भौतिकी

अध्याय-7: कणों के निकाय तथा घूर्णी गति

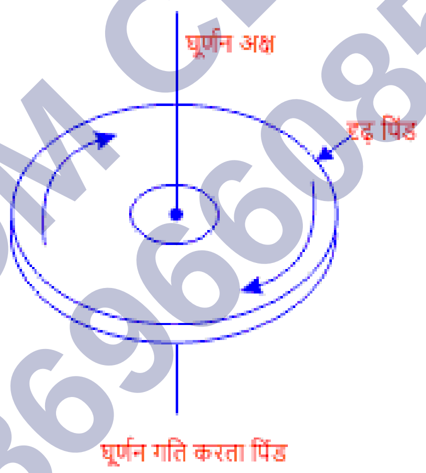
कणों के निकाय तथा घूर्णी गति

दृढ़ पिंड

जब किसी पिंड पर बाह्य बल लगाने से यदि पिंड के कणों में कोई विस्थापन नहीं होता है तो ऐसे पिंड को दृढ़ पिंड कहते हैं। दृढ़ पिंड ठोस पदार्थ ही होते हैं।
जैसे पत्थर आदि।

घूर्णन गति

जब कोई दृढ़ पिंड किसी अक्ष के परितः घूमता है तू पिंड की गति को घूर्णन गति कहते हैं एवं इसके अक्ष को घूर्णन अक्ष कहते हैं।
घूर्णन गति में पिंड का प्रत्येक कण एक वृत्तीय गति करता है।
उदाहरण लट्टू की गति, पृथ्वी का चक्रण, छत के पंखे की गति आदि।



घूर्णन गति के समीकरण

घूर्णन गति के समीकरण भी गति के समीकरण की तरह है।बस यहां कुछ बदलाव होते हैं जैसे-

विस्थापन	s	θ
प्रारंभिक वेग	u	ω
अंतिम वेग	v	ω_0

त्वरण	a	α

1. घूर्णन गति का प्रथम समीकरण

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t}$$

2. घूर्णन गति का द्वितीय समीकरण

$$\boxed{\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

3. घूर्णन गति का तृतीय समीकरण

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta}$$

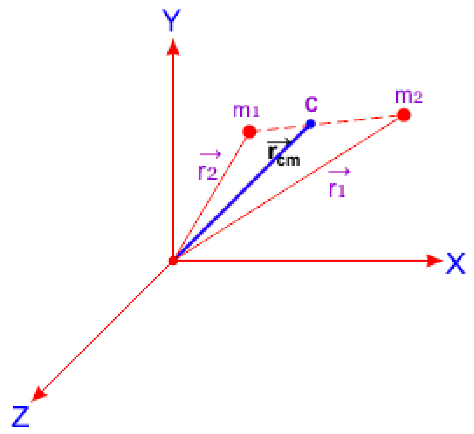
द्रव्यमान केंद्र

जब निकाय किसी बाह्य बल के अंतर्गत गति करता है तब उसका कोई बिंदु इस प्रकार गति करता है कि जैसे निकाय का समस्त द्रव्यमान इस बिंदु पर केंद्रित हो तथा बाह्य बल भी इसी बिंदु पर आरोपित हो, तो इस बिंदु को निकाय का द्रव्यमान केंद्र (centre of mass) कहते हैं। इसे C द्वारा प्रदर्शित किया जाता है यही द्रव्यमान केंद्र की परिभाषा है।

NCERT book में संहति केंद्र प्रयोग किया गया है संहति केंद्र और द्रव्यमान केंद्र एक ही चीज है। इसे दोनों में से किसी भी नाम से लिख सकते हैं।

दो कणों के निकाय का द्रव्यमान केंद्र

माना दो कण जिनका द्रव्यमान m_1 व m_2 है जिन्हें चित्र में बिंदुओं से दर्शाया गया हैं। यह दोनों कण एक ही निकाय में स्थित है।



मूलबिंदु O के सापेक्ष कणों के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r_1}$ व $\vec{r_2}$ हैं यदि निकाय का द्रव्यमान केंद्र C है तो इसका स्थिति सदिश निम्न होगा।

$$\boxed{\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2}}$$

cm का मतलब centre of mass (द्रव्यमान केंद्र) है।

यदि निकाय में दो कण की जगह अनेक कण हैं तो निकाय का स्थिति सदिश निम्न होगा।

$$\boxed{\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm}$$

जहां M निकाय का संपूर्ण द्रव्यमान तथा dm सूक्ष्म अवयव का द्रव्यमान है एवं $\vec{r}$ इसका स्थिति सदिश है।

द्रव्यमान केंद्र की गति

माना कोई निकाय जिसमें n कण हैं। जिसके द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2, m_3...... m_n हैं यदि मूलबिंदु के सापेक्ष इनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3} \ldots\ldots \vec{r_n}$ हैं

तब निकाय के द्रव्यमान केंद्र का स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1}+m_2\overrightarrow{r_2}+\ldots\ldots m_n\overrightarrow{r_n}}{m_1+m_2+\ldots\ldots m_n}$$

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{1}{M}(m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2} + \ldots\ldots m_n\overrightarrow{r_n})$$

जहां M निकाय का कुल द्रव्यमान है

कुल द्रव्यमान का समय के साथ अवकलन करने पर

$$\frac{\overrightarrow{r_{cm}}}{dt} = \frac{1}{M}(m_1\frac{\overrightarrow{r_1}}{dt} + m_2\frac{\overrightarrow{r_2}}{dt} + \ldots\ldots m_n\frac{\overrightarrow{r_n}}{dt})$$

चूंकि वेग = दूरी/समय होता है तब

$$\boxed{\overrightarrow{v_cm} = \frac{1}{M}(m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + \ldots\ldots m_n\overrightarrow{v_n})}$$

जहां $\overrightarrow{v_cm}$ द्रव्यमान केंद्र का कुल वेग है।

यदि निकाय पर कार्यरत कुल बाह्य बल $\overrightarrow{F_{ext}}$ हो तब

$$\boxed{\overrightarrow{F_{ext}} = M\overrightarrow{a_{cm}}}$$

जहां $\overrightarrow{a_{cm}}$ निकाय के द्रव्यमान केंद्र का त्वरण है।

विलगित निकाय

वह निकाय जिस पर कार्यरत समस्त बाह्य बल शून्य हो, तो उस निकाय को विलगित निकाय (isolated system) कहते हैं।

इसमें निकाय के द्रव्यमान केंद्र का वेग $\overrightarrow{v_{cm}}$ नियत रहता है चूंकि $\overrightarrow{F_{ext}}$ = 0

तब $\overrightarrow{a_{cm}}$ = 0

अत: $\boxed{\overrightarrow{v_{cm}} = \text{नियतांक}}$

कोणीय वेग

जब कोई कण किसी वृत्त की परिधि पर घूमता है तो उसका कोणीय विस्थापन समय के साथ परिवर्तित होता जाता है। अर्थात वृत्तीय गति करते हुए किसी कण के कोणीय विस्थापन की समय के साथ परिवर्तन की दर को कोणीय वेग (angular velocity) कहते हैं। इसे ω (ओमेगा) से प्रदर्शित किया जाता है।

माना कोई कण जिसका Δt सूक्ष्म समयांतराल में, कोणीय विस्थापन Δθ है तब कण का कोणीय वेग

$$\boxed{\omega = \frac{\text{कोणीय विस्थापन}}{\text{समयांतराल}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$$

यह कोणीय वेग का सूत्र है इसका मात्रक रेडियन/सेकंड होता है। तथा कोणीय वेग की विमा $[M^0L^0T^{-1}]$ होती है।

चूंकि हम जानते हैं कि कोई कण एक वृत्तीय चक्कर पूरा करने में 360° यानी 2π घूम जाता है। एवं इस पूर्ण चक्र में लगा समय कण का परिक्रमण काल (T) कहलाता है। तो कण का औसत कोणीय वेग

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

या $\boxed{\omega = 2\pi n}$

जहां n कण की आवृत्ति है।

रेखीय वेग

जब कोई कण रेखीय गति करता है तो उसका रेखीय विस्थापन समय के साथ परिवर्तित होता जाता है। अर्थात रेखीय गति करते हुए किसी कण के रेखीय विस्थापन की समय के साथ परिवर्तन की दर को रेखीय वेग (linear velocity) कहते हैं।

माना कोई कण जिसका Δt सूक्ष्म समयांतराल में, रेखीय विस्थापन Δs है तब कण का रेखीय वेग

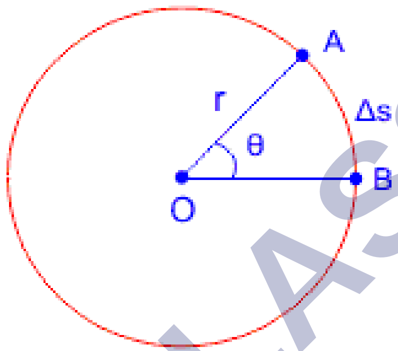
$$v = \frac{\text{रेखीय विस्थापन}}{\text{समयांतराल}}$$

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

यह रेखीय वेग का सूत्र है इसका मात्रक मीटर/सेकंड होता है। यह एक सदिश राशि है।

कोणीय वेग तथा रेखीय वेग में संबंध

यदि कोई कण एक निश्चित त्रिज्या के वृत्त की परिधि पर एकसमान चाल से चलता है माना कण Δt समयांतराल में वृत्त की परिधि पर Δs दूरी घूम जाता है। यदि कण का कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ हो तो



कोणीय वेग तथा रेखीय वेग में संबंध

कण का कोणीय वेग

$$\omega = lim \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

जहां lim $\Delta t \rightarrow 0$ है

$$\omega = lim \frac{1}{\Delta t} \times \Delta\theta$$

$$\omega = lim \frac{1}{\Delta t} \times \frac{\Delta s}{r} \quad (\text{चूंकि } \Delta\theta = \frac{\Delta s}{r})$$

$\omega = lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \times \frac{1}{r}$

$\omega = v \times \frac{1}{r}$ (चूंकि $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ = v)

$\omega = \frac{v}{r}$

$\boxed{v = r\omega}$

रेखीय वेग = त्रिज्या × कोणीय वेग

यह कोणीय वेग और रेखीय वेग में संबंध का सूत्र है। (relation between angular velocity and linear velocity)
सूत्र से स्पष्ट है कि कण केंद्र से जितनी अधिक दूरी पर होगा, उसका रेखीय वेग उतना ही अधिक होगा।

कोणीय संवेग संरक्षण का नियम (सिद्धांत)

यदि किसी अक्ष के परितः घूमते हुए पिंड पर कोई बाह्य बल आघूर्ण का आरोपित न हो, तो उस पिंड का कोणीय संवेग नियत रहते हैं इसे कोणीय संवेग संरक्षण का नियम कहते हैं। अर्थात
$\boxed{J = I\omega = \text{नियतांक}}$

उत्पत्ति -
कोणीय संवेग तथा बल आघूर्ण के संबंध से हमने पढ़ा है कि घूर्णन अक्ष के परितः किसी पिंड के कोणीय संवेग परिवर्तन की दर, उस पिंड पर आरोपित बाह्य बल आघूर्ण के बराबर होती है अतः

$\tau = \frac{dJ}{dt}$

यदि बाह्य बल आघूर्ण शून्य हो तो $\tau = 0$

$\frac{dJ}{dt} = 0$

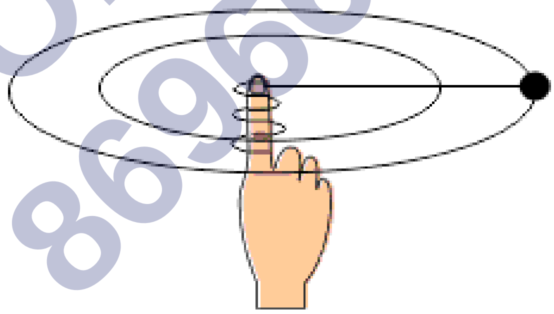
तथा dJ = 0 (चूंकि समय शून्य नहीं हो सकता है)

अर्थात् $\boxed{J = \text{नियतांक}}$

यह कौन है संवेग संरक्षण का नियम (सिद्धांत) है।

उदाहरण

1. यदि हम किसी हल्के पिंड को धागे से बांधकर एवं धागे को हाथ से इस प्रकार क्षैतिज तल में घुमाया जाए, कि धागा उंगली पर लिपट रहा हो। जैसे चित्र में दिखाया गया है। तब इस स्थिति में पिंड का कोणीय वेग (ω) बढ़ता जाता है। क्योंकि धागा लिपटते समय पिंड तथा उंगली के बीच की दूरी कम होती जाती है। इससे पिंड अधिक तेजी से घूमने लगता है इसलिए पिंड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण (I) घटता जाता है।
   अतः संवेग संरक्षण के नियम से पिंड का कोणीय वेग भी बढ़ता जाता है।



कोणीय संवेग संरक्षण का नियम

2. जब कोई तेराक (गोताखोर) ऊंचाई से जल में कूदता है तो वह अपने शरीर को सीधा रखने की बजाय अपने हाथ पैरों को सिकोड़ लेता है जिससे उसका जड़त्व आघूर्ण (I) कम हो जाता है। चूंकि कोणीय संवेग (Iω) का मान नियत रहता है। अतः जड़त्व आघूर्ण के घटने से कोणीय वेग (ω) का मान बढ़ जाता है। तथा जल में गिरने के कुछ समय पहले ही वह गोताखोर अपने शरीर को सीधा कर लेता है।

3. डांसिंग बोर्ड पर स्केट्स (पहिये लगे जूते) पहनकर नाचने वाला व्यक्ति(या लड़की) नाचते समय अपने हाथों को सिकोड़ लेता है जिससे उसका जड़त्व आघूर्ण (I) का मान कम हो जाता है। परिणामस्वरूप कोणीय वेग बढ़ जाता है। जिस कारण पर व्यक्ति(या लड़की) तेजी से घूमने लगता है।

कोणीय त्वरण

घूर्णन अथवा कोणीय गति में कोणीय वेग के समय के साथ परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण (angular acceleration) कहते हैं। इसे α (अल्फा) से प्रदर्शित करते हैं।

माना घूर्णन गति करते हुए पिंड पर किसी समय t_1 पर कोणीय वेग ω_1 तथा समय t_2 पर कोणीय वेग ω_2 है तो कोणीय त्वरण की परिभाषा से

कोणीय त्वरण $\alpha = \frac{\text{कोणीय वेग परिवर्तन}}{\text{समयांतराल}}$

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

यह कोणीय त्वरण का सूत्र है। इसका मात्रक रेडियन/सेकंड^2 होता है एवं विमीय सूत्र $[M^0L^0T^{-2}]$ होता है। कोणीय त्वरण एक सदिश राशि है।

रेखीय त्वरण

रेखीय गति में रेखीय वेग के समय के साथ परिवर्तन की दर को रेखीय त्वरण (linear acceleration) कहते हैं। इसे a से प्रदर्शित करते हैं। तो

रेखीय त्वरण $a = \frac{\text{रेखीय वेग परिवर्तन}}{\text{समयांतराल}}$

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

यह रेखीय त्वरण का सूत्र है। इसका मात्रक मीटर/सेकंड^2 होता है यह एक सदिश राशि है। रेखीय त्वरण का विमीय सूत्र $[M^0LT^{-2}]$ होता है।

कोणीय त्वरण और रेखीय त्वरण में संबंध

माना कोई पिंड किसी अक्ष के परितः घूम रहा है तो उसका कोणीय त्वरण

$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ समी.

