

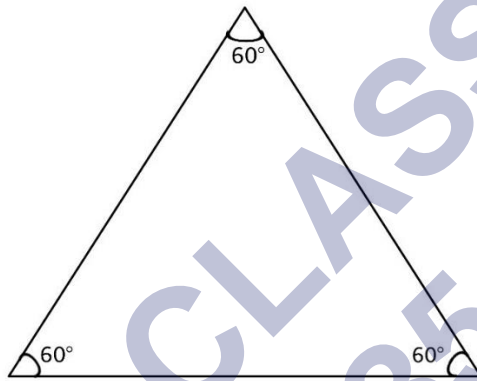
गणित

अध्याय-6: त्रिभुज



त्रिभुज क्या है

तीन रेखाखण्डों से घिरी हुई समतलीय आकृति त्रिभुज कहलाती है। त्रिभुज को Δ से निरूपित किया जाता है। एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ, तीन कोण और तीन शीर्ष होते हैं। त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।



ΔABC एक समकोणिक त्रिभुज है।
यह एक न्यूनकोण त्रिभुज भी है।

त्रिभुजों का वर्गीकरण

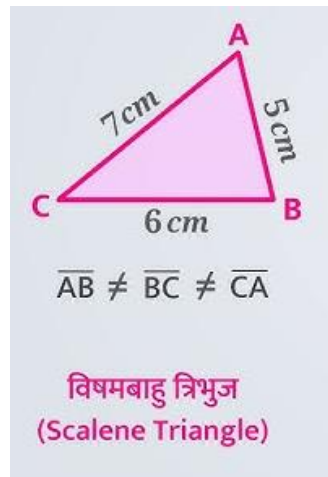
त्रिभुजों का वर्गीकरण निम्नलिखित दो आधार पर किया जा सकता है:

- (i) भुजाओं के आधार पर
- (ii) कोणों के आधार पर

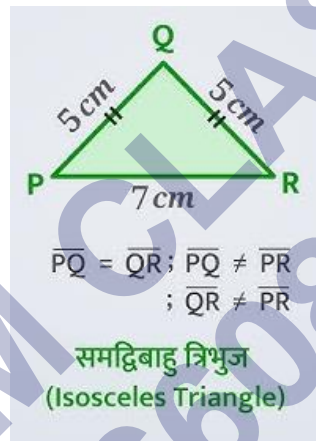
भुजाओं के आधार पर त्रिभुज

भुजाओं के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं:

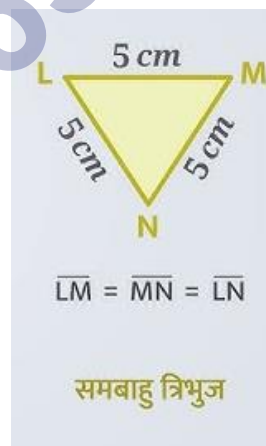
- विषमबाहु त्रिभुज



- समद्विबाहु त्रिभुज



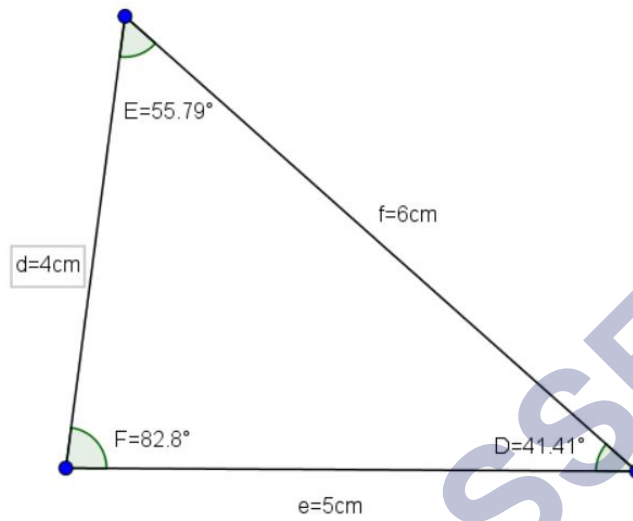
- समबाहु त्रिभुज



कोणों के आधार पर त्रिभुज

कोणों के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं:

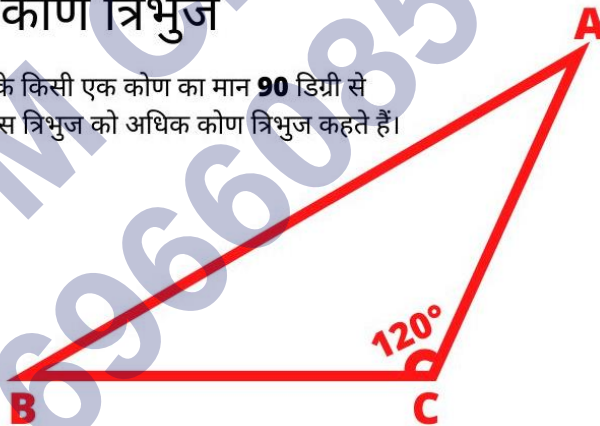
- न्यून कोण त्रिभुज



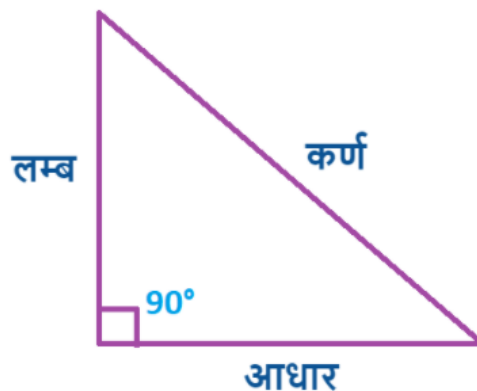
- अधिक कोण त्रिभुज

अधिक कोण त्रिभुज

जिस त्रिभुज के किसी एक कोण का मान **90** डिग्री से अधिक होता है उस त्रिभुज को अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं।



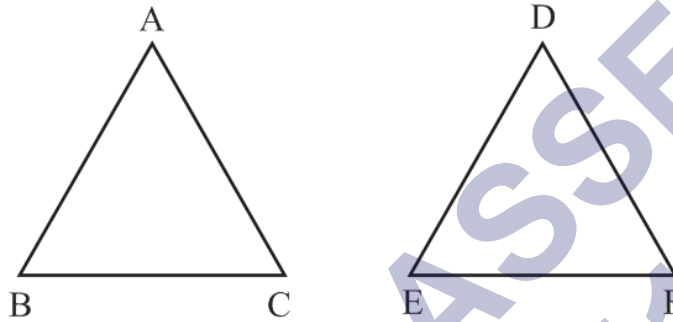
- समकोण त्रिभुज



सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं, परंतु सभी समरूप आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।

सर्वांगसम त्रिभुज

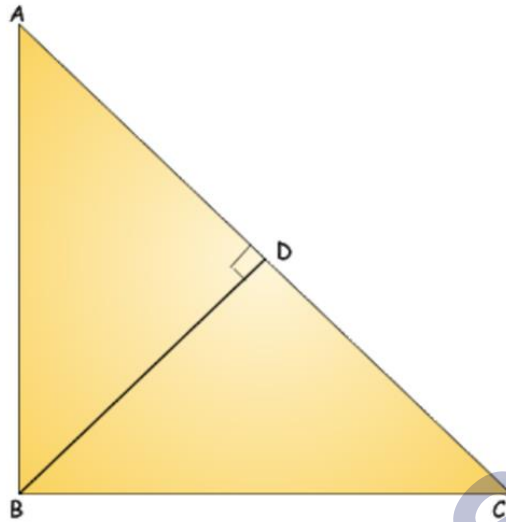
जब दो त्रिभुज की सारी भुजाओं एवं कोणों का माप समान होता है तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



समरूप त्रिभुज

दो त्रिभुज समरूप होंगे यदि

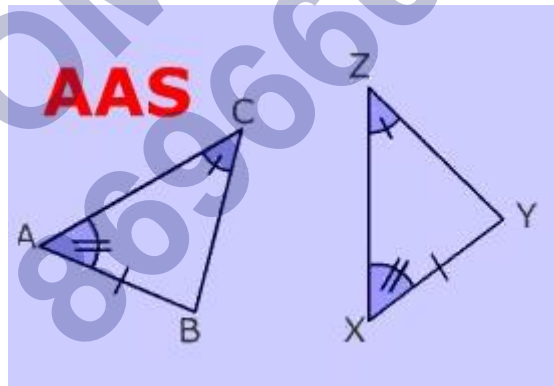
- (i) यदि दो त्रिभुजों में, संगत कोण समान हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।
- (ii) यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।
- (iii) यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा उन कोणों को बनाने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।



सर्वांगसमता के प्रकार

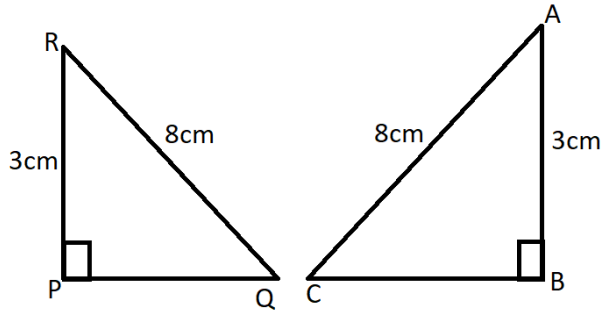
(i) AAS (कोण-कोण-भुजा):

यदि दो त्रिभुजों के कोणों के दो युग्म माप में बराबर हों, और संगत गैर-शामिल भुजाओं का एक युग्म लंबाई में बराबर हो, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। ...



