}{x} dx$

$= \int \frac{(x + 1)}{x} (x + \log x)^2 dx$

$= \int (1 + \frac{1}{x})(x + \log x)^2 dx$

माना

x + logx = t

(1 + (1/x))dx = dt

\ I = ∫t²dt

= (t³/3) + C

= [(x + logx)³/3] + C

प्रश्न 37. $\frac{x^3 \sin(\tan^{-1} x^4)}{1+x^8}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{x^3 \sin(\tan^{-1} x^4)}{1+x^8} dx$

माना $\tan^{-1} x^4 = t$ रखने पर,

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{1}{1+x^8} \frac{d}{dx} x^4 dx = dt$

$\Rightarrow \frac{4x^3}{1+x^8} dx = dt$

$\Rightarrow dx = \frac{1+x^8}{4x^3} dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \sin(\tan^{-1} x^4)\left(\frac{x^3}{1+x^8}\right)\left(\frac{1+x^8}{4x^3}\right) dt$

$= \frac{1}{4} \int \sin t \, dt = \frac{1}{4}(-\cos t) + C$

$= -\frac{1}{4} \cos(\tan^{-1} x^4) + C$

सही उत्तर का चयन कीजिए:

प्रश्न 38.

$\int \frac{10x^9 + 10^x \log_e^{10} dx}{x^{10} + 10^x}$ बराबर है:

a. $10^x - x^{10} + C$

b. $10^x + x^{10} + C$

c. $(10^x - x^{10})^{-1} + C$

d. $\log(10^x + x^{10}) + C$

उत्तर-

d. $\log(10^x + x^{10}) + C$

हल-

माना $x^{10} + 10^x = t$ तब $(10x^9 + 10^x \log_e 10)dx = dt$

$\therefore \int \frac{10x^9+10^x \cdot \log_e 10}{x^{10}+10^x} dx$

$= \int \frac{dt}{t} = \log t + C = \log(x^{10} + 10^x) + C$

अतः विकल्प (d) सही है।

प्रश्न 39.

$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ बराबर है:

a. $\tan x + \cot x + C$

b. $\tan x - \cot x + C$

c. $\tan x \cot x + C$

d. $\tan x - \cot 2x + C$

उत्तर-

b. $\tan x - \cot x + C$

हल-

$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) dx = \tan x - \cot x + C$$

अतः विकल्प (b) सही है।

प्रश्नावली 7.3 (पृष्ठ संख्या 323-324)

प्रश्न 1. $\sin^2(2x + 5)$

उत्तर-

माना $I = \int \sin^2(2x + 5) dx$

$$= \int \frac{1 - \cos 2(2x+5)}{2} dx \left[\because \sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int [(1 - \cos(4x + 10)] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(4x + 10) dx \ldots (1)$$

माना $4x + 10 = t,$

दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर, $4dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{4}$

$\therefore$ (1) से, $I = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \int \cos t \, dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin t + C$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin(4x + 10) + C$$

प्रश्न 2. $\sin 3x \cos 4x$

उत्तर-

$$\int \sin 3x \cos 4x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin 3x \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 7x - \sin x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 7x}{7} + \cos x \right) + C$$

$$= -\frac{\cos 7x}{14} + \frac{\cos x}{2} + C$$

प्रश्न 3. cos 2x cos 4x cos 6x

उत्तर-

$\cos 2x \cos 4x \cos 6x\, dx$

$\int \cos 2x \cos 4x \cos 6x\, dx$

$= \frac{1}{2} \int (2 \cos 2x \cos 4x) \cos 6x\, dx$

$= \frac{1}{2} \int (\cos 6x + \cos 2x) \cos 6x\, dx$

$= \frac{1}{2} \int (\cos^2 6x + \cos 2x \cos 6x) dx$

$= \frac{1}{4} \int (2 \cos^2 6x) dx + \frac{1}{4} \int 2 \cos 2x \cos 6x\, dx$

$= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 12x) dx + \frac{1}{2} \int (\cos 8x + \cos 4x) dx$

$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \times \frac{\sin 12x}{12} + \frac{1}{4} \times \frac{\sin 8x}{8} + \frac{1}{4} \frac{\sin 4x}{4} + C$

$= \frac{1}{4} x + \frac{\sin 12x}{48} + \frac{\sin 8x}{32} + \frac{\sin 4x}{16} + C$

प्रश्न 4. $\sin^3(2x + 1)$

उत्तर-

माना $I = \int \sin^3(2x + 1) dx$

$= \frac{1}{4} \int [3 \sin(2x + 1) - \sin 3(2x + 1)] dx \left[\because \sin^3 \theta = \frac{1}{4}(3 \sin \theta - \sin 3\theta)\right]$

$= \frac{3}{4}\left(-\frac{\cos(2x+1)}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{-\cos 3(2x-1)}{6}\right) + C$

$= -\frac{3}{8} \cos(2x + 1) + \frac{1}{24} \cos 3(2x + 1) + C$

$= -\frac{3}{8} \cos(2x + 1) + \frac{1}{24} [4 \cos^3(2x + 1)] [\because \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta]$

$- 3 \cos(2x + 1) + C$

$= -\frac{3}{8} \cos(2x + 1) + \frac{1}{6} \cos^3(2x + 1) - \frac{1}{8} \cos(2x + 1) + C$

$= -\frac{1}{2} \cos(2x + 1) + \frac{1}{6} \cos^3(2x + 1) + C$

प्रश्न 5. $\sin^3 x \cos^3 x$

उत्तर-

माना $I = \int \sin^3 x \cos^3 x\, dx = \int \sin x. \sin^2 x \cos^3 x\, dx$

$= \int \sin x(1 - \cos^2 x) \cos^3 x\, dx$

$= \int (\cos^3 x - \cos^5 x) \sin x\, dx \ldots (1)$

माना $\cos x = t,$

तथा दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\Rightarrow -\sin x\, dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{-\sin x}$

$\therefore$ (1) से, $I = \int (\cos^3 x - \cos^5 x) \frac{dt}{-\sin x} \times (\sin x)$

$= -\int (t^3 - t^5) dt = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + C$

$= \frac{1}{6} \cos^6 x - \frac{1}{4} \cos^4 x + C$

प्रश्न 6. $\sin x \sin 2x \sin 3x$

उत्तर-

माना $I = \int \sin x \sin 2x \sin 3x$

$= \frac{1}{2} \int (2 \sin x \sin 2x) \sin 3x\, dx$

$= \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 3x) \sin 3x\, dx \; [\because 2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$= \frac{1}{4} \int 2 \sin 3x \cos x\, dx - \frac{1}{4} \int 2 \sin 3x \cos 3x\, dx$

$= \frac{1}{4} \int (\sin 4x + \sin 2x) dx - \frac{1}{4} \int \sin 6x\, dx$

$= -\frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{24} \cos 6x + C$

$= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{3} \cos 6x - \frac{1}{2} \cos 4x - \cos 2x \right] + C$

प्रश्न 7. $\sin 4x \sin 8x$

उत्तर-

$\frac{1}{2}\int \sin 4x \sin 8x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int(\cos 4x - \cos 12x)dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 12x}{12} + C\right.$

प्रश्न 8. $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

उत्तर-

$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$

$\int \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \tan^2\frac{x}{2}dx$

$= \int\left[\sec^2\frac{x}{2} - 1\right]dx = 2\tan\frac{x}{2} - x + C$

प्रश्न 9. $\frac{\cos x}{1+\cos x}$

उत्तर-

$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

$= \int 1dx - \int \frac{1}{1+\cos x}dx$

$= x - \frac{1}{2}\int \sec^2\frac{x}{2}dx + C$

$= x - \tan\frac{x}{2} + C$

प्रश्न 10. $\sin^4 x$

उत्तर-

माना $I = \int \sin^4 x\, dx = \int(\sin^2 x)^2 . dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int(1 + \cos^2 2x - 2\cos 2x)dx$

$= \frac{1}{4}\int\left[1 + \frac{1+\cos 4x}{2} - 2\cos 2x\right]dx$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx + \frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)dx - \frac{2}{4}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1.dx + \frac{1}{8}1.dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{3}{8}\int 1.dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

प्रश्न 11. $\cos^4 2x$

उत्तर-

$$\int \cos^4 2x\, dx$$

$$\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int(1+\cos^2 4x + 2\cos 4x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 + \frac{1+\cos 8x}{2} + 2\cos 4x\right] dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{64}\sin 8x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

प्रश्न 12. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

उत्तर-

माना

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx = \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)}dx \; (\because \sin^2 x = 1-\cos^2 x)$$

$$= \int(1-\cos x)dx = \int 1dx - \int \cos x\, dx$$

$$= x - \sin x + C$$

प्रश्न 13. $\frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x + \cos \alpha}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha} dx$

$= \int \frac{(2\cos^2 x - 1) - (2\cos^2 \alpha - 1)}{\cos x - \cos \alpha} dx \ (\because \cos 2x = 2\cos^2 x - 1)$

$= \int \frac{2(\cos^2 x - \cos^2 \alpha) - 1 + 1}{\cos x - \cos \alpha} dx$

प्रश्न 14. $\frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x} dx$

$= \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x} dx \ [\because \cos^2 x + \sin^2 x = 1]$

$= \int \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x + \sin x)^2} dx \ldots (1)$

माना $\cos x + \sin x = t,$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $(-\sin x + \cos x)dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \frac{dt}{t^2} = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{t} + C$

$= -\frac{1}{\cos x + \sin x} + C$

प्रश्न 15. $\tan^3 2x \sec 2x$

उत्तर-

माना $I = \int \tan^3 2x \sec 2x \, dx$

$= \int \tan^2 2x . \tan 2x . \sec 2x \, dx$

$= \int (\sec^2 2x - 1).\sec 2x \tan 2x\, dx \ldots (1)$

माना $\sec 2x = t$ तथा पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2 \sec 2x \tan 2x\, dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \frac{1}{2}\int (t^2 - 1)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sec^3 2x}{3} - \sec 2x\right) + C$

$= \frac{1}{6}\sec^3 2x - \frac{1}{2}\sec 2x + C$

प्रश्न 16. $\tan^4 x$

उत्तर-

माना $I = \int \tan^4 x\, dx = \int \tan^2 x.\tan^2 x\, dx$

$= \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)dx \; (\because \tan^2 x = \sec^2 x - 1)$

$= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx \ldots (1)$

माना $\tan x = t$

दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\sec^2 x.\, dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sec^2 x}$

$\therefore$ (1) से, $I = \int t^2 \frac{\sec^2 x.dt}{\sec^2 x} - \int (\sec^2 x - 1)dx$

$= \int t^2 dt - \int (\sec^2 x - 1)dx = \frac{t^3}{3} - [\tan x - x] + C$

$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$

प्रश्न 17. $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$$= \int \left(\frac{\sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin x}{\cos x . \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x . \sin x} \right) dx$$

$$= \int (\sec x \tan x + \operatorname{cosec} x \cot x) dx$$

$$= \int \sec x \tan x \, dx + \int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx$$

$$= \sec x - \operatorname{cosec} x + C$$

प्रश्न 18. $\frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int \frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1 - 2\sin^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x} dx \quad [\because \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x]$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

प्रश्न 19. $\frac{1}{\sin x \cos^3 x}$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin x \cos^3 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x}{\sin x \cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos^2 x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int \left(\tan x \sec^2 x + \frac{\sec^2 x}{\tan x} \right) dx$$

$$= \int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right) \sec^2 x \, dx \ldots (1)$$

माना $\tan x = t$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\sec^2 x\, dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \left(t + \frac{1}{t}\right)dt = \int t\, dt + \int \frac{1}{t}dt = \frac{t^2}{2} + \log[t] + C$

$= \frac{\tan^2 x}{2} + \log[\tan x] + C$

प्रश्न 20. $\frac{\cos 2x}{(\cos x+\sin x)^2}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{\cos 2x}{(\cos x+\sin x)^2}dx = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\cos x+\sin x)^2}dx$

$= \int \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2}dx$

$= \int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx \ldots (1)$

माना $\cos x + \sin x = t$,

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $(-\sin x + \cos x)dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|(\cos x + \sin x)| + C$

प्रश्न 21. $\sin^{-1}(\cos x)$

उत्तर-

माना $I = \int \sin^{-1}(\cos x)dx = \int \sin^{-1}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$ $(\because \sin^{-1}\sin\theta = \theta)$

$\therefore I = \int \left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \frac{\pi}{2}\int dx - \int x\, dx$

$= \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} + C$

प्रश्न 22. $\frac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)} dx$

$= \left[\frac{\sin(a-b)dx}{\sin(a-b)[\cos(x-a)\cos(x-b)]}\right]$ $\sin(a-b)$ से अंश व हर में गुणा करने पर,

$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x-b)-(x-a)]}{\cos(x-a)\cos(x-b)} dx$

$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x-b)\cos(x-a)-\cos(x-b)\sin(x-a)}{\cos(x-a)\cos(x-b)} dx$

$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \left[\frac{\sin(x-b)\cos(x-a)}{\cos(x-a)\cos(x-b)} - \frac{\cos(x-b)\sin(x-a)}{\cos(x-a)\cos(x-b)}\right] dx$

$= \frac{1}{\sin(a-b)} [\int \tan(x-b)dx - \int \tan(x-a)dx]$ $[\because \int \tan x\, dx = -\log|\cos x|]$

$= \frac{1}{\sin(a-b)} [-\log|\cos(x-b)| + \log|\cos(x-a)|] + C$

$= \frac{1}{\sin(a-b)} \log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right| + C$

सही उत्तर का चयन कीजिए।

प्रश्न 23.

$\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ बराबर है:

a. $\tan x + \cot x + C$

b. $\tan x + \operatorname{cosec} x + C$

c. $-\tan x + \cot x + C$

d. $\tan x + \sec x + C$

उत्तर-

a. $\tan x + \cot x + C$

हल-

$\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$= \int (\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x) dx$

$= \tan x + \cot x + C$

प्रश्न 24.

$\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)} dx$ बराबर है:

a. $-\cot(ex^x) + C$

b. $\tan(xe^x) + C$

c. $\tan(e^x) + C$

d. $\cot(e^x) + C$

उत्तर-

b. $\tan(xe^x) + C$

हल-

$\int \frac{e^{x(1+x)}}{\cos^2(e^x.x)} dx$

$= \int \sec^2 t \, dt$

$= \tan t + C$

$= \tan(xe^x) + C$

प्रश्नावली 7.4 (पृष्ठ संख्या 332-333)

फलन का समाकलन ज्ञात कीजिए-

प्रश्न 1. $\frac{3x^2}{x^6+1}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{3x^2}{x^6+1} dx = \int \frac{3x^2}{(x^3)^2+1} dx$

माना $x^3 = t$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $3x^2 \, dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \frac{dt}{t^2+1} = \tan^{-1} t + C = \tan^{-1} x^3 + C$

प्रश्न 2. $\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+x^2}}$

$= \frac{1}{2} \log \left[x + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}\right] + C_1 \left[\because \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C\right]$

$= \frac{1}{2} \log \left|\frac{2x+\sqrt{1+4x^2}}{2}\right| + C_1$

$= \frac{1}{2} \log \left|2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right| + \left(-\frac{1}{2} \log 2\right) + C_1$

$= \frac{1}{2} \log \left|2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right| + C$ ($\because \frac{1}{2} \log 2$ एक नियतांक है और नियतांक + नियतांक = नियतांक)

प्रश्न 3. $\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}} dx \ldots (1)$

$2 - x = t$ रखने पर,

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $-dx = dt \Rightarrow dx = -dt$

$\therefore$ (1) से, $I = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = -\log\left[t + \sqrt{t^2 + 1}\right] + C$

$= -\log\left[(2 - x) + \sqrt{(2 - x)^2 + 1}\right] + C \left(\because \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|\right)$

$= \log\left[\frac{1}{(2-x)\sqrt{(2-x)^2+1}}\right] + C$

प्रश्न 4. $\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$

उत्तर-

मान $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{25}-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)-x^2}}$

$= \frac{1}{5}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{3}{5}}\right) + C \left[\because \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$

$= \frac{1}{5}\sin^{-1}\left(\frac{5x}{3}\right) + C$

प्रश्न 5. $\frac{3x}{1+2x^4}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{3x}{1+2x^4} dx \ldots (1)$

$x^2 = t$ रखने पर, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$

$\therefore$ (1) से, $I = \frac{1}{2}\int \frac{3dt}{1+2t^2} = \frac{3}{4}\int \frac{dt}{\frac{1}{2}+t^2} = \frac{3}{4}\int \frac{dt}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+t^2}$

$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + C \left[\because \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$

$= \frac{3}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}x^2) + C$

प्रश्न 6. $\frac{x^2}{1-x^6}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{x^2}{1-x^6} dx = \int \frac{x^2}{1-(x^3)^2} dx \ldots (1)$

माना $x^3 = t$,

तथा दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $3x^2\,dx = dt \Rightarrow x^2\,dx = \frac{1}{3}dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1-t^2}$ $\left[\because \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\right]$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{6}\log\left|\frac{1+x^3}{1-x^3}\right| + C$

प्रश्न 7. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

माना $I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ और $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$\therefore I = I_2 - I_2 \ldots (1)$

अब, $I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx \ldots (2)$

माना $x^2 - 1 = t,$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt$

$\therefore$ (2) से, $I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2} \times \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1 = \sqrt{t} + C_1$

या $I_1 = \sqrt{x^2-1} + C_1 \ldots (3)$

तथा $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \log\left[x + \sqrt{x^2-1}\right] + C_2 \ldots (4)$

(3) तथा (4) से I_1 तथा I_2 का मान (1) में रखने पर,

$I = \sqrt{x^2-1} + C_1 - \log\left[x + \sqrt{x^2-1}\right] - C_2$

$\therefore I = \sqrt{x^2-1} - \log\left[x + \sqrt{x^2-1}\right] + C \; (\because C_1 - C_2 = C)$

प्रश्न 8. $\frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^3)^2+(a^3)^2}} dx \ldots (1)$

माना $x^3 = t,$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $3x^2\ dx = dt \Rightarrow x^2\ dx = \frac{1}{3} dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+(a^3)^2}} = \frac{1}{3} \log \left[t + \sqrt{t^2 + a^6}\right] + C$

$= \frac{1}{3} \log \left[x^3 + \sqrt{x^6 + a^6}\right] + C$

प्रश्न 9. $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+4}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+4}} \ldots (1)$

माना $\tan x = t,$ दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\sec^2 x\ dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \log \left[t + \sqrt{t^2 + 4}\right] + C$

$= \log \left[\tan x + \sqrt{\tan^2 x + 4}\right] + C$

प्रश्न 10. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+1}} = \log \left[(x+1) + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right] + C$

प्रश्न 11. $\frac{1}{9x^2+6x+5}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{1}{9x^2+6x+5} dx = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}}$

$= \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)+\frac{5}{9}-\frac{1}{9}} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{9}}$

$= \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} \quad \left[\because \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]$

$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{\frac{2}{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right) + C$

$= \frac{3}{9\times 2} \tan^{-1}\left[\frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}{2}\right]$