यदि पिंड का किसी क्षण रेखीय वेग v है तो

$v = r\omega$

या $\omega = \frac{v}{r}$

अब ω का मान समी. में रखने पर

$\alpha = \frac{\Delta v/r}{\Delta t}$

$\alpha = \frac{1}{r}\frac{\Delta v}{\Delta t}$

चूंकि रेखीय त्वरण $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ है तब

$\alpha = \frac{1}{r} \times a$

$\boxed{a = r \times \alpha}$

रेखीय त्वरण = त्रिज्या × कोणीय त्वरण

सदिश रूप में

$\vec{a} = \vec{r} \times \vec{\alpha}$

अर्थात पिंड के किसी कण का रेखीय त्वरण, पिंड के कोणीय त्वरण तथा उस कण की घूर्णन अक्ष से दूरी (त्रिज्या) के गुणनफल के बराबर होता है। यही कोणीय त्वरण तथा रेखीय त्वरण में संबंध (relation between angular acceleration and linear acceleration) है।

बल आघूर्ण तथा कोणीय त्वरण में संबंध

बल आघूर्ण - जब किसी पिंड पर लगा कोई बाह्य बल जो उस पिंड को किसी अक्ष के परितः घूर्णन करने की प्रवृत्ति रखता हो तो उस बाह्य बल को बल आघूर्ण कहते हैं।

$\tau = r \times F$

कोणीय त्वरण - घूर्णन गति में कोणीय वेग की समय के साथ परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण कहते हैं।

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

बल आघूर्ण तथा कोणीय त्वरण में संबंध

माना कोई पिंड स्थिर बिंदु O के परितः घूम रहा है पिंड का कोणीय त्वरण α है तो पिंड सभी कणों का कोणीय त्वरण α ही होगा। जबकि रेखीय त्वरण भिन्न-भिन्न होंगे। माना पिंड के किसी एक कण का द्रव्यमान m_1 तथा घूर्णन अक्ष से दूरी r_1 है तो

इस कण कर रेखीय त्वरण

$a_1 = r_1\alpha$

इस कण पर लगने वाला बल F_1 हो तो

$F_1 = m_1a_1$

a_1 का मान रखने पर बल

$F_1 = m_1r_1\alpha$

इसका बल आघूर्ण

$\tau_1 = F_1r_1$

F_1 का मान रखने पर बल आघूर्ण

$\tau_1 = m_1r_1\alpha \times r_1$

$\tau_1 = m_1r_1\alpha \times r_1$

$\tau_1 = m_1r_1^2\alpha$

यह बल आघूर्ण पिंड के किसी एक कण का है इसी प्रकार अन्य कणों के बल आघूर्ण निम्न होंगे-

$m_2 r_2^2 \alpha, m_3 r_3^2 \alpha,$ ………… I

अत: पूरे पिंड का बल आघूर्ण

$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \dots\dots\dots$

$\tau = m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + \dots\dots\dots$

$\tau = \alpha(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots\dots\dots)$

$\tau = \alpha(\Sigma m r^2)$

$\boxed{\tau = I\alpha}$

बल आघूर्ण = जड़त्व आघूर्ण × कोणीय त्वरण

यही बल आघूर्ण तथा कोणीय त्वरण में संबंध का सूत्र है यदि α = 1 तब
$\boxed{\tau = I}$

अर्थात् किसी पिंड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण, उस बल आघूर्ण के बराबर होता है जो पिंड में अक्ष के परितः एकांक कोणीय त्वरण उत्पन्न कर दे।

जड़त्व आघूर्ण

सरल रेखीय गति में न्यूटन के प्रथम नियमानुसार, यदि कोई वस्तु विराम की अवस्था में है तो वह विरामावस्था में ही रहेगी अथवा यदि कोई वस्तु एकसमान चाल से सीधी रेखा में चल रही है तो वह चलती ही रहेगी। जब तक उस पर कोई बाह्य बल न लगाया जाए, इस बाह्य बल के कारण वस्तु अपनी अवस्था परिवर्तन का विरोध करती है वस्तु के इस गुण को जड़त्व कहते हैं।

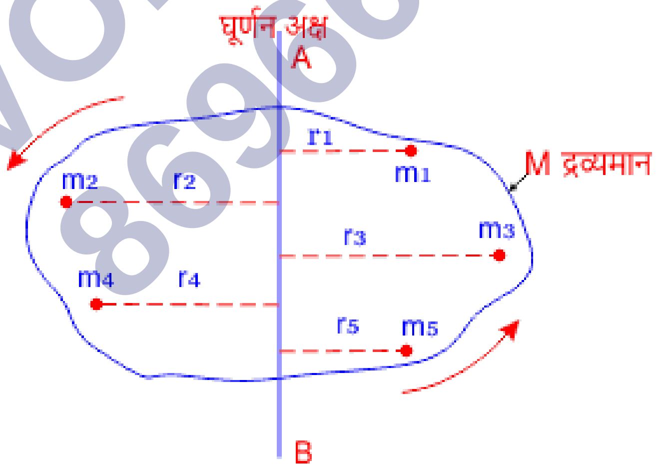
इसी प्रकार घूर्णन गति में कोई पिंड किसी अक्ष के परितः किसी कोणीय वेग से घूर्णन करता है तो उसमें अपनी अवस्था परिवर्तन का विरोध करने का एक गुण होता है। जिसके कारण पिंड अपनी प्रारंभिक अवस्था में बने रहने का प्रयास करता है पिंड के इस गुण को जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) कहते हैं। इसे I से प्रदर्शित करते हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि रेखीय गति में जो महत्व जड़त्व का है वही महत्व कोणीय (घूर्णन) गति में जड़त्व आघूर्ण का है। दोनों में अंतर सिर्फ यह है कि जड़त्व वस्तु के केवल द्रव्यमान पर निर्भर करता है। जबकि जड़त्व आघूर्ण द्रव्यमान के साथ उसकी घूर्णन अक्ष से दूरी पर भी निर्भर करता है।

जड़त्व आघूर्ण का सूत्र

पिंड के किसी कण का जड़त्व आघूर्ण उस कण के द्रव्यमान तथा उसकी घूर्णन अक्ष से दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात

$$\boxed{I = mr^2}$$



जड़त्व आघूर्ण

माना M द्रव्यमान का एक पिंड अक्ष के परितः घूर्णन कर रहा है। माना पिंड छोटे-छोटे कणों से मिलकर बना है जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2, m_3, ... हैं एवं इनकी घूर्णन अक्ष से दूरी क्रमशः r_1, r_2, r_3, ... हैं तो

पहले कण का जड़त्व आघूर्ण $I_1 = m_1r_1^2$

दूसरे कण का जड़त्व आघूर्ण $I_2 = m_2r_2^2$

तीसरे कण का जड़त्व आघूर्ण $I_3 = m_3r_3^2$

इसी प्रकार आगे भी ....

यदि पूरे पिंड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I है तो

$I = I_1 + I_2 + I_3 + ...$

$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + ...$

$$\boxed{I = \Sigma mr^2}$$

अतः इस समीकरण द्वारा स्पष्ट होता है कि किसी पिंड का किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण, पिंड के प्रत्येक कण के द्रव्यमान तथा उसकी घूर्णन अक्ष से दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है।

जड़त्व आघूर्ण का SI मात्रक किग्रा-मीटर^2 होता है। एवं विमीय सूत्र $[ML^2T^0]$ तथा इसका C.G.S. पद्धति में मात्रक ग्राम-सेमी^{2} होता है। जड़त्व आघूर्ण न तो सदिश राशि है और न ही अदिश। यह एक प्रदिश (टेंसर) राशि है टेंसर राशि का मान अलग-अलग दिशाओं के लिए अलग-अलग होता है।

जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व

किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण उसकी घूर्णन गति में वही कार्य करता है जो उसका द्रव्यमान रेखीय गति में करता है। क्योंकि किसी पिंड का द्रव्यमान ही उसके जड़त्व की माप है।

अन्य अंतर किसी पिंड का जड़त्व केवल उसके द्रव्यमान पर निर्भर करता है जबकि पिंड का जड़त्व आघूर्ण पिंड के द्रव्यमान एवं घूर्णन अक्ष के चारों ओर द्रव्यमान के वितरण पर भी निर्भर करता है। यही जड़त्व आघूर्ण भौतिक महत्व है।

कुछ महत्वपूर्ण आकृतियों के जड़त्व आघूर्ण के सूत्र

1. वृत्ताकार छल्ला या वलय $I = mr^2$

2. वृत्ताकार डिस्क $I = \frac{1}{2}mr^2$

3. ठोस बेलन $I = \frac{1}{2}mr^2$

4. ठोस गोला $I = \frac{2}{5}mr^2$

5. खोखला गोला (गोलीय कोश) $I = \frac{2}{3}mr^2$

घूर्णन त्रिज्या (radius of gyration)

यदि पिंड के संपूर्ण द्रव्यमान को किसी एक बिंदु पर केंद्रित माना जाए, एवं जिसकी घूर्णन अक्ष से लंबवत दूरी इतनी हो कि अगर दूरी के वर्ग को पिंड के द्रव्यमान से गुणा करें तो घूर्णन अक्ष के परितः पिंड का जड़त्व आघूर्ण प्राप्त हो जाए। तो इस दूरी को घूर्णन त्रिज्या कहते हैं। इसे K से प्रदर्शित करते हैं।

माना M द्रव्यमान के किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण I है तब

$I = MK^2$

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{I}{M}}}$$

अतः किसी पिंड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण तथा उसके द्रव्यमान के अनुपात का वर्गमूल उस पिंड की घूर्णन त्रिज्या कहलाती है।

जड़त्व आघूर्ण संबंधी प्रमेय

जड़त्व आघूर्ण संबंधी प्रमेय दो प्रकार की होती हैं-

(1) समांतर अक्षों की प्रमेय

(2) लम्ब अक्षों की प्रमेय

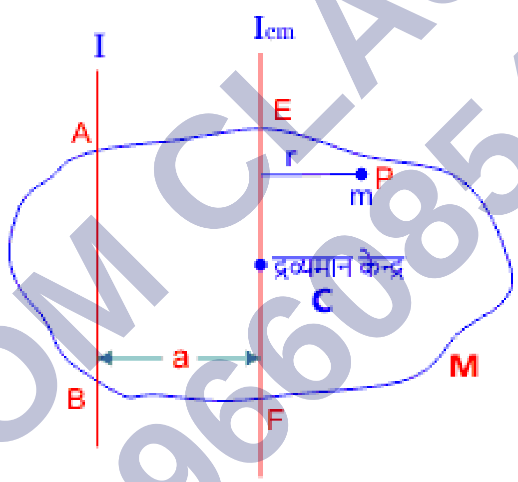
1. समांतर अक्षों की प्रमेय

किसी पिंड का किसी घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण (I), उस पिंड के द्रव्यमान केंद्र (C) में से गुजरने वाली समांतर अक्ष के परितः पिंड के जड़त्व आघूर्ण (I_{cm}) तथा उसके द्रव्यमान और दोनों समांतर अक्षों के बीच की लम्बवत दूरी के वर्ग के गुणनफल के योग के बराबर होता है। अर्थात

$I = I_{cm} + Ma^2$

जहां M पिंड का संपूर्ण द्रव्यमान तथा a दोनों पक्षों के बीच की दूरी है। इसे समांतर अक्षों की प्रमेय (theorem of parallel axes) कहते हैं।

उत्पत्ति



जड़त्व आघूर्ण संबंधी समांतर अक्षों की प्रमेय

माना एक पिंड जिसका द्रव्यमान केंद्र C है इससे गुजरने वाली अक्ष EF के परितः जड़त्व आघूर्ण I_{cm} है। अक्ष EF, अक्ष AB के समांतर है तथा इनके बीच की दूरी a है। माना अक्ष EF से r दूरी पर m द्रव्यमान का एक कण है तो इस कण की अक्ष AB से दूरी (a + r) होगी। तो

कण का EF अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण = mr^2

अतः संपूर्ण पिंड का EF अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I_{cm} = \Sigma mr^2$

एवं संपूर्ण पिंड का AB अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I = \Sigma m(r + a)^2$

$I = \Sigma m(r^2 + a^2 + 2ra)$

$I = \Sigma mr^2 + \Sigma ma^2 + \Sigma m(2ra)$

चूंकि a नियत है इसलिए इसे Σ से बाहर ले सकते हैं

$I = \Sigma mr^2 + a^2\Sigma m + 2a\Sigma mr$

अब $I_{cm} = \Sigma mr^2$ है तो

$I = I_{cm} + a^2\Sigma m + 2a\Sigma mr$

चूंकि द्रव्यमान केंद्र के परितः $\Sigma mr = 0$ एवं $\Sigma m = M$ है तब

$$\boxed{I = I_c m + Ma^2}$$

यही जड़त्व आघूर्ण संबंधी समांतर अक्ष की प्रमेय हैं।

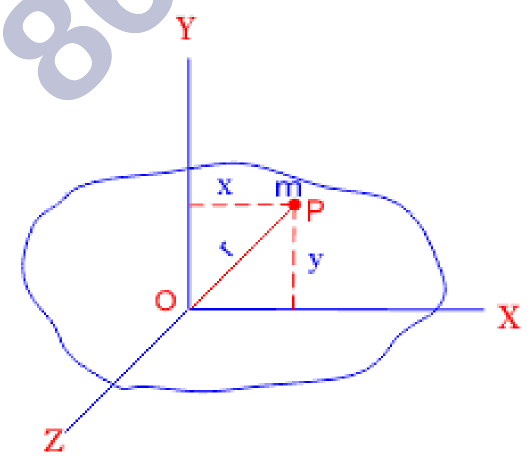
2. लम्ब अक्षों की प्रमेय

किसी समतल पटल का उसके तल में ली गई परस्पर दो अक्षों OX तथा OY के परितः जड़त्व आघूर्ण का योग, इन अक्षों के कटान बिंदु O से जाने वाली तथा समतल पटल के लंबवत अक्ष OZ के परितः जड़त्व आघूर्ण के बराबर होता है अर्थात

$I_X + I_Y + I_Z$

जहां I_X तथा I_Y पटल की अक्ष OX व OY के परितः जड़त्व आघूर्ण है इसे लम्ब अक्षों की प्रमेय (theorem of perpendicular axes) कहते हैं।

उत्पत्ति



जड़त्व आघूर्ण संबंधी लंबवत अक्ष की प्रमेय

माना समतल पटल के तल में दो परस्पर लंबवत अक्ष OX व OY हैं। चित्र में P बिंदु पर पिंड का एक कण है जिसका द्रव्यमान m है एवं इसकी कटान बिंदु से दूरी r है तो

पूरे पटल का OX अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $I_X = \Sigma my^2$

इसी प्रकार पटल का OY अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $I_Y = \Sigma mx^2$

अतः OZ अक्ष के परितः पूरे पटल का जड़त्व आघूर्ण

$I_Z = \Sigma mr^2$

$I_Z = \Sigma m(x^2 + y^2)$ (चूंकि $r^2 = x^2 + y^2$)

$I_Z = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2$

अतः Σmx^2 तथा Σmy^2 के मान रखने पर

$I_Z = I_Y + I_X$

$\boxed{I_Z = I_X + I_Y}$

यही जड़त्व आघूर्ण संबंधी लम्ब अक्षों की प्रमेय हैं।

NCERT SOLUTIONS

अभ्यास (पृष्ठ संख्या 182-183)

प्रश्न 1 एकसमान द्रव्यमान घनत्व के निम्नलिखित पिण्डों में प्रत्येक के द्रव्यमान केन्द्र की अवस्थिति लिखिए-

a. गोला।
b. सिलिण्डर।
c. छल्ला।
d. घन।

क्या किसी पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र आवश्यक रूप से उस पिण्ड के भीतर स्थित होता है?

उत्तर- गोला, सिलिण्डर, वलय तथा घन का द्रव्यमान केन्द्र उनको ज्यामितीय केन्द्र होता है। नहीं, द्रव्यमान केन्द्र आवश्यक रूप से पिण्ड के भीतर स्थित नहीं होता है, अनेक पिण्डों; जैसे-वलय में, खोखले गोले में, खोखले सिलिण्डर में द्रव्यमान केन्द्र पिण्ड के बाहर होता है, जहाँ कोई पदार्थ नहीं होता है।

प्रश्न 2 HCl अणु में दो परमाणुओं के नाभिकों के बीच पृथकन लगभग $1.27\mathrm{A}\left(1\mathrm{\mathring{A}}=10^{-10}\mathrm{m}\right)$है। इस अणु के द्रव्यमान केन्द्र की लगभग अवस्थिति ज्ञात कीजिए। यह ज्ञात है कि क्लोरीन का परमाणु हाइड्रोजन के परमाणु की तुलना में 35.5 गुना भारी होता है तथा किसी परमाणु का समस्त द्रव्यमान उसके नाभिक पर केन्द्रित होता है।

उत्तर- माना हाइड्रोजन परमाणु का द्रव्यमान $m_1 = m$

तब, क्लोरीन परमाणु का द्रव्यमान $m_2 = 35.5m$

माना HCl अणु का द्रव्यमान केन्द्र H व Cl परमाणुओं को मिलाने वाली रेखा पर H परमाणु से x cm दूरी पर Cl परमाणु की ओर है।

यहाँ H परमाणु की स्वयं से दूरी $x_1 = 0$

Cl परमाणु की H परमाणु से दूरी $x_2 = 1.27\text{Å}$

$$\therefore x_{cm} = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{m\times 0+35.5m\times 1.27\text{Å}}{m+35.5m}$$

$$= \frac{35.5\times 1.27\text{Å}}{36.5} = 1.24\text{Å}$$

36.5 अत: द्रव्यमान केन्द्र परमाणु से Cl परमाणु की ओर दूरी $x_{em} = 1.24\text{Å}$ है।

प्रश्न 3 कोई बच्चा किसी चिकने क्षैतिज फर्श पर एकसमान चाल υ से गतिमान किसी लम्बी ट्रॉली के एक सिरे पर बैठा है। यदि बच्चा खड़ा होकर ट्रॉली पर किसी भी प्रकार से दौड़ने लगता है, तब निकाय (ट्रॉली + बच्चा) के द्रव्यमान केन्द्र की चाल क्या है?