(ii) RHS (समकोण-कर्ण-पक्ष):

यदि दो समकोण त्रिभुजों के कर्णों की लंबाई समान है, और छोटी भुजाओं का एक युग्म लंबाई में समान है, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



RHS नियम से
 $\Delta PQR \cong \Delta ABC$

(समकोण त्रिभुज में RHS सर्वांगसमता नियम)

कोणों के आधार पर त्रिभुज के प्रकार

कोणों के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं:

1. **न्यून कोण त्रिभुज:** (उस त्रिभुज को कहते हैं जिसके तीनों कोण, न्यूनकोण (90° से कम) हों।)
2. **अधिक कोण त्रिभुज:** (उस त्रिभुज को कहते हैं जिसका कोई एक कोण, अधिककोण (90° से अधिक) हो।)
3. **समकोण त्रिभुज:** (जिसका एक कोण 90 अंश का (अर्थात, समकोण) हो।)

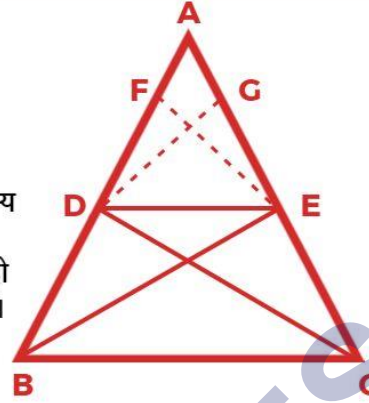
थेल्स (Thales) के प्रमेय

ज्यामिति में थेल्स के प्रमेय (Thales' theorem) के अनुसार किसी भी वृत्त के परिधि पर स्थित तीन बिन्दुओं A, B तथा C हो तो कोण ABC का मान 90 अंश होगा यदि AC उस वृत्त का कोई व्यास हो। यह प्रमेय 'अन्तःनिर्मित कोण प्रमेय' (inscribed angle theorem) का एक विशेष रूप है।

थेल्स प्रमेय

कथन :-

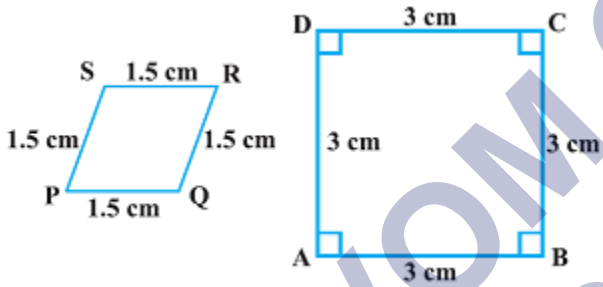
यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

प्रश्न

बताइए कि निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप हैं या नहीं:



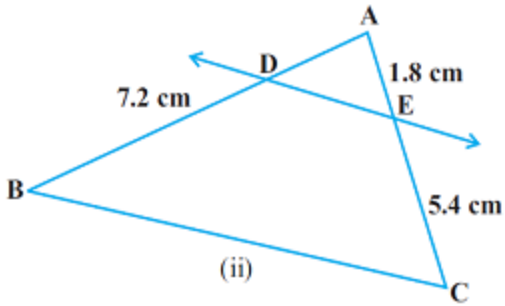
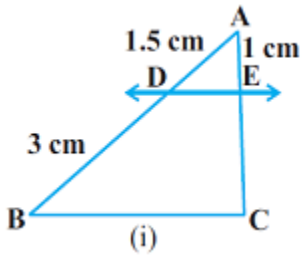
हल:

दिये गये चतुर्भुज समरूप नहीं है।

चूँकि दोनों आकृतियों के संगत भुजा समानुपाती हैं परंतु संगत कोण बराबर नहीं हैं।

प्रश्न

आकृति (i) और (ii) में, $DE \parallel BC$ है। (i) में EC और (ii) में AD ज्ञात कीजिए:



हल:

दिया गया है:

चित्र (i) में

$$AD = 1.5 \text{ cm}$$

$$DB = 3 \text{ cm}$$

$$AE = 1 \text{ cm}$$

तथा $DE \parallel BC$

तब $EC = ?$

अतः थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

चित्र से AD, DB तथा AE का मान रखने पर,

$$\frac{1.5 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{1 \text{ cm}}{EC}$$

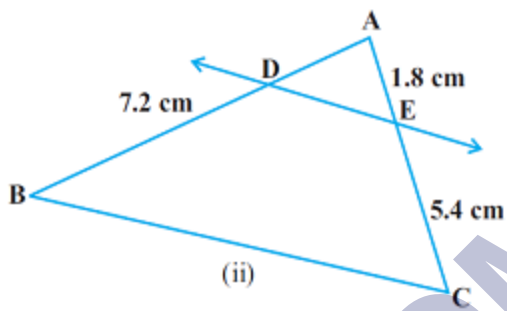
बज्र गुणन (Cross multiplication) करने पर हम पाते हैं कि

$$EC \times 1.5 \text{ cm} = 3 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow EC = \frac{3 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}}{1.5 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow EC = 2 \text{ cm}$$

चित्र (ii) में:



$$DB = 7.2 \text{ cm}$$

$$AE = 1.8 \text{ cm}$$

$$EC = 5.4 \text{ cm} \text{ तथा}$$

$$DE \parallel BC$$

तब, $AD = ?$

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

DB, AE तथा EC का मान रखने पर, हम पाते हैं कि

$$\frac{AD}{7.2 \text{ cm}} = \frac{1.8 \text{ cm}}{5.4 \text{ cm}}$$

बज्र गुणन (Cross multiplication) करने पर हम पाते हैं कि

$$AD = \frac{1.8 \text{ cm} \times 7.2 \text{ cm}}{5.4 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow AD = 2.4 \text{ cm}$$

अतः (i) में EC = 2 cm और (ii) में AD = 2.4 cm उत्तर

प्रश्न

किसी $\triangle PQR$ की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या EF \parallel QR है:

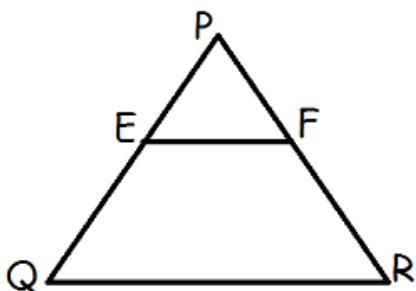
(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm और FR = 2.4 cm

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm और RF = 9 cm

(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm, और PF = 0.36 cm

हल:

मान लिया कि दिया गया त्रिभुज चित्र के अनुसार है,



(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm और FR = 2.4 cm

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

यदि EF || QR, तो

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

$$\text{अब, } \frac{PE}{EQ} = \frac{3.9 \text{ cm}}{3 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow \frac{PE}{EQ} = 1.3$$

$$\text{तथा, } \frac{PF}{FR} = \frac{3.6 \text{ cm}}{2.4 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{3}{2} = 1.5$$

यहाँ चूँकि $\frac{PE}{EQ} \neq \frac{PF}{FR}$

अतः EF || QR उत्तर

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm और RF = 9 cm

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

यदि EF || QR, तो

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

$$\text{अब, } \frac{PE}{EQ} = \frac{4}{4.5}$$

$$\text{तथा, } \frac{PF}{FR} = \frac{8}{9} = \frac{4}{4.5}$$

$$\text{अतः } \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

अतः EF \parallel QR उत्तर

(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm, और PF = 0.36 cm

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

यदि EF \parallel QR, तो

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

$$\text{अब, } \frac{PE}{EQ} = \frac{0.18 \text{ cm}}{PQ - PE}$$

$$\Rightarrow \frac{PE}{EQ} = \frac{0.18 \text{ cm}}{1.28 \text{ cm} - 0.18 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow \frac{PE}{EQ} = \frac{0.18}{1.10}$$

$$\text{तथा, } \frac{PF}{FR} = \frac{0.36 \text{ cm}}{PR - PF}$$

$$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{0.36 \text{ cm}}{2.56 \text{ cm} - 0.36 \text{ cm}}$$

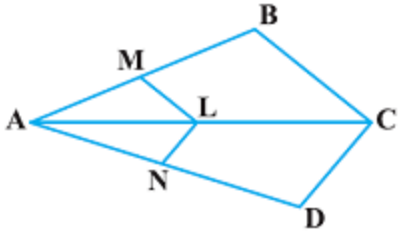
$$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{0.36}{2.20} = \frac{0.18}{1.10}$$

अतः EF \parallel QR उत्तर

प्रश्न

आकृति में यदि LM \parallel CB और LN \parallel CD हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$



हल:

दिया गया है, $LM \parallel CB$

अतः $\triangle ABC \sim \triangle AML$

अतः थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AC} \text{ ----- (i)}$$

पुनः दिया गया है, $LN \parallel CD$

अतः $\triangle ACD \sim \triangle ALN$

अतः थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

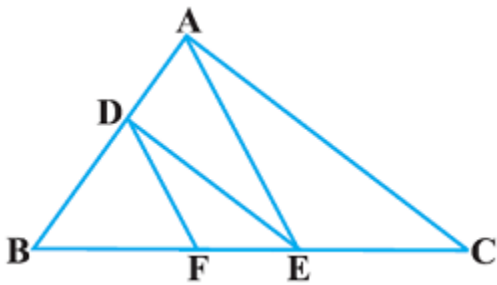
$$\frac{AN}{AD} = \frac{AL}{AC} \text{ ----- (ii)}$$

अतः समीकरण (i) तथा (ii) से

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} \text{ प्रमाणित।}$$

प्रश्न

दिये गये आकृति में $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$



हल:

दिया गया है, $DE \parallel AC$

अतः $\triangle ABC \sim \triangle DBE$

अतः थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BD}{DA} \text{ ----- (i)}$$

पुनः दिया गया है, $DF \parallel AE$

अतः

$\triangle ABE \sim \triangle DBF$

अतः थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

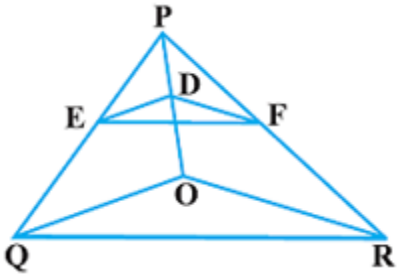
$$\frac{BF}{FE} = \frac{BD}{DA} \text{ ----- (ii)}$$