$= \frac{1}{6} \tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{2}\right) + C$

प्रश्न 12. $\frac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{7-(x^2+6x)}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{7-(x^2+6x+9)+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x+3)^2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{4^2-(x+3)^2}}$

$= \sin^{-1}\left(\frac{x+3}{4}\right) + C \quad \left[\because \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}\right]$

प्रश्न 13. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)+2-\frac{9}{4}}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$

$= \log\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right| + C \left(\because \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \log\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)$

$= \log\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right| + C$

$= \log\left|\frac{2x-3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right| + C$

प्रश्न 14. $\frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}} dx$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{8-(x^2-3x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-\left(x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{4}}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}$

$= \sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{41}}{2}}\right) + C \left[\because \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$

$= \sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}}\right) + C$

प्रश्न 15. $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

उत्तर-

$$\text{माना } I=\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-(a-b)x+ab}}$$

$$=\int \frac{dx}{\sqrt{\left[x^2-2\left(\frac{a+b}{2}\right)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]+ab-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}}$$

$$=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}}$$

$$=\log\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}\right]+C$$

$$=\log\left[x-\frac{a+b}{2}+\sqrt{(x-a(x-b)}\right]+C$$

प्रश्न 16. $\frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$

उत्तर-

$$\text{माना } I=\int \frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}dx\ldots(1)$$

$2x^2+x-3=t$ रखने पर,

दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow (4x+1)dx=dt$$

समीकरण (1) से,

$$\therefore I=\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$$

$$=2\sqrt{2x^2+x-3}+C$$

प्रश्न 17. $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} dx$

$I = I_1 + I_2$ (मान लिया) ...(1)

अब, $I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx \ldots (2)$

माना $x^2 - 1 = t$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2x\, dx = dt \Rightarrow x\, dx = \frac{1}{2} dt$

∴ (2) से,

$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt$

$= \frac{1}{2} \times \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{t} = \sqrt{x^2 - 1} + C_1 \ldots (3)$

तथा $I_2 = \int \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} dx = 2 \log \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C_2 \ldots (4)$

(3) तथा (4) से I_1 तथा I_2 का मान (1) में रखने पर,

$I = \sqrt{x^2 - 1} + 2 \log \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C \; [\because C_1 + C_2 = C]$

प्रश्न 18. $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{5x-2}{1+2x+3x^2} dx$

माना $5x - 2 = A \frac{d}{dx} (1 + 2x + 3x^2) + B$

$\Rightarrow 5x - 2 = A(6x + 2) + B = 6Ax + (2A + B)$

दोनों ओर x तथा अचर पद की तुलना करने पर,

$$6A = 5, \therefore A = \frac{5}{6}; -2 = 2A + B$$

$$\therefore B = -2 - 2A = -2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) = -2 - \frac{5}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$\therefore I = \int \frac{\frac{5}{6}(2+6x) - \frac{11}{3}}{1+2x+3x^2} dx$$

$$= \frac{5}{6}\int \frac{2+6x}{1+2x+3x^2} dx - \frac{11}{3}\int \frac{1}{1+2x+3x^2} dx$$

माना $I_1 = \int \frac{2+6x}{1+2x+3x^2} dx$ और $I_2 = \int \frac{1}{1+2x+3x^3} dx$

$$\therefore I = \frac{5}{6} I_1 - \frac{11}{3} I_2 \ldots (1)$$

$$\therefore I_1 = \frac{5}{6}\int \frac{2+6x}{1+2x+3x^2} \ldots (2)$$

माना $1 + 2x + 3x^2$ के सापेक्ष अवकलन करने पर, $(2 + 6x)\, dx = dt$

$\therefore$ (2) से, $I_1 = \frac{5}{6}\int \frac{dt}{t} = \frac{5}{6}\log t = \frac{5}{6}\log(1 + 2x + 3x^2) + C_1 \ldots (3)$

तथा $I_2 = \int \frac{dx}{1+2x+3x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + x^2}$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right) + C_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \ldots (4)$$

(3) तथा (4) का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$I = \frac{5}{6}\log(1 + 2x + 3x^2) - \frac{11}{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+ C_1 - \frac{11}{3} C_2$$

$$= \frac{5}{6}\log(1 + 2x + 3x^2) - \frac{11}{3\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right) + C \left(\because C_1 - \frac{11}{3} C_2 = C\right)$$

प्रश्न 19. $\frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}} dx = \int \frac{6x+7}{\sqrt{x^2-9x+20}} dx$

माना $6x + 7 = A \frac{d}{dx}(x^2 + 9x + 20) + B$

$= A(2x - 9) + B = 2\,Ax - 9A + B$

दोनों ओर x तथा अचर पद की तुलना करने पर,

$6 = 2A \ \therefore A = 3$

$7 = -9A + B = -27 + B \ \therefore B = 34$

$\therefore I = \int \frac{3(2x-9)+34}{\sqrt{x^2-9x+20}} dx$

$= 3\int \frac{(2x-9)}{\sqrt{x^2-9x+20}} dx + 34\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9x+20}}$

माना $I_1 = \int \frac{2x-9}{x^2-9x+20} dx$ और $I_2 = \int \frac{dx}{x^2-9x+20}$

$\therefore I = 3I_1 + 34I_2 \ldots (1)$

अब $I_1 = \int \frac{(2x-9)}{\sqrt{x^2-9x+20}} \ldots (2)$

माना $x^2 - 9x + 20 = t,$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $(2x - 9)dx = dt$

$\therefore$ (2) से, $I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1 = 2\sqrt{t} + C_1$

$= 2\sqrt{x^2 - 9x + 20} + C_1$

तथा $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9x+20}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-2\times\frac{9}{2}+\frac{81}{4}\right)+20-\frac{81}{4}}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} \quad \left[\because \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]$

$= \log\left|\left(x-\frac{9}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|$

$= \log\left|\frac{2x-9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right| + C_2 \ldots (4)$

(3) तथा (4) से I_1 तथा I_2 का मान (1) में रखने पर,

$\therefore I = 3\left(2\sqrt{x^2-9x+20}+C_1\right)$

$+ 34\left[\log\left|\frac{2x-9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right|+C_2\right]$

$= 6\sqrt{x^2-9x+20}+3C_1$

$+ 34\log\left|\frac{2x-9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right|+34C_2$

$= 6\sqrt{x^2-9x+20}+34\log\left|\frac{2x-9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right|+C \; (\because C = 3C_1+34C_2)$

प्रश्न 20. $\frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \int \frac{x+2}{\sqrt{-(x^2-4x+4)+4}}dx$

$= \int \frac{x+2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx = \int \frac{x-2+4}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx$

$= \int \frac{x-2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx$

माना $I_1 = \int \frac{x-2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx$ और $I_2 = 4\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx$

$\therefore I = I_1 + 4I_2 \ldots (1)$

अब, $I_1 = \int \frac{x-2}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx \ldots (2)$

माना $4-(x-2)^2 = t$ तथा दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$-2(x-2)dx = dt \Rightarrow (x-2)dx = -\frac{1}{2}dt$

∴ (2) से,

$I_1 = \frac{-1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{-1}{2}\frac{t^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + C$

$= \frac{-1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1 = -\sqrt{t} + C_1$

$= -\sqrt{4-(x-2)^2} + C_1 \ldots (3)$

तथा $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2)^2-(x-2)^2}} dx$

$= \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C_2 \left(\because \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right) \ldots (4)$

(3) तथा (4) से I_1 व I_2 के मान (1) में रखने पर,

$I = -\sqrt{4-(x-2)^2} + C_1 + 4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C_2$

प्रश्न 21. $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$

$\therefore I = \frac{1}{2}I_1 + I_2 \ldots (1)$

जहाँ $I_1 = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$ तथा $I_2 = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$

अब, $I_1 = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx \ldots (2)$

माना $x^2 + 2x + 3 = t$; दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$(2x+2)dx = dt$$

$$\therefore I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{t}$$

$$= 2\sqrt{x^2+2x+3} + C_1 \ldots (3)$$

तथा $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}}$

$$= \log\left|(x+1) + \sqrt{(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2}\right| + C_2$$

$$= \log\left|(x+1) + \sqrt{x^2+2x+3}\right| + C_2 \ldots (4)$$

(3) तथा (4) से I_1 तथा I_2 का मान (1) में रखने पर,

$$\therefore I = \sqrt{x^2+2x+3} + \frac{1}{2}C_1 + \log\left|(x+1) + \sqrt{(x+1)^2 + (2)^2}\right| + C_2$$

$$= \sqrt{x^2+2x+3} + \log\left|(x+1) + \sqrt{x^2+2x+3}\right| + C \left(\because C = \frac{1}{2}C_1 + C_2\right)$$

प्रश्न 22. $\frac{x+3}{x^2-2x-5}$

उत्तर-

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+4}{x^2-2x-5}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x-5} dx + 4 \int \frac{dx}{x^2-2x-5}$$

माना $I_1 = \int \frac{2x-2}{x^2-2x-5} dx$ और $I_2 = \int \frac{dx}{x^2-2x-5} dx$

$\therefore I = \frac{1}{2} I_1 + 4I_2 \ldots (1)$

अब, $I_1 = \frac{2x-2}{x^2-2x-5} dx \ldots (2)$

माना x^2 - 2x - 5 = t, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$(2x-2)dx = dt$

$\therefore$ (2) से, $I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log(t) = \log(x^2 - 2x - 5) + C_1 \ldots (3)$

और $I_2 = \int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2-5-1}$

$= \int \frac{dx}{(x-1)^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \log\left[\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right] + C_2 \ldots (4)$

(3) तथा (4) से I_1 तथा I_2 का मान (1) में रखने पर,

$\therefore I = \frac{1}{2}\log(x^2 - 2x - 5) + \frac{1}{2}C_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} \log\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + 4C_2$

या $I = \frac{1}{2}\log(x^2 - 2x - 5) + \frac{2}{\sqrt{6}} \log\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + C \left(\because C = \frac{1}{2}C_1 + 4C_2\right)$

प्रश्न 23. $\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

उत्तर-

$I = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx$

$= \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

$= \frac{5}{2} I_1 - 7I_2 + C$

$x^2 + 4x + 10 = t, \Rightarrow (2x+4)dx = dt$

$$\therefore I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{x^2 + 4x + 10}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + (\sqrt{6})^2}}$$

$$= \log\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10}\right|$$

$$I = 5\sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7\log\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10}\right| + C$$

प्रश्न 24.

$\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ बराबर है:

a. $x\tan^{-1}(x+1) + C$

b. $\tan^{-1}(x+1) + C$

c. $(x+1)\tan^{-1}x + C$

d. $\tan^{-1}x + C$

उत्तर-

c. $(x+1)\tan^{-1}x + C$

हल-

$$I = \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$= (x+1)\tan^{-1}x + C$$

प्रश्न 25.

$\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$ बराबर है:

a. $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right) + C$

b. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+C$

c. $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$

d. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$

उत्तर-

b. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+C$

हल-

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{9}{8}\right)^2-\left[x^2-\frac{9}{4}x+\left(\frac{9}{8}\right)^2\right]}}\right]$$

$$\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+C$$

प्रश्नावली 7.5 (पृष्ठ संख्या 339-340)

फलन का समाकलन ज्ञात कीजिए-

प्रश्न 1. $\frac{x}{(x+1)(x+2)}$

उत्तर-

माना $\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}\ldots(1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

$\Rightarrow\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$

⇒ x = A(x + 2) + B(x + 1) ...(2)

सर्वसमिका (2) में x + 1 = 0 से x = -1 रखने पर,

-1 = A(-1 + 2) ⇒ -1 = A ∴ A = -1

सर्वसमिका (2) में x + 2 = 0 से x = -2 रखने पर,

-2 = B(-2 + 1) ⇒ -2 = -B ⇒ B = 2

∴ (1) से, $\frac{x}{(x+1)(x+2)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx = -\int \frac{1}{x+1} dx + 2 \int \frac{1}{x+2} dx$$

$$= -\log(x+1) + 2\log(x+2) + C$$

$$= \log(x+2)^2 - \log(x+1) + C$$

$$= \log\left[\frac{(x+2)^2}{x+1}\right] + C$$

प्रश्न 2. $\frac{1}{x^2-9}$

उत्तर-

माना $\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \ldots (1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

⇒ 1 = A(x + 3) + B(x - 3) ...(2)

सर्वसमिका (2) में x - 3 = 0 से x = 3 रखने पर, 1 = A(3 + 3) $\Rightarrow A = \frac{1}{6}$

सर्वसमिका (2) में x + 3 = 0 से x = -3 रखने पर,

$$1 = B(-3-3) \Rightarrow B = -\frac{1}{6}$$

∴ (1) से, $\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right]$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2-9} dx = \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right) dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[\log|x-3| - \log|x+3|\right] + C$$

$$= \frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$$

प्रश्न 3. $\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

उत्तर-

दिया है, $\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \ldots (1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

⇒ 3x - 1 = A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2) ...(2)

सर्वसमिका (2) में (x - 1) = 0 से x = 1 रखने पर,

3 - 1 = A(1 - 2)(1 - 3) ⇒ 2 = A(-1)(-2) ⇒ A = 1

पुनः सर्वसमिका (2) में x - 2 = 0 से x = 2 रखने पर,

6 - 1 = B(2 - 1)(2 - 3) ⇒ 5 = B(1)(-1) ⇒ B = -5

सर्वसमिका (2) में x - 3 = 0 से x = 3 रखने पर,

9 - 1 = C(3 - 1)(3 - 2) ⇒ 8 = C(2)(1) ⇒ C = 4

∴ (1) से, $\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{4}{x-3}$

$$\Rightarrow \int \frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$$

$$= \int \frac{1}{x-1}dx - 5\int \frac{1}{x-2}dx + 4\int \frac{1}{x-3}dx$$

$$= \log(x-1) - 5\log(x-2) + 4\log(x-3) + C$$

प्रश्न 4. $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

उत्तर-

दिया है, $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$

$$\Rightarrow x = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3)$$
$$+ C(x-1)(x-2) \ldots (i)$$

x = 1, 2, 3 में (i) का मान रखने पर,

$$A = \frac{1}{2}, B = -2, C = \frac{3}{2}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{x-2} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x-1| - 2\log|x-2| + \frac{3}{2}\log|x-3| + C$$

प्रश्न 5. $\frac{2x}{x^2+3x+2}$

उत्तर-

माना $\frac{2x}{x^2+3x+2} = \frac{2x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \ldots (1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

⇒ 2x = A(x + 2) + B(x + 1) ...(2)

सर्वसमिका (2) में x + 1 = 0 से x = -1 रखने पर,

2(-1) = A(-1 + 2) ⇒ -2 = A ⇒ A = -2

सर्वसमिका (2) में x + 2 = 0 से x = -2 रखने पर,

2(-2) = B(-2 + 1) ⇒ B = 4

$\therefore$ (1) से, $\frac{2x}{x^2+3x+2} = \frac{-2}{x+1} + \frac{4}{x+2}$

$$\therefore \int \frac{2x}{x^2+3x+2}dx = -2\int \frac{dx}{x+1} + 4\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -2\log|x+1| + 4\log|x+2| + C$$

प्रश्न 6. $\frac{1-x^2}{x(1-2x)}$

उत्तर-

$\frac{1-x^2}{x(1-2x)}$ यहाँ पर अंश तथा हर की घात एकसमान है, अंश को हर से भाग देने पर,

$$\frac{1-x^2}{x(1-2x)} = \frac{1}{2} + \frac{1-\frac{1}{2}x}{x-2x^2} = \frac{1}{2} + \frac{2-x}{2x(1-2x)}$$

$$x - 2x^2 \overline{)\,1 - x^2\,}\;\left(\frac{1}{2}\right.$$

$$\frac{1}{2}x - x^2$$

$$- \quad +$$

$$1 - \frac{1}{2}x$$

माना $\frac{2-x}{x(1-2x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-2x} \ldots (1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

⇒ $2 - x = A(1 - 2x) + Bx \ldots(2)$

सर्वसमिका (2) में $x = 0$ रखने पर, $2 = A \therefore A = 2$

सर्वसमिका (2) में $x - 2x = 0$ से $x = \frac{1}{2}$ रखने पर, $\frac{3}{2} = B \cdot \frac{1}{2} \quad \therefore \quad B = 3$

$$\therefore \frac{2-x}{x(1-2x)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{1-2x}$$

$\therefore$ (1) से, $\frac{1-x^2}{x(1-2x)} = \frac{1}{2} + \frac{2-x}{2x(1-2x)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{x} + \frac{3}{1-2x}\right]$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{3}{2(1-2x)}$$

$$\therefore \int \frac{1-x^2}{x(1-2x)} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{1-2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \log|x| + \frac{3}{2}\frac{\log|1-2x|+C}{-2}$$

$= \frac{1}{2}x + \log|x| - \frac{3}{4}\log|1-2x| + C$

प्रश्न 7. $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$

उत्तर-

माना $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \ldots (1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

⇒ x = A(x2 + 1) + (Bx + C)(x - 1)

⇒ x = A(x2 + 1) + B(x2 - x) + C(x - 1) ...(2)

सर्वसमिका (2) में x - 1 = 0 से x = 1 रखने पर,

$1 = A(1+1) \Rightarrow 1 = 2A \ \therefore A = \frac{1}{2}$

सर्वसमिका (2) में x^2 व x के गुणांक की तुलना करने पर,

$0 = A + B \ \therefore B = -A = -\frac{1}{2}$

तथा $1 = -B + C \ \therefore C = 1 + B = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ (1) से, $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}$

$= \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}$

$= \frac{1}{2x-1} - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$

माना $I = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}$

तब $I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C_1 \left[\text{जहाँ } I_1 = \int \frac{x}{x^2+1}dx\right]$

माना $x^2 + 1 = t$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow 2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt$$

$$\therefore I_1 = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\log t + C_2 = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C_2$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C \ (\because C_1 + C_2 = C)$$

प्रश्न 8. $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$

उत्तर-

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2 \ldots (i)$$

x = 1, -2 रखने पर,

हमे ज्ञात है, $B = \frac{1}{3}, C = \frac{-2}{9}$

$$\therefore I = \frac{2}{9}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \frac{2}{9}\int \frac{1}{x+2}dx$$

$$= \frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{3(x-1)} + C$$

प्रश्न 9. $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$

उत्तर-

माना $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3x+5}{x^2(x-1)-(x-1)} = \frac{3x+5}{(x^2-1)(x-1)}$

$$= \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)(x-1)}$$

$$= \frac{3x+5}{(x-1)^2(x+1)}$$

अब $\frac{3x+5}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} \ldots (1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

$$\therefore 3x + 5 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \ldots (2)$$

सर्वसमिका (2) में x - 1 = 0 से x = 1 रखने पर,

$$3 + 5 = B.2 \ \therefore B = \frac{8}{2} = 4$$

सर्वसमिका (2) x^2 के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$0 = A + C \Rightarrow A = -C = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{(1) से, } \frac{3x+5}{(x-1)^2(x+1)} dx = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)}$$

$$\therefore \int \frac{3x+5}{(x-1)^2(x+1)} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\log(x-1) + 4\left(\frac{(x-1)^{2+1}}{2+1}\right) + \frac{1}{2}\log(x+1) + C$$

$$= \frac{1}{2}[\log(x+1) - \log(x-1)] - 4 \times \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{4}{x-1} + C$$