उत्तर- चूंकि ट्रॉली एक चिकने क्षैतिज फर्श पर गति कर रही है; अतः फर्श के चिकना होने के कारण निकाय पर क्षैतिज दिशा में कोई बाह्य बल कार्य नहीं करता है। जब बच्चा ट्रॉली पर दौड़ता है तो बच्चे द्वारा ट्रॉली पर तथा ट्रॉली द्वारा बच्चे पर आरोपित बल दोनों आन्तरिक बल हैं। अर्थात्

$$\vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

संवेग-संरक्षण के नियम से, $M\vec{v}_{cm}$ = नियतांक;

अत: $\vec{v}_{cm}$ = नियतांक अर्थात् द्रव्यमान केन्द्र की चाल नियत रहेगी।

प्रश्न 4 दर्शाइए कि a एवं b के बीच बने त्रिभुज का क्षेत्रफल a × b के परिमाण का आधा है।

उत्तर- माना सदिश a तथा b त्रिभुज की दो संलग्न भुजाओं को प्रदर्शित करते हैं तथा इनके बीच का कोण θ है। त्रिभुज की ऊँचाई h है।

$\therefore$ OA = a,

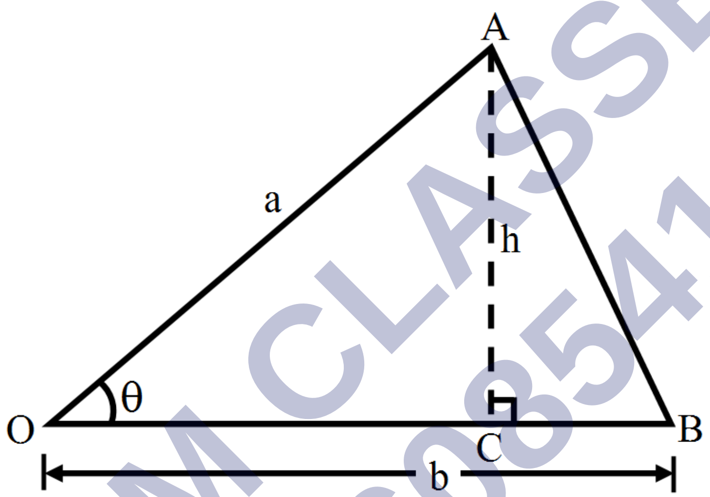
OB = b,

AC = h तथा $\angle AOB = \theta$

$\triangle OCA$ में,

$\sin\theta = \frac{AC}{OA}$ या $AC = OA\sin\theta$

$h = a\sin\theta$



$\triangle OAB$ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2}\times OB\times AC$

$= \frac{1}{2}\times b\times a\sin\theta$

$= \frac{1}{2}ab\sin\theta = \frac{1}{2}ab\sin\theta \ldots.(i)$

दो सदिशों के सदिश गुणन के अनुसार

$a\times b = ab\sin\theta\hat{n}$

जहाँ $\hat{n}$ एकांक वेक्टर तल के लम्बवत् है।

$\therefore |a\times b| = |ab\sin\theta\hat{n}| = ab\sin\theta\ (\because |\hat{n}| = 1)\ldots.(ii)$

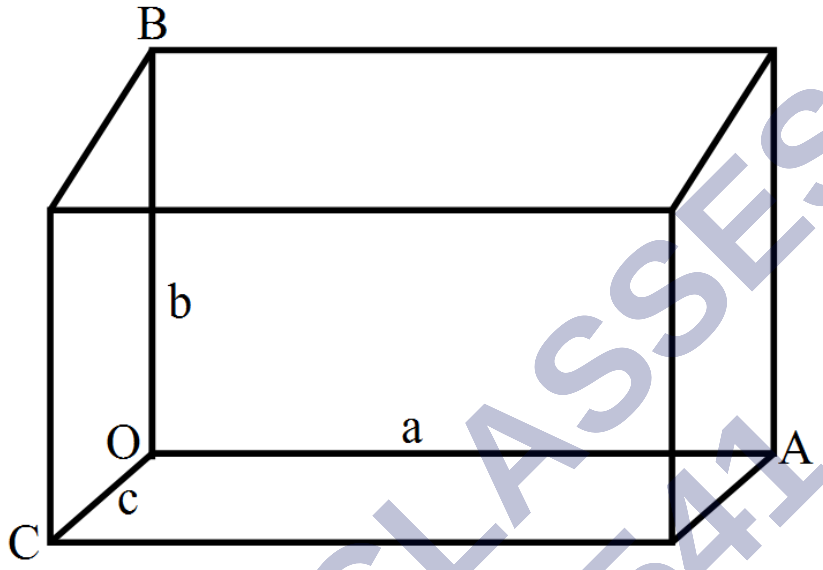
समी (i) व (ii) से,

$\triangle OAB$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|a\times b|$

$= \frac{1}{2}\times|(a\times b)$ का परिमाण|

प्रश्न 5 दर्शाइए कि a.(b × c) का परिमाण तीन सदिशों a, b तथा c से बने समान्तर षट्फलक के आयतन के बराबर है।

उत्तर- माना षट्फलक तीन सदिश से बना है जहाँ, OA = 1, OB = b और OC = c



b तथा c का सदिश गुणन निम्न प्रकार होगा।

$$(\mathrm{b} \times \mathrm{c}) = \mathrm{bc} \sin 90^\circ . \hat{\mathrm{n}} = \mathrm{bc}\hat{\mathrm{n}}$$

जहाँ $\hat{\mathrm{n}}$, OA के अनुदिश एकांक सदिश है

$$\mathrm{a} . \mathrm{b} \times \mathrm{c} = \mathrm{a} . (\mathrm{bc}\hat{\mathrm{n}})$$

$$= \mathrm{a}(\mathrm{bc}) \cos 0^\circ$$

$$= \mathrm{abc}$$

जो समान्तर घट्फलक के आयतन के बराबर है।

प्रश्न 6 एक कण, जिसके स्थिति सदिश r के x, y, z अक्षों के अनुदिश अवयव क्रमशः x,y,z हैं और रेखीय संवेग सदिश p के अवयव px, py, pz हैं, कोणीय संवेग 1 के अक्षों के अनुदिश अवयव ज्ञात कीजिए। दर्शाइए कि यदि कण केवल x-y तल में ही गतिमान हो तो। कोणीय संवेग का केवल z - अवयव ही होता है।

उत्तर-

प्रश्नानुसार, कण का स्थिति सदिश $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

तथा कण का रेखीय संवेग है $\vec{p} = p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k}$

तब मूलबिन्दु के परितः कण का कोणीय संवेग

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \hat{i}(yp_z - zp_y) + \hat{j}(zp_x - xp_z) + \hat{k}(yp_z - zp_y) \ldots . (1)$$

यदि कोणीय संवेग $\vec{L}$ के x, y तथा z-अक्षों के अनुदिश अवयव l_x, l_y तथा l_z है तो

$$\vec{L} = l_x\hat{i} + l_y\hat{j} + l_z\hat{k} \ldots (2)$$

समीकरण (1) व (2) के दाएँ पक्षों में $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$L_x = (yp_z - zp_y)$

$L_y = (zp_x - xp_z)$

तथा

$L_z = (xp_y - yp_x)$

यही कोणीय संवेग के अक्षों के अनुदिश अवयव हैं।

यदि कोई कण x-y समतल में गतिमान है तो उसके स्थिति सदिश $\vec{r}$ में z-अक्ष के अनुदिश अवयव शून्य होगा $\left(\text{अर्थात् } z = 0 \Rightarrow \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}\right)$ तथा इसके रेखीय संवेग $\vec{p}$ का z-अक्ष के अनुदिश अवयव शून्य होगा। $\left(\text{अर्थात् } p_z = 0 \Rightarrow \vec{p} = p_x\hat{i} + p_y\hat{j}\right)$

अब L_x, L_y, तथा L_z, के समीकरणों में z = 0 तथा $P_z = 0$ रखने पर,

$L_x = 0$ तथा $L_y = 0$ जबकि $L_z = xp_y - yP_x$

अर्थात् कोणीय संवेग में केवल z अवयव होगा।

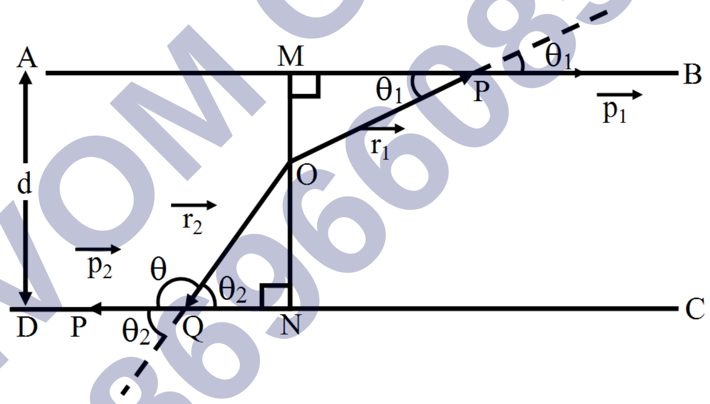
प्रश्न 7 दो कण जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान m एवं चाल υ है, d दूरी पर समान्तर रेखाओं के अनुदिश, विपरीत दिशाओं में चल रहे हैं। दर्शाइए कि इस द्विकण निकाय का सदिश कोणीय संवेग समान रहता है, चाहे हम जिस बिन्दु के परितः कोणीय संवेग लें।

उत्तर- माना दो कण समान्तर रेखाओं AB तथा CD के अनुदिश परस्पर विपरीत दिशाओं में चाल से गति कर रहे हैं।

माना किसी क्षण इनकी स्थितियाँ क्रमश: बिन्दु P तथा Q हैं। हम एक बिन्दु O के परितः इस निकाय का कोणीय संवेग ज्ञात करना चाहते हैं।

OM तथा ON इन रेखाओं पर बिन्दु O से लम्ब डाले गए हैं तथा रेखाओं के बीच की दूरी d है।

माना



$\overrightarrow{OP} = \vec{r}_1$ तथा $\overrightarrow{OQ} = \vec{r}_2$

प्रथम कण का O के परितः कोणीय संवेग

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \vec{r}_1 \times (m\vec{v})$$

$$\Rightarrow L_1 = mv(r_1 \sin\theta_1) = mv.\,OM$$

$\vec{L}_1$ की दिशा कागज के तल के लम्बवत् भीतर की ओर है। इसी प्रकार दूसरे कणं के लिए

$$\overrightarrow{L_2} = \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{p_2}$$

$$\Rightarrow L_2 = mv(r_2 \sin\theta_2) = mv.\,ON$$

$\vec{L}_2$ की दिशा भी कागज के तल के लम्बवत् भीतर की ओर है।

$\because \vec{L}_1$ तथा $\vec{L}_2$ की दिशाएँ एक ही हैं; अत: द्विकण निकाय के बिन्दु O के परित: कोणीय संवेग का परिमाण

$L = L_1 + L_2 = mv\ (OM + ON) = mvd$

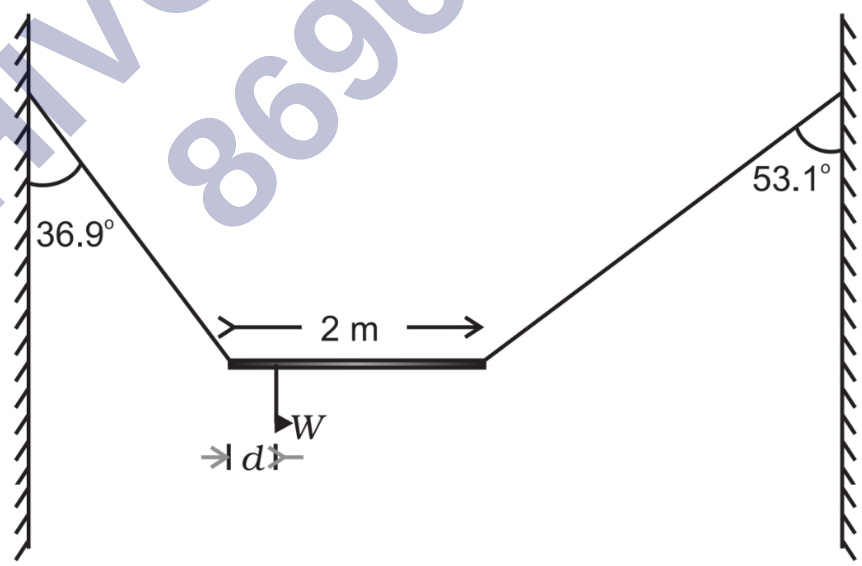
$[\because OM + ON = d]$

तथा इसकी दिशा कागज के लम्बवत् भीतर की ओर है।

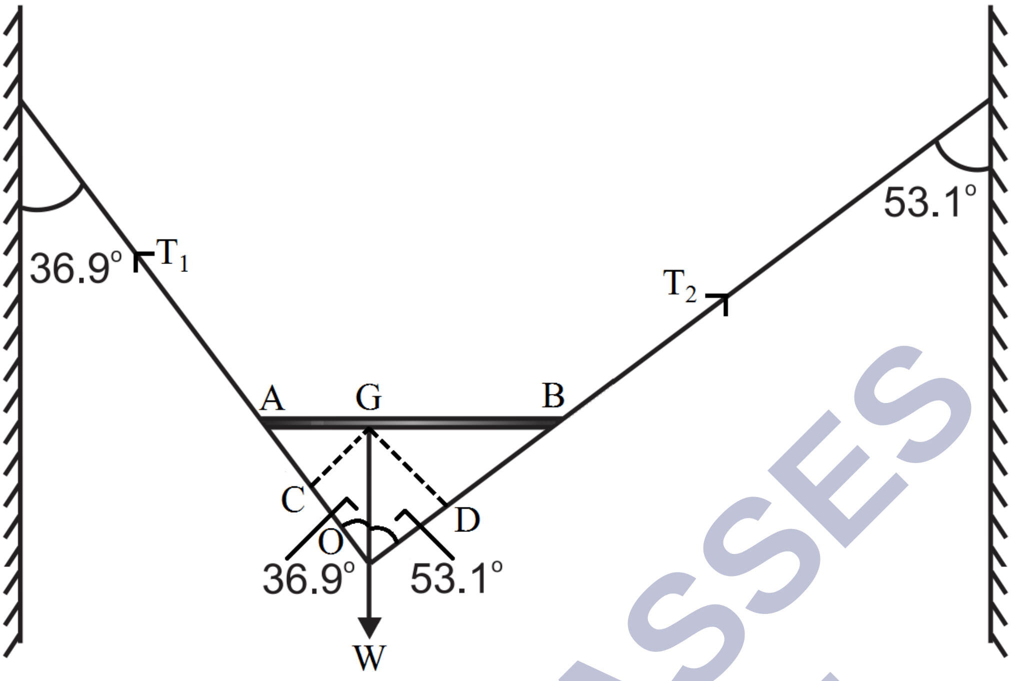
इस प्रकारं द्विकर्ण निकाय का बिन्दु O के परितः कोणीय संवेग केवल m, υ तथा रेखाओं के बीच की दूरी d पर निर्भर करता है अर्थात् यह कोणीय संवेग बिन्दु O की स्थिति पर निर्भर नहीं करता है।

अतः इस द्विकण निकाय का सभी बिन्दुओं के परितः कोणीय संवेग नियत है।

प्रश्न 8 w भार की एक असंमांग छड़ को, उपेक्षणीय 3 भार वाली दो डोरियों से चित्र 7.4 में दर्शाए अनुसार लटकांकर विरामावस्था में रखा गया है। डोरियों द्वारा ऊध्र्वाधर से बने कोण क्रमशः 36.9° एवं 53.1° हैं। छड़ 2m लम्बाई की है। छड़ के बाएँ सिरे से इसके गुरुत्व केन्द्र की दूरी d ज्ञात कीजिए।



उत्तर- माना छड़ AB का गुरुत्व केन्द्र G, उसके एक सिरे A से ‘d दूरी पर स्थित है। छड़ तीन बलों के अधीन सन्तुलन में है।



डोरियों में तनाव T1 तथा T2 डोरियों के अनुदिश ऊपर 3 की ओर कार्य करते हैं।

छड़ का भार W उसके गुरुत्व केन्द्र G पर ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर कार्य करता है।

सन्तुलन की स्थिति में तीनों बलों की क्रिया-रेखाएँ एक ही बिन्दु O पर काटती हैं।

$\angle \mathrm{AOG} = 36.9^\circ$,

$\angle \mathrm{BOG} = 53.1^\circ$

$\mathrm{GC} \perp \mathrm{AO}, \mathrm{GD} \perp \mathrm{BO}$

$\angle \mathrm{GAC} = 90^\circ - \angle \mathrm{GOA} = 90^\circ - 36.9^\circ = 53.1^\circ$

$\angle \mathrm{GBD} = 90^\circ - \angle \mathrm{GOB} = 90^\circ - 53.1^\circ = 36.9^\circ$

बलों के क्षैतिज घटको का योग

$$\mathrm{T}_1 \sin 36.9^\circ - \mathrm{T}_2 \sin 53.1^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{T}_1 \sin 36.9^\circ = \mathrm{T}_2 \sin 53.1^\circ \ldots . (1)$$

बिन्दु G के परितः आघूर्ण लेने पर,

$$T_2GD - T_1GC = 0 \left[\because \text{W का G के परितः आघूर्ण = 0}\right]$$

$$T_2GB \sin \angle GBD = T_1GA \sin \angle GAC$$

$$T_2(2-d)\sin 36.9^\circ = T_1 d \sin 53.1^\circ \left[\because AB = 2m\right]$$

$$T_1 d \sin 53.1^\circ = T_2(2-d)\sin 36.9 \ldots (2)$$

समीकरण (2) को समीकरण (1) से भाग देने पर,

$$d\frac{\sin 53.1^\circ}{\sin 36.9^\circ} = \frac{(2-d)\sin 36.9^\circ}{\sin 53.1^\circ}$$

$$d\frac{\sin 53.1^\circ}{\cos 53.1^\circ} = (2-d)\frac{\cos 53.1^\circ}{\sin 53.1^\circ} \left[\because \sin 36.9^\circ = \sin(90^\circ - 53.1^\circ)\right]$$

$$d\tan^2 53.1^\circ = (2-d)$$

$$d(1.77) = (2-d)$$

$$2.77d = 2$$

$$\therefore d = \frac{2}{2.77} = 0.72m$$

अतः छड़ का गुरुत्व केंद्र सिरे A से 0.72m दूर दूसरे सिरे की ओर है।

प्रश्न 9 एक कार का भार 1800kg है। इसकी अगली और पिछली धुरियों के बीच की दूरी 1.8m है। इसका गुरुत्व केन्द्र, अगली धुरी से 1.05m पीछे है। समतल धरती द्वारा। इसके प्रत्येक अगले और पिछले पहियों पर लगने वाले बल की गणना कीजिए।