अतः समीकरण (i) तथा (ii) से

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC} \text{ प्रमाणित।}$$

प्रश्न

आकृति में $DE \parallel OQ$ और $DF \parallel OR$ है। दर्शाइए कि $EF \parallel QR$ है।



हल:

दिया गया है, $DE \parallel OQ$

अतः $\triangle POQ$ में,

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO} \text{ -----(i)}$$

पुनः दिया गया है, $DF \parallel OR$

अतः $\triangle POR$ में,

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{PF}{FR} = \frac{PD}{DO} \text{ ----- (ii)}$$

अब समीकरण (i) तथा (ii) के द्वारा,

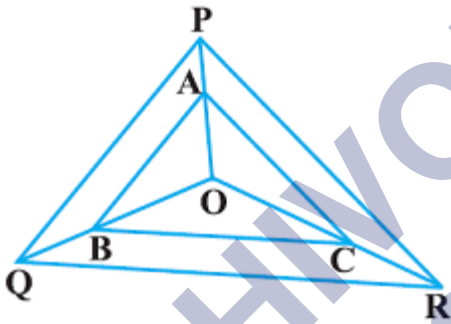
$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

अतः आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के विलोम के अनुसार

$EF \parallel QR$ प्रमाणित।

प्रश्न

दिये गये आकृति में क्रमशः OP, OQ और OR पर स्थित बिन्दु A, B और C इस प्रकार हैं कि $AB \parallel PQ$ और $AC \parallel PR$ है। दर्शाइए कि $BC \parallel QR$ है।



हल:

दिया गया है, $AB \parallel PQ$

अतः $\triangle OPQ$ में,

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ} \text{ ----- (i)}$$

पुनः दिया गया है, $AC \parallel PR$

अतः $\triangle ORP$ में,

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OC}{CR} \text{ ----- (i)}$$

अब समीकरण (i) तथा (ii) से

$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$$

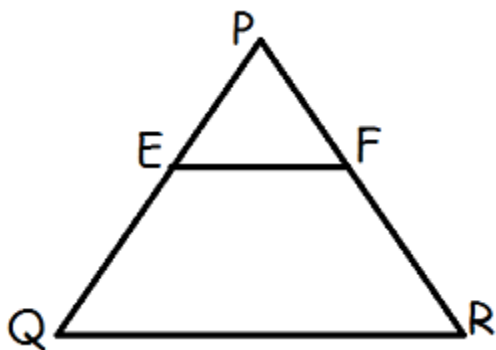
अतः थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात् आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय विलोम के अनुसार

$BC \parallel QR$ प्रमाणित

प्रश्न

प्रमेय का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गए रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है। (याद कीजिए कि आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं)

हल:



मान लिया कि PQR एक त्रिभुज है, तथा बिन्दु E इस त्रिभुज के PQ भुजा पर मध्य बिन्दु है।

अतः $PE = EQ$ (चूँकि E इस भुजा का मध्य बिन्दु है)

अब EF रेखा त्रिभुज की भुजा QR के समानांतर खींची गई।

अब चूँकि $EF \parallel QR$

$$\text{अतः } \frac{PF}{FR} = \frac{PE}{EQ}$$

$$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{PE}{PE}$$

$$[\because PE = EQ]$$

$$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = 1$$

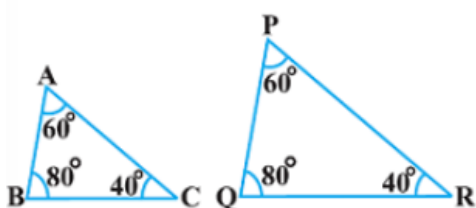
बज्र गुणन करने पर हम पाते हैं कि

$$PF = FR$$

अतः EF रेखा त्रिभुज की तीसरी भुजा AR को समद्विभाजित करती है। प्रमाणित

प्रश्न

बताइए कि दिये गये आकृति में दिये गये त्रिभुजों के युग्मों में से कौन कौन से युग्म समरूप हैं। उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देने में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए।



(i)

हल:

दिये गये त्रिभुजों में,

$$\angle A = \angle P = 60^\circ$$

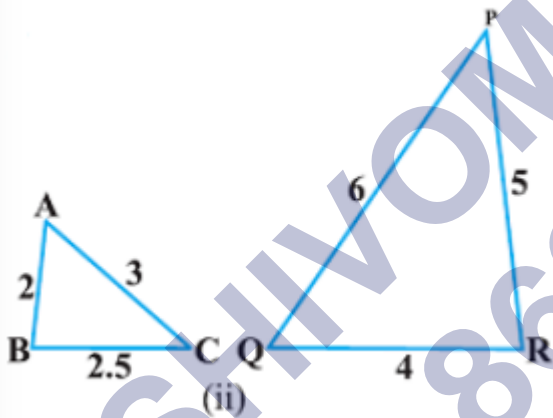
$$\angle B = \angle Q = 80^\circ$$

तथा

$$\angle C = \angle R = 40^\circ$$

अतः AAA के द्वारा $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

(ii)



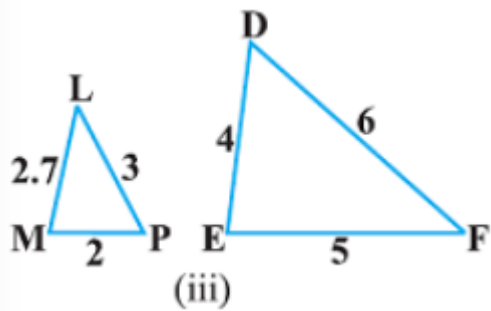
हल:

दिये गये त्रिभुजों में,

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{AC}{QP} = \frac{1}{2}$$

अतः SSS के द्वारा $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

(iii)

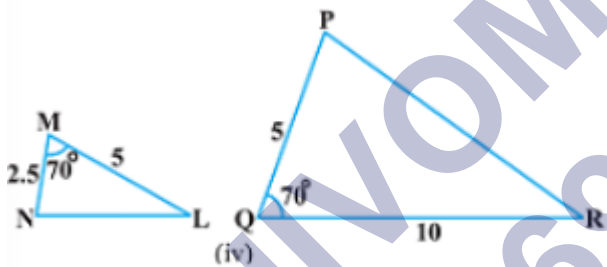


हल:

चूँकि दिये गये दोनों त्रिभुजों की भुजाएं न तो बराबर हैं और न ही अनुपात में हैं।

अतः $\triangle LMP \not\sim \triangle DEF$

(iv)



हल:

दिये गये त्रिभुजों में

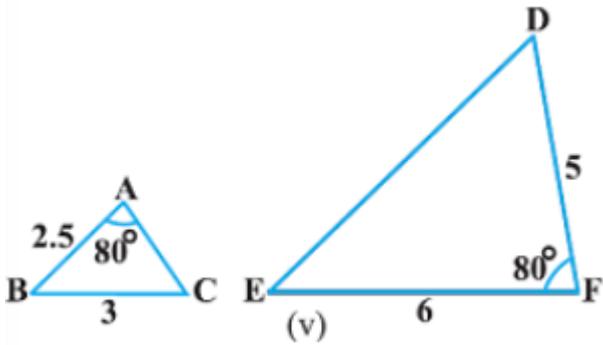
$$\angle M = \angle Q = 70^\circ$$

$$\text{तथा, } \frac{MN}{PQ} = \frac{ML}{QR}$$

अतः SAS के प्रमेय के अनुसार,

$$\triangle MNL \sim \triangle PQR$$

(v)

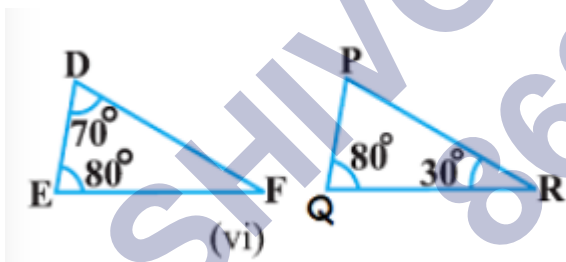


हल:

चूँकि संबंधित भुजाएं समान अनुपात में नहीं हैं,

$$\text{अतः } \triangle ABC \not\sim \triangle DEF$$

(vi)



हल:

$\triangle DEF$ में

$$\angle F = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ)$$

$$\Rightarrow \angle F = 30^\circ$$

$\triangle PQR$ में

$$\angle P = 180^\circ - (80^\circ + 30^\circ)$$

$$\Rightarrow \angle P = 70^\circ$$

चूँकि दिये गये त्रिभुजों के कोण बराबर हैं,

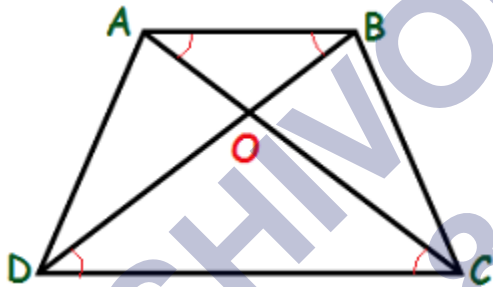
अतः AAA के अनुसार

$$\triangle DEF \sim \triangle PQR$$

प्रश्न

समलंब ABCD, जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं।
दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ हैं।

हल:



मान लिया कि दिया गया समलंब ABCD है।

जिसमें $AB \parallel DC$ है, तथा विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अब $\triangle DOC$ तथा $\triangle BOA$ में,

$$\angle CDO = \angle ABO \text{ [चूँकि } AB \parallel CD \text{ अतः ये एकांतर अंतः कोणों के युग्म हैं]}$$

फिर,

$$\angle DCO = \angle BAO$$

[चूँकि $AB \parallel CD$ अतः ये एकांतर अंतः कोणों के युग्म (Pairs of alternate interior angles) हैं]

तथा,

$$\angle DOC = \angle BOA$$

[उर्ध्वाकार सम्मुख कोण हैं।]

