गणित

अध्याय-7: त्रिभुज

त्रिभुजों की सर्वांगसमता

यदि दो त्रिभुजों की तीनों भुजायें एवं संगत कोण समान हों तो वे परस्पर सर्वांगसम होते हैं। दूसरे शब्दों में दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि वे एक दूसरे की प्रतिलिपियाँ हों और एक को दूसरे के ऊपर रखे जाने पर, वे एक दूसरे को आपस में पूर्णतया ढक लें।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कसौटियाँ

दो त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होंगे इसको सिद्ध करने के लिए कुछ नियम हैं:

अभिगृहीत 7.1 (SAS सर्वांगसमता नियम):

दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनका अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों।

नोट:

इस परिणाम को इससे पहले ज्ञात परिणामों की सहायता से सिद्ध नहीं किया जा सकता है और इसीलिए इसे एक अभिगृहीत के रूप में सत्य मान लिया गया है।

ASA सर्वांगसमता

यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनके बीच की एक भुजा संगत कोण और भुजा के बराबर हो, तो त्रिभुज सर्वांगसम कहलाता है।

नोट:

चूँकि इस परिणाम को सिद्ध किया जा सकता है, इसलिए इसे एक प्रमेय कहा जाता है। इसे सिद्ध करने के लिए, हम ASA सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करेंगे।

प्रमेय 7.1 (ASA सर्वांगसमता नियम)

दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा के बराबर हों।

उपपत्ति

हमें दो त्रिभुज ABC और DEF दिए हैं, जिनमें $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ और BC = EF है। हमें Δ ABC $\cong$ Δ DEF सिद्ध करना है।

दोनों त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए देखिए कि यहाँ तीन स्थितियाँ संभव हैं।

स्थिति (i):

मान लीजिए AB = DE है।

इस स्थिति में AB = DE (माना है)

$\angle B = \angle E$ (दिया है)

BC = EF (दिया है)

अतः Δ ABC $\cong$ Δ DEF (SAS नियम द्वारा)

स्थिति (ii)

मान लीजिए, यदि संभव है तो, AB > DE है। इसलिए, हम AB पर एक बिंदु P ऐसा ले सकते हैं कि PB = DE हो

अब Δ PBC और Δ DEF में,

PB = DE (रचना से)

$\angle B = \angle E$ (दिया है)

BC = EF (दिया से)

अतः, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

Δ PBC $\cong$ Δ DFE (SAS सर्वांगसमता अभिगृहीत द्वारा)

चूँकि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए इनके संगत भाग बराबर होने चाहिए।

अतः, $\angle ACB = \angle DFE$

अतः $\angle ACB = \angle PCB$

परन्तु क्या यह संभव है?

यह तभी संभव है, जब P बिंदु A के साथ संपाती हो।

या BA = ED

अतः Δ ABC $\cong$ Δ DEF (SAS सर्वांगसमता अभिगृहीत द्वारा)

स्थिति (iii):

यदि AB, DE से छोटा हो, तो हम DE पर एक बिंदु M इस प्रकार ले सकते हैं कि ME = AB हो। अब स्थिति (ii) वाले तर्कण को दोहराते हुए, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि AB = DE है और इसीलिए Δ ABC $\cong$ Δ DEF है।

अब मान लीजिए कि दो त्रिभुजों में दो कोणों के युग्म और संगत भुजाओं का एक युग्म बराबर हैं, परन्तु ये भुजाएँ बराबर कोणों के युग्मों की अंतर्गत भुजाएँ नहीं हैं। क्या ये त्रिभुज अभी भी सर्वांगसम हैं? आप देखेंगे कि ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं?

आप जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है। अतः त्रिभुजों के कोणों के दो युग्म बराबर होने पर उनके तीसरे कोण भी बराबर होंगे (180° – दोनों बराबर कोणों का योग)।

अतः, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि इन त्रिभुजों के दो कोणों के युग्म बराबर हों और संगत भुजाओं का एक युग्म बराबर हो। हम इसे AAS सर्वांगसमता नियम कह सकते हैं।

एक त्रिभुज के कुछ गुण

विभिन्न गुणों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण निम्न प्रकार से किया जा सकता है:

समद्विबाहु त्रिभुज

एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।

प्रमेय 7.2: एक समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

उपपत्ति

हमें एक समद्विबाहु Δ ABC दिया है, जिसमें AB = AC है। हमें ∠B = ∠C सिद्ध करना है।

आइए ∠A का समद्विभाजक खींचे। मान लीजिए यह BC से D पर मिलता है।

अब Δ BAD और Δ CAD में

AB = AC (दिया है)

∠BAD = ∠CAD (रचना से)

AD = AD (उभयनिष्ठ)

अतः, Δ BAD ≅ Δ CAD (SAS नियम द्वारा)

इसलिए, ∠ABD = ∠ACD (CPCT)

अर्थात् ∠B = ∠C

प्रमेय 7.3: किसी त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

(यह प्रमेय 7-2 का विलोम है।)

इस प्रमेय को ASA सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कर सकते हैं। एक उदाहरण के माध्यम से इसको सिद्ध करने का प्रयास करते हैं।

उदाहरण:

Δ ABC में, ∠A का समद्विभाजक AD भुजा BC पर लम्ब है। दर्शाइए कि AB = AC है और Δ ABC समद्विबाहु है।

अब Δ ABD और Δ ACD में

∠BAD = ∠CAD (दिया है)

AD =AD (उभयनिष्ठ)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^{\circ}$ (दिया है)

अत:, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (SAS नियम द्वारा)

इसलिए, AB = AC (CPCT)

इसी कारण ΔABC समद्विबाहु है।

स्मरणीय तथ्य:

दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं, यदि उनका एक ही आकार हो और एक ही माप हो।

समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं।

समान भुजाओं वाले दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं।

यदि त्रिभजु ABC आरै PQR सगंतता।$A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ और $C \leftrightarrow R$ के अंतर्गत सवार्गसम हों तो उन्हें सांकेतिक रूप में $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ लिखते हैं।

यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SAS सर्वांगसमता नियम)।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ और कसौटियाँ

एक त्रिभुज के तीनों कोणों के दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों के बराबर होने पर दोनों त्रिभुजों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है। इसके लिए कुछ और भी नियम हैं जो निम्न प्रकार से हैं:

प्रमेय 7.4 (SSS सर्वांगसमता नियम):

यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ एक अन्य त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। दूसरे शब्दों में दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं और इसीलिए ये सर्वांगसम हैं।

प्रमेय 7.5 (RHS सर्वांगसमता नियम)

यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

ध्यान दीजिए कि यहाँ RHS समकोण – कर्ण – भुजा को दर्शाता है।

उदाहरण

AB एक रेखाखंड है तथा बिंदु P और Q इस रेखाखंड AB के विपरीत ओर इस प्रकार स्थित हैं कि इनमें से प्रत्येक A और B से समदूरस्थ है। दर्शाइए कि रेखा PQ रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।

हल:

आपको PA = PB और QA = QB दिया हुआ है।

आपको दर्शाना है कि PQ ⊥ AB है और PQ रेखाखंड AB को समद्विभाजित करती है। मान लीजिए रेखा PQ रेखाखंड AB को C पर प्रतिच्छेद करती है।

यहाँ पर Δ PAQ और Δ PBQ लेते हैं।

इन त्रिभुजों में

AP = BP (दिया है)

AQ = BQ (दिया है)

PQ =PQ (उभयनिष्ठ हैं)

अतः, D PAQ ≅ D PBQ (SSS नियम)

इसलिए, ∠ APQ = ∠ BPQ (CPCT)

अब Δ PAC और Δ PBC लेते हैं। आपको प्राप्त है:

AP =BP (दिया है)

∠ APC = ∠ BPC (∠ APQ = ∠ BPQ पहले सिद्ध किया जा चुका है)

PC =PC (उभयनिष्ठ)

अतः Δ PAC $\cong$ Δ PBC (SAS नियम)

इसलिए, AC = BC (CPCT) (1)

और $\angle$ ACP = $\angle$ BCP (CPCT)

साथ ही $\angle$ ACP + $\angle$ BCP = 180° (रैखिक युग्म)

इसलिए, 2$\angle$ ACP = 180°

या $\angle$ ACP = 90° (2)

(1) और (2) से, आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि रेखा PQ रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।

स्मरणीय तथ्य

1. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
2. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और संगत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (AAS सर्वांगसमता नियम)।

एक त्रिभुज में असमिकाएँ

त्रिभुज की भुजाओं के माप बदलने पर उसके कोणों के माप भी बदल जाते हैं और यदि त्रिभुज के कोणों के माप बदलें तो भुजाओं के माप भी बदल जाते हैं।

प्रमेय 7.6

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हों, तो लम्बी भुजा के सामने का सम्मुख कोण बड़ा होता है।

एक क्रिया-कलाप द्वारा इसे समझने का प्रयास करते हैं:

अब कोई ऐसा त्रिभुज खींचिए जिसके सभी कोण असमान हों। इस त्रिभुज की भुजाओं को मापिए। देखिए कि सबसे बड़े कोण की सम्मुख भुजा सबसे लम्बी है।

नोट:

कुछ और त्रिभुज खींच कर इस क्रियाकलाप को दोहराइए और देखिए कि प्रमेय 7.6 का विलोम भी सत्य है। इस प्रकार, हम निम्न प्रमेय पर पहुँचते हैं।

प्रमेय : किसी त्रिभुज में, बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी (लम्बी) होती है।

इस प्रमेय को विरोधाभास की विधि (उमजीवक वि बवदजतंकपबजपवद) से सिद्ध किया जा सकता है।

अब एक त्रिभुज ABC खींचिए और इसमें AB + BC, BC + AC और AC + AB ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि

AB + BC > AC, BC + AC > AB और AC + AB > BC हैं।

प्रमेय : त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

ΔABC की एक भुजा BC पर D एक ऐसा बिंदु है कि AD = AC है दर्शाइए कि AB > AD है

हल:

Δ DAC में

AD = AC (दिया है)

इसलिए, ∠ ADC = ∠ ACD (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

अब ∠ ADC त्रिभुज ABD का एक बहिष्कोण है

इसलिए, ∠ ADC > ∠ ABD

या ∠ ACD > ∠ ABD

या ∠ ACB > ∠ ABC

अतः, AB > AC (Δ ABC में बड़े कोण की सम्मुख भुजा)

या AB > AD (AD = AC)

स्मरणीय तथ्य

1. त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
2. त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
3. किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^0 का होता है।
4. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SSS सर्वांगसमता नियम)।

प्रमेय : त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

Δ ABC की भुजा BA को एक बिंदु D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि AD = AC है। क्या आप दर्शा सकते हैं कि

∠BCD > ∠BDC है और BA + AC > BC है?

क्या आप उपरोक्त प्रमेय की उत्पत्ति पर पहुँच गए हैं? इससे सम्बंधित उदाहरण नीचे दिया गया है।

हल सहित उदाहरण

Δ ABC की भुजा BC पर D एक ऐसा बिंदु है कि AD = AC है दर्शाइये कि AB > AD है।

हल:

Δ DAC में

AD = AC (दिया है)

इसलिए, ∠ADC = ∠ACD (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

अब, ∠ ADC त्रिभुज ABD का एक बहिष्कोणहै।

इसलिए, ∠ADC > ∠ABD

या $\angle ACD > \angle ABD$

या $\angle ACB > \angle ABC$

अतः $AB > AC$ (Δ ABC में बड़े कोण की सम्मुख भुजा)

या $AB > AD$ ($AD = AC$)

स्मरणीय तथ्य:

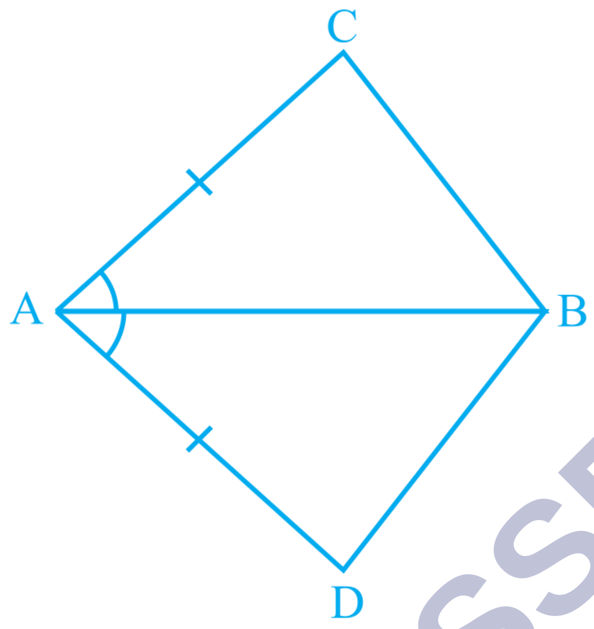
1. यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (RHS सर्वांगसमता नियम)
2. किसी त्रिभुज में, लंबी (बड़ी) भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।
3. किसी त्रिभुज में, बड़े कोण की सम्मुख भुजा लंबी (बड़ी) होती है।
4. किसी त्रिभुज में, दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 7.1 (पृष्ठ संख्या 143-145)

प्रश्न 1 चतुर्भुज ACBD में, $AC = AD$ है और AB, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है| (देखिये आकृति). दर्शाइए $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ है।

BC और BD के बारे में आप क्या कह सकते है?