उत्तर- माना भूमि द्वारा प्रत्येक अगले पहिए पर आरोपित प्रतिक्रिया बल R1 व प्रत्येक पिछले पहिए पर आरोपित प्रतिक्रिया बले R2 है तब निकाय के ऊर्ध्वाधर सन्तुलन के लिए,

2R1 + 2R2 = W ......(1)

जहाँ W कार का भार है जो उसके गुरुत्व केन्द्र G पर कार्यरत है।

G के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

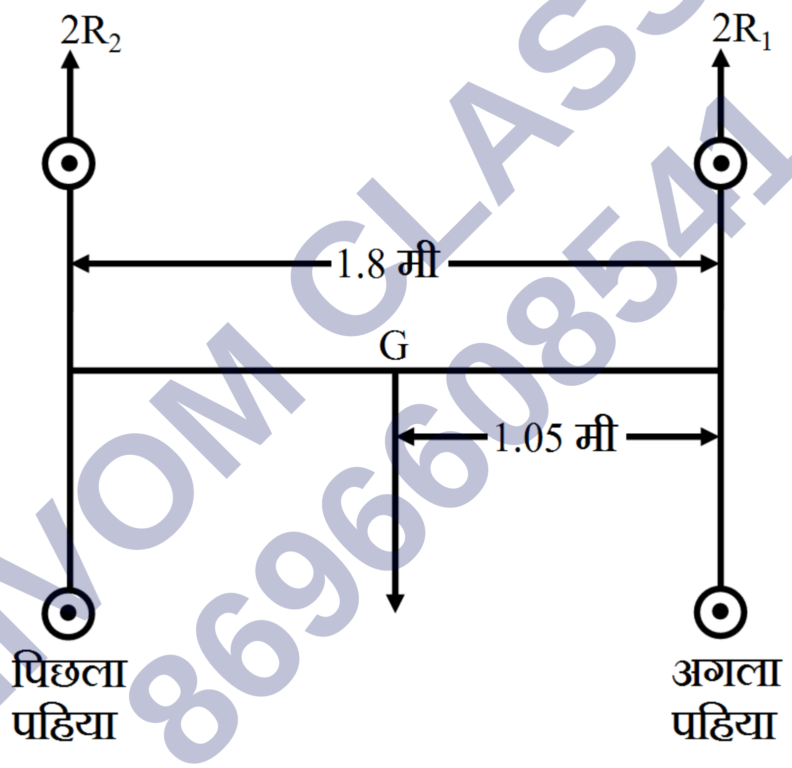
2R1 × 1.05 = 2R2 × (1.8 - 1.05)

या

R1 × 1.05 = R2 × 0.75

$$R_1 = \frac{5}{7} R_2 \ldots (2)$$

अतः समीकरण (1) व (2) से



$$2 \times \frac{5}{7} R_2 + 2R_2 = W = 1800 \text{ किग्रा-भार}$$

$$\frac{12}{7} R_2 = 900 \text{ किग्रा-भार}$$

$$R_2 = 900 \times \frac{7}{12} = 525 \text{ किग्रा-भार}$$

$$= 525 \times 9.8 = 5145 \text{ न्यूटन}$$

प्रश्न 10

a. किसी गोले को, इसके किसी व्यास के परितः जड़त्व – आघूर्ण $\frac{2MR^2}{5}$ है, जहाँ M गोले का द्रव्यमान एवं R इसकी त्रिज्या है। गोले पर खींची गई स्पर्श रेखा के परितः इसका जड़त्व-आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

b. M द्रव्यमान एवं R त्रिज्या वाली किसी डिस्क का इसके किसी व्यास के परित; "जड़त्व-आघूर्ण $\frac{MR^2}{4}$ है। डिस्क के लम्बवत् इसकी कोर से गुजरने वाली अक्ष के परितः इस डिस्क (चकती) का जड़त्व-आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

a. दिया है-

गोले का द्रव्यमान = M, त्रिज्या = R

रेखा AB गोले की एक स्पर्श रेखा है जिसके परितः गोले का जड़त्व-आघूर्ण ज्ञात करना है।
स्पर्श रेखा AB के समान्तर, गोले का एक व्यास PQ खींचा।

प्रश्नानुसार, व्यास PQ (जो कि गोले के केन्द्र से जाता है) के परितः गोले का जड़त्व-आघूर्ण

$$I_G = \frac{2}{5}MR^2$$

समान्तर अक्षो की प्रमेय से,

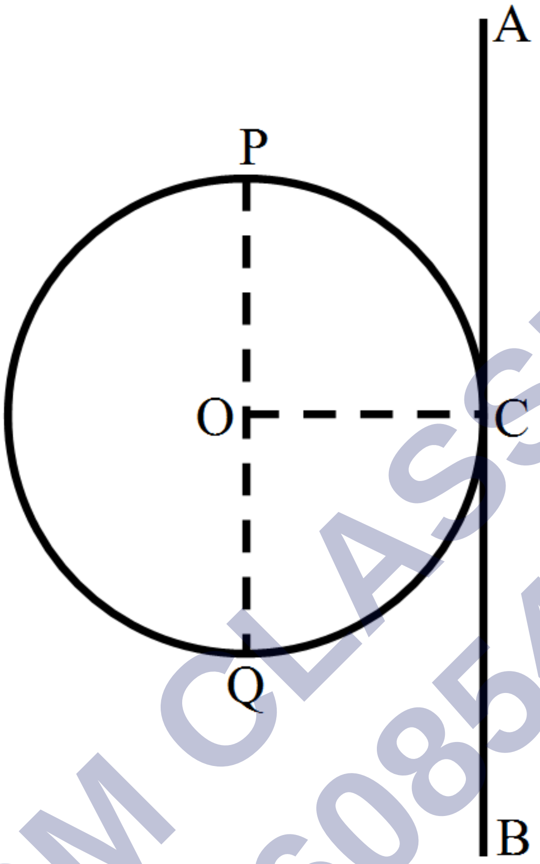
स्पर्श रेखा AB के परितः गोले का जड़त्व-आघूर्ण

$I = I_G + Md^2$

(d = समांतर अक्षो के बीच की दूरी = OC = R)

$$= \frac{2}{5}MR^2 + MR^2$$

$$I = \frac{7}{5}MR^2$$



b. माना AB तथा CD डिस्क के दो परस्पर लम्बवत् व्यास हैं, जो क्रमशः x - तथा Y - अक्षों के अनुदिश हैं

तब इन व्यासों के परितः डिस्क के जड़त्व-आघूर्ण

$I_x = \frac{1}{4}MR^2$ तथा $I_y = \frac{1}{4}MR^2$

OZ एक ऐसी अक्ष है, जो डिस्क के केन्द्र से गुजरती है तथा डिस्क के तल के लम्बवत् है; तब लम्बवत् अक्षों की प्रमेय से, OZ अक्ष के परितः डिस्क का जड़त्व-आघूर्ण

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{2}MR^2$$

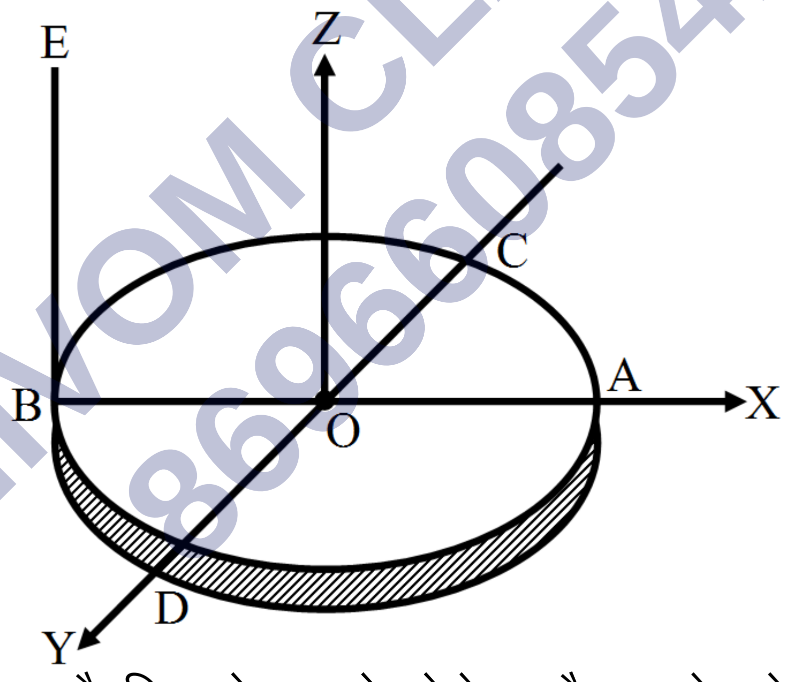
रेखा BE डिस्क की कोर से गुजरने वाली तथा उसके तल के लम्बवत् अक्ष है। स्पष्ट है कि रेखा BE, OZ अक्ष के समान्तर है।

∴ समान्तर अक्षों की प्रमेय से,

रेखा BE के परित: डिस्क का जड़त्व-आघूर्ण

$$I = I_z + M(OB)^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{2}MR^2$$



प्रश्न 11 समान द्रव्यमान और त्रिज्या के एक खोखले बेलन और एक ठोस गोले पर समान परिमाण के बल-आघूर्ण लगाए गए हैं। बेलन अपनी सामान्य सममित अक्ष के परितः घूम सकता है और गोला अपने केन्द्र से गुजरने वाली किसी अक्ष के परितः। एक दिए गए समय के बाद दोनों में कौन अधिक कोणीय चाल प्राप्त कर लेगा?

उत्तर- खोखले बेलन का अपनी सामान्य सममित अक्ष के परितः

जड़त्व आघूर्ण $I_c = MR^2$ .....(1)

ठोस गोले का अपने केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण $I_s = \frac{2}{5}MR^2$...(2)

परन्तु बल आघूर्ण $\tau = I.\alpha$, अत: कोणीय त्वरण, $\alpha = \frac{\tau}{I}$

कि दोनों पर समान बल आघूर्ण लगाये गये हैं, अत: τ के नियत मान के लिए $\tau \propto \frac{1}{I}$

उपर्युक्त समी. (1) व समी. (2) से स्पष्ट है कि,

$I_s < I_c$, अत: स्पष्ट है $\alpha_s > \alpha_c$

अर्थात् गोले का त्वरण बेलन के त्वरण की तुलना में अधिक होगा।

∵ t समय के बाद कोणीय चाल $\omega = \alpha t$

अतः गोले की कोणीय चाल अधिक होगी।

प्रश्न 12 20kg द्रव्यमान का कोई ठोस सिलिण्डर अपने अक्ष के परितः 100 rad s^{-1} की कोणीय चाल से घूर्णन कर रहा है। सिलिण्डर की त्रिज्या 0.25m है। सिलिण्डर के घूर्णन से सम्बद्ध गतिज ऊर्जा क्या है? सिलिण्डर का अपने अक्ष के परितः कोणीय संवेग का परिमाण क्या है?

उत्तर- ठोस सिलिण्डर का द्रव्यमान M = 20 किग्रा, सिलिण्डर की त्रिज्या R = 0.25 मी

∴ ठोस सिलिण्डर का अपनी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण,

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2} \times 20\text{kg} \times (0.25\text{m})^2$$

सिलिण्डर की कोणीय चाल $\omega = 100$ रेडियन/ सेकण्ड

∴ सिलिण्डर की घूर्णन गतिज ऊर्ज $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$

अतः $K_{rot} = \frac{1}{2} \times 0.625\text{kg-m}^2 \times (100\text{redian} \backslash \text{sec})^2 = 3125\text{J}$

सिलिण्डर का कोणीय संवेग $J = I\omega$

= 0.625 किग्रा-मीटर^2 × 100 रे/ से

= 62.5 किग्रा-मी^{2}/ से

वैकल्पिक विधि-

चूँकि $K_{rot} = \frac{J^2}{2I}$

$\therefore$ कोणीय संवेग $J = \sqrt{2K_{rot} \times I}$

$= \sqrt{(2 \times 3125 \times 0.625)}$ किग्रा-मी^{2}/ से

$= 62.5$ किग्रा-मी^{2}/ से

प्रश्न 13

a. कोई बच्चा किसी घूर्णिका (घूर्णीमंच) पर अपनी दोनों भुजाओं को बाहर की ओर फैलाकर खड़ा है। घूर्णिका को 40rev/ min की कोणीय चाल से घूर्णन कराया जाता है। यदि बच्चा अपने हाथों को वापस सिकोड़कर अपना जड़त्व-आघूर्ण अपने आरम्भिक जड़त्व-आघूर्ण $\frac{2}{5}$ गुना कर लेता है तो इस स्थिति में उसकी कोणीय चाल क्या होगी? यह मानिए कि घूर्णिका की घूर्णन गति घर्षणरहित है।
b. यह दर्शाइए कि बच्चे की घूर्णन की नयी गतिज ऊर्जा उसकी आरम्भिक घूर्णन की गतिज ऊर्जा से अधिक है। आप गतिज ऊर्जा में हुई इस वृद्धि की व्याख्या किस प्रकार करेंगे?

उत्तर-

a. घूर्णिका का प्रारम्भिक जड़त्व आघूर्ण (माना) = I_1

प्रारम्भिक कोणीय चाल ω_1 = 40 चक्कर/ मिनट

घूर्णिका का अन्तिम जड़त्व आघूर्ण (माना) = I_2

तथा अन्तिम कोणीय चाल = ω_2

कोणीय संवेग-संरक्षण के नियम से, J = Iω = नियतांक

$$\therefore \mathrm{I}_1\omega_1 = \mathrm{I}_2\omega_2$$

अत: $\omega_2 = \left(\frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}_2}\right).\omega_1$

परन्तु $\mathrm{I}_2 = \frac{2}{5}\mathrm{I}_1$

$$\therefore \omega_2 = \left[\frac{\mathrm{I}_1}{\frac{2}{5}\mathrm{I}_1}\right] \times 40 \text{ चक्कर/ मिनट} = \frac{5}{2} \times 40 \text{ चक्कर/ मिनट}$$

= 100 चक्कर/ मिनट

b.

घूर्णन गतिज ऊर्जा $K_{rot} = \frac{J^2}{2I}$; अब चूँकि J नियत है,

अतः $K_{rot} \propto \frac{1}{I}$

अब चूँकि अन्तिम जड़त्व आघूर्ण प्रारम्भिक जड़त्व आघूर्ण का $\frac{2}{5}$ है, अत: अन्तिम घूर्णन गतिज ऊर्जा प्रारम्भिक मान की $\frac{5}{2}$ गुनी हो जायेगी अर्थात् घूर्णन की नयी गतिज ऊर्जा प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा से अधिक है।

इसका कारण यह है कि बच्चे द्वारा हाथों को वापस सिकोड़ने में व्यय रासायनिक ऊर्जा घूर्णन गतिज ऊर्जा में बदल जाती है।

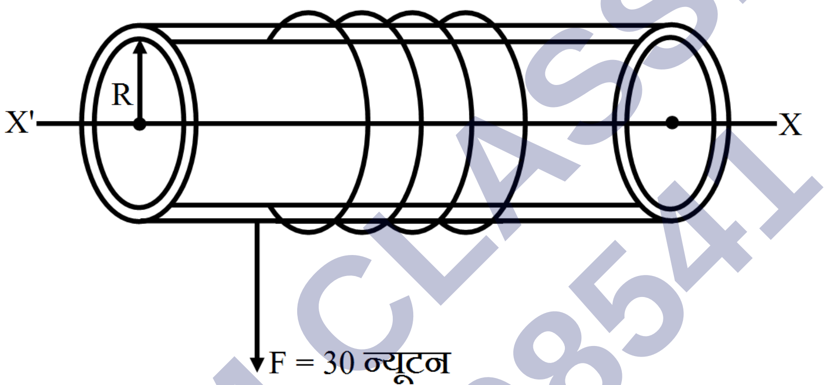
प्रश्न 14 3kg द्रव्यमान तथा 40cm त्रिज्या के किसी खोखले सिलिण्डर पर कोई नगण्य द्रव्यमान की रस्सी लपेटी गई है। यदि रस्सी को 30N बल से खींचा जाए तो सिलिण्डर का कोणीय त्वरण क्या होगा। रस्सी का रैखिक त्वरण क्या है? यह मानिए कि इस प्रकरण में कोई फिसलन नहीं है?