प्रश्न 10. $\frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$

उत्तर-

$$\text{माना } \frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)} = \frac{2x-3}{(x-1)(x+1)(2x+3)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{2x+3} \ldots (1)$$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

$$\Rightarrow 2x - 3 = A(x+1)(2x+3) + B(x-1)(2x+3)$$
$$+ C(x-1)(x+1) \ldots (2)$$

सर्वसमिका (2) में x - 1 = 0 से x = 1 रखने पर,

$$-2-3=B(-1-1)(-2+3) \Rightarrow -5=B(-2)(1) \Rightarrow B=\frac{5}{2}$$

सर्वसमिका (2) में $2x+3=0$ से $x=-\frac{3}{2}$ रखने पर,

$$-3-3=C\left(-\frac{3}{2}-1\right)\left(-\frac{3}{2}+1\right) \Rightarrow -6=C\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow C=-6\times\frac{4}{5}=-\frac{24}{5}$$

$\therefore$ (1) से, $\frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}=-\frac{1}{10(x-1)}+\frac{5}{2(x+1)}-\frac{24}{5(2x+3)}$

$$\therefore \int\frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}dx=-\frac{1}{10}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{5}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{2x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{10}\log(x-1)+\frac{5}{2}\log(x+1)-\frac{24}{5}\log\frac{(2x+3)}{2}+C$$

$$=\frac{5}{2}\log(x+1)-\frac{1}{10}\log(x-1)-\frac{12}{5}\log(2x+3)+C$$

प्रश्न 11. $\frac{5x}{(x+1)(x^2-4)}$

उत्तर-

माना $\frac{5x}{(x+1)(x^2-4)}=\frac{5x}{(x+1)(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}\ ...(1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

$$\Rightarrow 5x=A(x+2)(x-2)+B(x+1)(x-2)$$
$$+C(x+1)(x+2)\ ...(2)$$

सर्वसमिका (2) में x + 1 = 0 से x = -1 रखने पर,

$$-5=A(-1+2)(-1-2) \Rightarrow A=\frac{5}{3}$$

सर्वसमिका (2) में x + 2 = 0 से x = -2 रखने पर,

$-10 = B(-2+1)(-2-2) \Rightarrow B = -\frac{5}{2}$

सर्वसमिका (2) में x - 2 = 0 से x = 2 रखने पर,

$10 = C(2+1)(2+2) \Rightarrow C = \frac{5}{6}$

$\therefore$ (1) से, $\frac{5x}{(x+1)(x^2-4)} = \frac{5}{3(x+1)} - \frac{5}{2(x+2)} + \frac{5}{6(x-2)}$

$\therefore \int \frac{5x}{(x+1)(x^2-4)} dx = \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{5}{6}\int \frac{dx}{x-2}$

$= \frac{5}{3}\log|x+1| - \frac{5}{2}\log|x+2| + \frac{5}{6}\log|x-2| + C$

प्रश्न 12. $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}$

उत्तर- चूँकि $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}$ में अंश की घात हर की घात से अधिक है।

अतः $x^3 + x + 1$ को $x^2 - 1$ से भाग देते है।

$$x^2 - 1 \,)\, x^3 + x + 1 \,(\, x$$
$$x^3 - x$$
$$- \quad +$$
$$2x + 1$$

$\therefore \frac{x^3+x+1}{x^2-1} = x + \frac{2x+1}{x^2-1} \ldots (1)$

अब, $\frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1} \ldots (2)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

$\Rightarrow 2x + 1 = A(x-1) + B(x+1) \ldots (3)$

सर्वसमिका (3) में x + 1 = 0 से x = -1 रखने पर,

$-2 + 1 = A(-1-1) \Rightarrow -1 = -2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

सर्वसमिका (3) में x - 1 = 0 से x = 1 रखने पर,

$$2+1 = B(1+1) \Rightarrow B = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{3}{2(x-1)} \ldots (4)$$

$\therefore$ (1) और (4) से,

$$\frac{x^3+x+1}{x^2-1} = x + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{3}{2(x-1)}$$

$$\therefore \int \frac{x^3+x+1}{x^2-1} dx = \int x\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x+1) + \frac{3}{2}\log(x-1) + C$$

प्रश्न 13. $\frac{2}{(1-x)(1+x^2)}$

उत्तर-

माना $\frac{2}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \ldots (1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

$\Rightarrow 2 = A(1 + x^2) + (Bx + C)(1 - x)$

$= A(1 + x^2) + B(x - x^2) + C(1 - x) \ldots(2)$

सर्वसमिका (2) में, $x - 1 = 0$ से $x = 1$ रखने पर,

$2 = A(2) \therefore A = 1$

सर्वसमिका (2) से, x^2 तथा x के गुणांकों की तुलना करने पर,

$0 = A - B \therefore B = A = 1$

$0 = B - C \therefore C = B = 1$

$\therefore$ (1) से, $\frac{2}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{1}{1-x} + \frac{x+1}{1+x^2}$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore I = \int \frac{2}{(1-x)(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

या $I = -\log(1-x) + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \tan^{-1} x + C$

प्रश्न 14. $\frac{3x-1}{(x+2)^2}$

उत्तर-

माना $\frac{3x-1}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2)-7}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2)}{(x+2)^2} - \frac{7}{(x+2)^2}$

$$= \frac{3}{(x+2)} - \frac{7}{(x+2)^2}$$

$$\therefore \int \frac{3x-1}{(x+2)^2} dx = 3\int \frac{dx}{x+2} - 7\int \frac{dx}{(x+2)^2} + C$$

$$= 3\int \frac{dx}{x+2} - 7\int (x+2)^{-2} dx + C$$

$$= 3\log|x+2| - 7\frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C = 3\log|x+2| + \frac{7}{x+2} + C$$

प्रश्न 15. $\frac{1}{x^4-1}$

उत्तर-

माना $\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \ldots (1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

$1 = A(x - 1)(x^2 + 1) + B(x + 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x + 1)(x - 1) \ldots(2)$

सर्वसमिका (2) में, x + 1 = 0 से x = -1 रखने पर,

1 = A(-1 - 1)(1 + 1) या 1 = A(-4) ⇒ $A = -\frac{1}{4}$

सर्वसमिका (2) में, x - 1 = 0 से x = 1 रखने पर,

1 = B(1 + 1)(1 + 1) या 1 = B(2)(2) ⇒ $B = \frac{1}{4}$

पुनः सर्वसमिका (2) से,

$1 = A(x^3 + x - x^2 - 1) + B(x^3 + x + x^2 + 1) + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D$

दोनों ओर x^3 तथा अचर पदों के गुणांकों की तुलना करने पर,

$0 = A + B + C$ या $0 = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} + C \Rightarrow C = 0$

तथा $1 = -A + B - D$ या $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - D \Rightarrow D = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ (1) से, $\frac{1}{x^4-1} = -\frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{x \times 0 - \frac{1}{2}}{(x^2+1)}$

$\therefore \int \frac{dx}{x^4-1} = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx$

$= -\frac{1}{4}\log(x+1) + \frac{1}{4}\log(x-1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$

$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$

प्रश्न 16. $\frac{1}{x^n+1}$ [संकेत: अंश एवं हर को x^{n-1} से गुणा कीजिए और $x^n = t$ रखिए]

उत्तर-

$\frac{x^{n-1}}{x.x^{n-1}(x^n+1)} = \frac{x^{n-1}}{x^n(x^{n+1})}$

मान रखने पर, $x^n = t$

तथा $nx^{n-1}dx = dt$

$\therefore \int \frac{dx}{x(x^n+1)} = \frac{1}{n}\int \frac{dt}{t(t+1)} \ldots (i)$

अब $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$

$\Rightarrow 1 = A(t+1) + Bt \ldots (ii)$

t = 0, -1 का मान (i) में रखने पर,

हम जानते है, ⇒ A = 1 & B = -1

$$\therefore \int \frac{dx}{x(x^n+1)} = \frac{1}{n} \int \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \frac{1}{n}[\log|t| - \log|t+1|] + C = \frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right| + C$$

प्रश्न 17. $\frac{\cos x}{(1-\sin x)(2-\sin x)}$ [संकेत: sinx = t रखिए]

उत्तर-

$\sin x = t$ रखने पर,

चूँकि $\cos x \, dx = dt$

$$\therefore I = \int \frac{1}{(1-t)(2-t)} dt$$

अब $\frac{1}{(1-t)(2-t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{2-t}$

⇒ 1 = A(2 - t) + B(1 - t) ...(ii)

t = 1, 2 का मान (ii) में रखने पर,

ज्ञात है: A = 1 & B = -1

$$\therefore I = \int \frac{1}{1-t} dt - \int \frac{dt}{2-t}$$

$$= \log\left|\frac{2-t}{1-t}\right| + C = \log\left|\frac{2-\sin x}{1-\sin x}\right| + C$$

प्रश्न 18. $\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$

उत्तर-

$\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$ में $x^2 = y$ रखने पर,

$$\frac{(y+1)(y+2)}{(y+3)(y+4)} = \frac{y^2+3y+2}{y^2+7y+12}$$

$$y^2 + 7y + 12 \overline{) \; y^2 + 3y + 2 \; } (1$$
$$\underline{\; y^2 + 7y + 12 \;}$$
$$- \quad - \quad -$$
$$- 4y - 10$$

$$= 1 - \frac{4y+10}{y^2+7y+12} = 1 - \frac{2(2y+5)}{(y+3)(y+4)} \;\ldots (1)$$

माना $\frac{(2y+5)}{(y+3)(y+4)} = \frac{A}{y+3} + \frac{B}{y+4}$ (आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

∴ $2y + 5 = A(y + 4) + B(y + 3)$ ...(2)

सर्वसमिका (2) में, $y + 3 = 0$ से $x = -3$ रखने पर,

$-6 + 5 = A.1$ ∴ $A = -1$

सर्वसमिका (2) में, $y + 4 = 0$ से $x = -4$ रखने पर,

$-8 + 5 = B(-4 + 3)$

$\Rightarrow -3 = -B$ ∴ $B = 3$

∴ (1) से, $\frac{(y+1)(y+2)}{(y+3)(y+4)} = 1 - 2\left[\frac{-1}{y+3} + \frac{3}{y+4}\right] = 1 + \frac{2}{y+3} - \frac{6}{y+4}$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)} = 1 + \frac{2}{x^2+3} - \frac{6}{x^2+4}$$

समाकलन करने पर,

$$\therefore \int \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}dx = \int 1dx + 2\int \frac{1}{x^2+3}dx - 6\int \frac{1}{x^2+4}dx$$

$$= \int 1dx + 2\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2} - 6\int \frac{dx}{x^2+(2)^2}$$

$$= x + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{6}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C \left(\because \int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$= x + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} - 3\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

प्रश्न 19. $\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$

उत्तर- माना $I = \int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$

माना $x^2 = t$,

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, 2x dx = dt

$$\therefore I = \int \frac{dt}{(t+1)(t+3)}$$

अब, $\frac{1}{(t+1)(t+3)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+3} \ldots (1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

1 = A(t + 3) + B(t + 1) ...(2)

सर्वसमिका (2) में t + 1 = 0 से t = -1 रखने पर,

1 = A(-1 + 3) ⇒ 1 = 2A ∴ $A = \frac{1}{2}$

सर्वसमिका (2) में t + 3 = 0 से t = -3 रखने पर,

1 = B(-3 + 1) ⇒ 1 = -2A ∴ $A = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ (1) से, $\frac{1}{(t+1)(t+3)} = \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2(t+3)}$

$$\therefore \int \frac{1}{(t+1)(t+3)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+3}dt$$

$$= \frac{1}{2}\log(t+1) - \frac{1}{2}\log(t+3) + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t+1}{t+3}\right| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2+1}{x^2+3}\right| + C$$

प्रश्न 20. $\frac{1}{x(x^4-1)}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{1}{x(x^4-1)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3 dx}{x^4(x^4-1)}$ ($4x^3$ से अंश तथा हर में गुणा करने पर)

माना $x^4 = t$,

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $4x^3\,dx = dt$

$$\therefore I = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t(t-1)}$$

अब, $\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} \ldots (1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

या 1 = A(t - 1) + Bt ...(2)

सर्वसमिका (2) में t = 0 रखने पर,

1 = A(-1) ∴ A = -1

सर्वसमिका (2) में t - 1 = 0 से t = 1 रखने पर,

1 = B.1 ∴ B = 1

$$\therefore I = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t(t-1)} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt$$

$$= \frac{1}{4}\log|t-1| - \frac{1}{4}\log|t| + C$$

$$\therefore I = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x^4-1}{x^4}\right| + C$$

प्रश्न 21. $\frac{1}{(e^x-1)}$ [संकेत: $e^x = t$ रखिए]

उत्तर- $\int \frac{1}{e^x-1} dx = \int \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx$ (e^{-x} से अंश और हर में गुणा करने पर)

$= \int \frac{1}{t} dt$ जहाँ $1 - e^{-x} = t$ तथा $e^{-x}\,dx = dt$

$= \log t + C = \log(1 - e^{-x}) + C$

सही उत्तर का चयन कीजिए।

प्रश्न 22.

$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$ बराबर है:

a. $\log\left|\frac{(x-1)^2}{x-2}\right| + C$

b. $\log\left|\frac{(x-2)^2}{x-1}\right| + C$

c. $\log\left|\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2\right| + C$

d. $\log|(x-1)(x-2)| + C$

उत्तर-

b. $\log\left|\frac{(x-2)^2}{x-1}\right| + C$

हल-

$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)} dx = \int \left[\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right] dx$$

$$\log\left|\frac{(x-2)^2}{x-1}\right| + C$$

प्रश्न 23.

$\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ बराबर है:

a. $\log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

b. $\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

c. $-\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

d. $\frac{1}{2}\log|x| + \log(x^2+1) + C$

उत्तर-

a. $\log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

हल-

दिया है- $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$\Rightarrow 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x)$

माना $x = 0$, $1 = A \Rightarrow A = 1$

गुणांक की तुलना करने पर x^2 and x; $B = -1$ and $C = 0$

$$\therefore \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}\right]dx$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

प्रश्नावली 7.6 (पृष्ठ संख्या 344-345)

फलन का समाकलन कीजिए।

प्रश्न 1. $x \sin x$

उत्तर-

$\int x \sin x \, dx$

$= x \int \sin x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx} x . \int \sin x \, dx \right.$

$= x.(-\cos x) - \int [1.(-\cos x)] dx$

$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$

$= -x \cos x + \sin x + C$

प्रश्न 2. $x \sin 3x$

उत्तर-

माना $I = \int x . \sin 3x \, dx$

$= x \int \sin 3x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx} x \int \sin 3x \, dx \right] dx$

x को पहला फलन तथा sin 3x को दूसरा फलन लेकर खण्डश: समाकलन विधि से

$= x\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) - \int 1.\left(\frac{-\cos 3x}{3}\right) dx$

$= -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{1}{3} \cos 3x \, dx = -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{1}{3} . \frac{\sin 3x}{3} + C$

$= -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{1}{9} \sin 3x + C$

प्रश्न 3. x^{2e^x}

उत्तर-

माना $I = \int x^2 e^x \, dx$

$\therefore I = \int x^2 e^x \, dx = x^2 \int e^x . dx - \int \left[\frac{d}{dx} x^2 \int e^x \, dx \right] dx$

x^2 को पहला फलन तथा e^x को दूसरा फलन लेकर खण्डश: समाकलन करने पर,

$$= x^2 \int e^x\,dx - \int (2x)\cdot e^x\,dx = x^2e^x - 2\int x\,e^x\,dx$$

$$= x^2e^x - 2\left[x.\int e^x\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}x.\int e^x\,dx\right)\right]$$

$$= x^2e^x - 2\left[xe^x - \int 1.e^x\,dx\right]$$

$$= x^2e^x - 2x\,e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

प्रश्न 4. $x \log x$

उत्तर-

$$\int x \log x\,dx$$

$$= \log x.\int x\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}\log x.\int x\,dx\right]dx$$

$$= \log x.\frac{x^2}{2} - \int\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\right]dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C$$

प्रश्न 5. $x \log 2x$

उत्तर-

$$I = \int x \log 2x\,dx$$

$$= \int(\log 2x).\,x\,dx$$

$$= \log 2x\int x\,dx - \left[\int\frac{d}{dx}(\log 2x)\int x\,dx\right]dx$$

log 2x को पहला फलन तथा x को दूसरा फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर,

$$= (\log 2x)\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{2x}.2\left(\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\log 2x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\log 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\log 2x - \frac{x^2}{4} + C$$

प्रश्न 6. $x^2 \log x$

उत्तर-

माना $I = \int x^2 \log x \, dx$

$$= \log x \int x^2 \, dx - \int \left[\frac{d}{dx} \log x \int x^2 \, dx\right] dx$$

$$= \log x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3}\right] dx = \frac{x^3 \log x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{x^3 \log x}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^3 \log x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

$$= \frac{x^3}{3}\left(\log x - \frac{1}{3}\right) + C$$

प्रश्न 7. $x \sin^{-1} x$

उत्तर-

$$I = x \sin^{-1} x. \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} I_1,$$

$x = \sin\theta$ रखने पर,

तथा $dx = \cos\theta d\theta$

$$\therefore I_1 = \int \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C$$

$$\therefore I = \frac{1}{4}(\sin^{-1} x). (2x^2 - 1) + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$$

प्रश्न 8. $x \tan^{-1} x$

उत्तर-

$$I = x \tan^{-1} x. \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} . \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C$$

प्रश्न 9. $x \cos^{-1} x$

उत्तर-

$$I = \int x \cos^{-1} x \, dx = \int \cos^{-1} x . x \, dx$$

$$= \cos^{-1} x \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cos^{-1} x + \frac{1}{2} I_2$$

$x = \cos\theta$ रखने पर,

इसलिए $dx = -\sin\theta d\theta$

$$I_1 = \int \frac{\cos^2\theta(-\sin\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} d\theta = -\frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C_1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\theta + \cos\theta\sqrt{1 - \cos^2\theta}\right) + C_1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos^{-1} x + x\sqrt{1 - x^2}\right) + C_1$$

$$I = \frac{\cos^{-1} x}{4}(2x^2 - 1) - \frac{x}{4}\sqrt{1 - x^2} + C$$

प्रश्न 10. $(\sin^{-1} x)^2$

उत्तर-

माना $I = (\sin^{-1} x)^2 dx \ldots (1)$

$\sin^{-1} x = \theta \Rightarrow x = \sin\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$

$\therefore$ (1) से,

$I = \int \theta^2 \cos\theta\, d\theta = \theta^2 \int \cos\theta\, d\theta - \int \left[\frac{d}{d\theta}\theta^2 \int \cos\theta\, d\theta\right] d\theta$