अतः AAA (कोण-कोण-कोण) कसौटी के द्वारा

$$\triangle DOC \sim \triangle BOA$$

चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजा समानुपाती होते हैं।

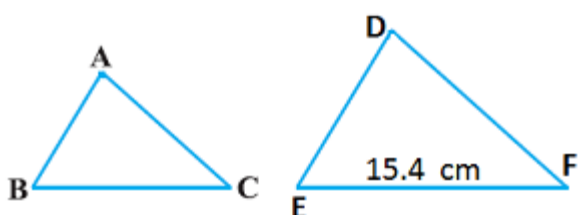
$$\text{अतः } \frac{DO}{BO} = \frac{OC}{OA}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \text{ प्रमाणित}$$

प्रश्न

मान लीजिए कि $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 cm^2 और 121 cm^2 हैं। यदि $EF = 15.4 \text{ cm}$ हो, तो BC ज्ञात कीजिए।

हल:



मान लिया कि ABC तथा DEF दो त्रिभुज हैं।

दिया गया है,

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\text{ar}(ABC) = 64 \text{ cm}^2$$

$$\text{ar}(DEF) = 121 \text{ cm}^2$$

$$\text{तथा, } EF = 15.4 \text{ cm}$$

$$\text{अतः } BC = ?$$

हम जानते हैं कि यदि दो त्रिभुज ABC तथा DEF समरूप हों, तो

$$\frac{\text{ar}(ABC)}{\text{ar}(DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ar}(ABC)}{\text{ar}(DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{64\text{cm}^2}{121\text{cm}^2} = \left(\frac{BC}{15.4\text{cm}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{BC}{15.4\text{cm}}\right) = \sqrt{\frac{64\text{cm}^2}{121\text{cm}^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{15.4\text{cm}} = \frac{8}{11}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{8 \times 15.4\text{cm}}{11} = 11.2\text{cm}$$

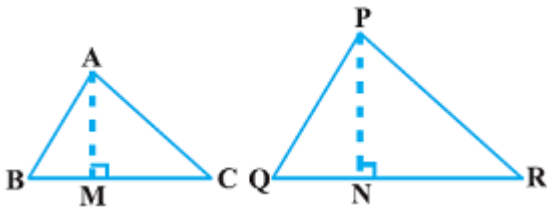
$$\text{अतः } BC = 11.2 \text{ cm उत्तर}$$

प्रश्न

यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

हल:

मान लिया कि ABC तथा PQR दो सर्वांगसम त्रिभुज हैं।



हम जानते हैं कि, यदि

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

$$\text{तो, } \frac{\text{ar}(ABC)}{\text{ar}(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

दिया गया है, $\text{ar}(ABC) = \text{ar}(PQR)$

$$\text{अतः } 1 = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

$$\text{अब यदि } \frac{AB}{PQ} = 1$$

$$\therefore AB = PQ$$

उसी तरह, $BC = QR$ तथा $CA = RP$

अतः SSS (भुजा-भुजा-भुजा) कसौटी के आधार पर

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR$$

अर्थात् दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं प्रमाणित

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 6.1 (पृष्ठ संख्या 135-136)

प्रश्न 1 कोष्ठकों में दिए शब्दों में से सही शब्दों का प्रयोग करते हुए, रिक्त स्थानों को भरिए:

- सभी वृत्त _____ होते हैं (सर्वांगसम, समरूप)
- सभी वर्ग _____ होते हैं (समरूप, सर्वांगसम)
- सभी _____ त्रिभुज समरूप होते हैं (समबाहु, समव्दिबाहु)
- भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि उनके संगत कोण _____ हो तथा उनकी संगत _____ भुजाएँ हों (बराबर, समानुपाती)

उत्तर-

- सभी वृत्त समरूप होते हैं
- सभी वर्ग समरूप होते हैं
- सभी समबाहु त्रिभुज समरूप होते हैं
- भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि उनके संगत कोण बराबर हो तथा उनकी संगत समानुपाती भुजाएँ हों

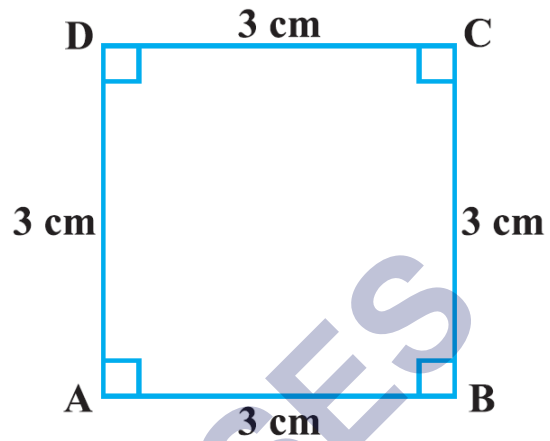
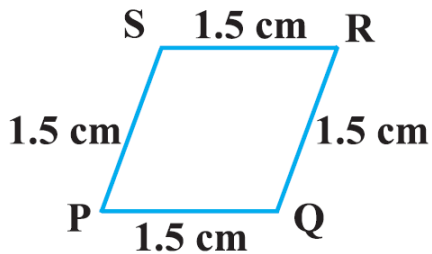
प्रश्न 2 निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न-भिन्न उदाहरण दीजिए:

- समरूप आकृतियाँ
- ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं

उत्तर-

- दो सौ रुपये के नोट।
- दो पाँच रुपये के सिक्के।

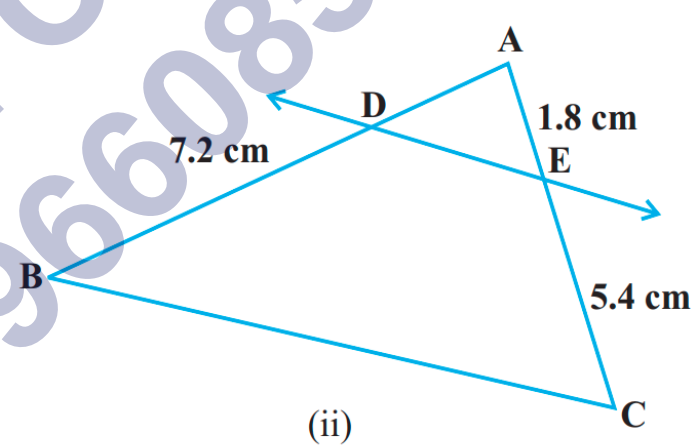
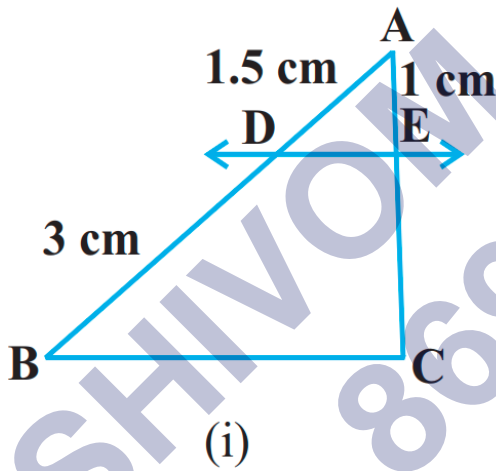
प्रश्न 3 बताइए की निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप है या नहीं:



उत्तर- नहीं, क्योंकि संबंधित कोण समान नहीं हैं।

प्रश्नावली 6.2 (पृष्ठ संख्या 135-136)

प्रश्न 1 आकृति (i) और (ii) में, $DE \parallel BC$ में AD ज्ञात कीजिए:



उत्तर-

1. $\triangle ABC$ में

$DE \parallel BC$ दिया है।

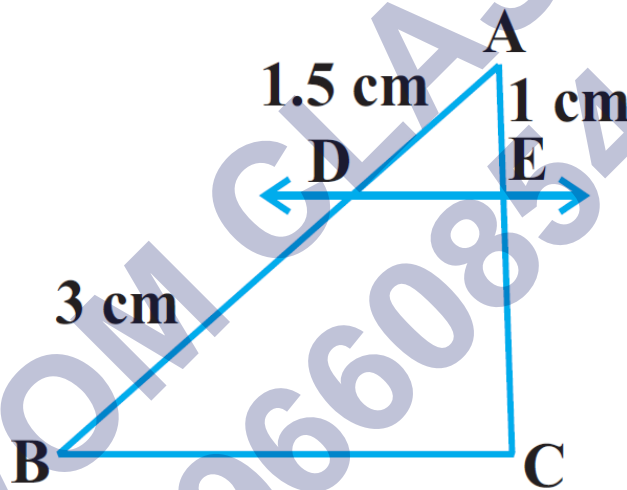
$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{1.5}{2} = \frac{1}{CE}$$

$$\Rightarrow 1.5CE = 3$$

$$\Rightarrow CE = \frac{3}{1.5} = \frac{30}{15} = 2$$

$$\Rightarrow CE = 2$$



2. $\triangle ABC$ में

$DE \parallel BC$ दिया है।

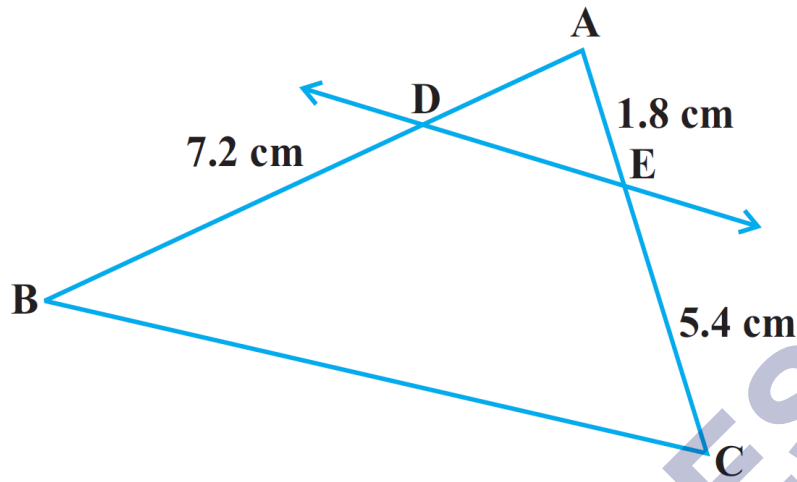
अतः आधारभूतिक समानुपातिक (BPT) से

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{1.8 \times 7.2}{5.4}$$

$$\Rightarrow EC = 2.4 \text{ cm}$$



प्रश्न 2 किसी त्रिभुज PQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या $EF \parallel QR$ है