उत्तर- यदि बेलन का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R हो तो यहाँ M = 3.0 किग्रा तथा R = 40 सेमी = 0.40 मीटर

अत: खोखले बेलन का अपनी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण-

I = MR^2 =3 किग्रा x (0.40 मी)2 = 0.48 किग्रा-$मी^2$

रस्सी को F = 30 न्यूटन के बल से खींचने पर बेलन पर आरोपित बल आघूर्ण



$$\tau = F \times R = 30N \times 0.40m = 12N\text{-}m$$

\अत: यदि इस बल आघूर्ण से. बेलन में उत्पन्न कोणीय त्वरण α हो तो सूत्र $\tau = I\alpha$ से,

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{12N\text{-}m}{0.48kg\text{-}m^2} = 25redian\text{-}sec^2$$

रस्सी का रेखीय त्वरण, a = Ra = 0.4 मी × 25 रेडियन/ सेकण्ड^2 = 10 मी/ से^{2}

प्रश्न 15 किसी घूर्णक (रोटर) की 200 rads-1 की एकसमान कोणीय चाल बनाए रखने के लिए एक इंजन द्वारा 180N m का बल-आघूर्ण प्रेषित करना आवश्यक होता है। इंजन के लिए आवश्यक शक्ति ज्ञात कीजिए।

(नोट : घर्षण की अनुपस्थिति में एकसमान कोणीय वेग होने में यह समाविष्ट है कि बल-आघूर्ण शून्य है। व्यवहार में लगाए गए बल-आघूर्ण की। आवश्यकता घर्षणी बल-आघूर्ण को निरस्त करने के लिए होती है।) यह मानिए कि इंजन की दक्षता 100% है।

उत्तर-

दिया है $\omega = 200 \text{rad s}^{-1}$ (नियत है),

बल-आघूर्ण τ = 180 Nm

इंजन के लिए आवश्यक शक्ति

P = इंजन द्वारा घूर्णक को दी गई शक्ति $[\because \eta = 100\%]$

$= \tau\omega = 180 \text{N-m} \times 200 \text{rad s}^{-1}$

$= 36 \times 10 \text{w} = 36 \text{kW}$

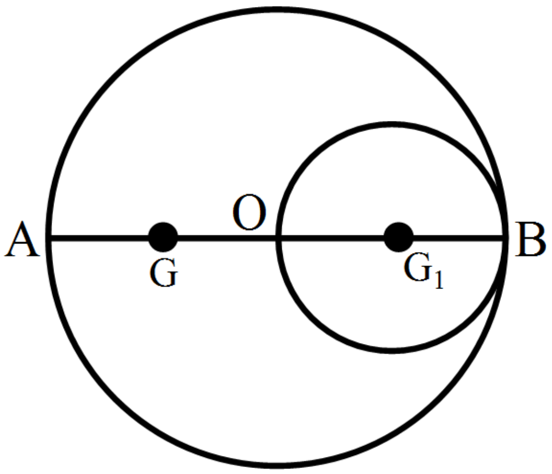
प्रश्न 16 R त्रिज्या वाली समांग डिस्क से $\frac{R}{2}$ त्रिज्या का एक वृत्ताकार भाग काट कर निकाल दिया गया है। इस प्रकार बने वृत्ताकार सुराख का केन्द्र मूल डिस्क के केन्द्र से $\frac{R}{2}$ दूरी पर है। अवशिष्ट डिस्क के गुरुत्व केन्द्र की स्थिति ज्ञात कीजिए।

उत्तर-: माना दिए हुए वृत्ताकार पटल का केन्द्र O और व्यास AB है।

OA = OB = R = त्रिज्या

इस पटल से, व्यास OB को एक वृत्त काट कर निकाल दिया जाता है।

स्पष्टत: दिए हुए पटल का गुरुत्व केन्द्र O पर तथा काटे गए वृत्त का गुरुत्व केन्द्र उसके केन्द्र G1 पर होगा, जबकि $\text{OG}_1 = \frac{1}{2}.\text{OB} = \frac{1}{2}\text{R}$



∵ वृत्तों के क्षेत्रफल उनकी त्रिज्याओं के वर्गों के अनुपात में होते हैं।

$$\therefore \quad \frac{\text{काटे गए वृत्त का क्षेत्रफल}}{\text{पूरे पटल का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}R\right)^2}{R^2} = \frac{\frac{1}{4}R^2}{R^2} = \frac{1}{4}$$

अर्थात् काटे गए वृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}$(पूरे पटल का क्षेत्रफल)

माना पूरे पटल का भार 4W है, तब कटे हुए वृत्त का भार W हुआ।

∴ शेष पटल का भार = 4W - W = 3W

यदि शेष भाग का गुरुत्व केन्द्र G है जो स्पष्टतया व्यास AB पर होगा, तब 'बिन्दु O के परित: आघूर्ण लेने पर,

$$OG = \frac{1}{3}OG_1 = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}R = \frac{1}{6}R$$

अत: पटल के केन्द्र से शेष भाग के गुरुत्व केन्द्र की दूरी $\frac{R}{6}$ है।

प्रश्न 17 एक मीटर छड़ के केन्द्र के नीचे क्षुर-धार रखने पर वह इस पर सन्तुलित हो जाती है जब दो सिक्के, जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान 5g है, 12.0cm के चिह्न पर एक के ऊपर एक रखे जाते हैं तो छड़ 45.0cm चिह्न पर सन्तुलित हो जाती है। मीटर छड़ का द्रव्यमान क्या है?

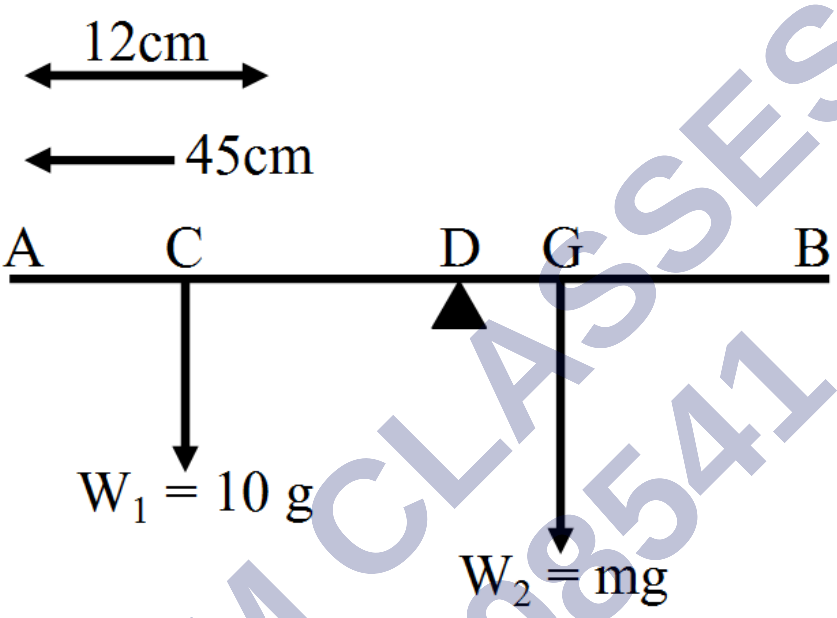
उत्तर- माना मीटर छड़ का द्रव्यमान m g है।

प्रश्नानुसार, प्रथम स्थिति में छड़ अपने मध्य बिन्दु पर सन्तुलित होती है। इसका अर्थ यह है कि छड़ का गुरुत्व केन्द्र उसके मध्य बिन्दु पर है। दूसरी दशा में, छड़ पर दो बल लगे हैं,

सिक्कों का भार W1 = 10g, बिन्दु C पर जहाँ AC = 12 cm

छड़ का भार W2 = mg, मध्य बिन्दु G पर

छड़ D बिन्दु पर सन्तुलित होती है, जहाँ AD = 45cm यहाँ D आलम्ब है।



अतः आघूर्णों के सिद्धान्त से,

$W_1 \times Cd = W_2 \times GD$ [CD = (45 - 12)cm = 33cm, GD = 5cm]

$\Rightarrow$ 10g × 33cm = mg × 5cm

$$\therefore m = \frac{10 \times 33}{5} g = 66g$$

अतः छड़ का द्रव्यमान 66 है।

प्रश्न 18 एक ठोस गोला, भिन्न नति के दो आनत तलों पर एक ही ऊँचाई से लुढ़कने दिया जाता है।

a. क्या वह दोनों बार समान चाल से तली में पहुँचेगा?
b. क्या उसको एक तल पर लुढ़कने में दूसरे से अधिक समय लगेगा?

c. यदि हाँ, तो किस पर और क्यों?

उत्तर-

a. θ झुकाव कोण तथा h ऊँचाई के आनत तल पर लुढ़कने वाले सममित पिण्ड का पृथ्वी तल पर पहुँचने पर वेग v हो तो-

$$v^2 = \frac{2gh}{1+\left(\frac{K^2}{R^2}\right)}$$

जहाँ R = वस्तु की त्रिज्या तथा K = घूर्णन त्रिज्या

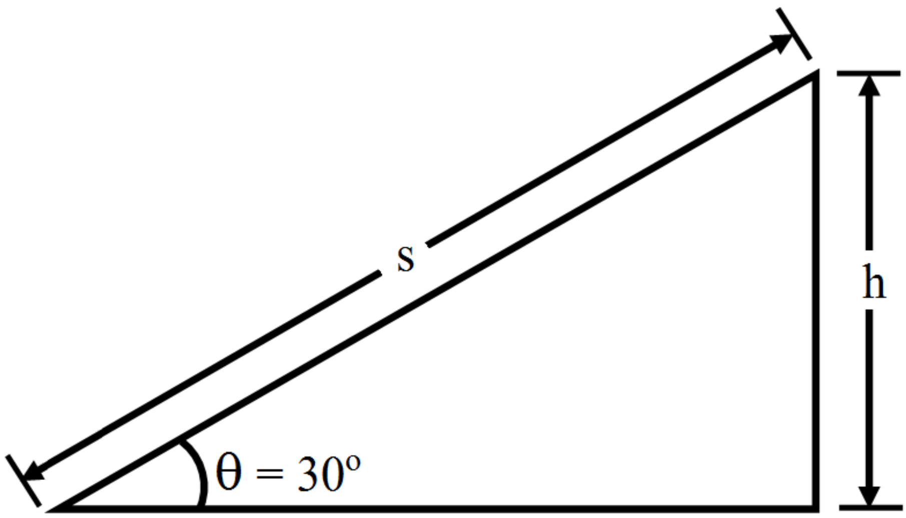
परन्तु गोले के लिए, $MK^2 = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5}Mr^2 \Rightarrow \frac{K^2}{R^2} = \frac{2}{5}$

अतः $v^2 = \frac{2gh}{1+\left(\frac{2}{5}\right)}$

$$v^2 = \frac{10}{7}gh$$

यहाँ पर स्पष्ट है कि गोले को तली पर पहुँचने का वेग आनत तल के झुकाव कोण θ पर निर्भर नहीं करता, अतः गोला दोनों आनत तलों की तली पर समान चाल से पहुँचेगा।

b. यदि आनत तल की लम्बाई s हो तथा गोले द्वारा तली तक पहुँचने में लिया गया समय t हो तो-



$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

गोले का त्वरण $a = \dfrac{g \sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}} = \dfrac{g\sin\theta}{\left(1+\frac{2}{5}\right)}$

$$= \frac{5}{7} g \sin\theta$$

परन्तु चित्र से $s = \dfrac{h}{\sin\theta}$

$\therefore$ समय $t = \sqrt{\dfrac{2\times h\backslash \ \sin\theta}{\frac{5g\sin\theta}{7}}}$

अथवा $t = \left[\sqrt{\dfrac{14h}{5g}}\right] \times \dfrac{1}{\sin\theta}$

$$\Rightarrow t \propto \frac{1}{\sin\theta}$$

चूँकि लिया गया समय आनत तल के झुकाव कोण पर निर्भर करता है, अतः दोनों तलों पर लुढ़कने का समय भिन्न-भिन्न होगा।

c.

चूंकि $t\alpha = \dfrac{1}{\sin\theta}$ तथा 8 का मान बढ़ने से $\sin\theta$ का मान बढ़ता है।

अत: θ के कम मान के लिए sinθ का मान कम होने के कारण t का मान अधिक होगा अर्थात् कम ढाल वाले तल पर लुढ़कने में लिया गया समय अधिक होगा।

प्रश्न 19 2m त्रिज्या के एक वलय (छल्ले) का भार 100kg है। यह एक क्षैतिज फर्श पर इस प्रकार लोटनिक गति करता है कि इसके द्रव्यमान केन्द्र की चाल 20cm/ s हो। इसको रोकने के लिए कितना कार्य करना होगा ?

उत्तर- छल्ले की त्रिज्या R =2 मी, इसका द्रव्यमान M = 100 किग्रा, द्रव्यमान केन्द्र की चाल υ = 2 सेमी/ से = 0.20 मी/ से

चूँकि छल्ला लोटनिक गति करता आगे बढ़ रही है,

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

परन्तु छल्ले का जड़त्व आघूर्ण = I = MR^2 तथा

इसका कोणीय वेग $\omega = \frac{v}{R}$

$$\therefore K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}(MR^2) \times \left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = Mv^2$$

= 100 किग्रा × (0.20) मी/ से)2 = 4.0 जूल

रोकने के लिए किया गया कार्य = छल्ले की कुल गतिज ऊर्जा = 4.0 जूल

प्रश्न 20 ऑक्सीजन अणु का द्रव्यमान 5.30×10^{-26} kg है तथा इसके केन्द्र से होकर गुजरने वाली और इसके दोनों परमाणुओं को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व-आघूर्ण 1.94 × 10^{-46}kg-m^2 है। मान लीजिए कि गैस के ऐसे अणु की औसत चाल 500m/ s है और इसके घूर्णन की गतिज ऊर्जा, स्थानान्तरण की गतिज ऊर्जा की दो-तिहाई है। अणु का औसत कोणीय वेग ज्ञात कीजिए।

उत्तर- ऑक्सीजन अणु का द्रव्यमान M = 5.30 × 10-26 किग्रा

इसका जड़त्व आघूर्ण I = 1.94 × 10-46 किग्रा-मी^{2}

अणु की औसत चाल υ = 500 मी/ से

यहाँ घूर्णन गतिज ऊर्जा = $\frac{2}{3}$ स्थानान्तरण गतिज ऊर्जा

$$\therefore \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}Mv^2\right)$$

अथवा $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{3}Mv^2$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{Mv^2}{I}} = \left[\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{M}{I}\right)}\right] \times v$$

अतः ज्ञात राशियों के मान ररखने पर,

कोणीय वेग, $\omega = \sqrt{\left(\frac{2\times5.30\times10^{-26}}{3\times1.94\times10^{-46}}\right)} \times 500m/s$

$= 6.75 \times 10^{12}$ रेडियन/ सेकण्ड

प्रश्न 21 एक बेलन 30° कोण बनाते आनत तल पर लुढ़कता हुआ ऊपर चढ़ता है। आनत तल की तली में बेलन के द्रव्यमान केन्द्र की चाल 5m/ s है।

a. आनत तल पर बेलन कितना ऊपर जाएगा?
b. वापस तली तक लौट आने में इसे कितना समय लगेगा?

उत्तर-

a.

ऊर्जा संरक्षण सिद्धान्त से बेलन के ऊपर चढ़ने पर,

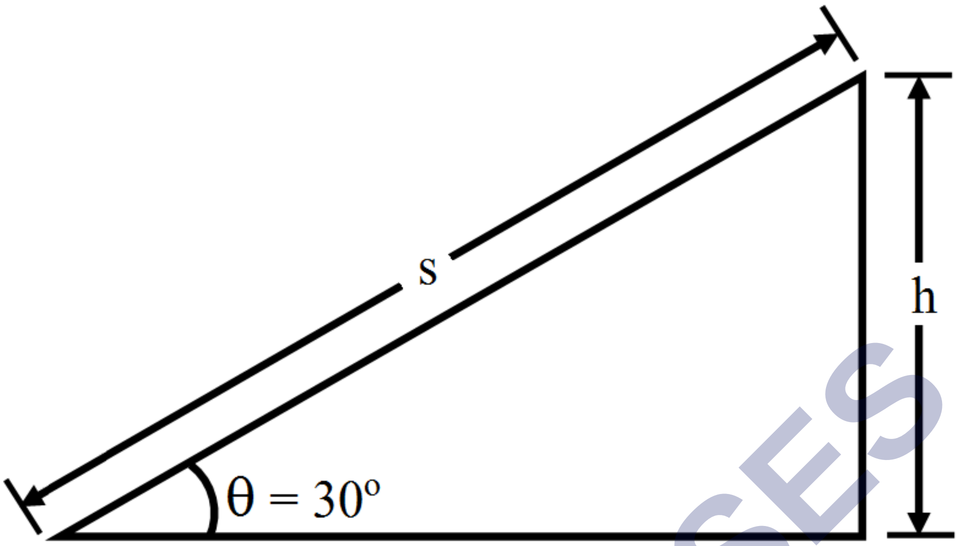
गतिज ऊर्जा में कमी = स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

अर्थात् $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mgh \ldots (1)$

ठोस बेलन का जड़त्व आघूर्ण $I = \frac{1}{2}MR^2$

तथा बिना फिसले लुढ़कने के लिए

$$v_{cm} = R\omega = \frac{vcm}{R}$$



एवं चित्र से,

$$h = s \sin 30^\circ = \frac{s}{2}$$

अत: समी. (1) में ये मान रखने पर,

$$\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 = Mg\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$\frac{3}{4}Mv_{cm}^2 = \frac{1}{2}mgs$$

$$\Rightarrow s = \frac{3v\ cm^2}{2g} = \left[\frac{3(5)^2}{2\times 9.8}\right]m$$

= 38 मीटर

b.