$= \theta^2(\sin\theta) - \int 2\theta \sin\theta\, d\theta + C$

$= \theta^2 \sin\theta - 2\int \theta \sin\theta\, d\theta + C$

$= \theta^2 \sin\theta - 2[\theta.(-\cos\theta) - \int 1.(-\cos\theta) d\theta] + C$

$= \theta^2 \sin\theta + 2\theta\cos\theta - 2\int \cos\theta\, d\theta + C$

$= \theta^2 \sin\theta + 2\theta\sqrt{1 - \sin^2\theta} - 2\sin\theta + C$

$= x(\sin^{-1} x)^2 + 2\sin^{-1} x\sqrt{1 - x^2} - 2x + C$

प्रश्न 11. $\frac{x\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{x\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

माना $\cos^{-1} x = t \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$ तथा $x = \cos t$

$\therefore$ (1) से, $I = -\int t\cos t\, dt = -\left[t\int \cos t\right] dt - \int \left[\frac{d}{dt}(t)\int \cos t\right] dt$

$= -\left[t\sin t - \int 1.(\sin t) dt\right]$

$= -t\sin t + \int \sin t\, dt = -t\sin t - \cos t + C$

$$= -t\sqrt{1-\cos^2 t} - \cos t + C$$

$$= -(\cos^{-1} x)\sqrt{1-x^2} - x + C$$

प्रश्न 12. $x \sec^2 x$

उत्तर-

माना $I = \int x \sec^2 x \, dx$

$$= x\int \sec^2 x\, dx - \int\left(\frac{d}{dx}x\int \sec^2 x\, dx\right)dx$$

x को पहला फलन तथा $\sec^2 x$ को दूसरा फलन लेकर खण्डश: समाकलन करने पर,

$$= x\tan x - \int 1.\tan x\, dx$$

$$= x\tan x + \log|\cos x| + C$$

प्रश्न 13. $\tan^{-1} x$

उत्तर-

$$\int \tan^{-1} x\, dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log|1+x^2| + C$$

प्रश्न 14. $x(\log x)^2$

उत्तर-

$$I = \int x(\log x)^2 dx$$

$$= \int (\log x)^2 . x\, dx$$

$$= (\log x)^2 \int x\, dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\log x)^2 \int x\, dx\right]dx$$

$(\log x)^2$ को पहला फलन तथा x को दूसरा फलन लेकर खण्डश: समाकलन करने पर,

$$= (\log x)^2 \cdot \frac{x^2}{2} - \int \left[(2\log x).\frac{1}{x}\right]\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int(\log x).\,x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \left[(\log x).\frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx\right]$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}(\log x) + \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}(\log x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}(\log x) + \frac{1}{4}x^2 + C$$

प्रश्न 15. $(x^2 + 1)\log x$

उत्तर-

माना $I = \int(x^2 + 1)\log x\,dx$

$$= \int \log x.\,(x^2 + 1)dx$$

(log x) को पहला फलन तथा (x^2 + 1) को दूसरा फलन लेकर खण्डश: समाकलन करने पर,

$$I = (\log x)\int(x^2 + 1)dx - \int\left[\frac{d}{dx}\log x\int(x^2 + 1)dx\right]dx$$

$$= \log x.\left(\frac{x^3}{3} + x\right) - \int\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3} + x\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\log x - \int\left(\frac{x^2}{3} + 1\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\log x - \left(\frac{x^3}{9} + x\right) + C$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\log x - \frac{x^3}{9} - x + C$$

प्रश्न 16. $e^x(\sin x + \cos x)$

उत्तर-

$e^x \sin x = t$

$= e^x(\sin x + \cos x)dx = dt$

$= \int e^x(\sin x + \cos x)dx = \int dt = t + C$

$= e^x \sin x + C$

प्रश्न 17. $\frac{xe^x}{(1+x)^2}$

उत्तर-

माना $I = \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int \frac{(x+1-1)e^x}{(1+x)^2}dx$

$= \int e^x\left[\frac{(x+1)}{(1+x)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx = \int e^x\left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$

$= \int e^x \cdot \frac{1}{x+1}dx - \int e^x \cdot \frac{1}{(x+1)^2}dx = I_1 - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$

जहाँ $I_1 = \int e^x \cdot \frac{1}{1+x}dx$

$\left(\frac{1}{1+x}\right)$ को पहला फलन तथा e^x को दूसरा फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर,

$I_1 = \frac{1}{1+x}\int e^x\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right)\int e^x\,dx\right)dx$

$= \frac{e^x}{1+x} - \int\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right)e^x\,dx = \frac{e^x}{1+x} + \int \frac{e^x}{(1+x)^2}dx$

$\therefore$ (1) से, $I = I_1 - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}dx$

$= \frac{e^x}{1+x} + \int \frac{e^x}{(1+x)^2}dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}dx = \frac{e^x}{1+x} + C$

प्रश्न 18. $e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

उत्तर-

$$e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)=e^x\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)$$

$$=e^x\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}e^x\left(\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}e^x\left[\tan\frac{x}{2}+1\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}e^x\left[1+\tan\frac{x}{2}\right]^2=\frac{1}{2}e^x\left[1+\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^x\left[\sec^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}\right]$$

$$I=\int\frac{e^x(1+\sin x)}{(1+\cos x)}dx=\int e^x\left[\sec^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}\right]dx$$

माना $2\tan\frac{x}{2}=f(x)\Rightarrow f'(x)=\sec^2\frac{x}{2}$

$I\int e^x\{f'(x)+f(x)\}dx$

हम जानते हैं कि $\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx=e^xf(x)+C$

इसलिए, $I=\int\frac{e^x(1+\sin x)}{(1+\cos x)}dx=e^x\tan\frac{x}{2}+C$

प्रश्न 19. $e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

उत्तर-

माना $\frac{1}{x}f(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

हम जानते हैं कि $\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx=e^xf(x)+C$

इसलिए, $I=\int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{e^x}{x}+C$

प्रश्न 20. $\frac{(x-3)e^x}{(x-1)^3}$

उत्तर-

माना $I=\int \frac{(x-3)}{(x-1)^3} e^x dx=\int \frac{e^x(x-1-2)}{(x-1)^3} dx$

$=\int e^x\left[\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^3}\right] dx \ldots(1)$

माना $e^x \cdot \frac{1}{(x-1)^2}=t \Rightarrow e^x \cdot\left[-2(x-1)^{-3}+\frac{1}{(x-1)^2} \cdot e^x\right] dx=dt$

$\Rightarrow e^x\left[\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^3}\right] dx=dt$

$\therefore$ (1) से, $I=\int dt=t+C=\frac{e^x}{(x-1)^2}+C$

प्रश्न 21. $e^{2x} \sin x$

उत्तर-

$I=\int e^{2x} \sin x \, dx \ldots(1)$

खण्डशः समाकलन द्वारा

$I=\sin x \int e^{2x} dx-\int\left\{\left\{\frac{d}{dx} \sin x\right\} \int e^{2x} dx\right\} dx$

$I=\sin x \cdot \frac{e^{2x}}{2}-\int \cos x \frac{e^{2x}}{2} dx=\frac{e^{2x} \sin x}{2}-\frac{1}{2} \int e^{2x} \cos x \, dx$

पुनः खण्डशः समाकलन द्वारा

$I=\frac{e^{2x} \sin x}{2}-\frac{1}{2}\left[\cos x \int e^{2x} dx-\int\left\{\left\{\frac{d}{dx}\right\} \int e^{2x} dx\right\} dx\right]$

$I=\frac{e^{2x} \sin x}{2}-\frac{1}{2}\left[\cos x . \frac{e^{2x}}{2}-\int(-\sin x) \frac{e^{2x}}{2} dx\right]$

$$I = \frac{e^{2x}\sin x}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\, dx\right]$$

$$I = \frac{e^{2x}\sin x}{2} - \frac{e^{2x}\cos x}{4} - \frac{1}{4}I \text{ [समीकरण (1) से]}$$

$$I + \frac{1}{4}I = \frac{e^{2x}\sin x}{2} - \frac{e^{2x}\cos x}{4} \Rightarrow \frac{5}{4}I = \frac{e^{2x}\sin x}{2} - \frac{e^{2x}\cos x}{4}$$

$$I = \frac{4}{5}\left[\frac{e^{2x}\sin x}{2} - \frac{e^{2x}\cos x}{4}\right] + C = \frac{e^{2x}}{5}[2\sin x - \cos x] + C$$

प्रश्न 22. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

उत्तर-

$$\text{माना } x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta$$

$$\text{इसलिए, } \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$$

$$I = \int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = \int 2\theta\sec^2\theta\, d\theta = 2\int \theta\sec^2\theta\, d\theta$$

खण्डशः समाकलन द्वारा

$$I = 2\left[\theta\int\sec^2\theta\, d\theta - \int\left\{\left\{\frac{d}{d\theta}\theta\right\}\int\sec^2\theta\, d\theta\right\} d\theta\right]$$

$$= 2\left[\theta\tan\theta - \int\tan\theta\, d\theta\right]$$

$$= 2[\theta\tan\theta - \log|\cos\theta|] + C$$

$$= 2\left[x\tan^{-1}x + \log\left|\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right|\right] + C$$

$$= 2x\tan^{-1}x + 2\log(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2x\tan^{-1}x + 2\left[-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right] + C$$

$$= 2x\tan^{-1}x - \log(1+x^2) + C$$

सही उत्तर का चयन कीजिए।

प्रश्न 23.

$\int x^2 e^{x^3} dx$ बराबर है:

a. $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$

b. $\frac{1}{3}e^{x^2} + C$

c. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

d. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

उत्तर-

a. $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$

हल-

$I = \int x^2 e^{x^3} dx$

माना $x^3 = t \Rightarrow 3x^2\, dx = dt$

$I = \frac{1}{3} \int (e^t) dt = \frac{1}{3}(e^t) + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$

अतः विकल्प (A) सही है।

प्रश्न 24.

$\int e^x \sec x(1 + \tan x) dx$ बराबर है:

a. $e^x \cos x + C$

b. $e^x \sec x + C$

c. $e^x \sin x + C$

d. $e^x \tan x + C$

उत्तर-

b. $e^x \sec x + C$

हल-

$I = \int e^x \sec x(1 + \tan x)dx = \int e^x(\sec x + \sec x \tan x)dx$

माना $\sec x = f(x) \Rightarrow \sec x \tan x = f'(x)$

हम जानते हैं कि $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + C$

इसलिए, $I = \int e^x(\sec x + \sec x \tan x)dx = e^x \sec x + C$

अतः विकल्प (B) सही है।

प्रश्नावली 7.7 (पृष्ठ संख्या 346-347)

फलन का समाकलन कीजिए।

प्रश्न 1. $\sqrt{4 - x^2}$

उत्तर-

माना $I = \int \sqrt{4 - x^2}dx = \int \sqrt{(2)^2 - x^2}dx$

$= \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

प्रश्न 2. $\sqrt{1 - 4x^2}$

उत्तर-

$\int \sqrt{1 - 4x^2}dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - x^2}dx$

$= \frac{x\sqrt{1-4x^2}}{2} + \frac{1}{4}\sin^{-1}(2x) + C$

प्रश्न 3. $\sqrt{x^2 + 4x + 6}$

उत्तर-

माना $I = \int \sqrt{x^2 + 4x + 6}dx = \int \sqrt{(x^2 + 4x + 4) + 2}dx$

$= \int \sqrt{(x + 2)^2 + (\sqrt{2})^2}dx$

$\therefore I = \frac{(x+2)}{2}\sqrt{(x + 2)^2 + 2} + \frac{2}{2}\log\left|(x + 2) + \sqrt{(x + 2)^2 + 2}\right| + C$

$\left(\because \int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C\right)$

$= \frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2 + 4x + 6} + \log\left|(x + 2) + \sqrt{x^2 + 4x + 6}\right| + C$

प्रश्न 4. $\sqrt{x^2 + 4x + 1}$

उत्तर-

माना $I = \int \sqrt{x^2 + 4x + 1}dx = \int \sqrt{(x^2 + 4x + 4) - 3}dx$

$= \int \sqrt{(x + 2)^2 - (\sqrt{3})^2}dx$

$= \frac{(x+2)}{2}\sqrt{(x + 2)^2 - 3} - \frac{3}{2}\log\left|(x + 2) + \sqrt{(x + 2)^2 + 3}\right| + C$

$\left(\because \int \sqrt{x^2 - a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C\right)$

$= \frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \frac{3}{2}\log\left|(x + 2) + \sqrt{(x^2 + 4x + 1)}\right| + C$

प्रश्न 5. $\sqrt{1 - 4x + x^2}$

उत्तर-

$\int \sqrt{1 - 4x - x^2}dx = \int \sqrt{(5)^2 - (x + 2)^2}dx$

$= \frac{x+2}{2}\sqrt{5 - (x + 2)^2}dx$

प्रश्न 6. $\sqrt{x^2 + 4x - 5}$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int \sqrt{x^2 + 4x - 5}dx = \int \sqrt{(x^2 + 4x + 4) - 9}dx$$

$$= \int \sqrt{(x+2)^2 - (3)^2}dx$$

$$= \left(\frac{x+2}{2}\right)\sqrt{(x+2)^2 - (3)^2} - \frac{(3)^2}{2}\log\left[(x+2) + \sqrt{(x+2)^2 - (3)^2}\right] + C$$

$$= \left(\frac{x+2}{2}\right)\sqrt{x^2 + 4x - 5} - \frac{9}{2}\log\left[x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x - 5}\right] + C$$

प्रश्न 7. $\sqrt{1 + 3x - x^2}$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int \sqrt{1 + 3x - x^2}dx = \int \sqrt{1 - \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4}}dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{13}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}dx \left[\because \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{13}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} + \frac{13}{8}\sin^{-1}\left(\frac{x - \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{13}{4}}}\right) + C$$

$$= \frac{2x-3}{4}\sqrt{1 + 3x - x^2} + \frac{13}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{13}}\right) + C$$

प्रश्न 8. $\sqrt{x^2 + 3x}$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int \sqrt{x^2 + 3x}\,dx = \int \sqrt{\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4}}dx$$

$$= \int \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}dx$$

$$= \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2}\sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\log\left|\left(x + \frac{3}{2}\right) + \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}\right| + C$$

$$= \frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x} - \frac{9}{8}\log\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right| + C$$

प्रश्न 9. $\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}dx = \frac{1}{3}\int\sqrt{x^2+9}\,dx = \frac{1}{3}\int\sqrt{(x)^2+(3)^2}\,dx$$

$$\therefore I = \frac{1}{3}\int\sqrt{x^2+9} = \frac{1}{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right| + C\right.$$

$$\left(\because \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left[x\sqrt{x^2+9} + 9\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|\right] + C$$

सही उत्तर का चयन कीजिए।

प्रश्न 10.

$\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ बराबर है।

a. $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right| + C$

b. $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

c. $\frac{2}{3}x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

d. $\frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}x^2\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$

उत्तर-

a. $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right| + C$

हल-

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right|+C$$

प्रश्न 11.

$\int \sqrt{x^2-8x+7}\,dx$ बराबर है।

a. $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}+9\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

b. $\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{x^2-8x+7}+9\log\left|x+4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

c. $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}-3\sqrt{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

d. $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}-\frac{9}{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

उत्तर-

d. $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}-\frac{9}{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

हल-

$$\int \sqrt{x^2-8x+7}dx=\int \sqrt{(x-4)^2-(3)^2}\,dx$$

$$=\frac{x-4}{2}\sqrt{x^2-8x+7}-\frac{9}{2}\log\left|(x-4)+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$$

प्रश्नावली 7.8 (पृष्ठ संख्या 351)

योग की सीमा के रूप में निम्नलिखित निश्चित समाकलन का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\int_a^b x\,dx$

उत्तर-

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h)]$$ के प्रयोग से

यहाँ, $a = a, b = b, h = \frac{b-a}{n}$ और $f(x) = x$

$$I = \int_a^b x\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[a+(a+h)+(a+2h)\ldots+(a+(n-1)h)]$$

$$= (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(a+a+a+a\ldots a)+(h+2h+3h\ldots(n-1)h)]$$

$$= (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[na+h(1+2+3+\ldots+(n-1))]$$

$$= (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[na+h\left\{\frac{(n-1)(n)}{2}\right\}\right]$$

$$= (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\left[a+\frac{(n-1)h}{2}\right]$$

$$= (b-a)\lim_{n\to\infty}\left[a+\frac{(n-1)(b-a)}{2n}\right]$$

$$= (b-a)\lim_{n\to\infty}\left[a+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)(b-a)}{2n}\right]$$

$$= (b-a)\left[a+\frac{(b-a)}{2}\right] = (b-a)\left[\frac{2a+b-a}{2}\right]$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

प्रश्न 2. $\int_0^5 (x+1)dx$

उत्तर-

परिभाषा में $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+nh)]$$

यहाँ $a = 0$, $b = 5$, $f(x) = (x+1)$ और $nh = b - a = 5 - 0 = 5$

$$\therefore \int_0^5 (x+1)dx = \lim_{h\to 0} h[f(1+h) + f(1+2h)]+\ldots+f(1+nh)]$$

$$= \lim_{h\to 0} h[\{(0+h)+1\} + \{(0+2h)+1\}+\ldots+\{(0+nh)+1\}]$$

$$= \lim_{h\to 0} h[(1+h) + (1+2h)+\ldots+(1+nh)]$$

$$= \lim_{h\to 0} h[n + h(1+2+\ldots n \text{ पदों तक})]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[n + h\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[nh + \frac{nh(nh+h)}{2}\right]$$

$$= 1\times 5 + \frac{5(5+0)}{2} = 5 + \frac{25}{5} = \frac{35}{2}$$

प्रश्न 3.

$$\int_2^3 x^2\, dx$$

उत्तर-

यहाँ $f(x) = x^2$, $a = 2$, $b = 3$ और $nh = b - a = 3 - 2 = 1$

$$\therefore \int_2^3 x^2\, dx = \lim_{h\to 0} h[f(a+h) + f(a+2h)+\ldots+f(a+nh)]$$

$$= \lim_{h\to 0} h[(2+h)^2 + (2+2h)^2+\ldots+(2+nh)^2]$$

$$= \lim_{h\to 0} h[2^2 + 2.2h + h^2) + (2^2 + 4.2h + 2^2h^2)$$

$$+\ldots+(2^2 + 2n.2n + n^2h^2)]$$

$$= \lim_{h\to 0} h[(2^2 + 2^2+\ldots n \text{ पदों तक})+4h(1+2+\ldots+n) + h^2(1^2 + 2^2+\ldots+n^2)]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[n.2^2 + 4h\frac{n(n+1)}{2} + h^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[4nh + \frac{4nh(nh+h)}{2} + \left(\frac{nh(nh+h)(2nh+h)}{6}\right)^2\right]$$

$$= 4\times 1 + \frac{4\times 1(1+0)}{2} + \left[\frac{1(1+0)(2\times 1+0)}{6}\right]^2$$

$$= 4 + 2 + \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$$

प्रश्न 4. $\int_1^4 (x^2 - x)dx$

उत्तर-

$$I = \int_1^4 (x^2 - x)dx = \int_1^4 x^2\,dx - \int_1^4 x\,dx$$

माना $I = I_1 - I_2$ जहाँ $I_1 = \int_1^4 x^2\,dx$ और $I_2 = \int_1^4 x\,dx \ldots (1)$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+(n-1)h)]$$