- (i) $PE = 3.9\text{cm}$, $EQ = 3\text{cm}$, $PF = 3.6$ और $FR = 2.4\text{cm}$
- (ii) $PE = 4\text{cm}$, $QE = 4.5\text{cm}$, $PF = 8\text{cm}$ और $RF = 9\text{cm}$
- (iii) $PQ = 1.28\text{cm}$, $PR = 2.56\text{cm}$, 0.18cm और $PF = 0.36\text{cm}$

उत्तर-

(i)

$$PE = 3.9\text{cm}, EQ, PF = 3.6 \text{ और } FR = 2.4\text{cm}$$

$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

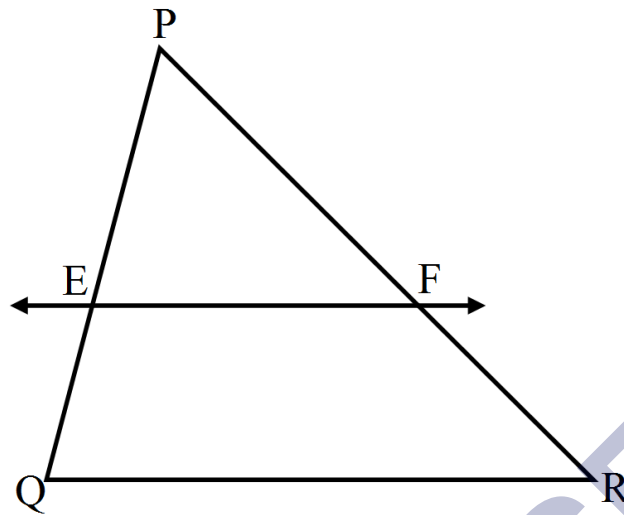
$$\Rightarrow \frac{3.9}{3} = \frac{3.6}{2.4}$$

$$\Rightarrow \frac{39}{30} = \frac{36}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{10} \neq \frac{3}{2}$$

इसलिए, $EF \parallel QR$ नहीं है



(ii)

$PE = 4\text{cm}$, $QE = 4.5\text{cm}$, $PF = 8\text{cm}$ और $FR = 9\text{cm}$

$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

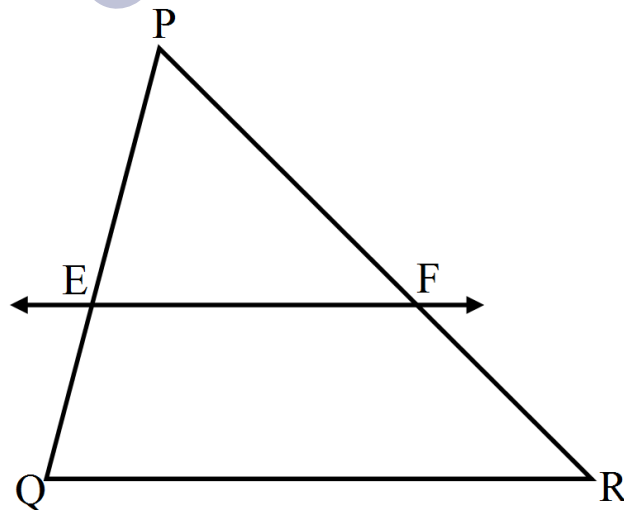
$$\Rightarrow \frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$$

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय के विलोम से,

इसलिय $EF \parallel QR$ है



(iii)

$PQ = 1.28\text{cm}$, $PR = 2.56\text{cm}$, $PE = 0.18\text{cm}$ और $PF = 0.36\text{cm}$

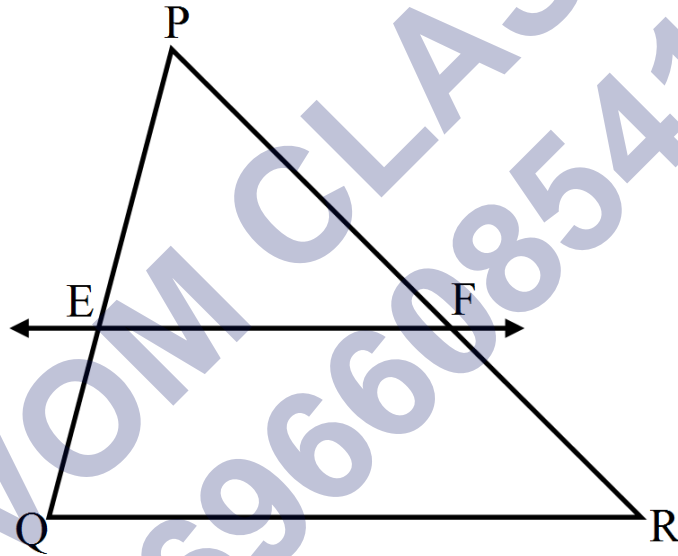
$$\therefore \frac{PE}{PQ} = \frac{PF}{PR}$$

$$\Rightarrow \frac{0.18}{1.28} = \frac{0.36}{2.56}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{64} = \frac{9}{64}$$

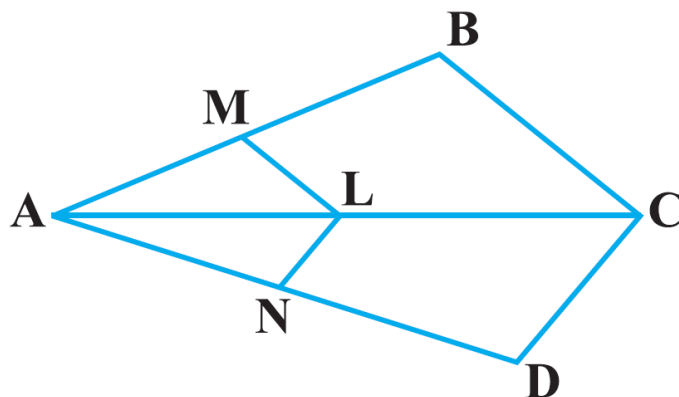
अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय के विलोम से,

इसलिय $EF \parallel QR$ है



प्रश्न 3

आकृति में दिय $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$ हो तो सिद्ध कीजिए की $\frac{AM}{AN} = \frac{AN}{AD}$ है।



(31)

उत्तर-

$\triangle ABC$ में

$ML \parallel BC$ दिया है

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{AL}{CL} \dots (1)$$

$\triangle ACD$ में

$NL \parallel DC$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AN}{ND} = \frac{AL}{CL} \dots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{ND}$$

व्युत्क्रमानुपाती लेने पर

$$\frac{BM}{AM} = \frac{ND}{AN}$$

दोनों तरफ 1 जोड़ने पर

$$\frac{BM}{AM} + 1 = \frac{ND}{AN} + 1$$

$$\frac{BM+AM}{AM} = \frac{ND+AN}{AN}$$

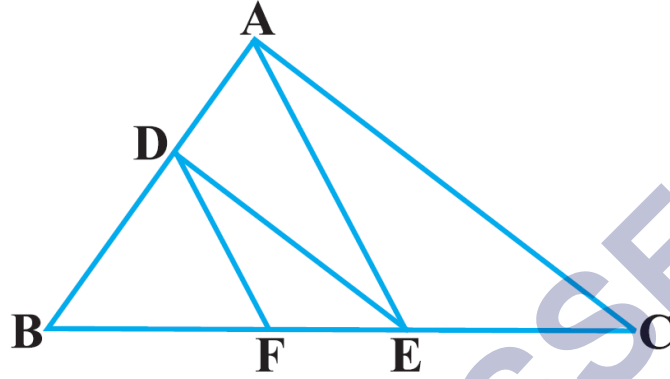
$$\frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AN}$$

पुनः व्युत्क्रमानुपाती लेने पर

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$

प्रश्न 4

आकृति में $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ है सिद्ध कीजिए की $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है।



उत्तर-

$\triangle ABC$ में

$DE \parallel AC$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC} \dots (1)$$

$\triangle ABE$ में

$DF \parallel AE$ दिया है।

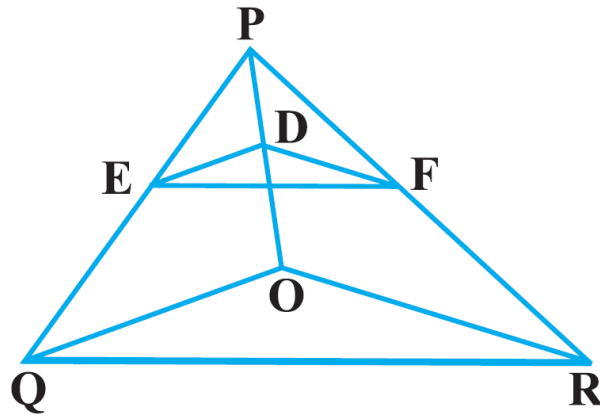
अतः आधारभूतिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FE} \dots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$$

प्रश्न 5 आकृति में $DE \parallel OQ$ और OR है दर्शाइय की $EF \parallel QR$ है।



उत्तर-

$\triangle POQ$ में

$DE \parallel OQ$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO} \dots (1)$$

$\triangle POR$ में

$DF \parallel OR$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{PF}{FR} = \frac{PD}{DO} \dots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