उत्तर-

दिया है: $AC = AD$ और $AC \angle AD$ को समद्विभाजित करता है

सिद्ध करना: $\triangle ABC \cong ABD$ में,

प्रमाण:

$\triangle ABC$ तथा $\triangle ABD$ में,

$AC = AD$ [दिया है]

$\angle CAB - BAD[AB \angle A$ समद्विभाजित करता है]

$AB = AB$ [उभयनिष्ठ]

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABC \cong \triangle ABD$

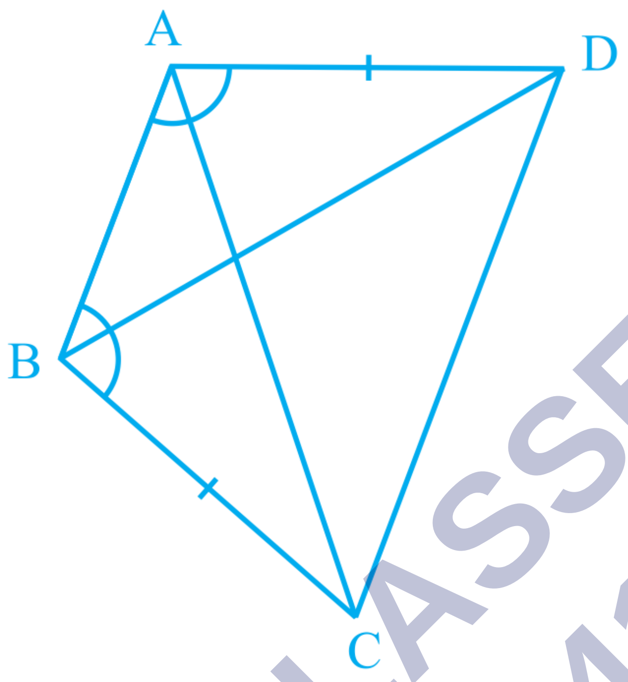
$BC = BC[CPCT]$

प्रश्न 2 ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AD = BC है और ∠DAB = ∠CBA (देखिये आकृति) है सिद्ध कीजिए कि-

i. $\triangle ABD \cong \triangle BAC$

ii. BD = AC

iii. ∠ABC = ∠BAC



उत्तर- दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AD = BC और ∠DAB = ∠CBA है।

सिद्ध करना है:

∠ABD ≅ BAC

BD = AC

∠ABD = ∠BAC

प्रमाण:

i. △ABD तथा △BAC में,

AD = BC [दिया है]

∠DAB = CBA [दिया है]

AB = AB [उभयनिष्ठ]

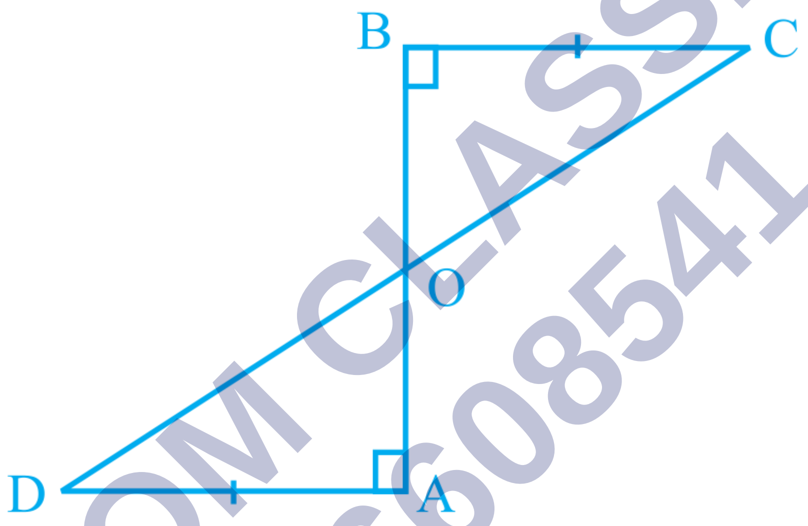
SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABD \cong \triangle BAC$

ii. BD = AC [By CPCT]

iii. $\angle ABC = \angle BAC$ [by CPCT]

प्रश्न 3 एक रेखाखंड AB पर AD और BC दो बराबर लंब रेखाखंड हैं (देखिये आकृति)| दर्शाइए कि CD, रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है।



उत्तर- दिया है, $AD \perp AB$ और $BC \perp AB$ है और AD = BC

सिद्ध करना है,

AO = BO अर्थात CD, AB रेखाखंड को समद्विभाजित करता है।

प्रमाण:

$\triangle AOD$ तथा $\triangle BOC$

$\angle AOD = \angle BOC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle DAO = \angle CBO$ (प्रत्येक 90º)

BC = AD (दिया है।)

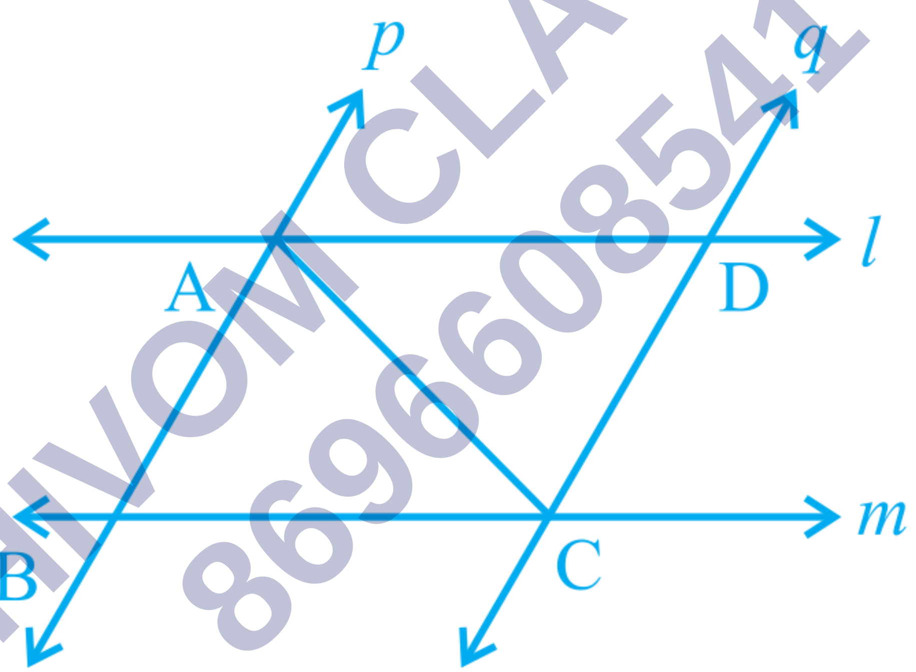
ASA सर्वांगसमता नियम से

$\triangle AOD \cong \triangle BOC$

$\therefore$ AO = BO (By CPCT)

अत: CD, AB रेखाखंड को समद्विभाजित करता है।

प्रश्न 4 l और m दो समांतर रेखाएँ हैं जिन्हें समांतर रेखाओं p और q का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेद करता है| दर्शाइए कि $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ है।



उत्तर- दिया है, l || m और p || q है जो एक दुसरे को A, B, C तथा D पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

प्रमाण:

l || m.......(1) दिया है।

p || q ......(2) दिया है।

समी० (1) तथा (2) से

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

अब, $\triangle ABC$ तथा $\triangle CDA$ में,

BC = AD [समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा]

$\angle B = \angle D$ [समांतर चतुर्भुज की सम्मुख कोण]

AC = AC [दिया है]

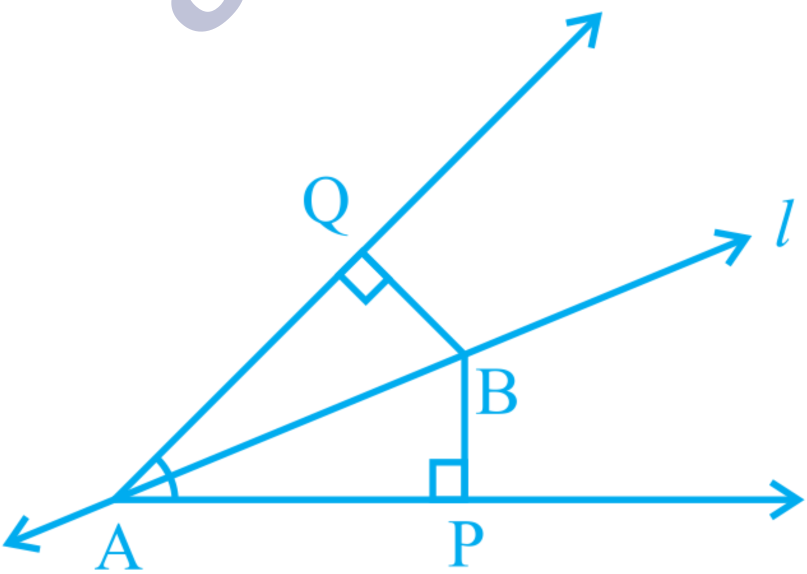
SAS सर्वांगसमता नियम से

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$

Proved.

प्रश्न 5 रेखा / कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा / पर स्थित कोई बिंदु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब हैं (देखिये आकृति) दर्शाइए कि:

i. $\triangle APB \cong \triangle AQB$
ii. BP = BQ हैं, अर्थात बिंदु B कोण की भुजाओं से समदूरस्थ है।



उत्तर- $\angle PAQ$ को रेखा l समद्विभाजित करती है और BP तथा BQ, AP तथा AQ पर क्रमशः लंब है।

सिद्ध करना है:

i. $\triangle APB \cong \triangle AQB$
ii. $BP = BQ$

प्रमाण:

i. $\triangle APB$ तथा $\triangle AQB$ में,

$\angle APB = \angle AQB$ (90° प्रत्येक)

$\angle PAB = \angle QAB$ (दिया है)

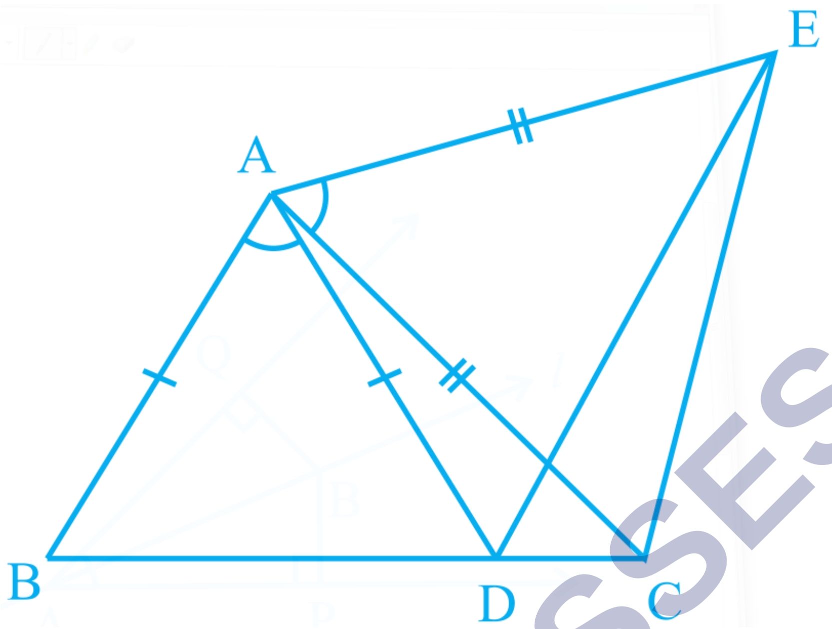
$AB = AB$ (उभयनिष्ठ)