के प्रयोग से,जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$

$I_1 = \int_1^4 x^2\,dx$ के लिए, $a = 1, b = 4$ और $f(x) = x^2 \Rightarrow h = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$

$$I_1 = \int_1^4 x^2 dx = (4-1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(1) + f(1+h) + \ldots + f(1+(n-1)h)]$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(1)^2 + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2 + \left(1 + 2.\frac{3}{n}\right)^2 \ldots + \left(1 + \frac{(n-1)3}{n}\right)^2\right]$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1^2 + \left\{1^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + 2.\frac{3}{n}\right\}\right.$$

$$\left. + \ldots + \left\{1^2 + \left(\frac{(n-1)^3}{n}\right)^2 + \frac{2.(n-1)^3}{n}\right\}\right]$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[(1^2+\ldots+1^2) + \left(\frac{3}{n}\right)^2\{1^2 + 2^2\ldots+(n-1)^2\}\right.$$

$$\left. + 2.\frac{3}{n}\{1+2+3\ldots+(n-1)\}\right]$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n + \left(\frac{3}{n}\right)^2\left\{\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}\right\} + \frac{6}{n}\left\{\frac{(n-1)(n)}{2}\right\}\right]$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n + \frac{9n}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) + \frac{6n-6}{2}\right]$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[1 + \frac{9}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) + 3 - \frac{3}{n}\right]$$

$$= 3[1+3+3] = 21 \Rightarrow I_1 = 21\ldots(2)$$

$I_2 = \int_1^4 x\,dx$ के लिए, $a = 1, b = 4$ और $f(x) = x \Rightarrow h = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$

$$I_2 = (4-1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(1) + f(1+h)+\ldots+f(1+(n-1)h)]$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[1 + (1+h)+\ldots+(1+(n-1)h)]$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[1 + \left(1+\frac{3}{n}\right)+\ldots+\left\{1+(n-1)\frac{3}{n}\right\}\right]$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[(1+1+\ldots+1) + \frac{3}{n}(1+2+\ldots(n-1)\right]$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n + \frac{3}{n}\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}\right]$$

$$= 3 \lim_{n-\infty} \frac{1}{n}\left[1 + \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] = 3\left[1+\frac{3}{2}\right]$$

$$= 3.\frac{5}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow I_2 = \frac{15}{2}\ldots(3)$$

समीकरण (1), (2) और (3) से

$$I = I_1 - I_2 = 21 - \frac{15}{2} = \frac{27}{2}$$

प्रश्न 5. $\int_1^4 (x^2 - x)dx$

उत्तर-

$$I = \int_{-1}^{1} e^x\, dx$$

$$\int_a^b (x)\, dx = (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+(n-1)h)]$$

के प्रयोग से, जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$

यहाँ, a = -1, b = 1 और f(x) = e^x

$$\Rightarrow h = \frac{1-(-1)}{n} = \frac{2}{n}$$

$$I = (1+1) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f(-1) + f\left(-1 + \frac{2}{n}\right)\right.$$

$$\left. + f\left(-1 + 2.\frac{2}{n}\right) \ldots + f\left(-1 + \frac{(n)-1)2}{n}\right)\right]$$

$$= (2) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[e^{-1} + e^{\left(-1+\frac{2}{n}\right)} + e^{\left(-1+2.+\frac{2}{n}\right)} + \ldots e^{\left(-1+(n-1)\frac{2}{n}\right)}\right]$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[e^{-1}\left\{1 + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + e^{\frac{6}{n}} + \ldots + e^{(n-1)\frac{2}{n}}\right\}\right]$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-1}}{n}\left[\frac{\left(e^{\frac{2}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1}\right]$$

$$= e^{-1} \times 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{e^2 - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1}\right]$$

$$= \frac{e^{-1} \times 2(e^2 - 1)}{\lim_{\frac{2}{n}\to 0}\left(\frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}}\right) \times 2}$$

$$= e^{-1}\left[\frac{2(e^2-1)}{2}\right] \left[\text{क्योंकि } \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right) = 1\right]$$

$$= \frac{(e^2-1)}{e} = \left(e - \frac{1}{e}\right)$$

प्रश्न 6. $\int_0^4 (x + e^{2x})dx$

उत्तर-

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h)]$$

के प्रयोग से, जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$

यहाँ $a = 0, b = 4$ और $f(x) = x + e^{2x} \Rightarrow h = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$

$$I = \int_0^4 (x+e^{2x})dx = (4-0)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(0)+f(h)+f(2h)+\ldots+f((n-1)h)]$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big[(0+e^0)+(h+e^{2h})+(2h+e^{2.2h})$$

$$+\ldots+\{(n-1)h+e^{2(n-1)h}\}\Big]$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+(h+e)^{2h}+(2h+e^{2.2h})+\ldots+\left\{(n-1)h+e^{2(n-1)h}\right\}\right]$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\{h+2h+3h+\ldots+(n-1)h\}+\left(1+e^{2h}+e^{2.2h}\right)\right]$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[h\{1+2+\ldots(n-1)\}+\left(\frac{e^{2.2h}-1}{e^{2h}-1}\right)\right]$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{h(n-1)n}{2}+\left(\frac{e^{2.2h}-1}{e^{2h}-1}\right)\right]$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{4}{n}.\frac{(n-1)n}{2}+\left(\frac{e^h-1}{e^{\frac{8}{n}}-1}\right)\right]$$

$$= 4(2) + 4\lim_{n\to\infty} \frac{e^8 - 1}{\left(\frac{e^{\frac{8}{n}} - 1}{\frac{8}{n}}\right)8}$$

$$= 8 + \frac{4(e^8 - 1)}{8} \left[\text{क्योंकि } \lim_{n\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right]$$

$$= 8 + \frac{e^8 - 1}{2} = \frac{15 + e^8}{2}$$

प्रश्नावली 7.9 (पृष्ठ संख्या 354-355)

निश्चित समाकलन का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\int_{-1}^{1}(x + 1)dx$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_{-1}^{1}(x + 1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 2$$

प्रश्न 2. $\int_{2}^{3} \frac{1}{x} dx$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_{2}^{3} \frac{1}{x} dx = [\log x]_2^3 = \log 3 - \log 2 = \log \frac{3}{2}$$

प्रश्न 3. $\int_{1}^{2}(4x^3 - 5x^2 + 6x + 9)dx$

उत्तर-

$$\text{माना } \int_{1}^{2}(4x^3 - 5x^2 + 6x + 9)dx = \left[4.\frac{x^4}{4} - 5.\frac{x^3}{3} + 6.\frac{x^2}{2} + 9x\right]_1^2$$

$$= \left[x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + 9x\right]_1^2$$

$$= (2^4 - 1^4) - \frac{5}{3}(2^3 - 1^3) + 3(2^2 - 1) + 9(2 - 1)$$

$$= (16 - 1) - \frac{5}{3}(8 - 1) + 3(4 - 1) + 9(1)$$

$$= 15 - \frac{35}{3} + 9 + 9 = 33 - \frac{35}{3} = \frac{99-35}{3} = \frac{64}{3}$$

प्रश्न 4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}[\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\cos \frac{2\times\pi}{4} - \cos 2\times 0\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -\frac{1}{2}(0 - 1) = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\sin \frac{2\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin \pi - \sin 0] = \frac{1}{2}(0 - 0) = 0$$

प्रश्न 6. $\int_4^5 \quad e^x\, dx$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_4^5 e^x\, dx = [e^x]_4^5 = e^5 - e^4 = e^4(e - 1)$$

प्रश्न 7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$

उत्तर-

मान $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx=-[\log \cos x]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=-\left[\log \cos \frac{\pi}{4}-\log \cos 0\right]$

$=-\left[\log \frac{1}{\sqrt{2}}-\log 1\right]=-\left[\log \frac{1}{\sqrt{2}}-0\right]=\log \sqrt{2}=\frac{1}{2} \log 2$

प्रश्न 8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec} x\, dx$

उत्तर-

माना $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec} x\, dx=[\log (\operatorname{cosec} x-\cot x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$

$=\log \left[\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4}-\cot \frac{\pi}{4}\right]-\log \left[\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6}-\cot \frac{\pi}{2}\right]$

$=\log (\sqrt{2}-1)-\log (2-\sqrt{3})=\log \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}$

प्रश्न 9. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$

उत्तर-

माना $I=\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\left[\sin ^{-1} x\right]_{0}^{1}$

$=\sin ^{-1}(1)-\sin ^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$

प्रश्न 10. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^{2}}$

उत्तर-

माना $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\tan^{-1} x]_0^1 \left(\because \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \right)$

$= [\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0] = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

प्रश्न 11. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$

उत्तर-

माना $I = \int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left[\log \frac{x-1}{x+1}\right]_2^3 = \frac{1}{2}\left[\log \frac{3-1}{3+1} - \log \frac{2-1}{2+1}\right]$

$= \frac{1}{3}\left[\log \frac{2}{4} - \log \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}\left[\log \frac{1}{3} - \log \frac{1}{3}\right]$

$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{1}\right) = \frac{1}{2}\log \frac{3}{2}$

प्रश्न 12.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$

उत्तर-

माना $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \; [\because \cos 2x = 2\cos^2 x - 1]$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) - (0+0)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0\right] = \frac{\pi}{4}$

प्रश्न 13. $\int_2^3 \frac{x\,dx}{x^2+1}$

उत्तर-

माना $I = \int\limits_2^3 \frac{x}{x^2+1} dx$

माना $x^2 + 1 = t,$

$\Rightarrow 2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2} dt$

x^2 + =t से, जब x = 3, तो 10 = t तथा जब x = 2, तो 5 = t

$\therefore I = \frac{1}{2} \int\limits_5^{10} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} [\log t]_5^{10} = \frac{1}{2} [\log 10 - \log 5]$

$= \frac{1}{2} \log \frac{10}{5} = \frac{1}{2} \log 2$

प्रश्न 14. $\int_0^1 \frac{2x+3}{5x^2+1} dx$

उत्तर-

माना $I = \int\limits_0^1 \frac{2x+3}{5x^2+1} dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{2x}{5x^2+1} + \frac{3}{5x^2+1} \right) dx$

$= \frac{1}{5} \int\limits_0^1 \frac{10x}{5x^2+1} dx + \frac{3}{5} \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}$

माना $I_1 = \int \frac{10x}{5x^2+1} dx$

माना $5x^2 + 1 = t, \Rightarrow 10x\,dx = dt$

$\therefore$ (1) से, $I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log(5x^2 + 1)$

$\therefore I = \frac{1}{5} \left[\log(5x^2 + 1) \right]_0^1 + \frac{3}{5} \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \left[\tan^{-1} \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \right]_0^1$

$= \frac{1}{5}(\log 6 - \log 1) + \frac{3}{\sqrt{5}}\left[\tan^{-1}\sqrt{5} - \tan^{-1} 0\right]$

$= \frac{1}{5}\log 6 + \frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$

प्रश्न 15. $\int_0^1 x\, e^{x^2}\, dx$

उत्तर-

माना $I = \int\limits_0^1 x\, e^{x^2} dx$

माना $x^2 = t, \Rightarrow 2x\, dx = dt \Rightarrow x\, dx = \frac{1}{2}dt$

जब x = 1, तो t = 1, तथा जब x = 0, तो t = 0

$\therefore I = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}e^t\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^t dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}(e - 1)$

प्रश्न 16. $\int_1^2 \frac{5x^2}{x^2+4x+3}$

उत्तर-

माना $I = \int\limits_1^2 \frac{5x^2}{x^2+4x+3} dx$ तथा $I_1 = \int \frac{5x^2\, dx}{x^2+4x+3}$

$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ x^2+4x+3 & 5x^2 \\ & \underset{-}{5x^2} \underset{-}{+} 20x \underset{-}{+} 15 \\ \hline & -20x - 15 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \frac{5x^2}{x^2+4x+3} = 5 - \frac{20x+15}{x^2+4x+3}$

अब, $\frac{20x+15}{x^2+4x+3} = \frac{20x+15}{(x+3)(x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} \ldots (1)$

(आंशिक भिन्न के रूप में विभक्त करने पर)

$$\therefore 20x + 15 = A(x+1) + B(x+3)$$

सर्वसमिका (2) x + 3 = 0 से

$$-60 + 15 = A(-2) \Rightarrow 45 = 2A \ \therefore A = \frac{45}{2}$$

सर्वसमिका (2) x + 1 = 0 से x = -1 रखने पर,

$$-20 + 15 = B.2 \Rightarrow -5 = 2.B$$

$$\therefore B = -\frac{5}{2}$$

सर्वसमिका (1) से,

$$\therefore \frac{20x+15}{x^2+4x+3} = \frac{45}{2(x+3)} - \frac{5}{2(x+1)}$$

$$\therefore I_1 = \int \frac{5x^2}{x^2+4x+3}dx = \int \left[5 - \frac{45}{2(x+3)} + \frac{5}{2(x+1)}\right]dx$$

$$= 5x - \frac{45}{2}\log(x+3) + \frac{5}{2}\log(x+1)$$

$$\therefore I = \int_1^2 \frac{5x^2}{x^2+4x+3}dx = \left[5x - \frac{45}{2}\log(x+3) + \frac{5}{2}\log(x+1)\right]_1^2$$

$$= \left[\left(10 - \frac{45}{2}\log 5 + \frac{5}{2}\log 3\right) - \left(5 - \frac{45}{2}\log 4 + \frac{5}{2}\log 2\right)\right]$$

$$= 5 - \left\{\frac{45}{2}\log 5 - \log 4\right\} + \frac{5}{2}(\log 3 - \log 2)$$

$$= 5 - \frac{45}{2}\log\frac{5}{4} + \frac{5}{2}\log\frac{3}{2} = 5 - \frac{5}{2}\left(9\log\frac{5}{4} - \log\frac{3}{2}\right)$$

प्रश्न 17. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\sec^2 x + x^3 + 2)dx$

उत्तर-

मान I $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sec^2 x + x^3 + 2)dx = \left[2\tan x + \frac{x^4}{4} + 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left[2\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 + 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0\right] = \left[2 + \frac{\pi^4}{4^5} + \frac{\pi}{2}\right]$

$= 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^4}{1024}$

प्रश्न 18. $\int_0^{\pi}\left(\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

उत्तर-

माना I $= \int_0^{\pi}\left(\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$= -\int_0^{\pi}\cos x\,dx = -[\sin x]_0^{\pi} = -[0-0] = 0$

प्रश्न 19. $\int_0^2 \frac{6x+3}{x^2+4}$

उत्तर-

माना I $= \int_0^2 \frac{6x+3}{x^2+4}dx = \int_0^2 \frac{6x}{x^2+4}dx + \int_0^2 \frac{3}{x^2+4}dx$

$= 3\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}dx + 3\int_0^2 \frac{dx}{x^2+(2)^2}$

माना $I_1 = \int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}dx$

माना $x^2 + 4 = t, \Rightarrow 2x\,dx = dt$

$\therefore I_1 = \int_0^2 \frac{dt}{t} = \log t = \log(x^2+4)$

$$\therefore I = 3[\log(x^2+4)]_0^2 + 3\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= 3[\log(4+4) - \log(0+4)] + \frac{3}{2}\left[\tan^{-1}\frac{2}{2} - \tan^{-1}0\right]$$

$$= 3[\log 8 - \log 4] + \frac{3}{2}\left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0\right]$$

$$= 3\log\frac{8}{4} + \frac{3}{2}\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = 3\log 2 + \frac{3\pi}{8}$$

प्रश्न 20. $\int_0^1 \left(x\, e^x + \sin\frac{\pi x}{4}\right) dx$

उत्तर-

माना $I = \int_0^1 (xe^x + \sin\frac{\pi x}{4})dx = \int_0^1 xe^x\, dx \int_0^1 \sin\frac{\pi x}{4}\, dx \ldots (1)$

माना $I_1 = \int ex^x\, dx$

x को पहला फलन तथा ex को दूसरा फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर,

$$= x\int e^x\, dx - \int\left(\frac{d}{dx}(x)\int e^x\, dx\right)$$

$$= xe^x - \int 1.e^x\, dx$$

$\therefore$ (1) से, $I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1.e^x\, dx - \frac{4}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{4}\right]_0^1$

$$= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 - \frac{4}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{4}\right]_0^1$$

$$= (1.e^1 - 0) - [e^x]_0^1 - \frac{4}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right]$$

$$= e - (e^1 - e^0) - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$$

$$= e - e + 1 - \frac{4}{\pi\sqrt{2}} + \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{4}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

सही उत्तर का चयन कीजिए।

प्रश्न 21.

$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ बराबर है:

a. $\frac{\pi}{3}$

b. $\frac{2\pi}{3}$

c. $\frac{\pi}{6}$

d. $\frac{\pi}{12}$

उत्तर-

d. $\frac{\pi}{12}$

हल-

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1} x\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

प्रश्न 22.