इसलिए आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम से

$$EF \parallel QR$$

प्रश्न 6 आकृति में क्रमशः OP, OQ और OR पर स्थित बिंदु A, B और C इस प्रकार है की AB \parallel PQ और AC \parallel PR है। दर्शाइए की BC \parallel QR है।

उत्तर-

$\triangle POQ$ में

AB \parallel PQ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ} \dots (1)$$

$\triangle POR$ में

AC \parallel PR दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{OA}{AP} = \frac{OC}{CR} \dots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से,

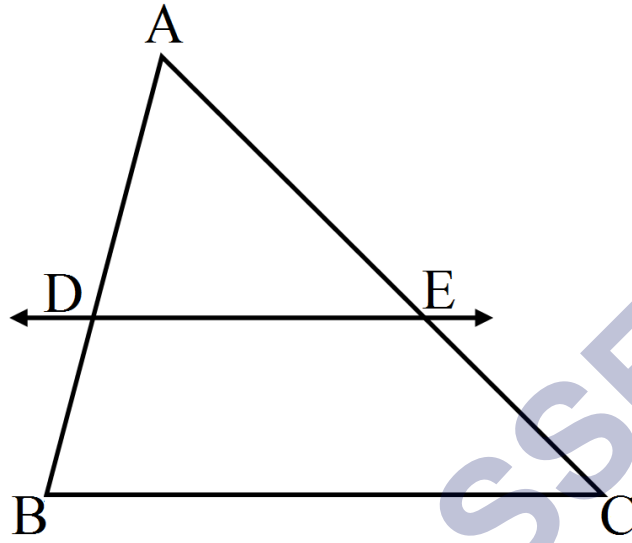
$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$$

चुकी भुजायए समानुपातिक है।

BC \parallel QR इति सिद्ध

प्रश्न 7 प्रमेय 6.1 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है। (याद कीजिए की आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं।)

उत्तर-



दिया है: $\triangle ABC$ एक त्रिभुज है जिसकी भुजा AB का मध्य-बिंदु D है और $DE \parallel BC$ है।

सिद्ध करना है: $AE = EC$

प्रमाण: $\triangle ABC$ में

$AD = BD \dots (1)$ दिया है।

$DE \parallel BC$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

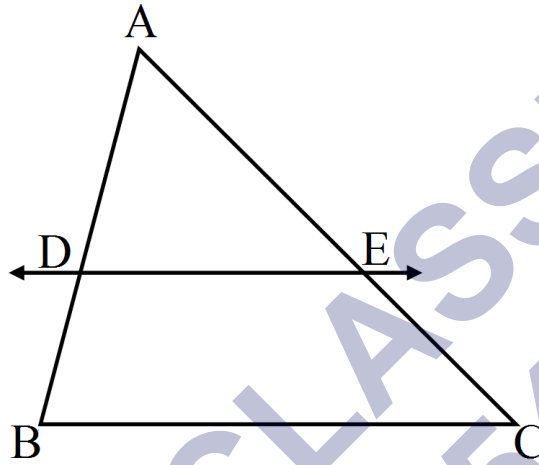
$$\text{अथवा } \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE} \dots (1)$$

$$\text{अथवा } \frac{1}{1} = \frac{AE}{CE}$$

$$\Rightarrow AE = EC \text{ इति सिद्ध}$$

प्रश्न 8 प्रमेय का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए की एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है। (याद कीजिए की आप कक्षा IX में ऐसा कर चुके हैं)

उत्तर-



दिया है: ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजा AB तथा AC का मध्य-बिंदु D क्रमशः E है।

सिद्ध करना है: $DE \parallel BC$

प्रमाण: $\triangle ABC$ में

$$AD = BD \dots (1)$$

$$AE = EC \dots (2)$$

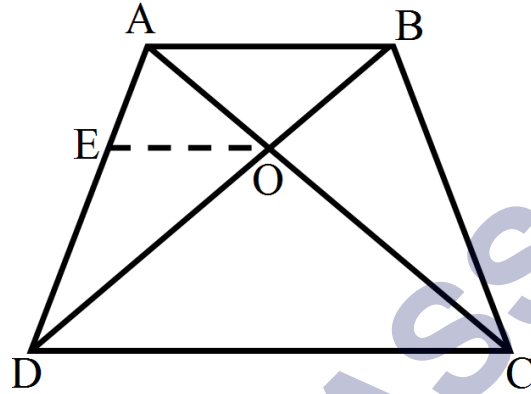
$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

$$\text{अथवा } \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{AE} = \frac{1}{1}$$

समीकरण (1) तथा (2) से,

प्रश्न 9 ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइें की $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।

उत्तर-



दिया है: ABCD समलंब है जिसमें,

$AB \parallel CD$ है। और विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

इसीप्रकार, $\triangle ABD$ में

$$EO \parallel CD \dots (3)$$

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO} \dots (5)$$

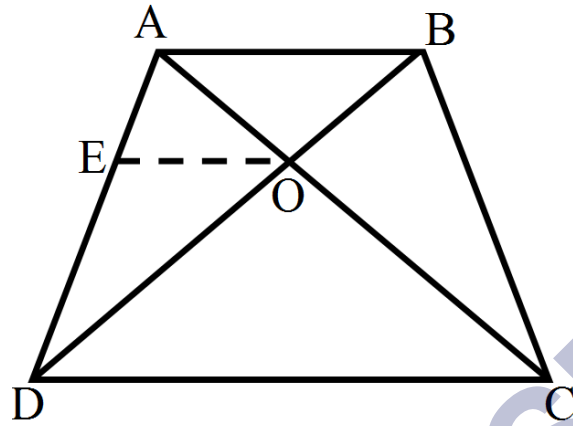
समीकरण (4) तथा (4) से

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

अथवा $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ [एकांतरानुवात लगाने पर] इति सिद्ध

प्रश्न 10 एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं की $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है। दर्शाइें की ABCD एक समलंब है।

उत्तर-



दिया है: ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

और $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है

सिद्ध करना है: ABCD एक समलंब है।

रचना: बिंदु O से $AB \parallel EO$ खींचा।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO} \dots (1)$$

जबकी, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ [एकांतरानुवात लगाने पर] इति सिद्ध

अथवा $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \dots (2)$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO}$$

$\triangle ACD$ की सगत खंड की भुजाये समानुपाती है। इसलिए आधारबुटिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम प्रमेय से,

$$EO \parallel CD \dots (3)$$

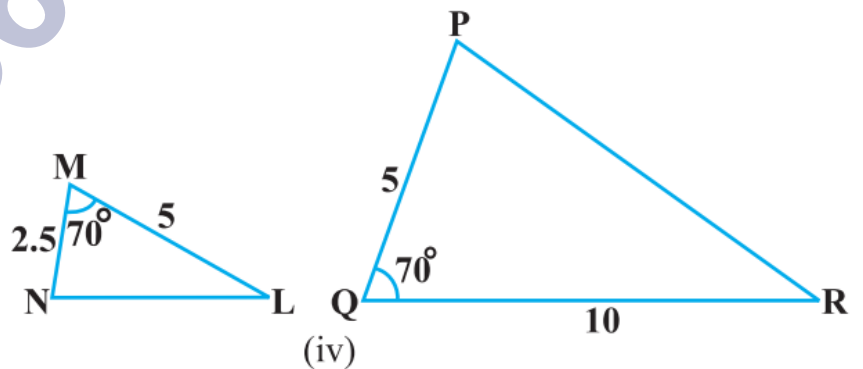
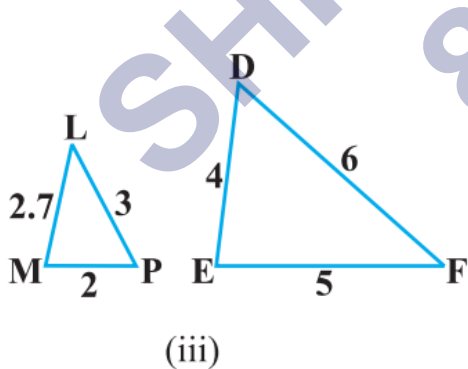
और,

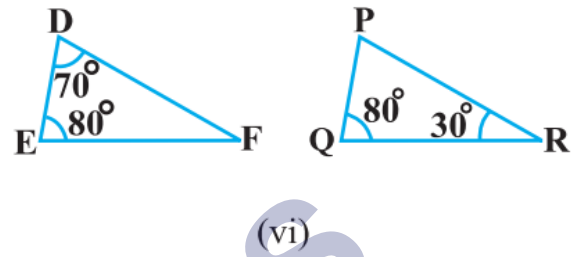
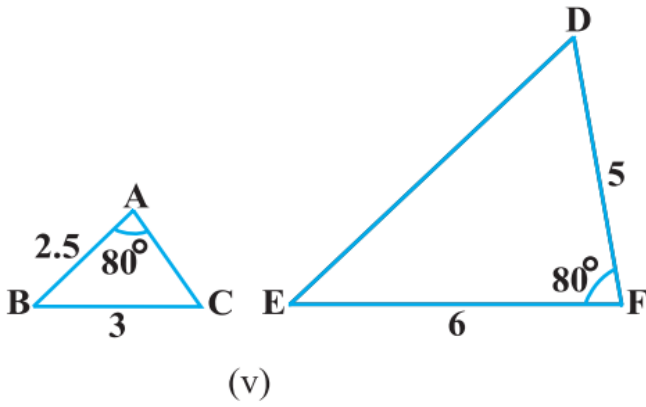
$$AB \parallel CD$$

अतः ABCD एक समलब है इति सिद्ध

प्रश्नावली 6.3 (पृष्ठ संख्या 153-155)

प्रश्न 1 बताइए कि आकृति में दिए त्रिभुजों के युग्मों में से कौन-कौन से युग्म समरूप हैं उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देने में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए





उत्तर-

(i)

$\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में

$$\angle ABC = \angle PQR = 80^\circ$$

$$\angle BAC = \angle QPR = 60^\circ$$

$$\angle ACB = \angle PQR = 80^\circ = 40^\circ$$

\therefore AAA समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

(ii)