ASA सर्वांगसमता नियम से

$\triangle APB \cong \triangle AQB$

ii. $\therefore BP = BQ$ (By CPCT)

प्रश्न 6 आकृति में, $AC = AE$, $AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$ है। दर्शाइए कि $BC = DE$ है।



उत्तर- दिया है,

AC = AE, AB = AD और ∠BAD = ∠EAC

सिद्ध करना है BC = DE

प्रमाण:

∠BAD = ∠EAC .....(1) दिया है

समी० के दोनों पक्षों में ∠CAD जोड़ने पर

∠BAC + ∠CAD = ∠EAC + ∠CAD

∠BAC = ∠EAD .....(2)

△BAC तथा △DAE में

AC = AE (दिया है)

AB = AD (दिया है)

∠BAC = ∠EAD ……[समी० (2) से]

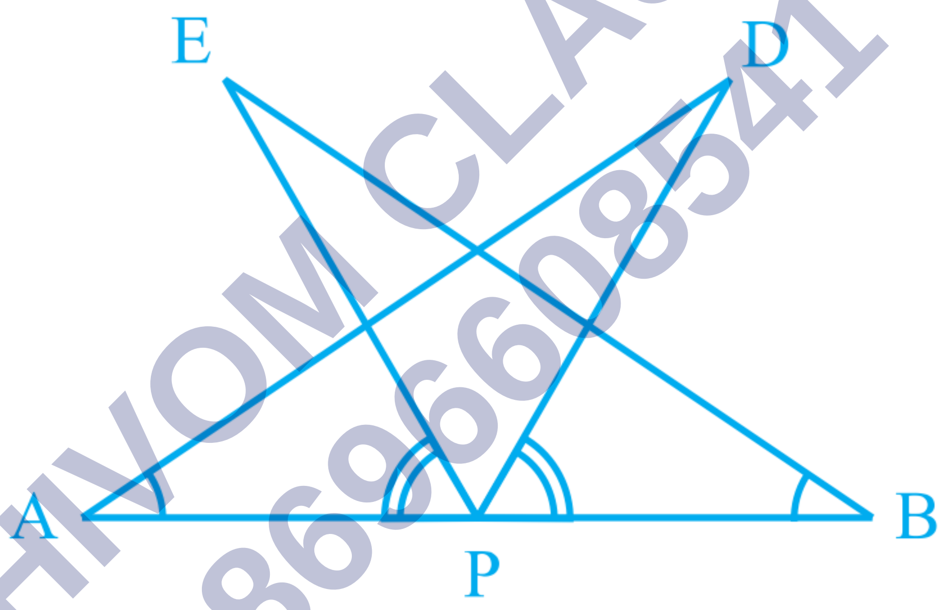
SAS सर्वांगसमता नियम से

△BAC ≅ △DAE

∴ BC = DE (By CPCT)

Proved.

प्रश्न 7 AB एक रेखाखंड है और P इसका मध्य-बिंदु है। D और E रेखाखंड AB के एक ही ओर स्थित दो बिंदु इस प्रकार हैं। कि ∠BAD = ∠ABE और ∠EPA = ∠DPB है| (देखिए आकृति)।



दर्शाइए कि:

i. △DAP ≅ △EBP
ii. AD = BE

उत्तर- दिया है,

AB एक रेखाखंड है और P इसका मध्य-बिंदु है।

∠BAD = ∠ABE और ∠EPA = ∠DPB

सिद्ध करना है,

i. $\triangle DAP \cong \triangle EBP$
ii. AD = BE

प्रमाण:

$\angle EPA = \angle DPB$ .....(1) दिया है।

समी० (1) के दोनों पक्षों में $\angle EPD$ जोड़ने पर

$\angle EPA = \angle EPD = \angle DPB + \angle EPD$

$\angle DPA = \angle EPB$ ...(2)

i. $\triangle DAP$ तथा $\triangle EBP$ में

AP = BP .... (दिया है)

$\angle BAD = \angle ABE$ .... (दिया है)

$\angle DPA = \angle EPB$ ....[समी० (2) से]

ASA सर्वांगसमता नियम से

$\triangle DPA \cong \triangle EPB$

ii. AD = BE (BY CPCT)

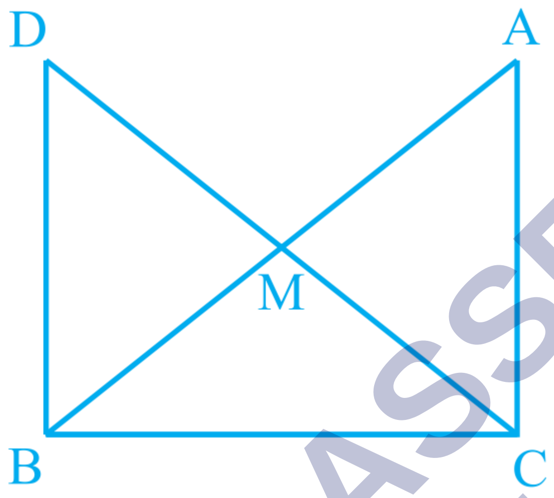
प्रश्न 8 एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें C समकोण है, M कर्ण AB का मध्य-बिन्दु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि DM = CM है। बिन्दु D को बिन्दु B से मिला दिया जाता है। दर्शाइए कि-

i. $\triangle AMC \cong \triangle BMD$

ii. $\angle DBC$ एक समकोण है।

iii. $\triangle DBC \cong \triangle ACB$

iv. $CM = \frac{1}{2}AB$



उत्तर- ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle C = 90°$ है तथा कर्ण AB का मध्य-बिन्दु है। M है। रेखाखण्ड CM खींचकर इसे बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि CM = DM है। बिन्दु D को बिन्दु B से मिलाकर रेखा BD खींची गई है।

सिद्ध करना है,

i. $\triangle AMC \cong \triangle BMD$

ii. $\angle DBC$ एक समकोण है।

iii. $\triangle DBC \cong \triangle ACB$

iv. $CM = \frac{1}{2}AB$

उपपत्ति:

i. $\triangle AMC$ तथा $\triangle BMD$ में,

AM = BM (M, AB का मध्य-बिंदु है)

$\angle CMA = \angle DMB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

CM = DM (दिया है)

$\therefore \triangle AMC \cong \triangle BMD$ (SAS सर्वांगसमता नियम द्वारा)

ii. चूंकि, $\triangle AMC \cong \triangle BMD$ सर्वांगसम हैं, तब CPCT द्वारा AC = DB ....(1) तथा $\angle ACM = \angle BDM$ जो कि एकांतर अंतः कोण है।

$\therefore AC \parallel BC$

अब, $AC \parallel BD$ तथा BC तिर्यक रेखा है।

$\therefore \angle ACB + \angle DBC = 180°$

$\Rightarrow 90° + \angle B = 180°$

$\Rightarrow \angle DBC = 90°$

अतः $\angle DBC = 90°$

iii. $\triangle DBC$ और $\triangle ACB$ में,

$\angle DBC = \angle ACB$ (प्रत्येक कोण = 90°)

BC = CB (उभयनिष्ठ)

$\because \triangle AMC \cong \triangle BMD$

$\therefore AC = BD$

$\therefore \triangle DBC \cong \triangle ACB$ (SAS सर्वांगसमता)

iv. $\because \triangle DBC \cong \triangle ACB$

$\therefore DC = AB$

$\Rightarrow 2CM = AB$

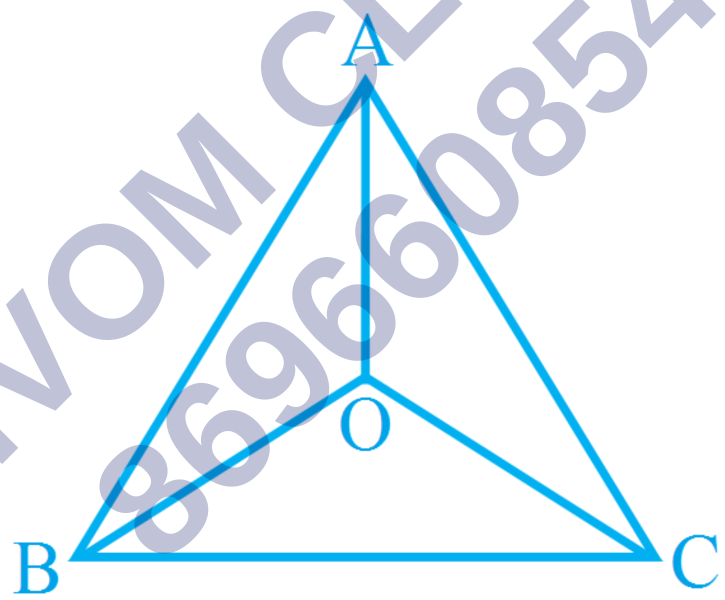
$\because DM = CM = \frac{1}{2}DC$

$\Rightarrow CM = \frac{1}{2}AB$

प्रश्नावली 7.2 (पृष्ठ संख्या 148-150)

प्रश्न 1 एक समबाहु त्रिभुज ABC में जिसमें AB = AC है, ∠B और∠C के समद्विभाजक परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। A और O को जोडिए। दर्शाइए कि:

i. OB = OC
ii. AO कोण ∠A को समद्विभाजित करता है।



उत्तर-

दिया है: समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, जिसमें AB = AC, और $\angle B$ और $\angle C$ कोण समद्विभाजक O पर मिलते हैं

सिद्ध करना है

i. $OB = OC$
ii. AO कोण $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

प्रमाण: $\triangle ABC$ में हमें प्राप्त है:

$AB = AC$

$\angle B = \angle C$ [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

अथवा $\frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\angle C$

इसलिए $\angle OBC = \angle OCB [\ldots 1]$

$\triangle ABO$ और $\triangle ACO$

$AB = AC$ दिया है

$\angle OBC = \angle OCB$ [समी० 1 से]

$AO = AO$ [उभयनिष्ठ]

SAS सर्वांगसमता नियम से

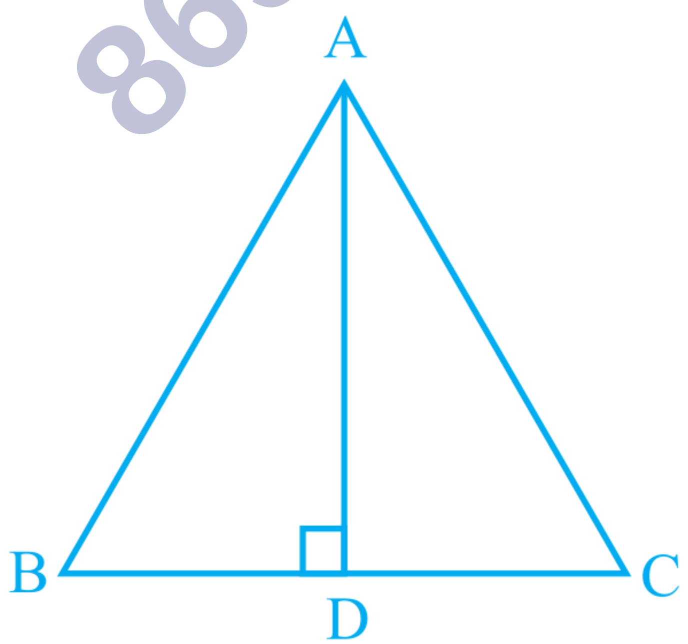
$\triangle ABO \cong \triangle ACO$

$OB = OC$ [By CPCT]

$\angle BAO = \angle CAO$ [By CPCT]

अत: AO कोण $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

प्रश्न 2 △ABC में, AD भुजा BC का लम्ब सम्द्विभाजक है (देखिये आकृति). दर्शाइए कि △ABC एक समद्विभाजक त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है।



उत्तर-

दिया है: $\triangle ABC$ में, AD, BC का लंब समद्विभाजक है।

सिद्ध करना है, $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है।

प्रमाण: $\triangle ABC$ तथा $\triangle ACD$ में,

$DB = DC$ [चूँकि D BC को समद्विभाजित करता है]

$\angle BDA = \angle CDA$ [$90°$ प्रत्येक]