आनत तल पर मंदन, $a = \dfrac{g \sin \theta}{1 + \frac{K^2}{R^2}}$

परन्तु, बेलन के लिए $\frac{1}{2} MR^2 = MK^2$

$\dfrac{K^2}{R^2} = \dfrac{1}{2}$

तथा $\theta = 30^\circ$

$a = \dfrac{g \sin 30^\circ}{1 + \frac{1}{2}}$

$= \dfrac{g \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{g}{3}$

अतः सूत्र $s = ut + \frac{1}{2} at^2$ से

$a = 5 \times t + \frac{1}{2}\left(-\frac{g}{3}\right) . t^2$

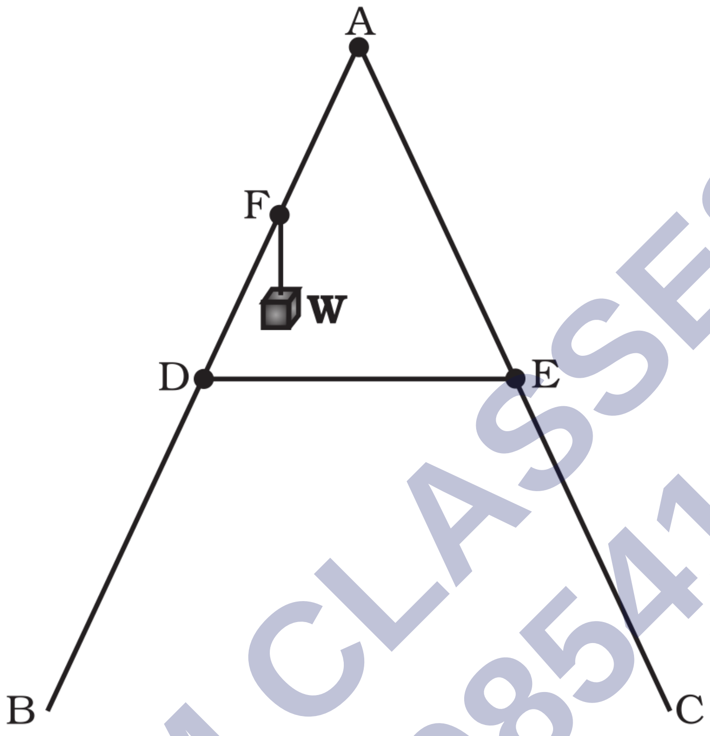
सरल करने पर, $t = \left(\dfrac{30}{g}\right)$ सेकण्ड $= \left(\dfrac{30}{g}\right)$ सेकण्ड

$= 3.06s \approx 3s$

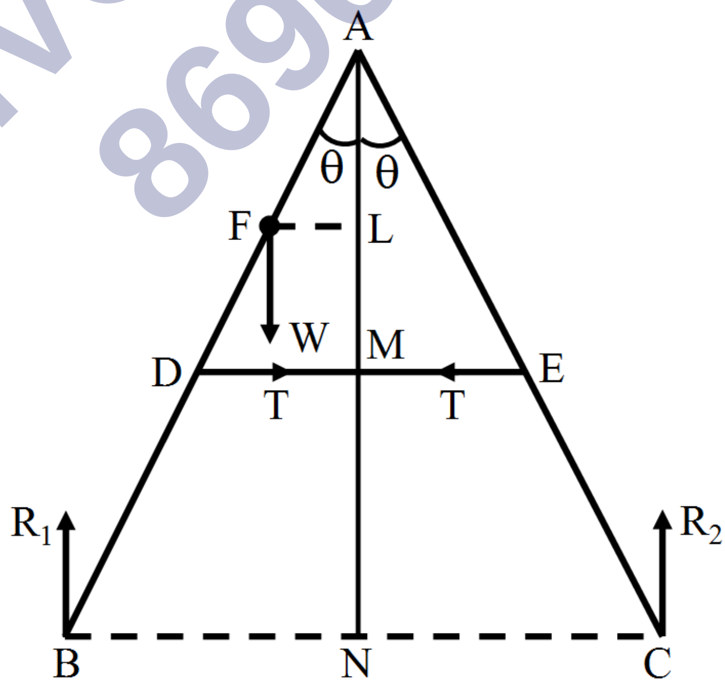
अतिरिक्त अभ्यास (पृष्ठ संख्या 184-186)

प्रश्न 22 जैसा चित्र में दिखाया गया है, एक खड़ी होने वाली सीढी के दो पक्षों BA और CA की लम्बाई 1.6m है और इनको A पर कब्जा लगाकर जोड़ा गया है। इन्हें ठीक बीच में 0.5m लम्बी रस्सी DE द्वारा बाँधा गया है। सीढ़ी BA के अनुदिश B से 1.2m की दूरी पर स्थित बिन्दु F से 40kg का एक भार लटकाया गया है। यह मानते हुए कि फर्श घर्षणरहित है और सीढी का भार

उपेक्षणीय है, रस्सी में तनाव और सीदी पर फर्श द्वारा लगाया गया बल ज्ञात कीजिए।($g = 9.8 m/s^2$ लीजिए) [संकेत : सीढ़ी के दोनों ओर के सन्तुलन पर अलग-अलग विचार कीजिए]



उत्तर- माना सीढ़ी के निचले सिरों पर फर्श की प्रतिक्रिया R1 तथा R2 है तथा डोरी का तनाव T है। माना सीढ़ी की दोनों भुजाएँ ऊध्वाधर से कोण से बनाती हैं



ऊर्ध्वाधर दिशा में सन्तुलित बलों के कारण $R_1 + R_2 = W = mg$

अर्थात् $R_1 + R_2 = 40kg \times 9.8ms^{-2} = 392N$ ...(1)

भुजा AB के घूर्णी सन्तुलन के लिए बिन्दु A के परित: आघूर्ण लेने पर ....(2)

T.AM +W.FL - R_1 - BN = 0

इसी प्रकार भुजा AC के घूर्णी सन्तुलन के लिए बिन्दु A के परित: आघूर्ण लेने पर

$$\mathrm{R_2NC - T.AM = 0\ldots(3)}$$

$$\mathrm{DM} = \frac{\mathrm{DE}}{2} = 0.5\mathrm{m}$$

तथा $\mathrm{AD} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = 1.6\mathrm{m}$

$\because \triangle\mathrm{ADM}$ में,

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{AD}} = \frac{0.25}{0.8} = 0.3125$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}(0.3125) = 18^\circ$$

$$\cos\theta = \cos 18^\circ = 0.95$$

तथा $\tan\theta = \tan 18^\circ = 0.33$

समीकरण (3) से,

$$\mathrm{T} = \mathrm{R_2}\left(\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{AM}}\right) = \mathrm{R_2}\left(\frac{\mathrm{AC}\sin\theta}{\mathrm{AE}\cos\theta}\right)$$

$$= \mathrm{R_2}\left(\frac{2\mathrm{AE}}{\mathrm{AE}}\tan\theta\right)$$

$$= 2\mathrm{R_2} \times 0.33 = 0.66\mathrm{R_2}$$

$$\mathrm{T.\,AD}\cos\theta + .\,\mathrm{W.\,AF}\sin\theta - \mathrm{R_1.\,AB}\sin\theta = 0$$

$$\mathrm{T}\times 0.8\cos\theta + \mathrm{W}\times 0.4\sin\theta - \mathrm{R_1}\times 1.6\sin\theta = 0$$

$$\because \mathrm{AF} = \mathrm{AB} - \mathrm{BF} = (1.6 - 1.2)\mathrm{m}$$

$$0.66\mathrm{R_2}\times 0.8\times 0.95 + 392\times 0.4\times 0.3125$$
$$-\mathrm{R_1}\times 1.6\times 0.3125 = 0$$

(T व W के मान रखने पर)

$$0.5\mathrm{R_2} + 49 - 0.5\mathrm{R_1} = 0$$

$$0.5\mathrm{R_1} - 0.5\mathrm{R_2} = 49$$

$$\mathrm{R_1} - \mathrm{R_2} = 98\mathrm{N}\ \ldots.(5)$$

समीकरण (1) से, हल करने पर

$$\mathrm{R_1} + \mathrm{R_2} = 392\mathrm{N}$$

$$\mathrm{R_1} = 245\mathrm{N}$$

तथा $\mathrm{R_2} = 147\mathrm{N}$

तथा समीकरण (4) से

$$\mathrm{T} = 0.66\mathrm{R_2} = 97\mathrm{N}$$

अतः रस्सी में तनाव 97N तथा फर्श द्वारा सीढ़ी की भुजाओ पर आरोपित बल क्रमशः 245N तथा 147N है।

प्रश्न 23 कोई व्यक्ति एक घूमते हुए प्लेटफॉर्म पर खड़ा है। उसने अपनी दोनों बाहें फैला रखी हैं और उनमें से प्रत्येक में 5kg भार पकड़ रखा है। प्लेटफॉर्म की कोणीय चाल 30 rev/ min है। फिर वह व्यक्ति बाहों को अपने शरीर के पास ले आता है जिससे घूर्णन अक्ष से प्रत्येक भार की दूरी 90cm से बदलकर 20cm हो जाती है। प्लेटफॉर्म सहित व्यक्ति के जड़त्व आघूर्ण का मान 7.6kg-m^2 ले सकते हैं।

a. उसका नया कोणीय वेग क्या है? (घर्षण की उपेक्षा कीजिए)

b. क्या इस प्रक्रिया में गतिज ऊर्जा संरक्षित होती है? यदि नहीं, तो इसमें परिवर्तन का स्रोत क्या है?

उत्तर-

a. प्रारम्भ में सम्पूर्ण निकाय [(व्यक्ति + प्लेटफॉर्म) + भार] का जड़त्व आघूर्ण

$$\mathrm{I}_1=\left(7.6 \mathrm{~kg}\text{-}\mathrm{m}^2\right)+\sum \mathrm{mr}^2$$

$$=7.6 \mathrm{~kg}\text{-}\mathrm{m}^2+2 \times \mathrm{mr}_1^2$$

$$=7.6 \mathrm{~kg}\text{-}\mathrm{m}^2+2 \times 5 \times(0.90)^2 \mathrm{~kg}\text{-}\mathrm{m}^2$$

$$=(7.6+8.1) \mathrm{kg}\text{-}\mathrm{m}^2=15.7 \mathrm{~kg}\text{-}\mathrm{m}^2$$

सम्पूर्ण निकाय का प्रारम्भिक कोणीय वेग $\omega_1=30$ चक्कर/ मिनट

सम्पूर्ण निकाय का अन्तिम जड़त्व आघूर्ण,

$$\mathrm{I}_2=7.6 \mathrm{~kg}\text{-}\mathrm{m}^2+2 \mathrm{mr}_2^2$$

$$=7.6 \mathrm{~kg}\text{-}\mathrm{m}^2+2 \times 5 \mathrm{~kg} \times(0.20 \mathrm{~m})^2$$

$$=(7.6+0.4) \mathrm{kg}\text{-}\mathrm{m}^2=8.0 \mathrm{~kg}\text{-}\mathrm{m}^2$$

माना निकाय का अन्तिम कोणीय वेग $=\omega_2$

कोणीय संवेग संरक्षण के सिद्धान्त से, $\mathrm{I}_1 \omega_1=\mathrm{I}_2 \omega_2$

$$\therefore \omega_2=\left(\frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}_2}\right) \omega_1=\left(\frac{15.7 \mathrm{~kg}\text{-}\mathrm{m}^2}{8.0 \mathrm{~kg}\text{-}\mathrm{m}^2}\right) \times 30 \text{ चक्कर/ मिनट}$$

= 589 चक्कर/ मिनट

b.

प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा $(K_{rot}) = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$

$\frac{1}{2} \times 15.7\text{kg-m}^2 \left(\frac{30}{60} \text{ per s}\right)^2 = 1.96\text{J}$

अन्तिम गतिज ऊर्जा $(K_{rot}) = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$

$\frac{1}{2} \times 8.0 \times \left(\frac{58.9}{60}\right)^2 \text{J} = 3.85\text{J}$

स्पष्ट है की $(K_{rot})_2 \neq (K_{rot})_1$ बल्कि $(K_{rot})_2 > (K_{rot})_1$

अत: इस प्रक्रिया में गतिज ऊर्जा संरक्षित नहीं रहती बल्कि बढ़ती है तथा इस परिवर्तन (वृद्धि) का स्रोत व्यक्ति की मांसपेशीय रासायनिक ऊर्जा का गतिज ऊर्जा में परिवर्तित होना है।

प्रश्न 24 10g द्रव्यमान और 500m/ s चाल वाली बन्दूक की गोली एक दरवाजे के ठीक केन्द्र में टकराकर उसमें अंतः स्थापित हो जाती है। दरवाजा 1.0m चौड़ा है और इसका द्रव्यमान 12kg है। इसके एक सिरे पर कब्जे लगे हैं और यह इनसे गुजरती एक ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः लगभग बिना घर्षण के घूम सकता है; गोली के दरवाजे में अन्तःस्थापना के ठीक बाद इसका कोणीय वेग ज्ञात कीजिए।

[संकेत: एक सिरे से गुजरती ऊध्वाधर अक्ष के परितः दरवाजे का जड़त्व-आघूर्ण $ML\frac{2}{3}$ है]

उत्तर- गोली का द्रव्यमान m = 10 ग्राम = 10 × 10-3 किग्रा

गोली की चाल v = 500 मी/ से

दरवाजे की चौड़ाई L = 1.0 मीटर

दरवाजे के एक सिरे से गुजरने वाले अक्ष के परितः दरवाजे का जड़त्व आघूर्ण

$I_0 = \frac{ML^2}{3}$ (जहाँ M = दरवाजे का द्रव्यमान = 12 किग्रा)

दरवाजे से गोली के टकराते क्षण दरवाजा स्थिर था तथा गोली गतिमान थी।

इस क्षण निकाय का कोणीय संवेग J1 = गोली का कोणीय संवेग = mur

जहाँ $r = \frac{L}{2}$ (चूँकि गोली दरवाजे के ठीक मध्य में टकराती है)

$\therefore J_1 = 10 \times 10^{-3kg} \times 500m/s \times \left(\frac{1.0}{2}\right)$

$\therefore$ = 2.5 किग्रा-मी^{2}/ से

जब गोली दरवाजे में अन्त: स्थापित हो जाती है तो (गोली + दरवाजा) निकाय अक्ष के परित: घूम जाता है।

माना इसका कोणीय वेग ω है।

इस स्थिति में निकाय का जड़त्व आघूर्ण = दरवाजे का जड़त्व आघूर्ण + गोली का जड़त्व आघूर्ण

$$= \left(\frac{ML^2}{3} + mr^2\right) = \left[\frac{12 \times 1^2}{3} + 10 \times 10^{-3} \times \left(\frac{1.0}{2}\right)^2\right] \text{kg-m}^2$$

$$= [4 + 2.5 \times 10^{-3}] \text{kg-m}^2 = 4.0025 \text{kg-m}^2$$

माना इस निकाय के घूर्णन का कोणीय वेग ω है।

अत: निकाय का कोणीय संवेग $J_2 = I\omega$

$$J_2 = (4.0025) \times \omega \text{kg-m}^2/\text{sec}$$

कोणीय संवेग-संरक्षण सिद्धान्त से $J_2 = J_1$

$$\therefore 4.0025 \times \omega = 2.5$$

अथवा

$$\omega = \left(\frac{2.5}{4.0025}\right) \text{redian} \backslash \text{ sec} = 0.6246 \text{ redian} \backslash \text{ sec}$$

$$\approx 0.625 \text{ redian} \backslash \text{ sec}$$

प्रश्न 25 दो चक्रिकाएँ जिनके अपने-अपने अक्षों (चक्रिका के अभिलम्बवत् तथा चक्रिका के केन्द्र से गुजरने वाले) के परितः जड़त्व-आघूर्ण I_1 तथा I_2 हैं और जो ω_1 तथा ω_2 कोणीय चालों से घूर्णन कर रही हैं, को उनके घूर्णन अक्ष सम्पाती करके आमने-सामने (सम्पर्क में) लाया जाता है।

a. इस दो चक्रिका निकाय की कोणीय चाल क्या है?
b. यह दर्शाइए कि इस संयोजित निकाय की गतिज ऊर्जा दोनों चक्रिकाओं की आरम्भिक गतिज ऊर्जाओं के योग से कम है। ऊर्जा में हुई इस हानि की आप कैसे व्याख्या करेंगे? $\omega_1 \neq \omega_2$ लीजिए।

उत्तर-

a. माना सम्पर्क में आने के पश्चात् दोनों चक्रिकाएँ उभयनिष्ठ कोणीय वेग ω से घूर्णन करती हैं।

∵ निकाय पर बाह्य बल आघूर्ण शून्य है, अतः निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहेगा।

$$\therefore \mathrm{I}_1\omega_1 + \mathrm{I}_2\omega_2 = (\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2)\omega$$

∴ निकाय की नई गतिज ऊर्जा

$$\omega = \frac{\mathrm{I}_1\omega_1 + \mathrm{I}_2\omega_2}{\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2}$$

b. निकाय की नई गतिज ऊर्जा

$$\mathrm{K}_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2)\left(\frac{\mathrm{I}_1\omega_1 + \mathrm{I}_2\omega_2}{\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{I}_1\omega_1 + \mathrm{I}_2\omega_2)^2}{\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2}$$

जबकि प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा

$$\mathrm{K}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{I}_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}\mathrm{I}_2\omega_2^2$$

$$\therefore \Delta\mathrm{K} = \mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{I}_1\omega_1^2 + \mathrm{I}_2\omega_2^2\right) - \left[\frac{(\mathrm{I}_1\omega_1 + \mathrm{I}_2\omega_2)^2}{2(\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2)}\right]$$

प्रश्न 26

a. लम्बवत् अक्षों के प्रमेय की उपपत्ति करें। [संकेत:(x, y) तल के लम्बवत् मूलबिन्दु से गुजरती अक्ष से किसी बिन्दु x - y की दूरी का वर्ग $(x^2 + y^2)$ है।

b. समान्तर अक्षों के प्रमेय की उपपत्ति करें। [संकेत: यदि द्रव्यमान केन्द्र को मूलबिन्दु ले लिया जाए $\sum \vec{m} i \vec{r} i = \vec{0}$