$\int_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{4+9x^2}$ बराबर है:

a. $\frac{\pi}{6}$

b. $\frac{\pi}{12}$

c. $\frac{\pi}{24}$

d. $\frac{\pi}{4}$

उत्तर-

c. $\frac{\pi}{24}$

हल-

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{4+9x^2} = \frac{1}{9}\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\left(\frac{2}{3}\right)^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{24}$$

प्रश्नावली 7.10 (पृष्ठ संख्या 357)

समाकलन का मान प्रतिस्थापन का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

माना $x^2 + 1 = t, \Rightarrow 2x\, dx = dt$

जब x = 1, तो t = 2 तथा जब x = 0, तो t = 1

$$\therefore I = \int_1^2 \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}[\log t]_1^2 = \frac{1}{2}[\log 2 - \log 1] = \frac{1}{2}\log 2$$

प्रश्न 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}\cos^5\phi\ d$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}\cos^4\phi\cos\phi\, d\,\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}(1-\sin^2\phi)^2 \cos\phi \, d\phi$$

माना $\sin\phi = t, \Rightarrow \cos\phi \, d\phi = dt$

जब $\phi = 0, t = 0$ तथा जब $\phi = \frac{\pi}{2}$, तो $t = 1$

$$\therefore I = \int_0^1 \sqrt{t}(1-t^2)^2 dt = \int_0^1 \sqrt{t}(1-2t^2+t^4)dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{9}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}}\right)dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}} - \frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left(1^{\frac{3}{2}} - 0\right) + \frac{2}{11}\left(1^{\frac{11}{2}} - 0\right) - \frac{4}{7}\left(1^{\frac{7}{2}} - 0\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{11} - \frac{4}{7} = \frac{154+42-132}{3\times11\times7} = \frac{64}{231}$$

प्रश्न 3. $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$

उत्तर-

$$I = \int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$$

माना $x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta \, d\theta$

जब $x = 0, \theta = 0$ और जब $x = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{-1}(\sin 2\theta) \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\theta . \sec^2\theta \, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta . \sec^2\theta \, d\theta$$

θ प्रथम तथा $\sec^2\theta$ को द्वितीय फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$I = 2\left[\theta \int \sec^2\theta \, d\theta \int \left\{\left(\frac{d}{dx}\theta\right) \int \sec^2\theta \, d\theta\right\}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\left[\theta \tan\theta - \int \tan\theta \, d\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2[\theta \tan\theta - \log|\cos\theta|]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left[\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} - \log\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \log|\cos 0|\right]$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{4} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \log 1\right] = 2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2\right] = \frac{\pi}{2} - \log 2$$

प्रश्न 4. $\int_0^2 x\sqrt{x + 2dx}$ (x + 2= t² रखिए)

उत्तर-

माना $I = \int_0^2 x\sqrt{x+2}dx$

माना $x + 2 = t^2, \Rightarrow dx = 2t\,dt$

जब $x = 0$ तो $t = \sqrt{2}$ तथा जब $x = 2$ तो $t^2 = 4$ या $t = 2$

$$\therefore I \int_{\sqrt{2}}^{2}(t^2 - 2).t\,2t\,dt = 2\int_{\sqrt{2}}^{2}(t^4 - 2t^2)dt \; [(x+2) = t^2 \text{ से } x = t^2 - 2]$$

$$= 2\left[\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3\right]_{\sqrt{2}}^{2} = 2\left[\left(\frac{2^5}{5} - \frac{2}{3}(2)^3\right) - \left(\frac{(\sqrt{2})^5}{5} - \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{32}{5} - \frac{16}{3}\right] - 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{32}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{192-160}{15} + \frac{8\sqrt{2}(5-3)}{15}$$

$$= \frac{1}{15}[32 + 16\sqrt{2}] = \frac{16}{15}(2 + \sqrt{2})$$

प्रश्न 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

माना $\cos x = t, \Rightarrow \sin x\, dx = dt$

जब $x = 0$, तो $t = \cos = 0 = 1$ तथा जब $x = \frac{\pi}{2}$, तो, $t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$I = \int_1^0 \frac{-dt}{1+t^2} = -[\tan^{-1} t]_1^0 = -[\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} 1]$$

$$= -\left[-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4}$$

प्रश्न 6. $\int_0^2 \frac{dx}{x+4-x^2}$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_0^2 \frac{dx}{x+4-x^2} = \int_0^2 \frac{dx}{4-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}} = \int_0^2 \frac{dx}{\frac{17}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\left[\because \int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x} + C\right]$$

$$= \frac{1}{2\frac{\sqrt{17}}{2}} \log\left[\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{17}}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}}\left[\log\left(\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}+\left(2-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{17}}{2}-\left(2-\frac{1}{2}\right)}\right)\right] - \log\left(\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}+\left(0-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{17}}{2}-\left(0-\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}}\left[\log\left(\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}+-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{3}{2}}\right) - \log\left(\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{17}\left[\log\left(\frac{\sqrt{17}+3}{\sqrt{17}-3}\right) - \log\left(\frac{\sqrt{17}-1}{\sqrt{17}+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{17}\left[\log\left(\frac{\sqrt{17}+3}{\sqrt{17}-3} \times \frac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{17}\log\left(\frac{20+4\sqrt{17}}{20-4\sqrt{17}}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}}\log\left(\frac{5+\sqrt{17}}{5-\sqrt{17}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{5+\sqrt{17}}{5-\sqrt{17}} \times \frac{5+\sqrt{17}}{5+\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{(5+\sqrt{17})^2}{25-17}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{25+17-10\sqrt{17}}{8} = \frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{42-10\sqrt{17}}{8}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{21-5\sqrt{17}}{4}$$

प्रश्न 7. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+5}$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{x+1}{2}\right]_{-1}^{1}\left[\because \int\frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{1+1}{2} - \tan\frac{1-1}{2}\right] = \frac{1}{2}\tan^{-1}1 = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

प्रश्न 8. $\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)e^{2x}\,dx$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_{1}^{2}e^{2x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right) = \int_{1}^{2}e^{2x}.\frac{1}{x}dx - \int_{1}^{2}e^{2x}.\frac{1}{2x^2}dx$$

$$= I_1 - \int_{1}^{2}e^{2x}.\frac{1}{2x^2}dx \ldots (1)$$

अब $I_1 = \int_1^2 \frac{1}{x} e^{2x}\, dx = \left[\frac{1}{x} \frac{e^{2x}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{e^{2x}}{2} dx$

$\frac{1}{x}$ को पहला फलन तथा e^{2x} को दूसरा फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर,

$= \left(\frac{1}{2} \frac{e^4}{2} - \frac{1}{1} \cdot \frac{e^2}{2}\right) + \int_1^2 e^{2x} \cdot \frac{1}{2x^2} dx$

$\therefore$ (1) से, $I = \frac{e^2}{4}(e^2 - 2) + \int_1^2 e^{2x} \cdot \frac{1}{2x^2} dx - \int_1^2 e^{2x} \cdot \frac{1}{2x^2} dx$

$= \frac{e^2}{4}(e^2 - 2)$

सही उत्तर का चयन कीजिए।

प्रश्न 9. समाकलन $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4} dx$ का मान है:

a. 6

b. 0

c. 3

d. 4

उत्तर-

a. 6

हल-

$I = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}$

माना $x = \sin\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$

जब $x = \frac{1}{3}, \theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ और जब $x = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_{\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin\theta - \sin^3\theta)^{\frac{1}{3}}}{\sin^4\theta} \cos\theta \, d\,\theta$$

$$= \int_{\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin\theta)^{\frac{1}{3}}(1-\sin^2\theta)^{\frac{1}{3}}}{\sin^4\theta} \cos\theta \, d\,\theta$$

$$= \int_{\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin\theta)^{\frac{1}{3}}(\cos\theta)^{\frac{2}{3}}}{\sin^2\theta\sin^2\theta} \cos\theta \, d\,\theta$$

$$= \int_{\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\theta)^{\frac{5}{3}}}{(\sin\theta)^{\frac{5}{3}}} \text{cosec}^2\theta \, d\,\theta$$

$$= \int_{\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}^{\frac{\pi}{2}} (\cot\theta)^{\frac{5}{3}} \text{cosec}^2\theta \, d$$

माना $\cot\theta = t \Rightarrow -\text{cosec}^2\theta \, d\,\theta = dt$

जब $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right), t = 2\sqrt{2}$ और जब $\theta = \frac{\pi}{2}, t = 0$

$$I = \int_{2\sqrt{2}}^{0} (t)^{\frac{5}{3}} dt = -\left[\frac{3}{8}(t)^{\frac{8}{3}}\right]_{2\sqrt{2}}^{0} = -\frac{3}{8}\left[(t)^{\frac{8}{3}}\right]_{2\sqrt{2}}^{0}$$

$$= -\frac{3}{8}\left[-(2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}}\right] = \frac{3}{8}\left[(\sqrt{8})^{\frac{8}{3}}\right] = \frac{3}{8}\left[(8)^{\frac{4}{3}}\right] = \frac{3}{8}[16]$$

$$= 3 \times 2 = 6$$

अतः विकल्प (A) सही है।

प्रश्न 10.

यदि $f(x)=\int_0^x t\sin t\,dt$, तब $f'(x)$ है:

a. $\cos x+x\sin x$

b. $x\sin x$

c. $x\cos x$

d. $\sin x+x\cos x$

उत्तर-

b. $x\sin x$

हल-

$$f(x)=\int_0^x t\sin t\,dt$$

खण्डशः समाकलन से

$$f(x)=t\int_0^x \sin t\,dt-\int_0^x\left\{\left(\frac{d}{dx}t\right)\int\sin t\,dt\right\}dt$$

$$=[t(-\cos t)]_0^x-\int_0^x(-\cos t)dt$$

$$\Rightarrow f(x)=[-t\cos t+\sin t]_0^x=-x\cos x\sin x$$

$$\Rightarrow f'(x)=-[\{x(-\sin x)\}+\cos x]+\cos x$$

$$=x\sin x-\cos x+\cos x=x\sin x$$

अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्नावली 7.11 (पृष्ठ संख्या 363-364)

निश्चित समाकलन में गुणधर्म का उपयोग करते हुए प्रश्न में समाकलन का मान ज्ञात कीजिए-

प्रश्न 1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$

उत्तर-

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} \quad [\because \cos 2x=2\cos^2 x-1]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$$

$$=\frac{1}{2}[x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-0\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin \pi-0\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(0-0)=\frac{\pi}{4}$$

प्रश्न 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$

उत्तर-

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx \ldots (1)$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} dx \left[\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx \text{ के प्रयोग से}\right]$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} dx \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}+\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\right) dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\right) dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx\ 2I = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

प्रश्न 3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x\, dx}{\sin^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{3}{2}} x}$$

उत्तर-

माना $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x}{\sin^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{3}{2}} x} dx \ldots (1)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx \left[\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{3}{2}} x}{\sin^{\frac{3}{2}} + \cos^{\frac{3}{2}} x} dx \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर,

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{3}{2}} x}{\sin^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{3}{2}} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{4}$$

प्रश्न 4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x\, dx}{\sin^5 x + \cos^5 x}$$

उत्तर-

माना $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x} dx \ldots (1)$

$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^5\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^5\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} dx \left[\because \int_{0}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(a-x)\,dx\right]$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x+\sin^5 x} dx \ldots (2)$

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x+\cos^2 x} dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x+\sin^5 x} dx$

$=\int_{0}^{\frac{x}{2}} \frac{\cos^5 x+\sin^5 x}{\cos^5 x+\sin^5 x} dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1dx=[x]^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$

$I=\frac{\pi}{4}$

प्रश्न 5. $\int_{-5}^{5}|x+2|dx$

उत्तर-

माना $I=\int_{-5}^{5}|x+2|dx=\int_{-5}^{-2}|x+2|dx+\int_{-2}^{5}|x+2|dx \left[\because \int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{b} f(x)dx\right]$

$=-\int_{-5}^{-2}(x+2)dx+\int_{-2}^{5}(x+2)dx$ [$\because (-5,-2)$ पर $(x+2)\leq 0$ तथा $(-2,-5)$ पर $(x+2)\geq 0$]

$=-\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-5}^{-2}+\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{5}$

$=-\left[\frac{(-2)^2}{2}+2(-2)-\frac{(-5)^2}{2}-2(-5)\right]$

$+\left[\frac{(5)^2}{2}+2(5)-\frac{(-2)^2}{2}-2(-2)\right]$

$$= -\left[\left(\frac{4}{2}-4\right)-\left(\frac{25}{2}-10\right)\right]+\left[\left(\frac{25}{2}+10\right)-\left(\frac{4}{2}-4\right)\right]$$

$$= -\left(-2-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{45}{2}+2\right)=\frac{9}{2}+\frac{49}{2}=\frac{58}{2}=29$$

प्रश्न 6. $\int_2^8 |x-5|dx$

उत्तर-

$$\int_2^8 |x-5|dx = I$$

$$I = \int_2^5 |x-5|dx + \int_5^8 |x-5|dx$$

$$= -\int_2^5 (x-5)dx + \int_5^8 (x-5)dx$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}-5x\right]_2^5 + \left[\frac{x^2}{2}-5x\right]_5^8 = 9$$

प्रश्न 7. $\int_{0x}^1 (1-x)^{ndx}$

उत्तर-

$$\int_0^1 x(1-x)^n\,dx = I$$

$$= \int_0^1 (1-x)(1-(1-x))^n\,dx \left[\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)dx \text{ के प्रयोग से}\right]$$

$$= \int_0^1 (1-x)(x)^n\,dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right] = \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

प्रश्न 8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x\,dx)$

उत्तर-

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx \ldots (1)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx \left[\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx \text{ के प्रयोग से}\right]$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right]dxI=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right]dxI$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\frac{2}{(1+\tan x)}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2dx-I \text{ [समीकरण (1) से]}$$

$$2I=[x\log 2]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow 2I=\frac{\pi}{4}\log 2 \Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\log 2$$

प्रश्न 9. $\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$

उत्तर-

$$\text{माना } I=\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx=\int_0^2 (2-x)\sqrt{2-(2-x)}\,dx \left[\because \int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx\right]$$

$$=\int_0^2 (2-x)\sqrt{x}\,dx=\int_0^2\left(2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$=2.\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2-\frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^2=\frac{4}{3}\cdot\left[2^{\frac{3}{2}}-0\right]-\frac{2}{5}\left(2^{\frac{5}{2}}-0\right)$$

$$=\frac{4}{3}\times 2\sqrt{2}-\frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{8}{5}\sqrt{2}$$

$$=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=8\sqrt{2}\left(\frac{2}{15}\right)=\frac{16\sqrt{2}}{15}$$

प्रश्न 10.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\log\sin x - \log\sin 2x)dx$$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\log\sin x - \log\sin 2x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\log\sin x - \log(2\sin x\cos x)]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\log\sin x - \log 2 - \log\sin x - \log\cos x]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\, dx - (\log 2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx \left[\because \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx\right]$$

$$= \int_2^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\, dx - (\log 2)[x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\, dx$$

$$= -\log 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = -\frac{\pi}{2}\log 2 = \frac{\pi}{2}\log(2)^{-1} = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$$

प्रश्न 11.

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$$

$$\text{यहाँ } f(x) = \sin^2 x$$

$$f(-x) = [\sin(-x)]^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$$

$\therefore f(x)$ एक सम फलन है।

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x) dx = \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right) - (0-0) = \frac{\pi}{2}$$

प्रश्न 12. $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1+\sin x}$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1+\sin x} \quad \ldots (1)$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1+\sin(\pi - x)} dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1+\sin x} dx \ldots (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर, हम जानते है,

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} (\sec^2 x - \tan x \sec x) dx$$

$$= \pi [\tan x - \sec x]_0^{\pi} = 2\pi \Rightarrow I = \pi$$

प्रश्न 13.

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$$

उत्तर-

माना $f(x) = \sin^7 x$

तब, $f(-x) = [\sin(-x)]^7 = (-\sin x)^7 = -\sin^7 x = -f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ एक विषम फलन है।

किन्तु $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$, x विषम है।

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx = 0$$

प्रश्न 14.

$$\int_0^{2\pi} \cos^5 x\, dx$$

उत्तर-

माना $f(x) = \cos^5 x$

$\therefore f(2\pi - x) = \cos^5(2\pi - x) = \cos^5 x = f(x)$

$$\therefore I = \int_0^{2\pi} \cos^5 x\, dx = 2\int_0^{\pi} \cos^5 x\, dx$$

पुनः $g(x) = \cos^5 x \therefore g(\pi - x) = \cos^5(\pi - x) = -\cos^5 x = -g(x)$

$\therefore I = 0$

अतः $\int_0^{2\pi} \cos^5 x\, dx = 0$

प्रश्न 15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{1+\sin x \cos x}$

उत्तर-

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{1+\sin x\cos x} dx \ldots (1)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} dx \left[\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx \text{ के प्रयोग से}\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x} dx \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर

$$2I \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{0}{1+\sin x\cos x} dx = 0 \Rightarrow I = 0$$

प्रश्न 16. $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\ dx$

उत्तर-

$$\text{माना } I = \int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\ dx \ldots (1)$$

$$= \int_0^{\pi} \log[1+\cos(\pi-x)]dx \left[\because \int_0^a f(x)\ dx = \int_0^a f(a-x)\ dx\right]$$

$$= \int_0^{\pi} \log(1-\cos x)\ dx \ldots (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$2I = \int_0^{\pi} [\log(1+\cos x) + \log(1-\cos x)]dx$$

$$= \int_0^{\pi} \log(1 - \cos^2 x)dx = \int_0^{\pi} \log \sin^2 x \, dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \log \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \log \sin x \, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = 2I_1 \ldots (3)$$

$$\left[\because \int_0^{2x} f(x)\, dx = 2\int_0^{a} f(x)\, dx, \text{ जब } f(2a - x) = f(x)\right]$$

अब, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx \ldots (4)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx \left[\because \int_0^{a} f(x)\, dx = \int_0^{a} f(a - x)\, dx\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx \ldots (5)$$

(4) और (5) को जोड़ने पर,

$$2I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x \cos x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{2\sin x \cos x}{2}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x\, dx - \log 2[x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x\, dx - \log 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x\, dx - \frac{\pi}{2}\log 2 = I_2 - \frac{\pi}{2}\log 2 \ldots (6)$$

जहाँ, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x\, dx$

माना $2x = t, \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$

जब $x = 0$ तो $t = 0$ और जब $x = \frac{\pi}{2}$ तो $t = \pi$

$$\therefore I_2 = \int_0^{\pi} \log \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\, dt \; [\because \log \sin(\pi - t) = \log \sin t]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = I_1$$ [(4) से]

$\therefore$ (6) से, $2I_1 = I_1 - \frac{\pi}{2}\log 2$

या $I_1 = -\frac{\pi}{2}\log 2$

(3) से, $I = 2I_1$

या $I = 2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\log 2\right) = -\pi \log 2$ [समीकरण (3) से]

प्रश्न 17. $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}} dx$

उत्तर-

माना $I = \int\limits_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}} dx \ldots (1)$

$= \int\limits_0^a \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{a-(a-x)}} dx \left[\because \int\limits_0^a f(x)\, dx = \int\limits_0^a f(a-x)\, dx\right]$

$= \int\limits_0^a \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x}} dx \ldots (2)$

(1) व (2) को जोड़ने पर,

$2I = \int\limits_0^a \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^a 1 dx = [x]_0^a = a - 0 = a$

$\therefore I = \frac{a}{2}$

प्रश्न 18. $\int_0^4 |x-1| dx$

उत्तर-

माना $I = \int\limits_0^4 |x-1| dx$

हम देखते है कि $(x-1) \leq 0$ जब $0 \leq x \leq 1$ और $(x-1) \geq 0$ जब $1 \leq x \leq 4$

$= \int\limits_0^1 |x-1| dx + \int\limits_0^4 |x-1| dx$

$= \int\limits_0^1 -(x-1) dx + \int\limits_1^4 (x-1) dx$

$= -\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^4$

$= -\left[\left(\frac{1}{2} - 1\right) - 0\right] + \left(\frac{16}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$

$= \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2} = 5$

प्रश्न 19. दर्शाइए कि $\int_0^a f(x)g(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, यदि f और g को f(x) = f(a − x) एवं g(x) + g(a − x) = 4 के रूप में परिभाषित किया किया गया है।

उत्तर-

माना $I = \int_0^a f(x)g(x)dx$

$= \int_0^a f(a-x)g(a-x)dx \left[\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$

f(a - x) = f(x) रखने पर और g(x) + g(a - x) = 4 से g(a - x) = 4 - g(x) रखने पर

$\therefore I = \int_0^a f(a-x)g(a-x)dx = \int_0^a f(x)[4 - g(x)]dx$

$= 4\int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(x)g(x)dx = 4\int_0^a f(x)dx - I$

$\Rightarrow 2I = 4\int_0^a f(x)dx$ या $I = 2\int_0^a f(x)dx$

सही उत्तर का चयन कीजिए।

प्रश्न 20.