$AD = AD$ [उभयनिष्ठ']

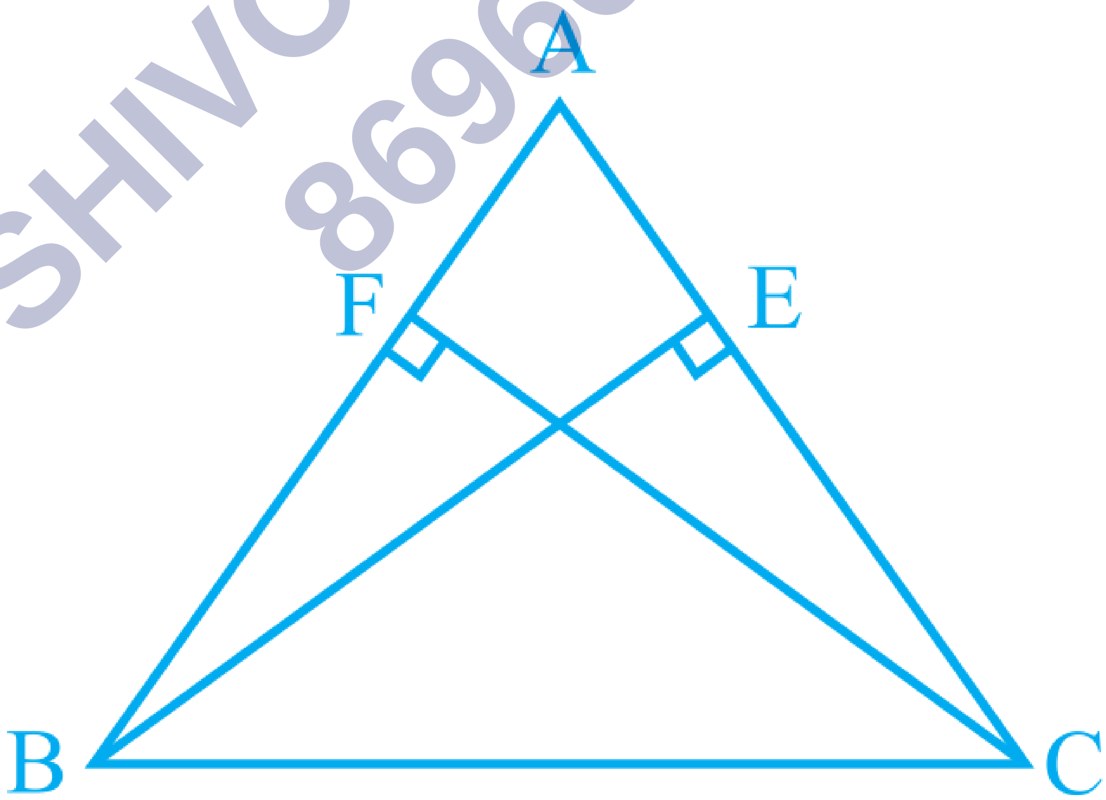
SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$

$AB = AC$ [by CPCT]

अत:, $\triangle ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्न 3 ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें बराबर भुजाओं AC और AB पर क्रमशः शीर्षलम्ब BE और CF खींचे गए हैं (देखिए आकृति) दर्शाइए कि ये शीर्षलम्ब बराबर हैं।



उत्तर-

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $BE \perp AC$ और $CF \perp AB$ जहाँ $AB = AC$ है|

सिद्ध करना है, $BE = CF$

प्रमाण : यहाँ, $BE \perp AC$ और $CF \perp AB$ (दिया है)

$\triangle ABE$ और $\triangle ACF$ में

$\angle AEB = \angle AFC$ ($90°$ प्रत्येक)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

$AB = AC$ (दिया है)

ASA सर्वांगसमता कसौटी नियम से

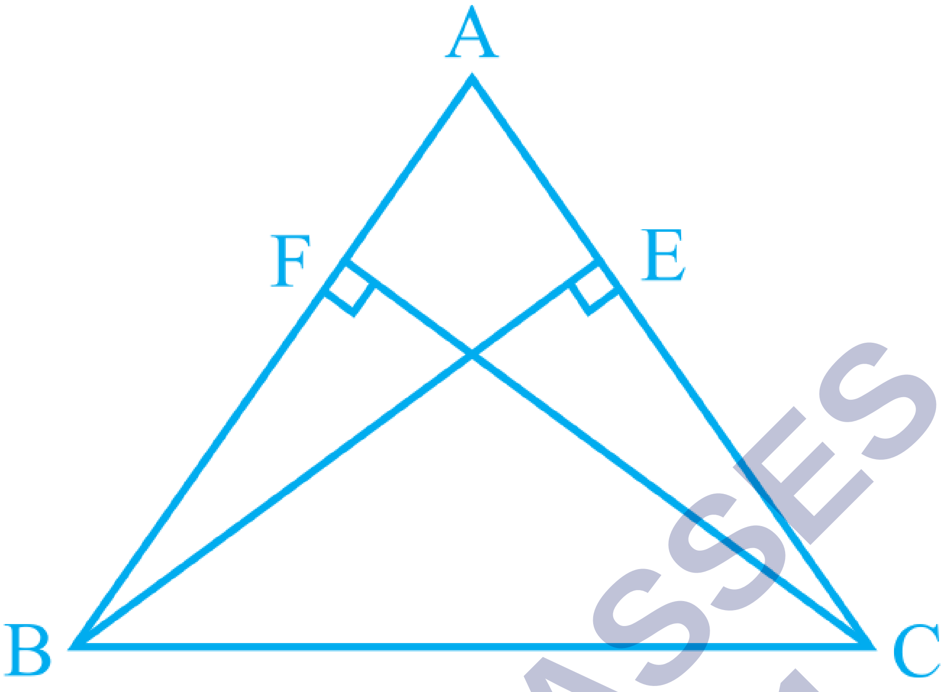
$\triangle ABE \cong \triangle ACF$

$\therefore BE = CF$ [By CPCT]

प्रश्न 4 ABC एक त्रिभुज है जिसमें AC और AB पर खींचे गए शीर्षलंब BE और CF बराबर हैं (देखिए आकृति). दर्शाइए कि

i. $\triangle ABE \cong \triangle ACF$

ii. $AB = AC$ अर्थात, $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



उत्तर-

दिया है, ABC एक त्रिभुज है जिसमें

$BE \perp AC$ और $CF \perp AB$ है और $BE \perp CF$

सिद्ध करना है:

$\triangle ABE \cong \triangle ACF$

$AB = AC$ अर्थात, $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रमाण:

i. $\triangle ABE$ तथा $\triangle ACF$ में

$BE = CF$ (दिया है)

$\angle AEB = \angle AFC$ (90° प्रत्येक)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

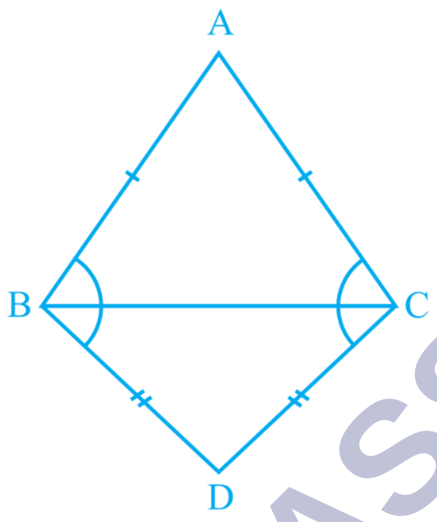
ASA सर्वांगसमता नियम के उपयोग से

$\triangle ABE \cong \triangle ACF$ [सत्यापित -I]

ii. $AB = AC$ [By CPCT]

इसलिए, ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है

प्रश्न 5 ABC और DBC सामान आधार BC पर स्थित दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं (देखिए आकृति). दर्शाइए कि ∠ABD = ∠ACD है।



उत्तर-

दिया है- ABC और DBC सामान आधार BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं।

सिद्ध करना है: $\angle ABD = \angle ACD$

प्रमाण: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है |

AB = AC (दिया है)

$\therefore \angle ABC = \angle ACB \ldots (1)$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

इसी प्रकार

BCD भी एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

BD = CD (दिया है)

$\therefore \angle DBC = \angle DCB \ldots (2)$

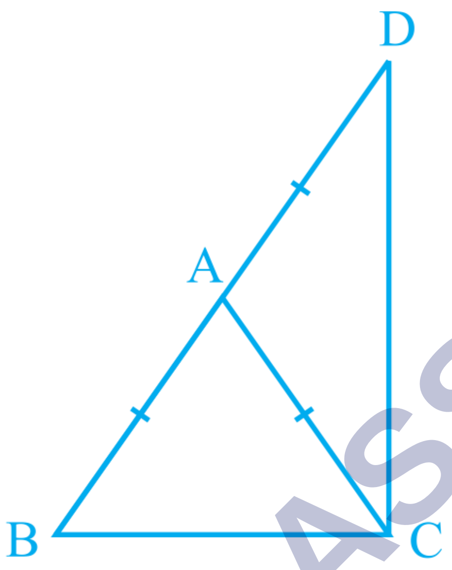
(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$\angle ABC + \angle DBC = \angle ACB + \angle DCB$

$\angle ABD = \angle ACD$

प्रश्न 6 $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। भुजा BA बिंदु D तक इस प्रकार बढाया गया है कि AD = AB है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि $\angle BCD$ एक समकोण है।



उत्तर-

दिया है: $\triangle ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है।

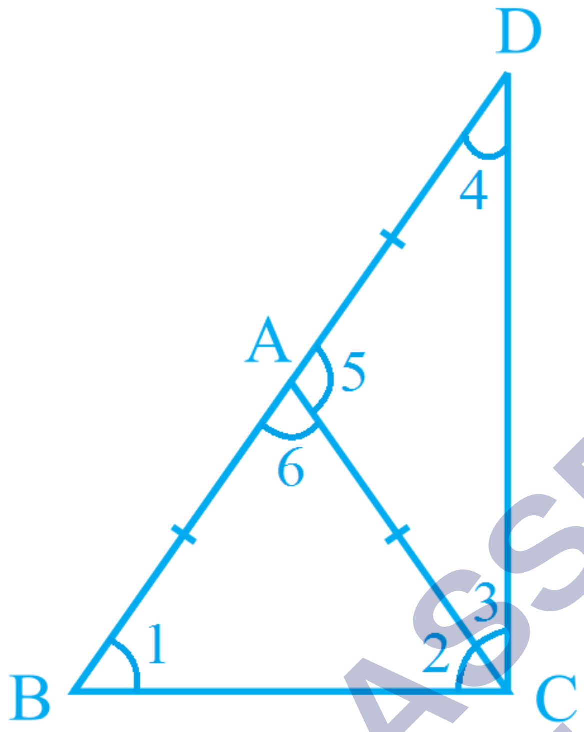
भुजा BA को बिंदु D तक बढाई गयी है जिससे AD = AB है।

सिद्ध करना है: $\angle BCD = 90^\circ$

प्रमाण:

AB = AC ..... (1) (दिया है)

और AB = AD .... (2) (दिया है)



समीकरण (1) तथा (2) से हमें प्राप्त होता है |

$\mathrm{AC}=\mathrm{AD} \ldots \ldots(3)$

$\therefore \angle 3=\angle 4 . \ldots \ldots(4)$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण ..)

अब, AB = AC [समी० (1) से]

$\therefore \angle 1=\angle 2 \ldots \ldots(5)$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण ..)