उत्तर-

a. लम्बवत् अक्षों की प्रमेय (Theorem of Perpendicular Axes)– इस प्रमेय के अनुसार, “किसी समपटल का उसके तल के लम्बवत् तथा द्रव्यमान केन्द्र से जाने वाली अक्ष के परितः जड़त्व-आघूर्ण (Is), समपटल के तल में स्थित तथा द्रव्यमान केन्द्र से जाने वाली दो परस्पर लम्बवत् अक्षों के परितः समपटल के जड़त्व-आघूर्णी (Ix तथा Iy) के योग के बराबर होता है”।

अर्थात् Iz = Ix + Iy

उपपत्ति- चित्र में x-y समतल में स्थित एक समपटल को प्रदर्शित किया गया है तथा x तथा y-अक्ष समपटल के द्रव्यमान केन्द्र से होकर गुजरती हैं।

माना समपटल के किसी कण P का द्रव्यमान m है जिसके निर्देशांक (x, y) हैं अर्थात् कण की x-अक्ष से दूरी y तथा y-अक्ष से दूरी x है। अत: x तथा y-अक्षों के परितः पटल के जड़त्व-आघूर्ण क्रमशः $I_x = \sum my^2$ तथा $I_y = \sum mx^2$ होंगे।

अब z-अक्ष पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरती है तथा x तथा y-अक्षों के लम्बवत् है; अत: समपटल के तल के भी लम्बवत् है।

माना कण की z-अक्ष से दूरी है, तब चित्र- से,

$r^2 = x^2 + y^2 \;\; \ldots .(1)$

अत: z-अक्ष के परितः पटल का जड़त्व-आघूर्ण

$$I_z = \sum mr^2 = \sum m(x^2 + y^2)$$ [समीकरण (1) से]

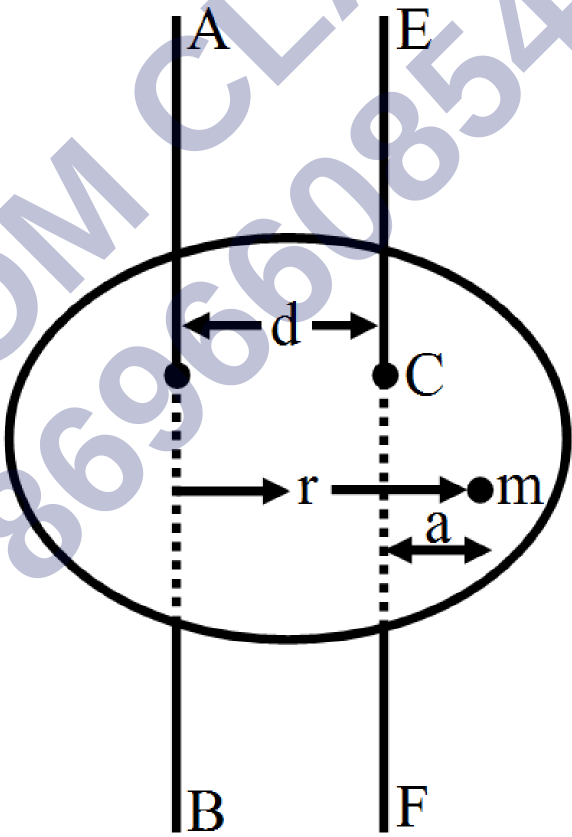
$$= \sum mx^2 + \sum my^2 = I_y + I_x$$

अर्थात्

$I_z = I_x + I_y$

b. समान्तर अक्षों की प्रमेय (Theorem of Parallel Axes)– इस प्रमेय के अनुसार, "किसी पिण्ड का किसी अक्ष के परितः जड़त्व-आघूर्ण I, उस पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र से होकर जाने वाली समान्तर अक्ष के परितः जड़त्व-आघूर्ण Icm तथा पिण्ड के द्रव्यमान M व दोनों समान्तर अक्षों के बीच की लम्बे दूरी d के वर्ग के गुणनफल के योग के बराबर होता है।"

अर्थात् $I = Icm + Md^2$



उपपत्ति- माना पिण्ड के भीतर स्थित m द्रव्यमान के किसी कण की दी गई अक्ष AB से दूरी r है तथा द्रव्यमान केन्द्र C से गुजरने वाली AB के समान्तर अक्ष EF से कण की दूरी a है। माना दोनों अक्षों AB व EF के बीच की लम्बवत् दूरी 4 है। तब चित्र से, r = a + d

अब अक्ष AB के परितः पिण्ड का जड़त्व-आघूर्ण

$$I = \sum mr^2 = \sum m(a+d)^2$$
$$= \sum m\left(a^2 + d^2 + 2ad\right)$$
$$= \sum ma^2 + \sum md^2 + 2\sum mad$$
$$= \sum ma^2 + d^2 \sum m + 2d \sum ma$$

लेकिन द्रव्यमान केन्द्र से जाने वाली किसी अक्ष के परितः पिण्ड के कणों के द्रव्यमानों के आघूर्णों का योग शून्य होता है, अर्थात्

$$\sum ma = 0$$

अत: समीकरण (1) से, $I = \sum ma^2 + d^2 \sum m = I_{cm} + Md^2$

जहाँ $\sum ma = 0$ पिण्ड का सम्पूर्ण द्रव्यमान है तथा $I_{cm} = \sum ma^2$

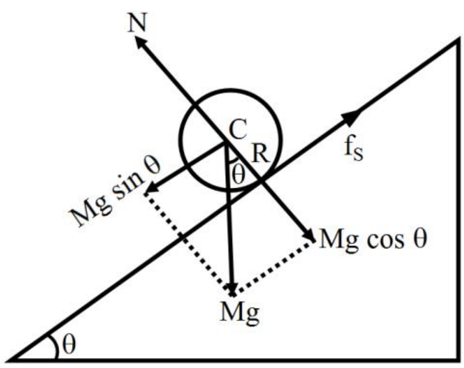
द्रव्यमान केन्द्र C से गुजरने वाली अक्ष CD के परितः पिण्ड का जड़त्व-आघूर्ण है।

अत:

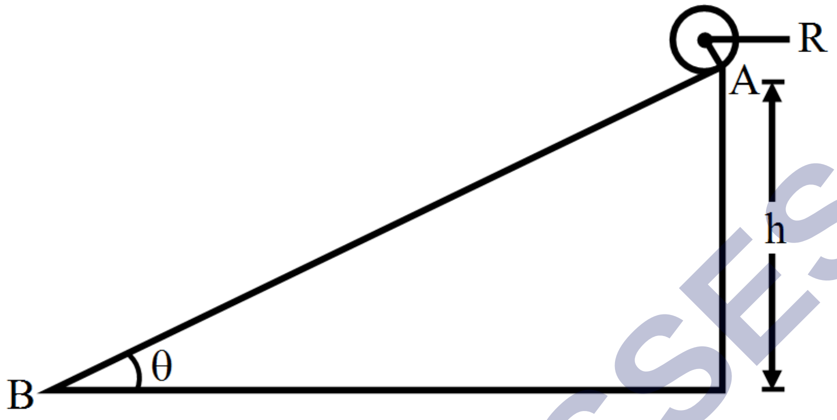
$$I = I_{cm} + Md^2$$

प्रश्न 27 सूत्र $U^2 = \frac{2gh}{1+\frac{K^2}{R^2}}$ को गतिकीय दृष्टि (अर्थात् बलों तथा बल-आघूर्गों विचार) से व्युत्पन्न कीजिए। जहाँ लोटनिक गति करते पिण्ड (वलय, डिस्क, बेलन या गोला) का आनत तल की तली में वेग है। आनत तल पर h वह ऊँचाई है जहाँ से पिण्ड गति प्रारम्भ करता है। K सममित अक्ष के परितः पिण्ड की घूर्णन त्रिज्या है और R पिण्ड की त्रिज्या है।

उत्तर-



माना M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या का कोई गोलीय पिण्ड, जिसका द्रव्यमान केन्द्र C है, ऐसे आनत तल पर लुढ़कता है, जो क्षैतिज से θ कोण पर झुका है।



जब वस्तु आनत तल की सर्वोच्चतम ऊँचाई पर है तब वस्तु में केवल स्थितिज ऊर्जा होगी जो इसकी कुल ऊर्जा के बराबर है।

∴ EA = mgh ...(i)

माना आनत तल की तली पर वस्तु का रेखीय तथा कोणीय वेग क्रमशः v तथा ω हैं।

ऊर्जा संरक्षण के नियमानुसार, $E_A = E_B$

$$\mathrm{mgh} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 + \frac{1}{2}\omega^2$$

(लेकिन वस्तु का जड़त्व आघूर्ण I = mk^2 तथा कोणीय वेग $\omega = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{R}}$ है)

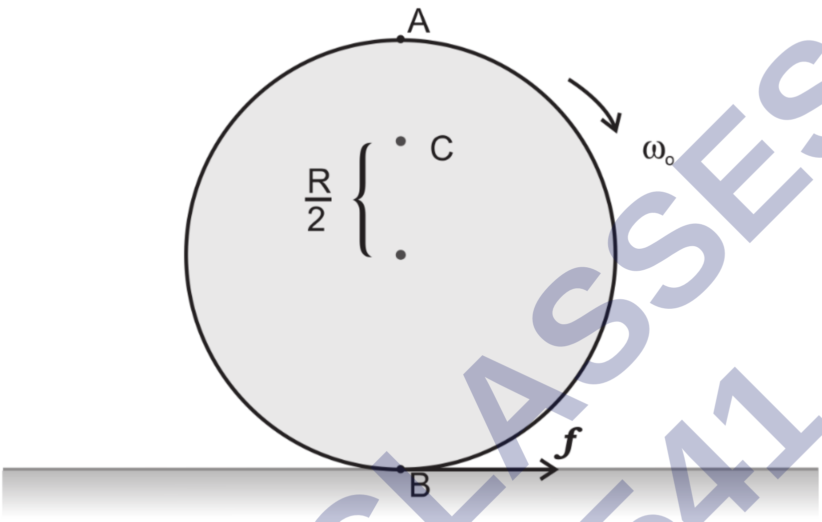
$$\mathrm{mgh} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{mK}^2) \times \left(\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}^2}\right)$$

$$\mathrm{mgh} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m}\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{R}^2}\mathrm{v}^2$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2\left(1 + \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{R}^2}\right)$$

$$\mathrm{v}^2 = \frac{2\mathrm{hg}}{\left(1+\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{R}^2}\right)}$$

प्रश्न 28 अपने अक्ष पर ω_0 कोणीय चाल से घूर्णन करने वाली किसी चक्रिका को धीरे से (स्थानान्तरीय धक्का दिए बिना किसी पूर्णतः घर्षणरहित मेज पर रखा जाता है। चक्रिका की त्रिज्या R , है। चक्रिका के बिन्दुओं A, B तथा C पर रैखिक वेग क्या हैं? क्या यहं चक्रिका चित्र में दर्शाई दिशा में लोटनिक गति करेगी?



उत्तर- चूँकि चक्रिका तथा मेज के बीच कोई घर्षण बल नहीं है; अतः चक्रिका लोटनिक गति नहीं कर पाएगी तथा मेज के एक ही बिन्दु B के संम्पर्क में रहते हुए अपनी अक्ष के परितः शुद्ध घूर्णी गति करती रहेगी।

बिन्दु A की अक्ष से दूरी = R

∴ बिन्दु A पर रैखिक वेग $v_A = R\omega_0$ तीर की दिशा में होगा।

इसी प्रकार बिन्दु B पर रैखिक वेग $vB = R\omega_0$

बिन्दु B पर दिखाए गए तीर के विपरीत दिशा में होगा।

∵ बिन्दु C की अक्ष से दूरी = R_2

∴ बिन्दु C पर रैखिक वेग $V_c = \frac{R}{2}\omega_0$ क्षैतिजतः बाएँ से दाएँ को होगा।

यह पहले ही स्पष्ट है कि चक्रिका लोटनिक गति नहीं करेगी।

प्रश्न 29 स्पष्ट कीजिए कि चित्र में अंकित दिशा में चक्रिका की लोटनिक गति के लिए घर्षण होना आवश्यक क्यों है?

a. B पर घर्षण बल की दिशा तथा परिशुद्ध लुढ़कन आरम्भ होने से पूर्व घर्षणी बल-आघूर्ण की दिशा क्या है?
b. परिशुद्ध लोटनिक गति आरम्भ होने के पश्चात् घर्षण बल क्या है?

उत्तर- चक्रिका मूलतः शुद्ध घूर्णी गति कर रही है जबकि लोटनिक गति प्रारम्भ होने का अर्थ घूर्णी गति के साथ-साथ स्थानान्तरीय गति का भी होना है, परन्तु स्थानान्तरीय गति प्रारम्भ होने के लिए बाह्य बल आवश्यक है। अत: चक्रिका की लोटनिक गति होने के लिए घर्षण बल (वर्णित परिस्थिति में एकमात्र बाह्य बले घर्षण बल ही हो सकता है) आवश्यक है।

a. बिन्दु B पर घर्षण बल की दिशा तीर द्वारा प्रदर्शित दिशा में (बिन्दु B की अपनी गति की दिशा के विपरीत) है जबकि घर्षण बल के कारण उत्पन्न बल-आघूर्ण की दिशा कागज के तल के लम्बवत् बाहर की ओर है।
b. घर्षण बल बिन्दु B को मेज के सम्पर्क बिन्दु के सापेक्ष विराम में लाना चाहता है, जब ऐसा हो जाता है तो परिशुद्ध लोटनिक गति प्रारम्भ हो जाती है।

अब चूँकि सम्पर्क बिन्दु पर कोई सरकन नहीं है; अतः घर्षण बल शून्य हो जाता है।

प्रश्न 30 10cm त्रिज्या की कोई ठोस चक्रिका तथा इतनी ही त्रिज्या का कोई छल्ला किसी क्षतिज मेज पर एक ही क्षण 10π rad s^{-1} की कोणीय चाल से रखे जाते हैं। इनमें से कौन पहले लोटनिक गति आरम्भ कर देगा। गतिज घर्षण गुणांक $\mu_k = 0.2$

उत्तर- माना मेज पर रखे जाने के t s पश्चात् कोई पिण्ड लोटनिक गति प्रारम्भ करता है। द्रव्यमान केन्द्र की स्थानान्तरीय गति प्रारम्भ कराने के लिए आवश्यक बल घर्षण बल से मिलता है। यदि इस दौरान द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण a है तो

F = ma से, $\mu_k mg = ma$

$$\Rightarrow \mu_k g = a \ldots (1)$$

घर्षण बल पिण्ड की घूर्णी गति को मन्दित करता है। माना इस दौरान पिण्ड का कोणीय मन्दन a है तो घर्षण बल का द्रव्यमान केन्द्र के परितः आघूर्ण लेने पर,

$$\mu_k mg \times R = -Ia \ldots (3)$$

t समय में द्रव्यमान केन्द्र द्वारा प्राप्त वेग

$$v = at \Rightarrow v = \mu_k gt \ldots (3)$$

माना t समय पश्चात् पिण्ड का कोणीय वेग ω रह जाता है तो

$\omega = \omega_0 + at$ में,

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{\mu_k mgR}{I}\right)t$$ समीकरण (2) से मान रखने पर,

R से गुणा करने पर, $R\omega = R\omega_0 - \left(\frac{\mu_k mgR^2}{I}\right)t$

लोटनिक गति तब प्रारम्भ होगी जबकि $v = R\omega$

अतः $\mu_k gt = R\omega_0 - \left(\frac{\mu_k mgR^2}{I}\right)t$

$$\Rightarrow \mu_k gt\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right) = R\omega_0 \ldots (5)$$

यहाँ $\omega_0 = 10 \text{ rad s}^{-1}, \mathrm{R} = 0.1\mathrm{m}, \mathrm{g} = 9.8\mathrm{m/s}^{-2}$

ठोस चक्रिका के लिए $\mathrm{I} = \frac{1}{2}\mathrm{MR}^2 \therefore \frac{\mathrm{MR}^2}{\mathrm{I}} = 2$

छल्ले के लिए $\mathrm{I} = \mathrm{mR}^2 \therefore \frac{\mathrm{MR}^2}{\mathrm{I}} = 1$

अतः समीकरण (5) से चक्रिका के लिए

$$0.2 \times 9.8 \times \mathrm{t}(1+2) = 0.1 \times 10$$

$$\Rightarrow \mathrm{t} = \frac{0.1 \times 10}{0.2 \times 9.8 \times 3} = 0.17\mathrm{s}$$

छल्ले के लिए $0.2 \times 9.8 \times \mathrm{t}(1+1) = 0.1 \times 10$

$$\Rightarrow \mathrm{t} = \frac{0.1 \times 10}{0.2 \times 9.8 \times 3} = 0.25\mathrm{s}$$

चक्रिका तथा छल्ले को लोटनिक गति' प्रारम्भ करने में क्रमशः 0.17s तथा 0.25s लगेंगे।

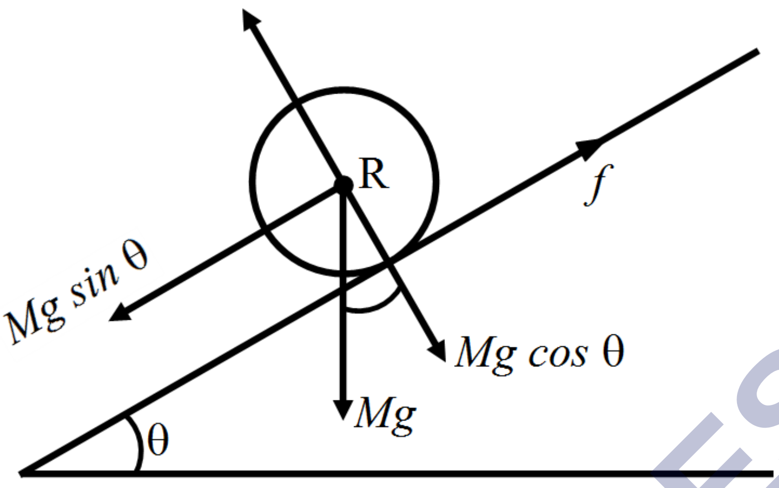
स्पष्ट है कि चक्रिको पहले लोटनिक गति प्रारम्भ करेगी।

प्रश्न 31 10kg द्रव्यमान तथा 15cm त्रिज्या का कोई सिलिण्डर किसी 30° झुकाव के समतल पर परिशुद्धतः लोटनिक गति कर रहा है। स्थैतिक घर्षण गुणांक μs = 0.25 है

a. सिलिण्डर पर कितना घर्षण बल कार्यरत है?
b. लोटन की अवधि में घर्षण के विरुद्ध कितना कार्य किया जाता है?
c. यदि समतल के झुकाव θ में वृद्धि कर दी जाए तो के किस मान पर सिलिण्डर परिशुद्धतः लोटनिक गति करने की बजाय फिसलना आरम्भ कर देगा?