$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1)dx$ का मान है:

a. 0
b. 2
c. π
d. 1

उत्तर-

c. π

हल-

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1)dx$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^5 x\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1dx$$

हम जानते हैं कि,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & \text{यदि } f(x) \text{ एक सम फलन है} \\ 0 & \text{यदि } f(x) \text{ एक विषम फलन है} \end{cases}$$

इसलिए,

$$I = 0 + 0 + 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx$$

$$= 2[x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

अतः विकल्प (c) सही है।

प्रश्न 21.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right)dx$ का मान है:

a. 2
b. $\frac{3}{4}$
c. 0
d. -2

उत्तर-

c. 0

हल-

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right)dx\ldots(1)$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{4+3\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{4+3\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)dx\left[\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx \text{ के प्रयोग से}\right]$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{4+3\cos x}{4+3\sin x}\right)dx\ldots(2)$$

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right)+\log\left(\frac{4+3\cos x}{4+3\sin x}\right)\right\}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\log\frac{(4+3\sin x)}{4+3\cos x}\times\frac{(4+3\cos x)}{(4+3\sin x)}\right\}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log 1dx$$

$$I=0$$

अतः विकल्प (c) सही है।

प्रश्नावली 6.1 (पृष्ठ संख्या 369-371)

प्रश्नों के फलनों का समाकलन कीजिए।

प्रश्न 1. $\frac{1}{x-x^3}$

उत्तर-

$$\frac{1}{x-x^3}=\frac{1}{x(1-x^2)}=\frac{1}{x(1-x)(1+x)}$$

माना $\frac{1}{x(1-x)(1+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(1-x)}+\frac{C}{(1+x)}$

$$\Rightarrow 1=A(1-x^2)+Bx(1+x)+Cx(1-x)$$

$$\Rightarrow 1=A-Ax^2+Bx+Bx^2+Cx-Cx^2$$

दनो पक्षों के गुणांक की तुलना करने पर,

-A + B - C = 0 B + C = 0 और A = 1

उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर,

$$A=1, B=\frac{1}{2} \text{ और } C=-\frac{1}{2}$$

समीकरण (i) से,

$$\frac{1}{x(1-x)(1+x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(1+x)}$$

यहाँ $I=\int\frac{1}{x(1-x)(1+x)}dx\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1-x)}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+x)}dx$

$$=\log|x|-\frac{1}{2}\log|(1-x)|-\frac{1}{2}\log|(1+x)|$$

$$=\log|x|-\log\left|(1-x)^{\frac{1}{2}}\right|-\log\left|(1+x^{\frac{1}{2}})\right|$$

$$=\log\left|\frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}}\right|+C=\log\left|\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)^2\right|+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2}{1-x^2}\right|+C$$

प्रश्न 2. $\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$

उत्तर-

$$\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}=\frac{1}{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+b}}\times\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}$$

$$=\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{(x+a)-(x+b)}=\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{a-b}$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}dx=\frac{1}{a-b}\int(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})dx$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{(x+a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(x+b)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]+c$$

प्रश्न 3. $\frac{1}{x\sqrt{ax-x^2}}$

उत्तर-

माना $x=\frac{a}{t}\Rightarrow dx=-\frac{a}{t^2}dt$

$$I=\int\frac{1}{x\sqrt{ax-x^2}}dx\int\frac{1}{\frac{a}{t}\sqrt{a.\frac{a}{t}-\left(\frac{a}{t}\right)^2}}\left(-\frac{a}{t^2}dt\right)=-\int\frac{1}{at}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}}dt$$

$$=-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{t}-\frac{t^2}{t^2}}}dx=\int\frac{1}{\frac{a}{t}\sqrt{a.\frac{a}{t}-\left(\frac{a}{t}\right)^2}}\left(-\frac{a}{t^2}dt\right)=-\int\frac{1}{at}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}}dt$$

$$=-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{t}-\frac{t^2}{t^2}}}dt=-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{t-1}}dt=-\frac{1}{a}\left[2\sqrt{t-1}\right]+C$$

$$=-\frac{1}{a}\left[2\sqrt{\frac{a}{x}-1}\right]+C=-\frac{2}{a}\left[\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}\right]+C=-\frac{2}{a}\left[\sqrt{\frac{a-x}{x}}\right]+C$$

प्रश्न 4. $\frac{1}{x^2(x^4+1)^{\frac{3}{4}}}$

उत्तर-

$$I=\int\frac{1}{x^2(x^4+1)^{\frac{3}{4}}}dx$$

अंश और हर को x^{-3} से गुना करने पर,

$$\frac{x^{-3}}{x^{-3}.x^2(x^4+1)^{\frac{3}{4}}} = \frac{x^{-3}(x^4+1)^{\frac{3}{4}}}{x^{-3}.x^2} = \frac{1}{x^5}\left(\frac{x^4+1}{x^4}\right)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{x^5}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

माना $\frac{1}{x^4} = t \Rightarrow -\frac{4}{x^5}dx = dt \Rightarrow \frac{1}{x^5}dx = -\frac{dt}{4}$

$$= I\int \frac{1}{x^2(x^4+1)^{\frac{3}{4}}}dx = \int \frac{1}{x^5}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{-\frac{3}{4}}dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int(1+t)^{\frac{3}{4}}dt$$

$$-\frac{1}{4}\left[\frac{(1+t)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}\right]+C = -\frac{1}{4}\frac{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}+C$$

$$= -\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}+C$$

प्रश्न 5.

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}\left[\text{संकेत: } \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)}, x = t^6 \text{ रखिए}\right]$$

उत्तर-

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)}$$

माना $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$

$$I = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)}dx = \int \frac{6t^5}{t^2(1+t)}dt = 6\int \frac{6t^3}{(1+t)}dt$$

t^3 को हर 1 + t से भाग देने पर,

$$I = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}dx = 6\int\left\{(t^2-t+1)-\frac{1}{1+t}\right\}dt$$

$$= 6\left[\left(\frac{t^3}{3}\right) - \left(\frac{t^2}{2}\right) + t - \log|1+t|\right]$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\log\left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right) + C$$

$$= 2\sqrt{2} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\log\left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right) + C$$

प्रश्न 6. $\frac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$

उत्तर-

माना $\frac{5x}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+9)} \ldots (i)$

$\Rightarrow 5x = A(x^2 + 9) + (Bx + C)(x + 1)$

$\Rightarrow 5x = Ax^2 + 9A + Bx^2 + Bx + Cx + C$

दोनों पाक्सो के गुणांको की तुलना करने पर,

A + B = 0, B + C = 5 और 9A + C = 0

उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर,

$A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$ और $C = \frac{9}{2}$

समीकरण (i) से,

$$\frac{5x}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\frac{x}{2}+\frac{9}{2}}{(x^2+9)}$$

यहाँ, $I = \int \frac{5x}{(x+1)(x^2+9)}dx = \int\left\{\frac{-1}{2(x+1)} + \frac{(x+9)}{2(x^2+9)}\right\}dx$

$$= -\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{2}\int\frac{x}{(x^2+9)}dx + \frac{9}{2}\int\frac{1}{(x^2+9)}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{4}\int\frac{2x}{(x^2+9)}dx = \frac{9}{2}\int\frac{1}{(x^2+9)}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log|x^2+9| + \frac{9}{2}.\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3} + C$$

$$= -\frac{-1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log(x^2+9) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{3} + C$$

प्रश्न 7. $\frac{\sin x}{\sin(x-a)}$

उत्तर- माना (x - a) = t ⇒ dx = dt

$$I = \int \frac{\sin x}{\sin(x-a)}dx = \int \frac{\sin(t+a)}{\sin t}dt = \int \frac{\sin t\cos a + \cos t \sin a}{\sin t}dt$$

$$= \int(\cos a + \cot t \sin a)dt = t\cos a + \sin a \log|\sin t| + C_1$$

$$= (x-a)\cos a + \sin a \log|\sin(x-a)| + C_1$$

$$= x\cos a + \sin a \log|\sin(x-a)| - a\cos a + C_1$$

$$= \sin a \log|\sin(x-a)| + x\cos a + C \left[\text{जहाँ } C = C_1 - a\cos a\right]$$

प्रश्न 8. $\frac{e^{5\log x} - e^{4\log x}}{e^{3\log x} - e^{2\log x}}$

उत्तर-

$$\frac{e^{5\log x} - e^{4\log x}}{e^{3\log x} - e^{2\log x}} = \frac{e^{4\log x}(e^{\log x} - 1)}{e^{2\log x}(e^{\log x} - 1)} = \frac{e^{4\log x}}{e^{2\log x}} = \frac{x^4}{x^2} = x^2 \left[\text{क्योंकि } e^{m\log x} = e^{\log x^m} = x^m\right]$$

इसलिए, $I = \int \frac{e^{5\log x} - e^{4\log x}}{e^{2\log x} - e^{2\log x}}dx = \int x^2 dx = \frac{x^2}{3} + C$

प्रश्न 9. $\frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$

उत्तर-

$$\frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$$

माना $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{2^2-(t)^2}}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + C = \sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C$$

प्रश्न 10.

$$\frac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}$$

उत्तर-

$$\frac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{(\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^4 x-\cos^4 x)}{\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$=\frac{(\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(\sin^2 x-\sin^2 x\cos^2 x)+(\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x)}$$

$$=\frac{(\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)}{\sin^2 x(1-\cos^2 x)+\cos^2 x(1-\sin^2 x)}=\frac{(\sin^x+\cos^4 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)}{\sin^4 x+\cos^4 x}=-\cos 2x$$

इसलिए, $I\int\frac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int-\cos 2x dx=-\frac{\sin 2x}{2}+C$

प्रश्न 11. $\frac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

उत्तर-

$$\frac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$$

अंश और हर को $\sin(a-b)$ से गुणा करने पर,

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\frac{\sin(a-b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)}\right]=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\frac{\sin\{(x+a)-(x+b)\}}{\cos(x+a)\cos(x+b)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)}-\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right]=\frac{1}{\sin(a-b)}[\tan(x+a)-\tan(x+b)]$$

इसलिए, $I=\int\frac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}dx=\frac{1}{\sin(a-b)}\int[\tan(x+a)-\tan(x+b)]dx$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}[-\log|\cos(x+a)|+\log|\cos(x+b)|]+C=\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C$$

प्रश्न 12. $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$

उत्तर-

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$$

माना $x^4 = t \Rightarrow 4x^3 dx = dt$

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\sin^{-1} t + C = \frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4) + C$$

प्रश्न 13. $\frac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$

उत्तर-

$$\frac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$$

माना $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$$I = \int \frac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)} dx = \int \frac{dt}{(t+1)(t+2)} = \int \left[\frac{1}{(t+1)} - \frac{1}{(t+2)}\right] dt$$

$$= \log|t+1| - \log|t+2| + C = \log\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + C = \log\left|\frac{1+e^x}{2+e^x}\right| + C$$

प्रश्न 14. $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

उत्तर-

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)} \ldots (i)$$

$$\Rightarrow 1 = (Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1)$$

$$\Rightarrow 1 = Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D$$

दोनों पक्षों के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$A + C = 0, B + D = 0, 4A + C = 0 \text{ और } 4B + D = 1$$

उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर,

$A = 0, B = \frac{1}{3}, C = 0$ और $D = -\frac{1}{3}$

समीकरण (i) से,

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3(x^2+1)} - \frac{1}{3(x^2+4)}$$

इसलिए, $I = \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x^2+1)} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x^2+4)} dx$

$= \frac{1}{3} \tan^{-1} x - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + C = \frac{1}{3} \tan^{-1} x - \frac{1}{6} \tan^{-1} \frac{x}{2} + C$

प्रश्न 15. $\cos^3 x e^{\log \sin x}$

उत्तर-

$I = \int \cos^3 x e^{loh \sin x} dx = \int \cos^3 x \sin x \, dx \left[\text{क्योंकि } e^{\log x} = x\right]$

माना $\cos x = t \Rightarrow \sin x \, dx = dt$

$I = -\int t^3 dt = -\int \frac{t^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$

प्रश्न 16. $e^{3 \log x}(x^4 + 1)^{-1}$

उत्तर-

$e^{3 \log x}(x^4 + 1)^{-1} = e^{\log x^3} (x^4 + 1)^{-1} = \frac{x^3}{(x^4+1)} \left[\text{क्योंकि } e^{\log x} = x\right]$

माना $x^4 + 1 = t \Rightarrow 4x^3 dx = dt$

$I = \int e^{3 \log x}(x^4 + 1)^{-1} dx = \int \frac{x^3}{(x^4+1)} dx$

$= \frac{1}{4} \log |t| + C = \frac{1}{4} \log |x^4 + 1| + C = \frac{1}{4} \log(x^4 + 1) + C$

प्रश्न 17. $f'(ax + b)[\int (ax + b)]^n$

उत्तर-

$$I = \int f'(ax+b)\left[\int (ax+b)\right]^n dx$$

माना $\int (ax+b) = t \Rightarrow af'(ax+b)dx = dt$

$$I = \int f'(ax+b)\left[\int (ax+b)\right]^n dx = \frac{4}{a}\int t^n dt$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{t^{t+1}}{n+1}\right] = \frac{1}{a(n+1)}\left[\int (ax+b)\right]^{n+1} + C$$

प्रश्न 18.

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^3 x \sin(x+a)}}$$

उत्तर-

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^3 x \sin(x+a)}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^3 x(\sin x \cos a+\cos x \sin a)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\sin^4 x \cos a+\sin^3 x \cos x \sin a)}}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x\sqrt{(\cos a+\cot x \sin a)}} = \frac{1}{\sqrt{(\cos a+\cot x \sin a)}}$$

माना $\cos a + \cot x \sin a = t \Rightarrow -\operatorname{cosec}^2 x \sin a \, dx = dt$

$$I \int \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x \sin(x+a)}} dx = \int \frac{\operatorname{cose}^2 x}{\sqrt{(\cos a+\cot x \sin a)}} dx$$

$$= \frac{-1}{\sin a}\left[2\sqrt{t}\right] + C$$

$$= \frac{-2}{\sin a}\left[\sqrt{\cos a + \frac{\cos x \sin a}{\sin x}}\right] + C$$

$$= \frac{-2}{\sin a}\sqrt{\frac{\sin x \cos a+\cos x \sin a}{\sin x}} + C$$

$$= \frac{-2}{\sin a}\sqrt{\frac{\sin(x+a)}{\sin x}} + C$$

प्रश्न 19. $\frac{\sin^{-1}\sqrt{x}-\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x}+\cos^{-1}\sqrt{x}}, x \in [0,1]$

उत्तर-

$$I = \int \frac{\sin^{-1}\sqrt{x}-\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x}+\cos^{-1}\sqrt{x}}dx$$

हम जानते है कि $\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$

इसलिए, $I = \int \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\sqrt{x}\right)}{\frac{\pi}{2}}dx = \frac{2}{\pi}\int\left(\frac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\sqrt{x}\right)dx$

$= \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\int 1dx - \frac{2}{\pi}.2\int \cos^{-1}\sqrt{x}dxl = x - \frac{4}{\pi}\int \cos^{-1}\sqrt{x}dx \ldots (i)$

माना $I_1 = \int \cos^{-1}\sqrt{x}dx$ और माना $\sqrt{x} = t \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$I_1 = 2\int \cos^{-1} t.tdt = 2\left[\cos^{-1} t.\frac{t^2}{2} - \int \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}.\frac{t^2}{2}dt\right] = t^2\cos^{-1} t + \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$= t^2\cos^{-1} t - \int \frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = t^2\cos^{-1} t - \int\sqrt{1-t^2}dt + \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$= t^2\cos^{-1} t - \frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}dt - \frac{1}{2}\sin^{-1} t + \sin^{-1} t$

$= t^2\cos^{-1} t - \frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}dt + \frac{1}{2}\sin^{-1} t$

समीकरण (i) से,

$I = x - \frac{4}{\pi}\left[t^2\cos^{-1} - \frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}dt + \frac{1}{2}\sin^{-1} t\right]$

$\Rightarrow I = x - \frac{4}{\pi}\left[x\cos^{-1}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2}\sqrt{1-x}dt + \frac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{x}\right]$

$\Rightarrow I = x - \frac{4}{\pi}\left[x\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\sqrt{x}\right) - \frac{\sqrt{x-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{x}\right]$

$\Rightarrow I = x - 2x + \frac{4}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{x} + \frac{2}{\pi}\sqrt{x-x^2} - \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{x}$

$\Rightarrow I = -x + \frac{2}{\pi}[(2x+1)\sin^{-1}\sqrt{x}] + \frac{2}{\pi}\sqrt{x-x^2} + C$

$\Rightarrow I = \frac{2(2x+1)}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{x} + \frac{2}{\pi}\sqrt{x-x^2} - x + C$

प्रश्न 20. $\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

उत्तर-

$$I=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

माना $x=\cos^2\theta \Rightarrow dx=-2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$$I=\int\sqrt{\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}}}(-2\sin\theta\cos\theta)d\theta=-\int\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}(\sin 2\theta)d\theta=-\int\sqrt{\tan\frac{\theta}{2}}.2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=-2\int\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta\, d\theta=-4\int\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta\, d\theta=-4\int\sin^2\frac{\theta}{2}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)d\theta$$

$$=-4\int\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta=-8\int\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta+4\int\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=-2\int\sin^2\theta\, d\theta+4\int\sin^2\frac{\theta}{2}\, d\theta=-2\int\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta+4\int\frac{1-\cos\theta}{2}d\theta$$

$$=-2\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]+4\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin\theta}{2}\right]+C$$

$$=-\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}+2\theta-2\sin\theta+C=\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}-2\sin\theta+C$$

$$=\theta+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2}-2\sin\theta+C$$

$$=\theta+\sqrt{1-\cos^2\theta}.\cos\theta-2\sqrt{1-\cos^2\theta}+C$$

$$=\cos^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{1-x}.\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}+C$$

$$=-2\sqrt{1-x}+\cos^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x(1-x)}+C$$

$$=-\sqrt{1-x}+\cos^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{(x-x^2)}+C$$

प्रश्न 21. $\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x$

उत्तर-

$$I=\int\left(\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)e^x dx=\int\left(\frac{2+2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\right)e^x dx=\int\left(\frac{1+\sin x\cos x}{\cos^2 x}\right)e^x dx$$

$$=\int(\sec^2 x+\tan x)e^x dx$$

माना $f(x)=\tan x \Rightarrow f'(x)=\sec^2 x$

हम जानते है कि $I = \int\{f(x) + f'(x)\}e^x dx$

इसलिए, $I = \int(\sec^2 x + \tan x)e^x dx = e^x f(x) + C = e^x \tan x + C$

प्रश्न 22. $\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$

उत्तर-

माना $\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+2)} \ldots (i)$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A(x+1)(x+2)+B(x+2)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)}$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 = A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x^2 + 2x + 1)$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 = A(x^2 + 3x + 2) + B(x+2) + C(x^2 + 2x + 1)$$

$$\Rightarrow x^2 x + 1 = (A + C)x^2 + (3A + B + 2C)x + (2A + 2B + C)$$

दोनो पक्षों के गुणांकों की तुलना करने पर,

$A + C = 1, 3A + B + 2C = 1$ और $2A + 2B + C = 1$

समीकरण (i) से,

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{-2}{(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+2)}$$