$\triangle \mathrm{ABC}$ में

बहिष्कोण $\angle 5 = \angle 1 + \angle 2$ (बहिष्कोण अत:अभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है)

$\angle 5 = \angle 2 + \angle 2$ [समी० (5) से]

$\angle 5 = 2\angle 2 \ldots . (6)$

इसी प्रकार,

बहिष्कोण $\angle 6 = \angle 3 + \angle 4$

$\angle 6 = 2\angle 3$ [समी० (7) से

समीकरण (6) तथा (7) को जोड़ने पर]

$\angle 5 + \angle 6 = 2\angle 2 + 2\angle 3$

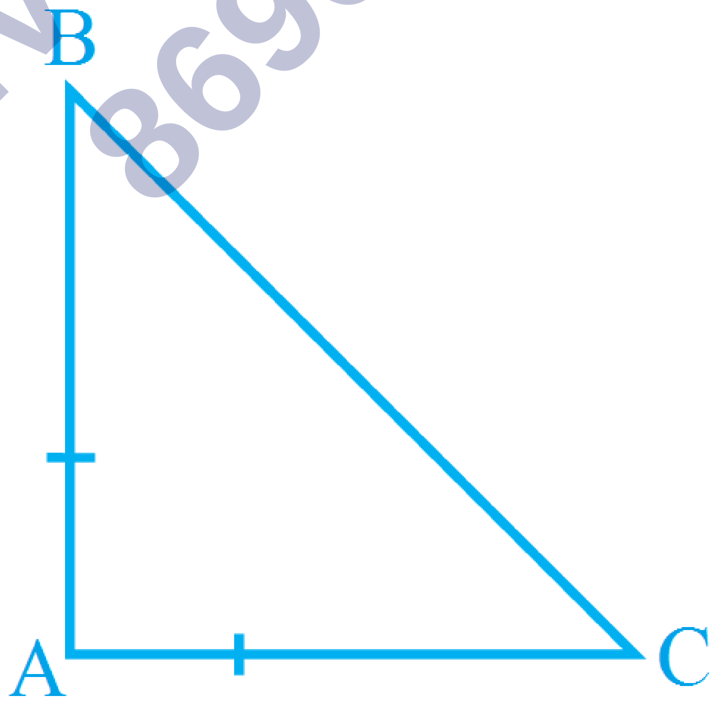
$\angle 5 + \angle 6 = 2(\angle 2 + \angle 3)$

$180^\circ = 2(\angle 2 + \angle 3)[\because \angle BAC + \angle DAC = 180^\circ]$

$\angle BCD = 90^\circ$

प्रश्न 7 ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें ∠A = 90° और AB = AC तो ∠B और ∠C ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दिया है: ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें

$\angle A = 90^\circ$ और $AB = AC$ है

ज्ञात करना है: $\angle B$ और $\angle C$

AB = AC (दिया है)

$\therefore \angle B = \angle C \ldots\ldots (1)$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

त्रिभुज ABC में,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)

$90^\circ + \angle B + \angle B = 180^\circ$ समीकरण (1) के प्रयोग से

$2\angle B = 180^\circ - 90^\circ$

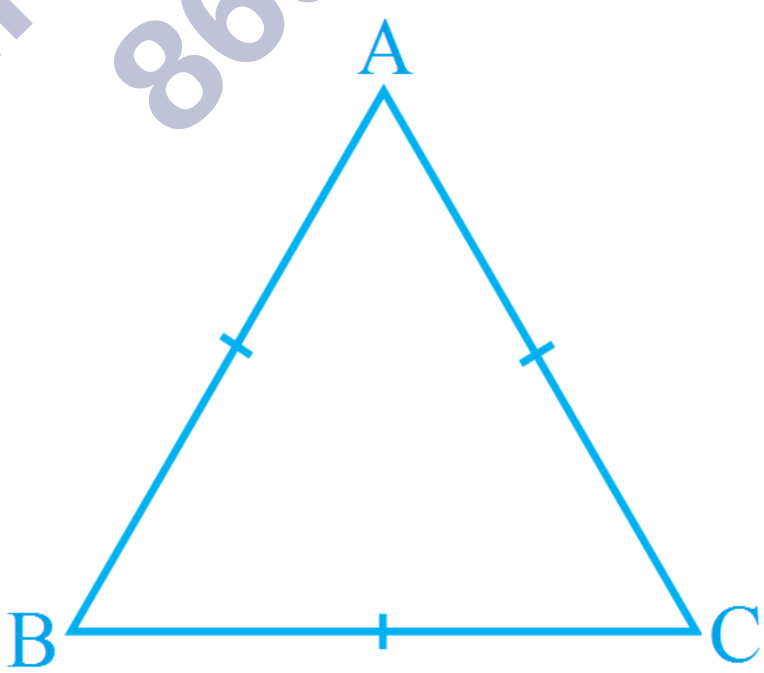
$2\angle B = 90^\circ$

$\angle B = 45^\circ$

$\therefore \angle B = 45^\circ \angle C = 45^\circ$

प्रश्न 8 दर्शाइए कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।

उत्तर-



दिया है: ABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें

AB = BC = AC

सिद्ध करना है:

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

प्रमाण:

AB = AC (दिया है)

$\angle B = \angle C \ldots (1)$ [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण]

AB = BC (दिया है)

$\angle A = \angle C \ldots\ldots (2)$ [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण]

AC = BC (दिया है)

$\angle A = \angle B \ldots\ldots\ldots (3)$ [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण]

समीकरण (1), (2) और (3) से हमें प्राप्त होता है।

$$\angle A = \angle B = \angle C \ldots\ldots\ldots (4)$$

त्रिभुज ABC में

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle A + \angle A = 180^\circ$$

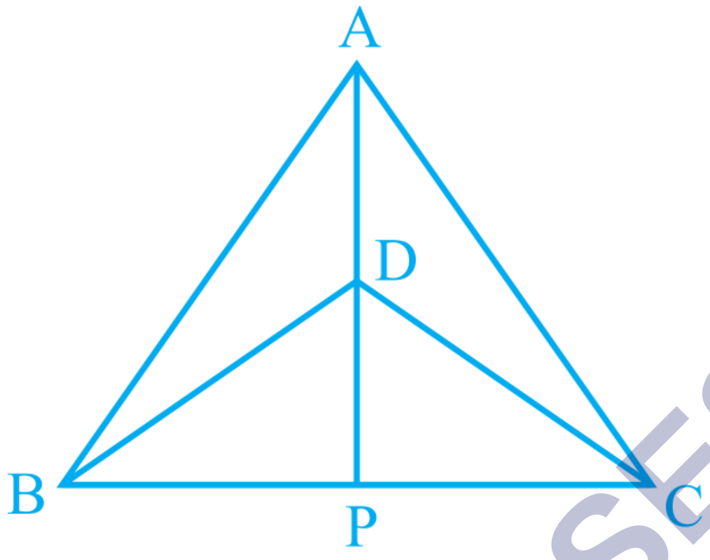
$$3\angle A = 180^\circ$$

$$\angle A = 60^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

प्रश्नावली 7.3 (पृष्ठ संख्या 154)

प्रश्न 1 △ABC और △DBC एक ही आधार BC पर बने दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं (देखिए आकृति)| यदि AD बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि



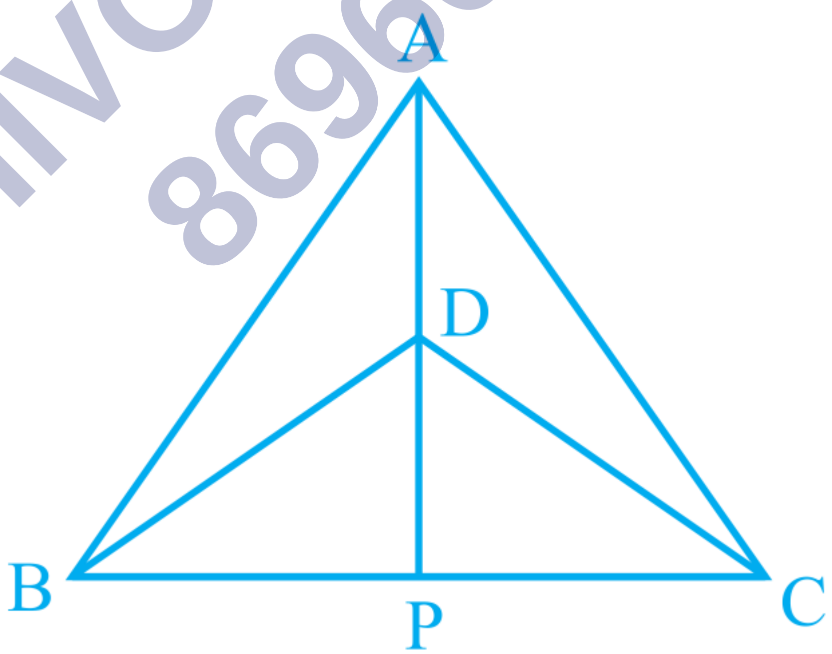
i. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

ii. $\triangle ABP \cong \triangle ACP$

iii. AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है

iv. AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है।

उत्तर- $\triangle ABC$ और $\triangle DBC$ दो समबाहु त्रिभुज हैं और AD को बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करता है।



सिद्ध करना है:

i. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$
ii. $\triangle ABP \cong \triangle ACP$
iii. AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है।
iv. AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है।

प्रमाण: ABC आधार BC पर बना समद्विबाहु त्रिभुज है।

इसलिए, AB = AC .... (i)

इसी प्रकार, DBC भी एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

इसलिए, BD = CD ....(2)

i. $\triangle ABD$ और $\triangle ACD$ में

AB = AC ....(i) से

BD = CD .....(ii) से

AD = AD (उभयनिष्ट)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABC \cong \triangle ACD$

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$

ii. अब $\triangle ABP$ और $\triangle ACP$ में

AB = AC...(i)

$\angle BAD = \angle CAP$

AP = AP (उभयनिष्ट)

SSS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABP \cong \triangle ACP$

iii. अब $\triangle BDP$ और $\triangle CDP$ में

BD = CD से

$\angle DBP = \angle DCP$ बराबर भुजाओ के सम्मुख कोण

DP = DP (उभयनिष्ट)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle BDP \cong \triangle CDP$

$\therefore \angle BDP = \angle CDP$

$\therefore \angle DPB = \angle DPC$

BP = CP

समीकरण (iii) और (iv) से स्पष्ट है कि AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है। roved (III).

iv. $\angle DPB + \angle DPC = 180^\circ$ .....रेखिक युग्म

$\angle DPB + \angle DPB = 180^\circ$ समी. (v) से

$2\angle DPB = 180^\circ$

$\angle DPB = \frac{180^\circ}{2}$

$\angle DPB = 90^\circ$

चूंकि $\angle DPB = 90^\circ$ हैं और BP = CP समी० (vi) से यह सिद्ध होता है कि AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है।

प्रश्न 2 AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें AB = AC है। दर्शाइए कि-

i. AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है।
ii. AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

उत्तर- दिया है: AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें AB = AC है। सिद्ध करना है:

i. AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है।
ii. AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

प्रमाण:

$\triangle ABD$ और $\triangle ACD$ में

AB = AC (कर्ण) दिया है

AD = AD (उभयनिष्ट भुजा)

$\angle ADB = \angle ADC$ (प्रत्येक कोण 90°

RHS सर्वांगसमता नियम से

$\therefore \triangle BDP \cong \triangle COP$

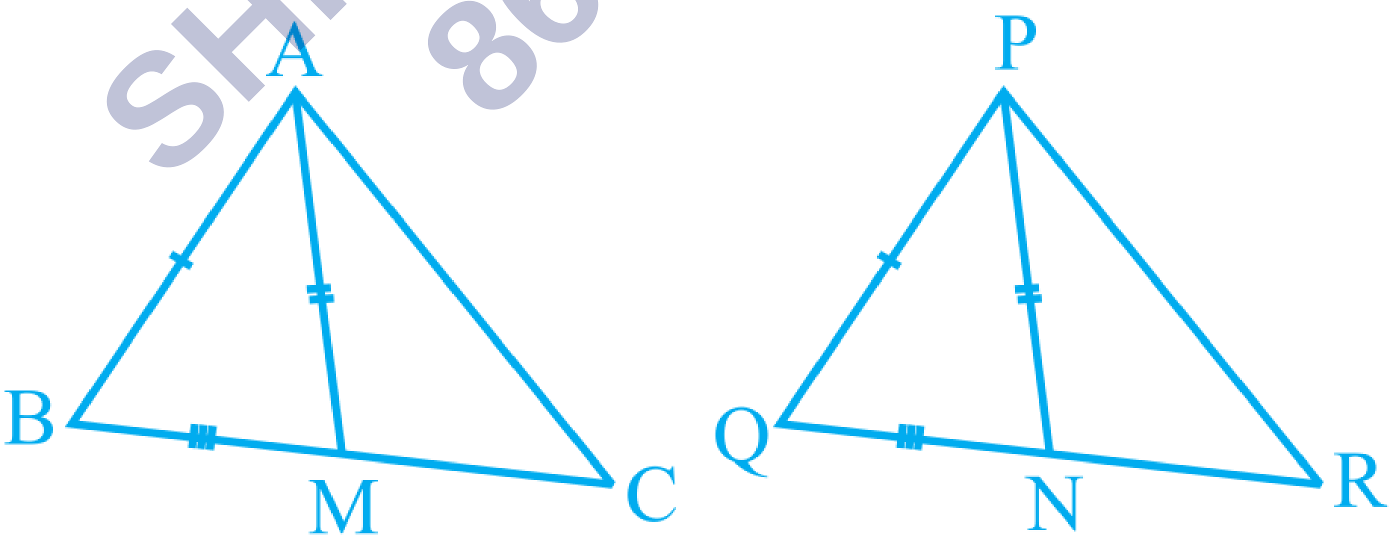
अतः $BD = CD$ ......(i) By CPCT

और $\angle BAD = \angle CAD$.......(ii)By CPCT

समीकरण (i) से सिद्ध होता है कि AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है। और समीकरण (ii) से यह सिद्ध होता है कि AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