उत्तर-

a.



चित्र से,

नत समतल के लम्बवत् सिलिण्डर की सन्तुलन अवस्था में

N = Mg cosθ

तथा नत समतल के समान्तर गति के लिए

Mg sinθ – f = M a ....(1)

जहाँ a = सिलिण्डर का रेखीय त्वरण है

जबकि $\mathrm{a}=\frac{\mathrm{g} \sin \theta}{\left(1+\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{R}^2}\right)}$

परन्तु सिलिण्डर के लिए, $\frac{1}{2} \mathrm{MR}^2=\mathrm{MK}^2$

$\Rightarrow \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{R}^2}=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{a}=\frac{\mathrm{g} \sin \theta}{\left(1+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3} \mathrm{g} \sin \theta$

$$= \frac{1}{3} \mathrm{Mg} \sin \theta$$

जहाँ $\mathrm{M} = 10\mathrm{kg}, \theta = 30^\circ$

अतः $\mathrm{F} = \frac{1}{3} \times 10 \times 9.8 \times \sin 30^\circ \mathrm{N}$

$$= \left(\frac{1}{3} \times 10 \times 9.8 \times \frac{1}{2}\right) \mathrm{N}$$

$$= 16.3\mathrm{N}$$

b. परिशुद्ध लुढ़कने के लिए सिलिण्डर के निम्नतम बिन्दु समतल के पृष्ठ के सापेक्ष विराम में हैं। अत: घर्षण के विरुद्ध कृत कार्य शून्य है।

c. यदि , $f_s \geq f$ तो सिलिण्डर लुढ़कने के बजाय फिसलना प्रारम्भ कर देगा।

अत:

$$\mu_s \mathrm{Mg} \cos \theta \leq \frac{1}{3} \mathrm{Mg} \sin \theta$$

अर्थात् $\tan \theta \geq 3\mu_s = 3 \times 0.25 = 0.75$

$$\therefore \theta \geq \tan^{-1}(0.75) = 37^\circ$$

प्रश्न 32 नीचे दिए गए प्रत्येक प्रकथन को ध्यानपूर्वक पढिए तथा कारण सहित उत्तर दीजिए कि इनमें से कौन-सा सत्य है और कौन-सा असत्य?

a. लोटनिक गति करते समय घर्षण बल उसी दिशा में कार्यरत होता है जिस दिशा में पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र गति करता है।

b. लोटनिक गति करते समय सम्पर्क बिन्दु की तात्क्षणिक चाल शून्य होती है।

c. लोटनिक गति करते समय सम्पर्क बिन्दु का तात्क्षणिक त्वरण शून्य होता है।

d. परिशुद्ध लोटनिक गति के लिए घर्षण के विरुद्ध किया गया कार्य शून्य होता है।

e. किसी पूर्णतः घर्षणरहित आनत समतल पर नीचे की ओर गति करते पहिये की गति फिसलन गति (लोटनिक गति नहीं) होगी।

उत्तर-

a. सत्य, क्योंकि घर्षण बल ही पिण्ड में स्थानान्तरीय गति उत्पन्न करता है और इसी बल के कारण पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र आगे की ओर बढ़ता है।

b. सत्य, जब सम्पर्क बिन्दु की सप गति समाप्त हो जाती है तभी लोटनिक गति प्रारम्भ होती है; अतः परिशुद्ध लोटनिक गति में सम्पर्क बिन्दु की तात्क्षणिक चाल शून्य होती है।

c. असत्य, चूँकि वस्तु घूर्णन गति कर रही है; अतः सम्पर्क बिन्दु की गति में अभिकेन्द्र त्वरण अवश्य ही विद्यमान रहता है।

d. सत्य, परिशुद्ध लोटनिक गति में सम्पर्क बिन्दु पर कोई सरकन नहीं होता; अतः घर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य शून्य होता है।

e. सत्य, घर्षण के अभाव में, आनत तल पर छोड़े गए पहिये का आनत तल के साथ सम्पर्क बिन्दु विराम में नहीं रहेगा अपितु पहिया भार के अधीन आनत तल के अनुदिश फिसलता जाएगा। अतः यह गति विशुद्ध सरकन गति होगी, लोटनिक नहीं।

प्रश्न 33 कणों के किसी निकाय की गति को इसके द्रव्यमान केन्द्र की गति और द्रव्यमान केन्द्र के परितः गति में अलग-अलग करके विचार करना। दर्शाइए कि –

a. $\vec{P} = \vec{P_i} = \overline{m_i \vec{v}}$

जहाँ है $\vec{P_i}$ (mi द्रव्यमान वाले) i-वे कण का संवेग है और $\vec{P_i} = m_i \overrightarrow{v'_i}$ ध्यान दें कि $\overrightarrow{v'i}$ द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष i- वे कण का वेग है।

द्रव्यमान केन्द्र की परिभाषा का उपयोग करके यह भी सिद्ध कीजिए कि $\sum\ \overrightarrow{P'i} = 0$

b. $K = K' + \frac{1}{2} MV^2$

K कणों के निकाय की कुल गतिज ऊर्जा, K' = निकाय की कुल गतिज ऊर्जा जबकि कणों की गतिज ऊर्जा द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष ली जाए। $\frac{MV^2}{2}$ सम्पूर्ण निकाय के (अर्थात् निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के) स्थानान्तरण की गतिज ऊर्जा है। इसका परिणाम का उपयोग भाग 7.14 में किया गया है।

c. $\vec{L} = \vec{L'} + \vec{R} \times M\overrightarrow{V^2}$

जहाँ $L' = \sum \vec{Li} \times \vec{p'i}$ द्रव्यमान के परितः निकाय का कोणीय संवेग है जिसकी गणना में वेग द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष मापे गए हैं। याद कीजिए $\vec{ri} = \vec{ri} - \vec{R}$ शेष सभी चिह्न अध्याय में प्रयुक्त विभिन्न राशियों के मानक चिह्न हैं। ध्यान दें कि $\vec{L'}$ द्रव्यमान केन्द्र के परितः निकाय का कोणीय संवेग एवं $M\,\vec{R} \times \vec{V}$ इसके द्रव्यमान केन्द्र का कोणीय संवेग है।

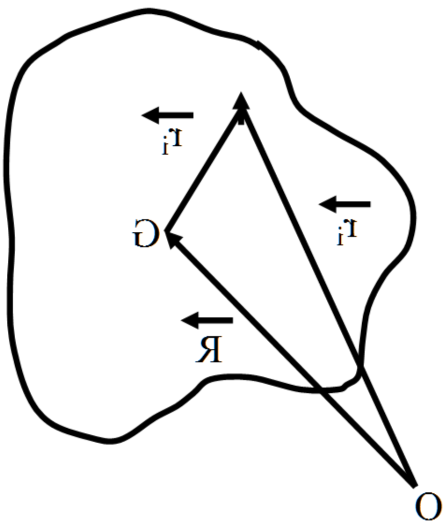
d. $\frac{d\vec{L'}}{dt} = \sum \vec{r'i} \times \frac{d\vec{p'}}{dt}$ यह भी दर्शाइए की: $\frac{d\vec{L'}}{dt} = \overrightarrow{\tau ext}$

$= \overrightarrow{\tau ext}$ द्रव्यमान केन्द्र के परितः निकाय पर लगने वाले सभी बाह्य बल आघूर्ण हैं।)

[संकेत – दव्यमान केन्द की परिभाषा एवं न्यूटन के गति के तृतीय नियम का उपयोग कीजिए। यह मान लीजिए कि किन्ही दो कणों के बीच के आन्तरिक बल उनको मिलाने वाली रेखा के अनुदिश कार्य करते हैं।]

उत्तर-

a.



माना एक दृढ़ पिण्ड n कणों से मिलकर बना है जिनके द्रव्यमान क्रमशः m1, m2 ....., mi ....., mn, हैं तथा मूलबिन्दु 0 के सापेक्ष इन कणों के स्थिति सदिश क्रमशः

$\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_i}, \ldots, \overrightarrow{r_n}$ है

माना मूलबिन्दु के सापेक्ष पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र G का स्थिति सदिश k है तथा द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष अलग-अलग कणों की स्थिति क्रमशः

$\overrightarrow{r'_1}, \overrightarrow{r'_2}, \overrightarrow{r'_i}, \ldots, \overrightarrow{r'_n}$ हैं।

तब $\overrightarrow{r_i} = \vec{R} + \overrightarrow{r'_i}$

$$\Rightarrow m_i \overrightarrow{r_i} = m_i \vec{R} + m_i \overrightarrow{r'_i}$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$m_i \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} = m_i \frac{d\vec{R}}{dt} + m_i \frac{d\overrightarrow{r'_i}}{dt} \ldots (1)$$

परन्तु $m_i \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} = m_i \vec{v}_i = i$ कण का मूलबिन्दु के सापेक्ष रेखीय संवेग $= \overrightarrow{p_i}$

तथा $m_i \frac{d\vec{R}}{dt} = m_i \vec{V}$ जहाँ $\vec{V}$ = द्रव्यमान केन्द्र का वेग है।

तथा $m_i \frac{d\overrightarrow{r'_i}}{dt} = m_i \overrightarrow{V'_i} = \overrightarrow{p'_i} = i$ वे कण का द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष रैखिक संवेग है

$\therefore$ समीकरण (1) से,

$$\vec{p}_i = m_i \vec{V} + \overrightarrow{p'_i} \ldots (2)$$

$\because$ द्रव्यमान केन्द्र के परितः कणों के आघूर्णों का सदिश योग शून्य होता है; अतः

$$\sum m_i \overrightarrow{r'} = \vec{0}$$

समय t के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$$\sum m_i \frac{d\vec{r_i'}}{dt} = \vec{0} \text{ या } \sum m_i \vec{v_i'} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{p_i'} = \vec{0}$$

b.

$$\because \vec{r_i} = \vec{R} + \vec{r_i} \Rightarrow \frac{d\vec{r_i}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r_i}}{dt}$$

$$\text{या } \vec{v_i} = \vec{V} + \vec{v_i'}$$

$$\therefore v_i^2 = \vec{v_i} \cdot \vec{v_i} = (\vec{V} + \vec{V_i}) \cdot (\vec{V} + \vec{V_i})$$

$$= \vec{V}.\vec{V} + 2\vec{V}.\vec{V_i} + \vec{V_i}.\vec{V_i} = V^2 + 2\vec{V}.\vec{V_i} + V_i'^2$$

$\therefore$ i वें कण की गतिज ऊर्जा

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i V^2 + m_i \vec{V}.\vec{V_i} + \frac{1}{2}m_i V_i'^2$$

सम्पूर्ण पिंड की गतिज ऊर्जा

$$K = \sum K_i = \sum\left(\frac{1}{2}m_i V^2 + m_i \vec{V}.\vec{V_i} + \frac{1}{2}m_i V_i'^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}V^2 \sum m_i + \vec{V}.\sum m_i \vec{V_i} + \sum \frac{1}{2}m_i V_i'^2$$

$$= \frac{1}{2}MV^2 + \vec{V}.\sum \vec{P_i} + K'$$

जहाँ $\sum m_i = M$ पुरे पिंड का द्रवमान है तथा $\sum \frac{1}{2}m_i V_i'^2$, द्रव्यमान केंद्र के सापेक्ष पुरे पिण्ड की गतिज ऊर्जा (घूर्णी) है तथा $\frac{1}{2}MV^2$ द्रव्यमान केंद्र की स्थनांतरित गतिज ऊर्जा है।

$$\because \sum \vec{p_i'} = \vec{0}$$

$\therefore$ पुरे पिंड की गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + K'$$

c. समीकरण (2) में बाईं ओर से $\vec{r_i}$ का वेक्टर गुणन करने पर,

$$\vec{r_i} \times \vec{p_i} = \vec{r_i} \times \left[m_i\vec{V} + m_i\vec{V_i'}\right]$$

$$\text{या } \vec{L_i} = \left(\vec{R} + \vec{r_i'}\right) \times \left[m_i\vec{V} + m_i\vec{V_i'}\right]$$

$$= \vec{R} \times m_i\vec{V} + \vec{R} \times m_i\vec{V_i'} + \vec{r_i'} \times m_i\vec{V} + \vec{r_i'} \times m_i\vec{V_i'}$$

इस समीकरण का सभी कणों के लिए योग करने पर,

$$\sum \vec{L_i} = \sum \vec{R} \times m_i\vec{V} + \sum \vec{R} \times m_i\vec{V_i'} + \sum \vec{r_i'} \times m_i\vec{V} + \sum \vec{r_i'} \times m_i\vec{V_i'}$$

$$\text{या } \vec{L} = \vec{R} \times \left(\sum m_i\right)\vec{V} + \vec{R} \times \left(\sum m_i\vec{V_i'}\right) + \left(\sum m_i\vec{r_i'}\right) \times \vec{V} + \sum \vec{r_i'} \times \vec{p_i'}$$

$$= \vec{R} \times M\vec{V} + \vec{R} \times \sum \vec{p_i'} + \sum r_i' \times \vec{p_i'} \left[\because \sum m_i\vec{r_i'} = \vec{0}\right]$$

$$\text{या } \vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum \vec{r_i'} \times \vec{p_i'} \left[\because \sum \vec{p_i'} = \vec{0}\right]$$

$$\text{या } \vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V} + \vec{L}$$

यहाँ $\vec{L}$ सम्पूर्ण पिण्ड का मूलबिन्दु के परितः कोणीय संवेग है तथा $\vec{R} \times M\vec{V}$, द्रव्यमान केन्द्र का मूल बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग है तथा $\sum \vec{r'}_i \times \vec{p'}_i = \vec{L'}$ पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग है।

d.

$$\text{पुनः} \because \vec{L'} = \sum \vec{r'} \times \vec{p'}_i$$

$\therefore$ समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d\vec{L'}}{dt} = \sum \left[\frac{d\vec{r'}_i}{dt} \times \vec{p'}_i + \vec{r'}_i \times \frac{d\vec{p_i'}}{dt}\right]$$

$$= \sum \vec{V'}_i \times (m_i\vec{V_i}) + \sum \vec{r'}_i \times \frac{d\vec{p_i'}}{dt}$$

या $\frac{d\overrightarrow{L_i'}}{dt} = \sum \overrightarrow{r'}_i \times \frac{d\overrightarrow{p_i'}}{dt}$

$\left[\because \overrightarrow{V'}_i \times m_i \overrightarrow{V'}_i = m_i(\vec{V} \times \vec{V}_i) = \vec{0}\right]$

अथवा

$$\frac{d\overrightarrow{L_i'}}{dt} = \sum \overrightarrow{r'}_i \times \vec{F}_i$$

$\frac{d\overrightarrow{p_i'}}{dt} = \overrightarrow{F'}_i$,i, वें कण पर कार्यरत नेट बल है। माना इस कण पर अन्य कणों के द्वारा आन्तरिक आरोपित बलों का परिणामी $\overrightarrow{F_{i(internal)}}$

तथा बाह्य आरोपित बल में $\vec{F}_{i(external)}$ है, तब

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i(internal)} + \vec{F}_{i(external)}$$

तब $\frac{d\overrightarrow{L_i'}}{dt} = \sum \overrightarrow{r'}_i \times \vec{F}_{i(internal)} + \sum \overrightarrow{r'}_i \times \vec{F}_{i(external)}$

परन्तु सभी कणों पर आरोपित आन्तरिक क्रिया-प्रतिक्रिया बल सन्तुलन में होते हैं तथा द्रव्यमान केन्द्र के परितः इन बलों के आघूर्णों का सदिश योग शून्य होता है।

अर्थात

$$\sum \overrightarrow{r'}_i \times \vec{F}_{i(internal)} = \vec{0}$$

जबकि

$$\sum \overrightarrow{r'}_i \times \vec{F}_{i(external)} = \vec{0}$$

जहाँ $\vec{\tau}_{ext}$ पिण्ड पर आरोपित बाह्य बल का द्रव्यमान केन्द्र के परित: आपूर्ण है।

अत: $\frac{d\overrightarrow{L_i'}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}$