इसलिए, $I = \int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)} dx = -2\int \frac{1}{(x+1)} dx + 3\int \frac{1}{(x+2)} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$

$$= -2 \log|x+1| + 3 \log|x+2| - \frac{1}{(x+1)} + C$$

प्रश्न 23. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$

उत्तर-

माना $x=\cos\theta \Rightarrow dx=-\sin\theta\, d\theta$

$$I=\int \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}(-\sin\theta\, d\theta)=-\int \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}\sin\theta\, d\theta=-\int \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}.\sin\theta\, d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int\theta\sin\theta\, d\theta=-\frac{1}{2}\left[\theta(-\cos\theta)-\int 1.(-\cos\theta)\, d\theta\right]=-\frac{1}{2}[-\theta\cos\theta+\sin\theta]$$

$$=\frac{1}{2}\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\cos^{-1}x.x-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+C=\frac{x}{2}\cos^{-1}x-\frac{}{1}2\sqrt{1-x^2}+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}\right)+C$$

प्रश्न 24.

$$\frac{\sqrt{x^2+1}[\log(x^2+1)-2\log x}{x^4}$$

उत्तर-

$$\frac{\sqrt{x^2+1}[\log(x^2+1)-2\log x]}{x^4}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}[\log(x^2+1)-2\log x]=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\left[\log\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{x^3}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\text{Let}1+\frac{1}{x^2}=t\Rightarrow\frac{-2}{x^3}dx=dt$$

इसलिए, $I=\int\frac{1}{x^3}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\log t\, dt=-\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}.\log t\, dt$

खंडशः समाकलन से,

$$I=-\frac{1}{2}\left[\log t.\int t^{\frac{1}{2}}dt-\left\{\left(\frac{d}{dt}\log t\right)\int t^{\frac{1}{2}}dt\right\}dt\right]=-\frac{1}{2}\left[\log t.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\int\frac{1}{t}.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}dt\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\log t-\frac{2}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt\right]=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\log t-\frac{4}{9}.t^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\log t-\frac{2}{9}.t^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\left[\log t-\frac{2}{3}\right]=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{3}\right]+C$$

प्रश्न 25.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^x\left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx$$

उत्तर-

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{x}\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{x}\left(\frac{1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^{2}\frac{x}{2}}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{x}\left(\frac{\operatorname{cosec}\frac{x}{2}}{2}-\cot\frac{x}{2}\right)dx$$

$$\text{Let } f(x)=-\cot\frac{x}{2}\Rightarrow f'(x)=-\left(-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{2}\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{2}\frac{x}{2}$$

इसीलिए, $I\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{x}\left(f(x)+f'(x)\right)dx$

$$=\left[e^{x}.\cot\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\left[e^{x}.\cot\frac{\pi}{2}-e^{\frac{\pi}{2}}.\cot\frac{\pi}{4}\right]=-\left[e^{\pi}\times 0-e^{\frac{\pi}{2}}\times 1\right]=e^{\frac{\pi}{2}}$$

प्रश्न 26.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^{4}x+\sin^{4}x}dx$$

उत्तर-

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^{4}x+\sin^{4}x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{(\sin x\cos x)x}{\cos^{4}x}}{\frac{(\cos^{x}+\sin^{4}x)}{\cos^{4}x}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\sec^{2}x}{1+\tan^{4}x}dx$$

माना $\tan^{2}x=t\Rightarrow 2\tan x\sec^{2}x\,dx=dt$

जब $x=0, t=0$ और जब $x=\frac{\pi}{4}, t=1$

इसलिए, $I=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{dt}{1+t^{2}}=\frac{1}{2}\left[\tan^{-1}t\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}\left[\tan^{-1}1-\tan^{-1}0\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{8}$

प्रश्न 27.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2}x}{\cos^{2}x+4\sin^{2}x}dx$$

उत्तर-

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+4\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+4(1-\cos^2 x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+4-4\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{-1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4-3\cos^2 x-4}{4-3\cos^2 x}dx=\frac{-1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4-3\cos^2 x}{4-3\cos^2 x}dx+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{4-3\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{-1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sec^2 x}{4\sec^2 x-3}dx=\frac{-1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\sec^2 x}{4(1+\tan^2 x)-3}dx$$

$$=\frac{-1}{3}[x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sec^2 x}{1+4\tan^2 x}dx=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sec^2 x}{1+4\tan^2 x}dx\ldots(i)$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sec^2 x}{1+4\tan^2 x}dx$ के समाकलन के लिए, माना $2\tan x=t\Rightarrow 2\sec^2 x\,dx=dt$

जब, $x=0, t=0$ और जब $x=\frac{\pi}{2}, t=\infty$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sec^2 x}{1+4\tan^2 x}dx=\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=[\tan^{-1}t]_0^{\infty}=[\tan^{-1}(\infty)-\tan^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$$

समीकरण (i) से,

$$I=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

प्रश्न 28.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

उत्तर-

$$I\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dxl = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{-(-\sin 2x)}} dxl = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{-(-1+1-2\sin x\cos x)}}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-(sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x)}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}} dx$$

माना $(\sin x - \cos x) = t \Rightarrow (\sin x - \cos x)dx = dt$

जब $x = \frac{\pi}{6}, t = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ और जब $x = \frac{\pi}{3}, t = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

$$I = \int_{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}^{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)} \frac{dt}{\sqrt{1-(t)^2}}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \left[\text{क्योंकि } \frac{1}{\sqrt{1-(-t)^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \text{ इसलिए } \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \text{ एक सम फलन है}\right]$$

अतः, $I = 2\int_{0}^{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [2\sin^{-1} t]_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

प्रश्न 29. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}} dx$

उत्तर-

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}} \times \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{1+x-x} dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x}dx + \int \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[(2)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{2}{3}[1] = \frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2.2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

प्रश्न 30. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x} dx$

उत्तर-

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x} dx$$

माना $\sin x - \cos x = t \Rightarrow (\cos x + \sin x)dx = dt$

जब $x = 0, t = -1$ और जब $x = \frac{\pi}{4}, t = 0$

यहाँ, $(\sin x - \cos x)^2 = t^2 \Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x = t^2 \Rightarrow 1 - \sin 2x = t^2$

$\Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

इसलिए, $I \int_{-1}^{0} \frac{dt}{9+16-16t^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{(5)^2-(4t)^2}$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2(5)}\log\left|\frac{5+4t}{5-4t}\right|\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{40}\left[\log|1| - \log\left|\frac{1}{9}\right|\right] = \frac{1}{40}\log 9$$

प्रश्न 31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \tan^{-1}(\sin x)\, dx$

उत्तर-

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \tan^{-1}(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \cos x \tan^{-1}(\sin x)dx$$

माना $\sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt$

जब $x = 0, t = 0$ और जब $x = \frac{\pi}{2}, t = 1$

$$I = 2\int_0^1 t \tan^{-1}(t)dt \ldots (i)$$

यहाँ $\int t \tan^{-1} dt = \tan^{-1} t \int t\, dt - \int\left\{\frac{d}{dt}(\tan^{-1} t)\int t\, dt\right\}dt = \tan^{-1} t.\frac{t^2}{2} - \int \frac{1}{1+t^2}.\frac{t^2}{2}dt$

$$= \frac{t^2 \tan^{-1}}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt = \frac{t^2 \tan^{-1} t}{2} - \frac{1}{2}\int 1dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{t^2 \tan^{-1} t}{2} - \frac{1}{2}.t + \frac{1}{2}\tan^{-1} t$$

इसलिए, $I = 2\int_0^1 -0t \tan^{-1} dt = 2\left[\frac{t^2 \tan^{-1} t}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1} t\right]_0^1 = \left[\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] = \frac{\pi}{2} - 1$

प्रश्न 32. $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x+\tan x} dx$

उत्तर-

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}dx\ldots(i)$$

$$I=\int_0^{\pi}\left\{\frac{(\pi-x)\tan(\pi-x)}{\sec(\pi-x)+\tan(\pi-x)}\right\}dx\left[\int_0^{a}f(x)dx=\int_0^{a}f(a-x)dx\right]$$ के प्रयोग से

$$I=\int_0^{\pi}\left\{\frac{-(\pi-x)\tan x}{-(\sec x+\tan x)}\right\}dxI=\int_0^{\pi}\left\{\frac{(\pi-x)\tan x}{(\sec x+\tan x)}\right\}dx\ldots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर,

$$2I=\int_0^{\pi}\frac{\pi\tan x}{\sec x+\tan x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\pi\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x+1-1}{1+\sin x}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi}1dx-\pi\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\pi[x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(\sec^2 x-\sec x\tan x)dx$$

$$\Rightarrow 2I=\pi^2-\pi[\tan x-\sec x]_0^{\pi}=\pi^2-\pi[\tan\pi-\sec\pi-\tan 0+\sec 0]$$

$$\Rightarrow 2I=\pi^2-\pi[0-(-1)-0+1]=\pi^2-2\pi=\pi(\pi-2)\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}(\pi-2)$$

प्रश्न 33. $\int_1^4[|x-1|+|x-2|+|x-3|]dx$

उत्तर-

$$I=\int_1^4[|x-1|+|x-2|+|x-3|]dx\int_1^4|x-1|dx+\int_1^4|x-2|dx+\int_1^4|x-3|dx$$

माना $I=I_1+I_2+I_3\ldots(i)$

जहाँ $I_1\int_1^4|x-1|dx, I_2=\int_1^4|x-2|dx$ और $I_3=\int_1^4|x-3|dx$

$$I_1=\int_1^4|x-1|dx$$

यहाँ, $(x-1)>0$ यदि $x>4$

$$I_1=\int_1^4(x-1)dx=\left[\frac{x^2}{x}-x\right]_1^4=\left[8-4-\frac{1}{2}+1\right]=\frac{9}{2}\ldots(ii)$$

यहाँ, $(x-2)>0$ यदि $x>2$ और $x-2<0$ यदि $x<2$

$$I_2 \int_1^2 (2-x)dx = \int_2^4 (x-2)dx = \left[2x - \frac{x^2}{x}\right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{x} - 2x\right]_2^4$$

$$I_2 = \left[4-2-2-\frac{1}{2}\right] + [8-8-2+4] = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \ldots (iii)$$

$$I_3 \int_1^4 |x-3|dx$$

यहाँ, $(x-3)>0$ यदि $x>3$ और $x-3<0$ यदि $x<3$

$$I_3 \int_1^3 (3-x)dx = \int_3^4 (x-3)dx = \left[3x - \frac{x^2}{x}\right]_1^3 + \left[\frac{x^2}{x} - 3x\right]_3^4$$

$$I_3 \left[9 - \frac{9}{2} - 3 + \frac{1}{2}\right] + \left[8 - 12 - \frac{9}{2} + 9\right] = [6-4] + \left[\frac{1}{2}\right] = \frac{5}{2} \ldots (iv)$$

समीकरण (i), (ii), (iii) और (iv) से,

$$I = \frac{9}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = \frac{19}{2}$$

प्रश्न 34. सिद्ध कीजिए: $\int_1^3 \frac{dx}{x^2(x+1)} = \frac{2}{3} + \log\left(\frac{2}{3}\right)$

उत्तर-

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{x^2(x+1)}$$

$$\text{Let} \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$\Rightarrow 1 = Ax(x+1) + B(x+1) + C(x^2)$$

$$\Rightarrow 1 = Ax^2 + Ax + Bx + Cx^2$$

दोनों पक्षों के गुणांकों की तुलना करने पर,

A + C = 0, A + B = 0 और B = 1

उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर,

A = −1, B = 1 और C = 1

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

$$I = \int_1^3 \left\{ -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)} \right\} dx = \left[-\log x - \frac{1}{x} + \log(x+1) \right]_1^3 = \left[\log\left(\frac{x+1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right]_1^3$$

$$= \log\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{3} - \log\left(\frac{2}{1}\right) + 1 = \log 4 - \log 3 - \log 2 + \frac{2}{3} = \log\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}$$

अतः, यह सिद्ध होता है।

प्रश्न 35. सिद्ध कीजिए: $\int^1 xe^x dx = 1$

उत्तर-

$$I = \int_0^1 x\, e^x dx$$

खण्डशः समाकलन द्वारा

$$I = x \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int e^x dx \right\} dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1$$

अतः सिद्ध होता है।

प्रश्न 36. सिद्ध कीजिए:

$$\int_{-1}^1 x^{17} \cos^4 x\, dx = 0$$

उत्तर-

$$I = \int_{-1}^{1} x^{17} \cos^4 x \, dx$$

माना $f(x) = x^{17} \cos^4 x$

इसलिए, $f*(-x) = (-x)^{17} \cos^4 (-x) = -x^{17} \cos^4 x = -f(x)$

अत:, f(x) एक विषम फलन है।

हम जानते हैं कि यदि f(x) एक विषम फलन है तो, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

इसलिए, $I = \int_{-1}^{1} x^{17} \cos^4 x \, dx = 0$

अत:, यह सिद्ध होता है।

प्रश्न 37. सिद्ध कीजिए:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \frac{2}{3}$$

उत्तर-

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$I = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{1}{3}[-1] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

अत:, यह सिद्ध होता है।

प्रश्न 38. सिद्ध कीजिए:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x \, dx = 1 - \log 2$$

उत्तर-

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1)\tan x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x \tan x)dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = 2\left[\frac{\tan^2 x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + 2[\log\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (1-0) + 2\left[\log\cos\frac{\pi}{4} - \log\cos 0\right] = 1 + 2\left[\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \log 1\right] = 1 - \log 2 - 0 = 1 - \log 2$$

अतः, यह सिद्ध होता है।

प्रश्न 39. सिद्ध कीजिए:

$$\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx = \frac{\pi}{2} - 2$$

उत्तर-

$$I = \int_0^1 \sin^{-1} x\,dx = \int_0^1 \sin^{-1} x.1dx$$

खण्डशः समाकलन द्वारा

$$I = [x\sin^{-1} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.x\,dx = [x\sin^{-1} x]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = [x\sin^{-1} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.x\,dx = [x\sin^{-1} x]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x\hat{}2}}dx$$

माना $1 - x^2 = t \Rightarrow -2x\,dx = dx$

जब $x = 0, t = 1$ और जब $x = 1, t = 0$

$$I = [x\sin^{-1} x]_0^1 + \frac{1}{2}\int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [x\sin^{-1} x]_0^1 + \frac{1}{2}[2\sqrt{t}]_1^0 = \sin^{-1}(1) + [-\sqrt{1}] = \frac{\pi}{2} - 1$$

अतः, यह सिद्ध होता है।

प्रश्न 40. योगफल की सीमा के रूप में $\int 1e^{2-3x}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

हम जानते है कि: $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)\ldots+f(a+(n-1)h)]$

जहाँ $h = \frac{b-a}{n}, a = 0, b = 1$ और $f(x) = e^{2-3x}$

$h = \frac{1-0}{n} \Rightarrow h = \frac{1}{n}$

$I = \int_a^b e^{1-3x}dx = (1-0)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(0)+f(0+h)\ldots+f(0+(n-1)h)]$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[e^2+e^{2-3h}\ldots+e^{2-3(n-1)h}] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[e^2(1+e^{-3h}\ldots+e^{-3(n-1)h})]$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^2\left\{\frac{1-(e^{-3h})^n}{1-e^{-3h}}\right\}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^2\left\{\frac{1-e^{-\frac{3}{n}n}}{1-e^{-\frac{3}{n}}}\right\}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^2(1-e^{-3})}{1-e^{\frac{3}{n}}}\right]$

$e^2(e^{-3}-1)\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\left[\frac{-\frac{3}{n}}{e^{-\frac{3}{n}}-1}\right] = \frac{-e^2(e^{-3}-1)}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{-\frac{3}{n}}{e^{-\frac{3}{n}}-1}\right]$

$= \frac{-e^2(e^{-3}-1)}{3}.(1)\left[\text{क्योंकि } \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{e^x-1} = 1\right]$

$\frac{-e^2(e^{-3}-1)}{3} = \frac{-e^{-1}+e^2}{3} = \frac{1}{3}\left(e^2-\frac{1}{e}\right)$

सही उत्तर का चयन कीजिए-

प्रश्न 41.

$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ बराबर है:

a. $\tan -1(e^x) + C$

b. $\tan^{-1}(e^{-x}) + C$

c. $\log(e^x - e^{-x}) + C$

d. $\log(e^x + e^{-x}) + x$

उत्तर-

a. $\tan -1(e^x) + C$

हल-

$I = \int \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$

माना $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$I = \int \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} t + C = \tan^{-1}(e^x) + C$

प्रश्न 42.

$\int \frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x)^2} dx$ बराबर है:

a. $\frac{-1}{\sin x+\cos x} + C$

b. $\log|\sin x + \cos x| + C$

c. $\log|\sin x - \cos x| + C$

d. $\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$

उत्तर-

b. $\log|\sin x + \cos x| + C$

हल-

$I = \int \frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x)^2} dx = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2} dx = \int \frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2} dx$

$\Rightarrow I = \int \frac{(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)} dx$

माना $\sin x + \cos x = t \Rightarrow (\cos x - \sin x)dx = dt$

$I = \int \frac{dt}{t} + C = \log|t| + C = \log|\cos x + \sin x| + C$

प्रश्न 43.

$f(a+b-x)=f(x)$, तो $\int_a^b xf(x)dx$ बराबर है:

a. $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b-x)dx$

b. $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)dx$

c. $\frac{b-a}{2}\int_a^b f(x)dx$

d. $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

उत्तर-

d. $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

हल-

$I=\int_a^b xf(x)dx\ldots(i)$

$I=\int_a^b (a+b-x)f(a+b-x)dx\left[\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx \text{ के प्रयोग से}\right]$

$I=\int_a^b (a+b-x)f(x)dx$

$I=(a+b)\int_a^b (x)dx-I$ [समीकरण (i) से]

$\Rightarrow I+I=(a+b)\int_a^a (x)dx$

$$\Rightarrow 2I = (a+b)\int_a^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(x)dx$$

प्रश्न 44.

$\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right)dx$ का मान

a. 1

b. 0

c. -1

d. $\frac{\pi}{2}$

उत्तर-

b. 0

हल-

$$I = \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right)dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{x-(1-x)}{1+x(1-x)}\right)dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 [\tan^{-1}(1-x) - \tan^{-1}(1-x)]dx \ldots (i)$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 [\tan^{-1}(1-x) - \tan^{-1}(1-1+x)]dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 [\tan^{-1}(1-x) - \tan^{-1}(x)]dx \ldots (ii)$$

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर,

$$2I = \int_0^1 [\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1-x) - \tan^{-1}(1-x) - \tan^{-1}(x)]dx$$

$$\Rightarrow 2I = 0$$

$$\Rightarrow I = 0$$