प्रश्न 3 एक त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि

i. $\triangle ABM \cong \triangle PQN$
ii. $\triangle ABC \cong \triangle PQR$



उत्तर- त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं।

सिद्ध करना है:

i. $\triangle ABM \cong \triangle PQN$

ii. $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

प्रमाण:

i. $\triangle ABM$ और $\triangle PQN$ में

AB = PQ (दिया है)

BM = QN (दिया है)

AM = PN (दिया है)

SSS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABM \cong \triangle PQN$

$\angle B = \angle Q \ldots (i)$ By CPCT

ii. BM = QN दिया है

$\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}QR$ (चूँकि AM और PM माध्यिका है इसलिये माध्यिका सम्मुख भुजा समद्विभाजित करती है)

BC = QR ....(ii)

$\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ में

AB = PQ (दिया है)

$\angle B = \angle Q$ समीकरण (i) से

BC = QR समीकरण (ii) से

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABC \cong \triangle PQR$

प्रश्न 4 BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो बराबर शीर्षलंब हैं। RHS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि △ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज हैं।

उत्तर-

$\triangle BEC$ और $\triangle CFB$ में

$\angle BEC = \angle CFB$ (प्रत्येक 90°)

BC = CB (दिया है)

BE = CF (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore \triangle BEC \cong \triangle CFB$ (by RHS)

$\Rightarrow \angle BEC = \angle CFB$

AB = AC (त्रिभुज में समाने कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं)

अतः $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्न 5 ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है | AP ⊥ BC खींच कर दर्शाइए कि ∠B = ∠C है।

उत्तर-

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है | जिसमें $AP \perp BC$ हैं।

सिद्ध करना है:

$\angle B = \angle C$

प्रमाण: $\triangle ABP$ और $\triangle ACP$ में

AB = AC (कर्ण दिया है)

AP = AP (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle APB = \angle ACP$ (प्रत्येक 90°)

SSS सर्वांगसमता नियम से

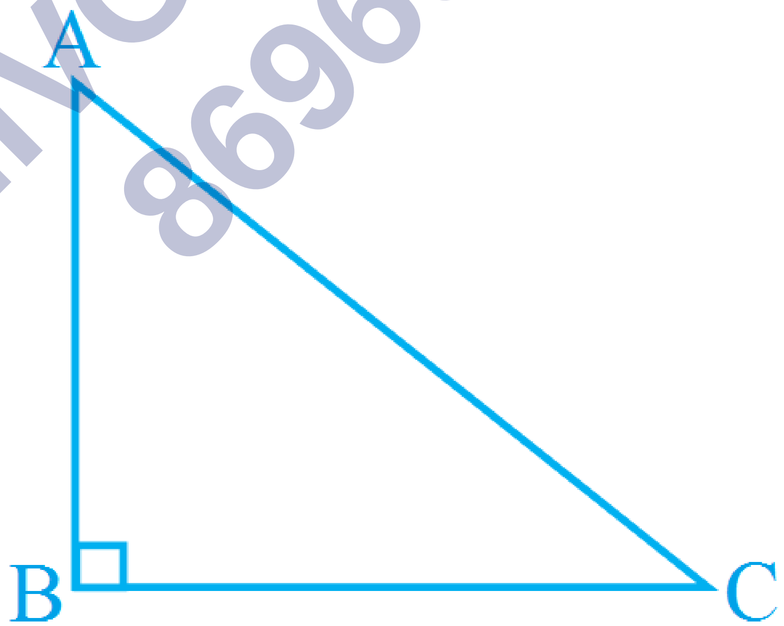
$\triangle ABP \cong \triangle ACP$

अतः $\angle B = \angle C$

प्रश्नावली 7.4 (पृष्ठ संख्या 158-159)

प्रश्न 1 दर्शाइए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है।

उत्तर-



दिया है : ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण B समकोण है और AC कर्ण है।

सिद्ध करना है:

i. AC > AB
ii. AC > BC

अर्थात AC सबसे लंबी भुजा है।

प्रमाण: $\triangle ABC$ का $\angle B$ समकोण है।

अत: $\angle A$ और $\angle C$ न्यूनकोण है।

इसलिए, $\angle B > \angle C$ [क्योंकि B समकोण है और C न्यूनकोण है]

$\therefore AC > AB$ (i) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

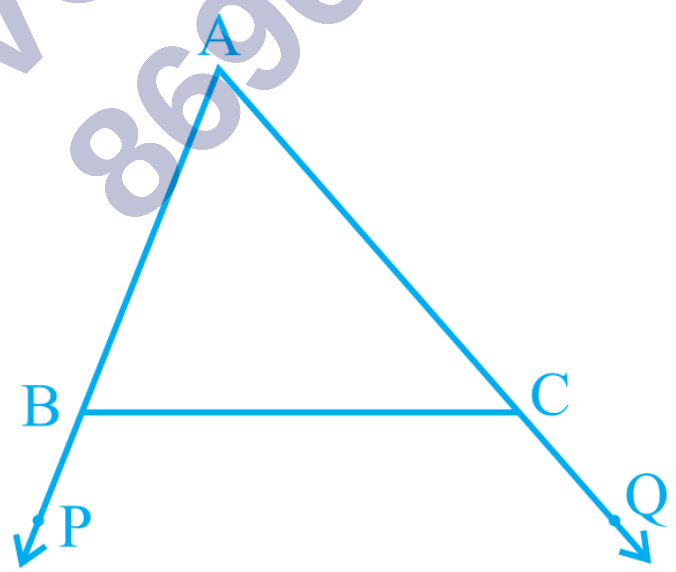
पुन: $\angle B$ समकोण है और $\angle A$ न्यूनकोण है

इसलिए, $\angle B > \angle A$ [क्योंकि B समकोण है और C न्यूनकोण है]

$\therefore AC > BC$ (ii) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

समी० (i) तथा (ii) से कर्ण AC सबसे बड़ी भुजा है।

प्रश्न 2 आकृति में, △ABC की भुजाओं AB और AC को क्रमश: बिन्दुओं P तथा Q तक बढाया गया है। साथ ही, $\angle PBC < \angle QCB$ है| दर्शाइए कि AC > AB है।



उत्तर-

दिया है : $\triangle ABC$ की भुजाओं AB और AC को क्रमशः बिन्दुओं P तथा Q तक बढाया गया है जिसमें, $\angle PBC < \angle QCB$ है।

सिद्ध करना है: AC > AB

प्रमाण: AB और AC को क्रमशः बिन्दुओं P तथा Q तक बढाया गया है,

इसलिए, $\angle ABC + \angle PBC = 180^\circ \ldots\ldots (1)$ रैखिक युग्म

और $\angle ACB + \angle QCB = 180^\circ \ldots\ldots (2)$ रैखिक युग्म

समीकरण (1) तथा (2) से

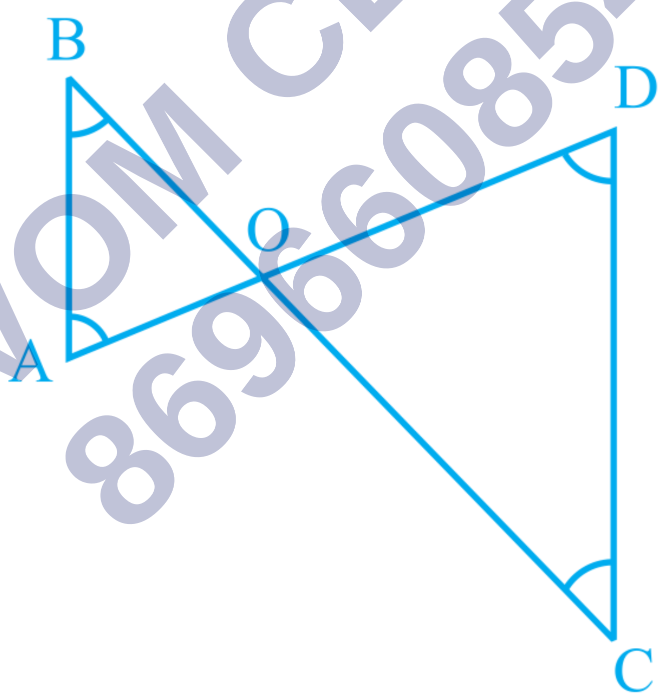
$\angle ABC + \angle PBC = \angle ACB + \angle QCB$ (चूँकि दोनों समी० का मान समान है)

जबकि $\angle PBC < \angle QCB$ (दिया है)

अतः स्पष्ट है कि

$\angle ABC > \angle ACB$

प्रश्न 3 आकृति में, ∠B < ∠A और ∠C < ∠D है| दर्शाइए कि AD < BC है|



उत्तर-

दिया है: $\triangle AOB$ और $\triangle COD$ में $\angle B < \angle A$ और $\angle C < \angle D$ है।

सिद्ध करना है: $AD < BC$

प्रमाण: $\triangle AOB$ में,

$\angle B < \angle A$ (दिया है)

$\therefore AO < BO \dots (1)$ (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

अब, $\triangle COD$ में,

$\angle C < \angle D$ (दिया है)

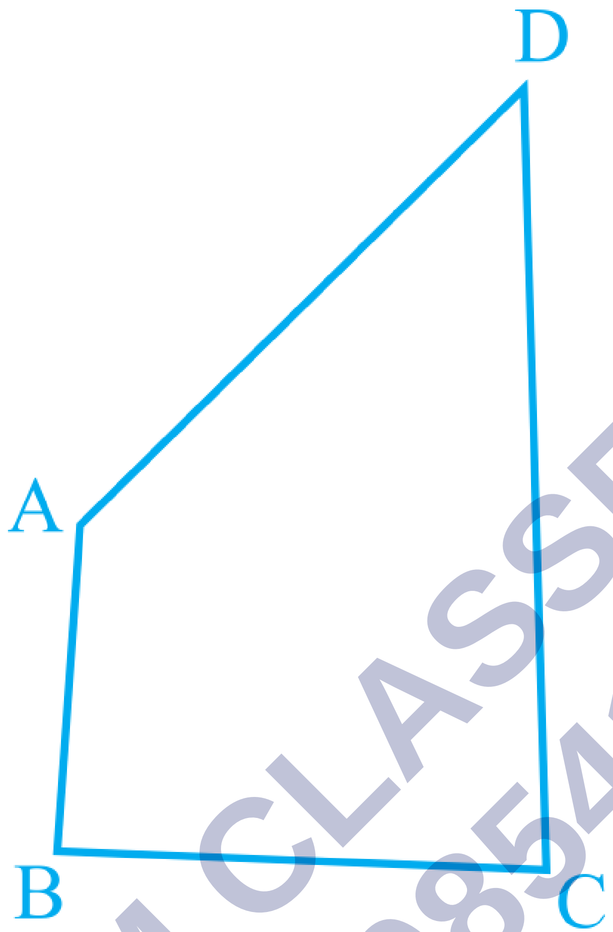
$\therefore DO < CO \dots (2)$ (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$AO + DO < BO + CO$

या $AD < BC$

प्रश्न 4 AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजा हैं (देखिये आकृति)| दर्शाइए कि ∠A > ∠C और ∠B > ∠D है।



उत्तर-

दिया है : AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजा हैं |

सिद्ध करना है :

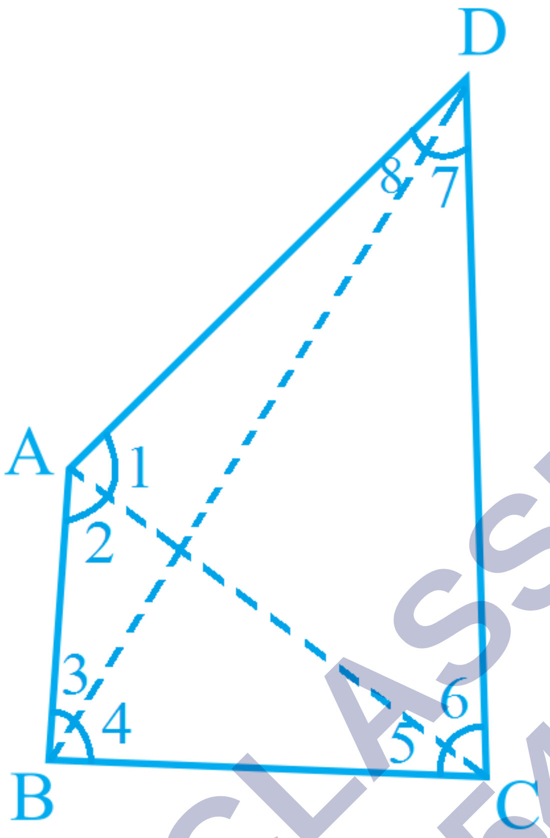
i. $\angle A > \angle C$

ii. $\angle B > \angle D$

रचना: A को C से और B को D से मिलाया|

प्रमाण:

i. $\triangle ABC$ में,



AB सबसे छोटी भुजा है, (दिया है)

अत:, BC > AB

$\therefore \angle 2 > \angle 5 \ldots (1)$ (बड़े भुजा की सम्मुख कोण बड़ी होती है)

अब, $\triangle \mathrm{ACD}$ में,

CD सबसे बड़ी भुजा है, (दिया है)

अत:, CD > AD

$\therefore \angle 1 > \angle 6 \ldots (2)$ (बड़े भुजा की सम्मुख कोण बड़ी होती है)

समी० (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$\angle 1 + \angle 2 > \angle 5 + \angle 6$

$\angle \mathrm{A} > \angle \mathrm{C}$

ii. इसी प्रकार $\triangle \mathrm{ABD}$ में,

AD > AB (क्योंकि AB सबसे छोटी भुजा है)

$\therefore \angle 3 > \angle 8 \ldots (3)$

और $\triangle \mathrm{BCD}$ में

CD > BC (क्योंकि CD सबसे बड़ी भुजा है)

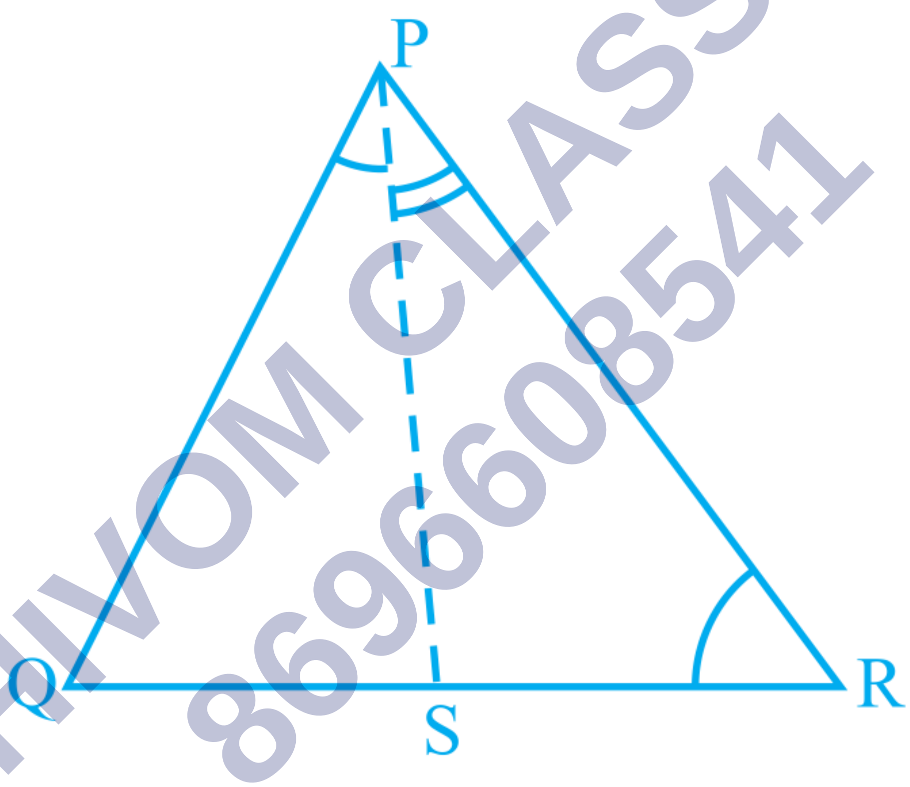
$\therefore \angle 4 > \angle 7 \ldots (4)$

समी० (3) तथा (4) को जोड़ने पर

$\angle 3 > \angle 4 > \angle 7 + \angle 8$

$\angle B > \angle D$

प्रश्न 5 आकृति में PR > PQ है और PS कोण QPR समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि ∠PSR > ∠PSQ है।



उत्तर-

दिया है : PR > PQ और PS कोण QPR समद्विभाजित करता है |

सिद्ध करना है: $\angle PSR > \angle PSQ$

प्रमाण : PS कोण QPR समद्विभाजित करता है | (दिया है)

$\therefore \angle QPS = \angle RPS \ldots (1)$

और, PR > PQ (दिया है)

$\therefore \angle PQS = \angle PRS \ldots\ldots (2)$

$\triangle PQS$ में,

$\angle QPS + \angle PQS + \angle PSQ = 180^\circ \ldots\ldots (3)$ ($\triangle$ के तीनों कोणों का योग)

इसी प्रकार, $\triangle PRS$ में,

$\angle PRS + \angle RPS + \angle PSR = 180^\circ \ldots\ldots (4)$ ($\triangle$ के तीनों कोणों का योग)

समीकरण (3) और (4) से हम पाते है कि.

$\angle QPS + \angle PQS + \angle PSQ = \angle PRS + \angle RPS + \angle PSR$

$\angle QPS + \angle PQS + \angle PSQ = \angle PRS + \angle QPS + \angle PSR$ समी. (1) से

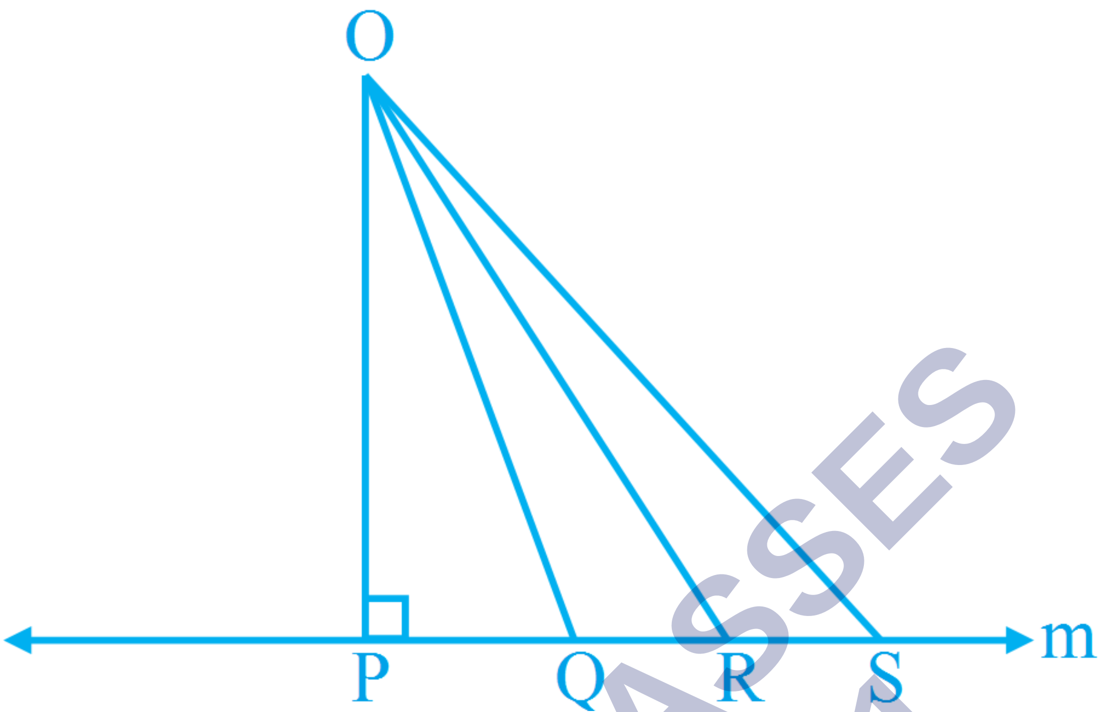
$\angle PQS + \angle PSQ = \angle PRS + \angle PSR$

जबकि $\angle PSQ < \angle PSR$ समी० (2) से

अत: स्पष्ट है कि $\angle PSQ < \angle PSR$

प्रश्न 6 दर्शाइए कि एक रेखा पर एक दिए हुए बिंदु से, जो उस रेखा पर स्थित नहीं है, जितने रेखाखंड खींचे जा सकते हैं उनमें लम्ब रेखाखंड सबसे छोटा होता है।

उत्तर-



दिया है: m एक रेखा है और O एक बिंदु है

जो m पर स्थित नहीं है। $OP \perp m$

सिद्ध करना है: $OP < OQ < OR < OS$

प्रमाण: $OP \perp m$ दिया है ।

$\therefore \angle OPQ = 90^\circ$ और $\angle OQP, \angle ORP, \angle OSP$ न्यूनकोण हैं ।

अत: $\angle OQP < \angle OPQ$

$\therefore OP < OQ \ldots\ldots (1)$ (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

इसीप्रकार, $\angle ORP < \angle OPQ$

$\therefore OP < OR \ldots\ldots (2)$ (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

समी० (1) तथा (2) से

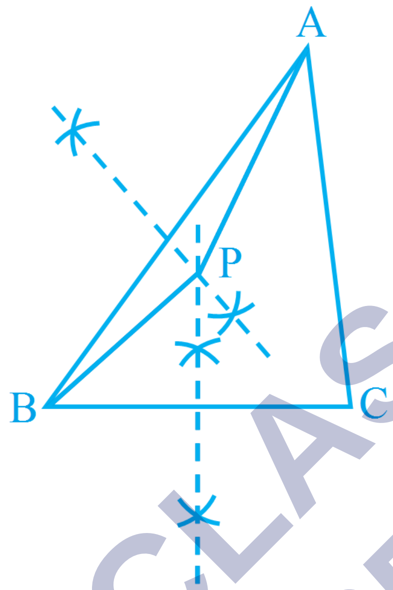
$OP < OQ < OR$

OP जो लंब है सबसे छोटी भुजा है।

प्रश्नावली 7.5 (पृष्ठ संख्या 159)

प्रश्न 1 ABC एक त्रिभुज है। इसके अभ्यन्तर में एक ऐसा बिन्दु ज्ञात कीजिए जो △ABC के तीनों शीर्षों से समदूरस्थ है।

उत्तर-



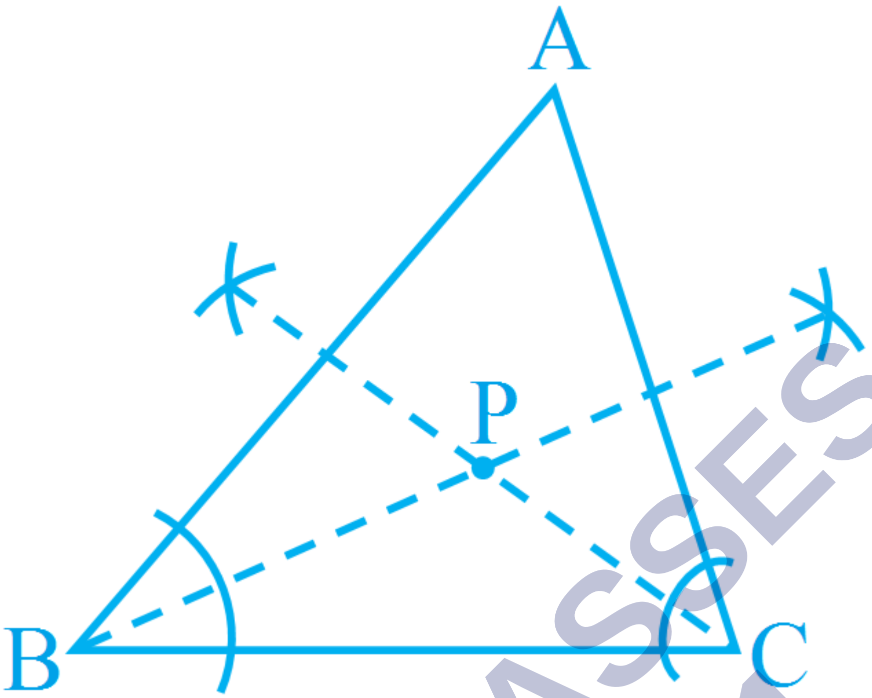
एक △ABC के अभ्यन्तर में एक ऐसा बिन्दु P ज्ञात करना है जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों A, B व C से समान दूरी पर हो।

रचना विधि: रचना के पद निम्न हैं-

i. सर्वप्रथम दिया हुआ त्रिभुज ABC बनाइए।
ii. अब, AB तथा BC के लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो परस्पर बिन्दु P पर काटें।
iii. रेखाखण्ड PA, PB और PC खींचिए।
अतः P अभीष्ट बिन्दु है जो तीनों शीर्षों से समदूरस्थ है।

प्रश्न 2 किसी त्रिभुज के अभ्यन्तर में एक ऐसा बिन्दु ज्ञात कीजिए जो त्रिभुज की सभी भुजाओं से समदूरस्थ है।

उत्तर-



माना ABC एक त्रिभुज है जिसके अभ्यन्तर में एक ऐसा बिन्दु P ज्ञात करना है जो त्रिभुज की तीनों भुजाओं AB, BC और CA से समदूरस्थ हो।

रचना विधि : रचना के पद निम्न हैं-

i. सर्वप्रथम दिया हुआ △ABC बनाइए।
ii. ∠B और ∠C के समद्विभाजक खींचिए जो परस्पर बिन्दु P पर काटें।
iii. रेखाखण्ड PB तथा PC खींचिए।

अतः P अभीष्ट बिन्दु है जो तीनों भुजाओं से समदूरस्थ है।

प्रश्न 3 एक बड़े पार्क में लोग तीन बिन्दुओं (स्थानों) पर केन्द्रित हैं

A : जहाँ बच्चों के लिए फिसल पट्टी और झूले हैं।

B : जिसके पास मानव निर्मित एक झील है।

C : जो एक बड़े पार्किंग स्थल और बाहर निकलने के रास्ते के निकट है।

एक आइसक्रीम का स्टॉल कहाँ लगाना चाहिए ताकि वहाँ लोगों की अधिकतम संख्या पहुँच सके?

[संकेत : स्टॉल को A, B और C से समदूरस्थ होना चाहिए।]

उत्तर-

A, B और C तीन बिन्दु स्थान हैं। आइसक्रीम का स्टॉल लगाने के लिए लोगों की उस पर अधिकतम पहुँच होने के लिए यह आवश्यक है कि स्टॉल तीनों स्थानों से समदूरस्थ हो।

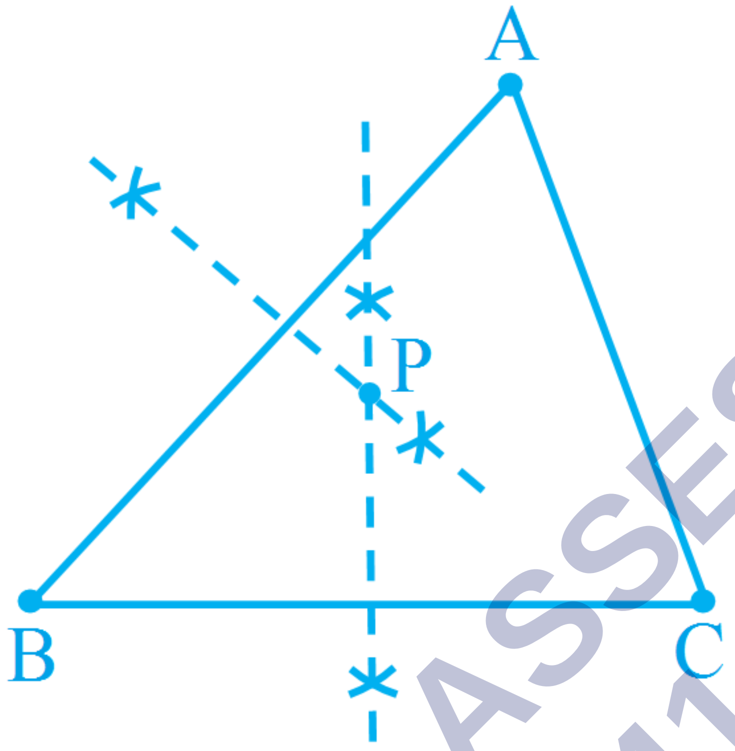
अत: आइसक्रीम स्टॉल लगाने के लिए हमें एक ऐसे स्थान (बिन्दु) P का चयन करना है जो पार्क के तीनों स्थानों से समान दूरी पर हो।

ज्ञात करने की विधिः

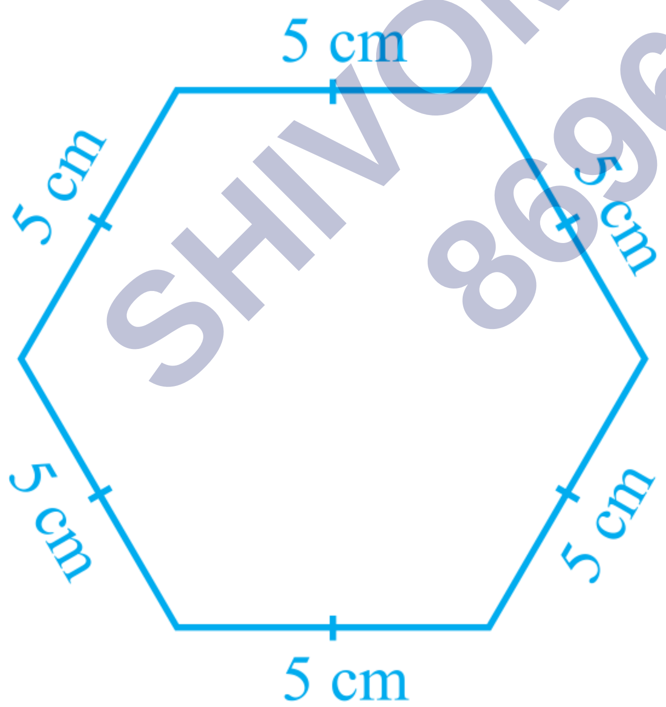
i. बिन्दु A से बिन्दु B को, बिन्दु B से बिन्दु C को और बिन्दु C से बिन्दु A को ऋजु रेखाओं द्वारा मिलाकर △ABC बनाइए।

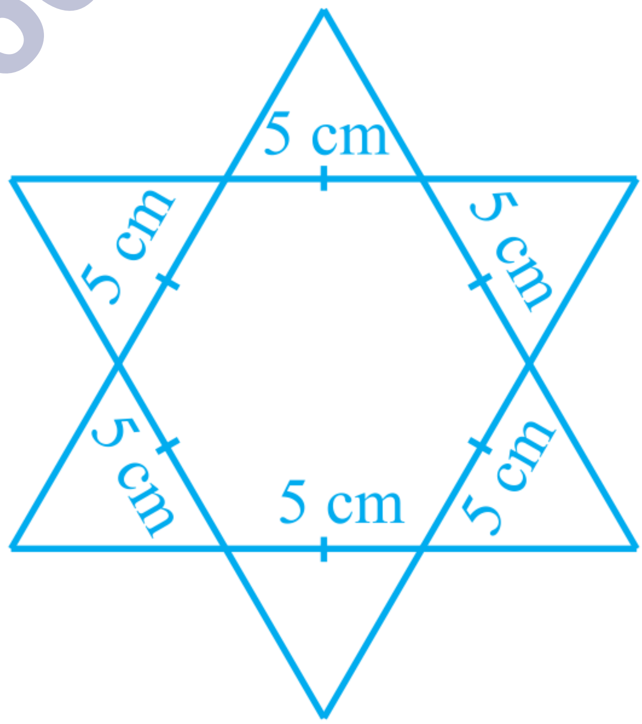
ii. किन्हीं दो भुजाओं (AB व BC) के लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो परस्पर बिन्दु P पर काटें।

आइसक्रीम स्टॉल के चयन के लिए उपयुक्त स्थान बिन्दु P होगा जो तीनों स्थानों से समदूरस्थ है।

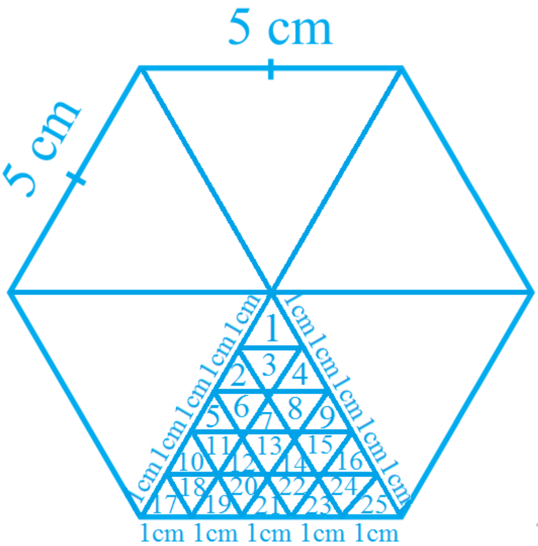


प्रश्न 4 संलग्न आकृति में षड्भुजीय और तारे के आकार की रंगोलियों को 1 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों से भरकर पूरा कीजिए। प्रत्येक स्थिति में त्रिभुजों की संख्या गिनिए। किसमें अधिक त्रिभुज हैं?

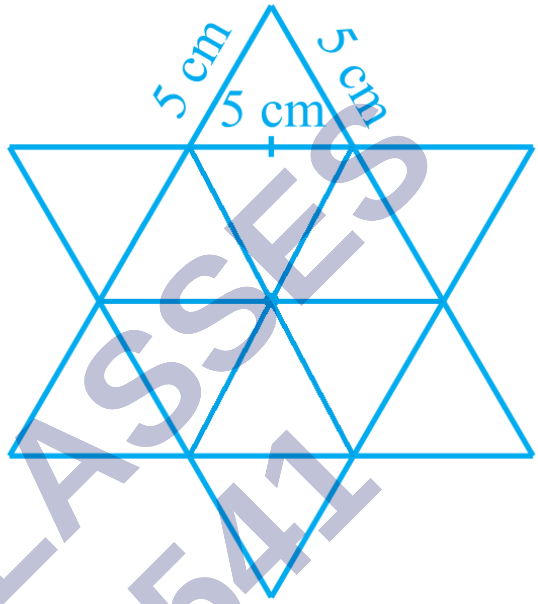




उत्तर- चित्रों से स्पष्ट है कि विकर्णो को मिलाने पर षड्भुजीय आकृति को 6 समबाहु त्रिभुजों में और तारे के आकार की आकृति को 12 समबाहु त्रिभुजों में विभाजित किया जा सकता है जबकि समबाहु त्रिभुजों में प्रत्येक भुजा 5 सेमी है।



षड्भुजीय रंगोली



तारे के आकार की रंगोली

पुनः षड्भुजीय आकृति के एक समबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा 5 सेमी है, को 1 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों में विभाजित कर स्पष्ट किया गया है कि 5 सेमी भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज को 1 सेमी भुजा वाले 25 त्रिभुजों में विभाजित किया जा सकता है।

तब स्थिति 1: षड्भुजीय रंगोली इसको 1 सेमी भुजा वाले 6 × 25 = 150 समबाहु त्रिभुजों में बाँटा जा सकता है।

स्थिति 2: तारे के आकार की रंगोली

5 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों की संख्या = 12

आकृति में 1 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों की संख्या = 12 × 25 = 300

स्पष्ट है कि तारे के आकार वाली आकृति में त्रिभुजों की संख्या अधिक है।