$\triangle ABC$ तथा $\triangle QRP$ में

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{BC} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$$

\therefore SSS समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \cong \triangle QRP$$

(iii) त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है।

(iv) त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है।

- (v) त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है
(vi)

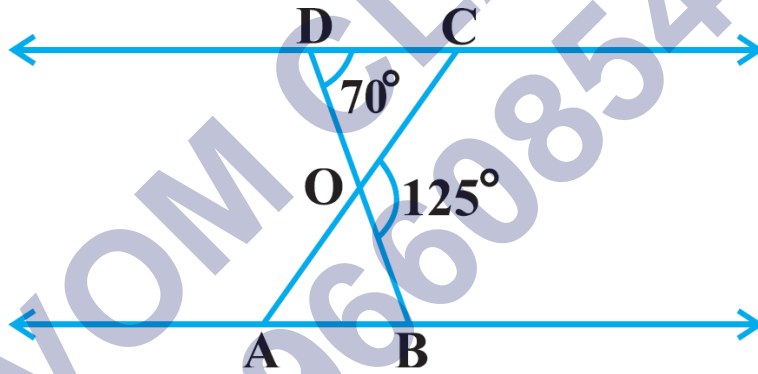
$\triangle ABC$ तथा $\triangle QRP$ में

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$$

\therefore SSS समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \cong \triangle QRP$$

प्रश्न 2 आकृति में, $\triangle ODC \sim \triangle OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ और $\angle CDO = 70^\circ$ है। $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

$$\angle DOC + \angle BOC = 180^\circ \text{ (रैखिक युग्म)}$$

$$\Rightarrow \angle DOC + 125^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 55^\circ$$

अब $\triangle DOC$ में,

$$\angle DOC + \angle CDO + \angle DCO = 0 = 180^\circ \text{ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)}$$

$$\Rightarrow 55^\circ + 70^\circ + \angle DCO = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 125^\circ \angle DCO = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DCO = 180^\circ - 125^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 55^\circ$$

$$\triangle ODC \sim \triangle OBA \text{ (दिया है)}$$

$$\therefore \angle OAB = \angle DCO = 55^\circ$$

समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं।

प्रश्न 3 ABCD, जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए की $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ है।

उत्तर-

दिया है: समलंब ABCD,

जिसमें $AB \parallel CD$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है: $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

प्रमाण: $AB \parallel CD$ दिया है।

$$\therefore \angle ABO = \angle DCO \dots (1)$$

$\triangle AOB$ तथा $\triangle COD$ में

$$\angle ABO = \angle DCO \dots (1)$$

$$\angle AOB = \angle COD \text{ (शीर्षाभिमुख कोण)}$$

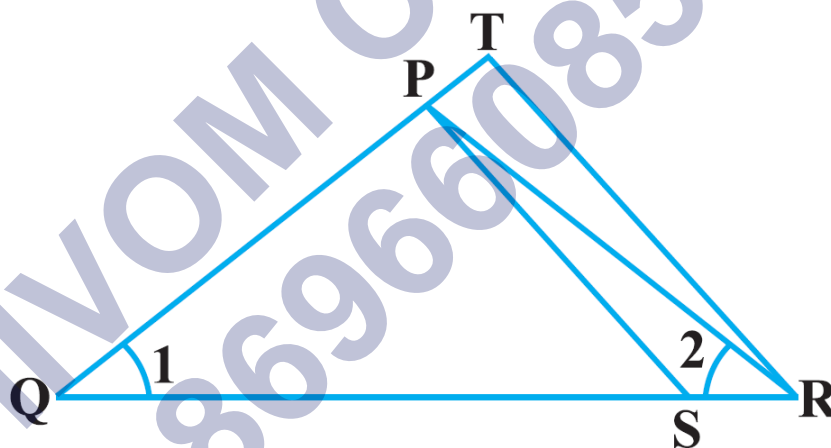
A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle AOB \sim \triangle COD$$

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \text{ समरूप त्रिभुज के सगत भुजा समानुपाती होते हैं।}$$

प्रश्न 4

आकृति 3.36 में $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है। दर्शाए कि $\triangle PQS \sim \triangle TQR$ है।



उत्तर-

दिया है: $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है।

सिद्ध करना है: $\triangle PQS \sim \triangle TQR$

प्रमाण: $\triangle PQR$ में,

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ (दिया है)}$$

$\therefore PQ = PR$ (बराबर कोणों की सम्मुख भुजा) ... (1)

और $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ दिया है

या $\frac{OR}{OR} = \frac{QT}{PQ}$ समीकरण (1) से... (2)

$\triangle PQS$ तथा $\triangle TQR$

$\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$ समीकरण ... (2)

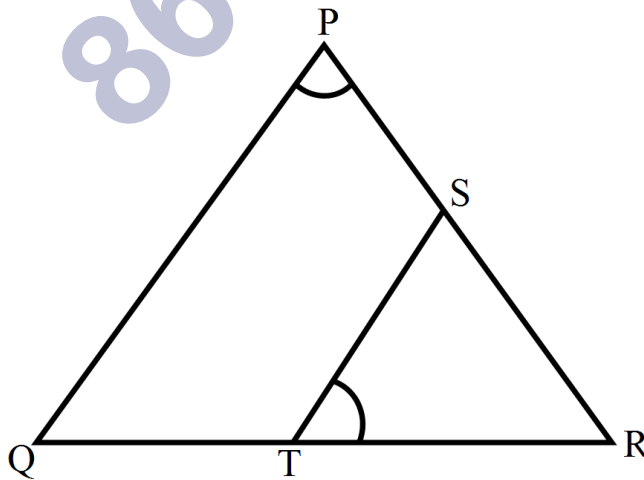
$\angle 1 = \angle 1$

SAS समरूपता कसौटी से

$\triangle PQS \sim \triangle TQR$ इति सिद्ध

प्रश्न 5 DPQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमशः बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि $\angle P = \angle RTS$ है दर्शाइए कि $\triangle RPQ \sim \triangle RTS$ है

उत्तर-



दिया है: $\triangle DPQR$ की भुजाओं PR और QR पर

क्रमशः बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं

कि $\angle P = \angle RTS$ है

सिद्ध करना है: $\triangle RPQ \sim \triangle RTS$

प्रमाण: $\triangle RPQ$ तथा $\triangle RTS$ में,

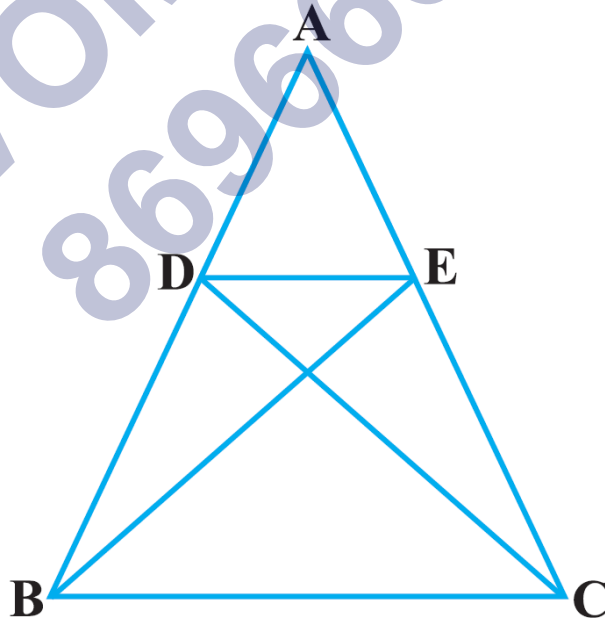
$\angle P = \angle RTS$ (दिया है)

$\angle R = \angle R$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle RPQ \sim \triangle RTS$

प्रश्न 6 आकृति में, यदि $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ है, तो दर्शाइए कि $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ है।



उत्तर-

दिया है: $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ है

सिद्ध करना है: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

प्रमाण: $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ दिया है

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ AE = AD \end{array} \right\}$$

अथवा $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{1} \dots (1)$

$\triangle ADE$ तथा $\triangle ABC$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} \dots (1)$$

$$\angle A = \angle A \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

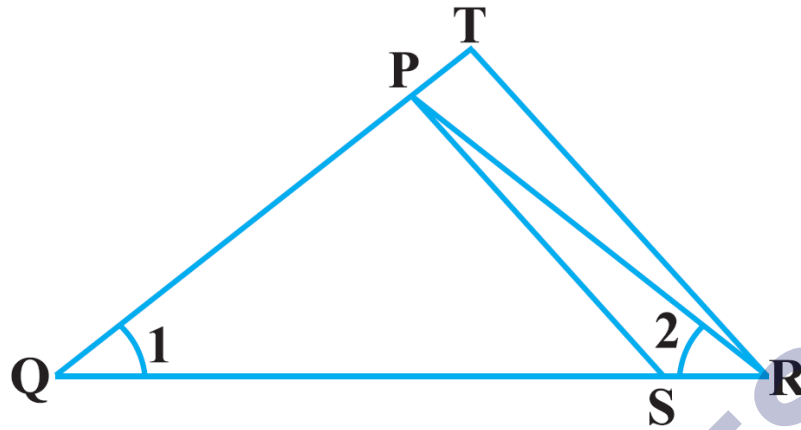
S.A.S समरूपता कसौटी से

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 7 आकृति में, $\triangle ABC$ के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं तो दर्शाए कि:

1. $\triangle AEP \sim \triangle CDP$
2. $\triangle ABD \sim \triangle CBE$
3. $\triangle AEP \sim \triangle ADB$
4. $\triangle PDE \sim \triangle BEC$



उत्तर-

दिया है: DABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है:

1. $\triangle AEP \sim \triangle CDP$

2. $\triangle ABD \sim \triangle CBE$

3. $\triangle AEP \sim \triangle ADB$

4. $\triangle PDE \sim \triangle BEC$

1. $\triangle AEP$ तथा $\triangle CDP$ में,

$$\angle AEP = \angle CDP \text{ (प्रत्येक } 90^\circ \text{)}$$

$$\angle APE = \angle CPD \text{ (शीर्षाभिमुख कोण)}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle AEP \sim \triangle CDP$$

2. $\triangle ABD$ तथा $\triangle CBE$ में

$$\angle ADB = \angle CEB \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle B = \angle B \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABD \sim \triangle CBE$$

3. $\triangle AEP$ तथा $\triangle ADB$ में

$$\angle AEP = \angle ADB \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle A = \angle A \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle AEP \sim \triangle ADB$$

4. $\triangle PDE$ तथा $\triangle BEC$ में

$$\angle PDC = \angle BEC \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle C = \angle C \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle PDE \sim \triangle BEC$$

प्रश्न 8 समान्तर चतुर्भुज ABCD की बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है दर्शाइए कि $\triangle ABE \sim \triangle CFB$ है।

उत्तर- दिया है: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसकी बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है: $\triangle ABE \sim \triangle CFB$

प्रमाण: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\angle AEB = \angle CBE \dots (1)$ एकान्तर कोण

$\triangle ABE$ तथा $\triangle CFB$ में,

$\angle AEB = \angle CBE$ समी० (1) से

$\angle A = \angle C$ (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

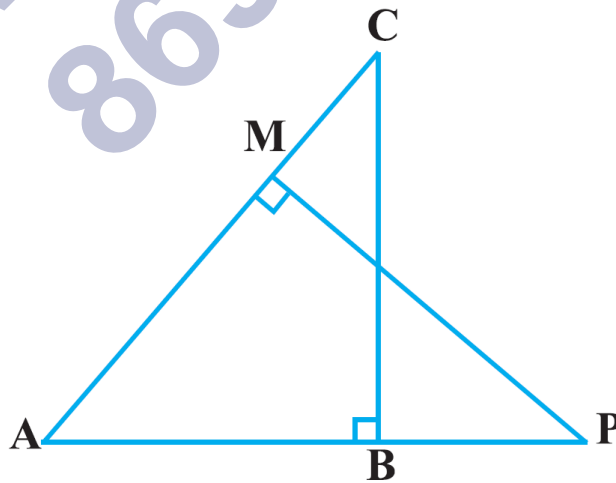
A.A समरूपता कसौटी से,

$\triangle ABE \sim \triangle CFB$

प्रश्न 9 आकृति में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज है, जिसके कोण B और M समकोण हैं सिद्ध कीजिए कि:

1. $\triangle ABC \sim \triangle AMP$

2. $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$



उत्तर- दिया है: ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज है, जिसके कोण B और M समकोण हैं।

सिद्ध करना है:

$$1. \triangle ABC \sim \triangle AMP$$

$$2. \frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$$

$$1. \triangle ABC \text{ तथा } \triangle AMP$$

$$\angle ABC = \angle AMP \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle A = \angle A \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \sim \triangle AMP$$

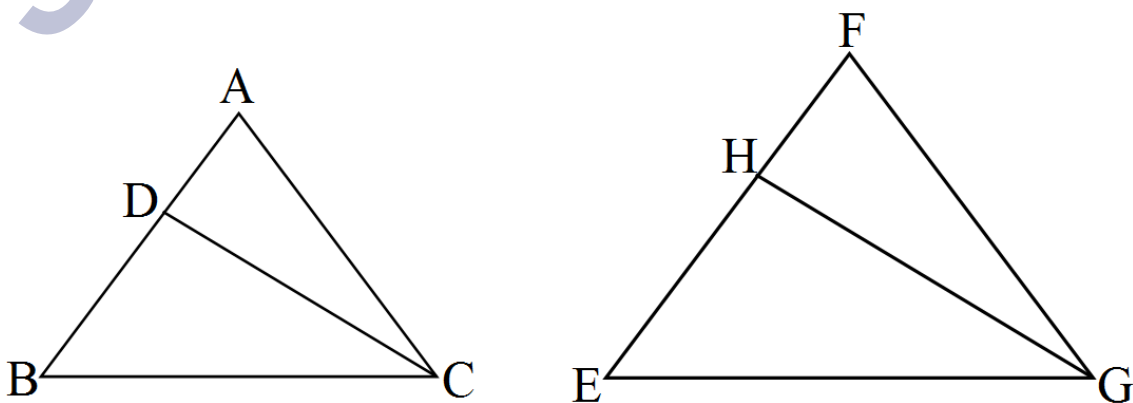
$$2. \frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$$

(चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।)

प्रश्न 10 CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः $\triangle ABC$ और $\triangle FEG$ की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं यदि $\triangle ABC \sim \triangle FEG$ है, तो दर्शाइए कि:

$$1. \triangle DCB \sim \triangle HGE$$

$$2. \triangle DCA \sim \triangle HGF$$



उत्तर- दिया है: CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः $\triangle ABC$ और $\triangle FEG$ की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं और $\triangle ABC \sim \triangle FEG$ है।

सिद्ध करना है:

$$1. \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$$

$$2. \triangle DCB \sim \triangle HGE$$

$$3. \triangle DCA \sim \triangle HGF$$

प्रमाण:

$\triangle ABC \sim \triangle FEG$ दिया है।

$$\angle A = \angle A \dots (1)$$

$$\angle B = \angle E \dots (2)$$

$$\angle C = \angle G \dots (3)$$

(समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं।)

1. $\triangle DCB$ तथा $\triangle AMP$ में

2. $\triangle DCB$ तथा $\triangle HGE$ में,

$$\angle B = \angle E \text{ समी० (2) से}$$

$$\angle BCD = \angle EGH \text{ [चूँकि } \frac{1}{2} \angle C = \frac{1}{2} \angle G \text{ समी० (3) से]}$$

A.A समरूपता कसौटी से,

$$\triangle DCB \sim \triangle HGE$$

3. $\triangle DCA$ तथा $\triangle HGF$ में

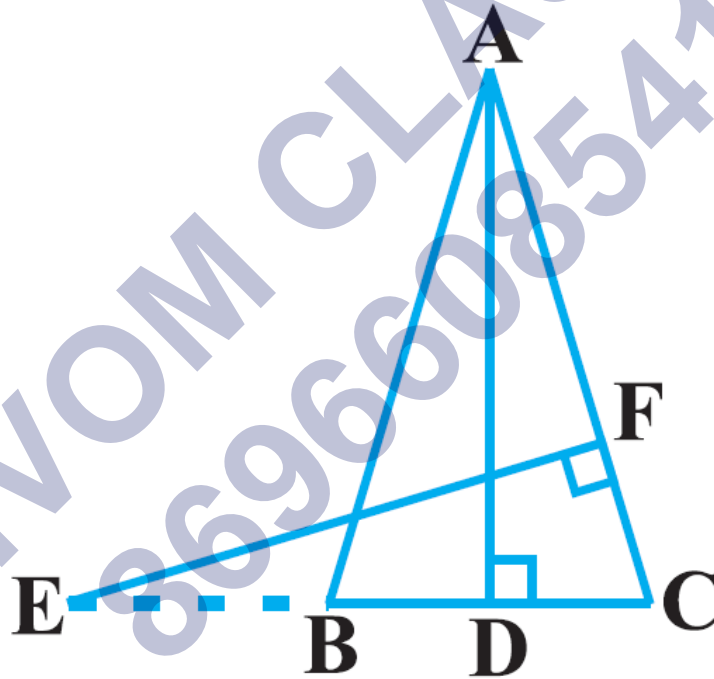
$$\angle A = \angle F \text{ समी. (1) से}$$

$$\angle ACD = \angle FGH \text{ [चूँकि } \frac{1}{2} \angle C = \frac{1}{2} \angle G \text{ समी. (3) से]}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle DCA \sim \triangle HGF$$

प्रश्न 11 आकृति में, $AB = AC$ वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है यदि $AD \perp BC$ और $EF \perp AC$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\triangle ABD \sim \triangle ECF$ है



उत्तर- दिया है: $AB = AC$ वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है जिसमें $AD \perp BC$ और $EF \perp AC$ है

सिद्ध करना है:

$$\triangle ABD \sim \triangle ECF$$

प्रमाण:

$\triangle ABC$ में,

$AB = AC$ दिया है;

$\therefore \angle B = \angle C \dots (1)$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

अब, $\triangle ABD$ तथा $\triangle EFC$ में

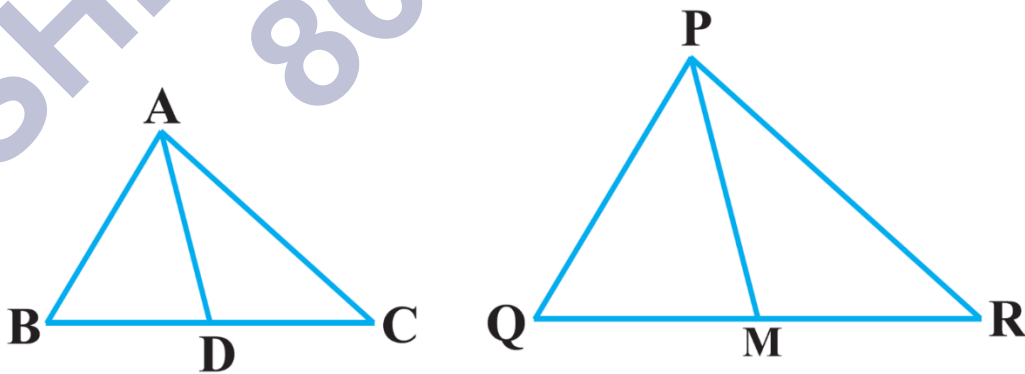
$\angle ADB = \angle EFC$ (प्रत्येक 90°)

$\angle B = \angle C$ समी. (1) से

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle ABD \sim \triangle ECF$ इति सिद्ध

प्रश्न 12 एक त्रिभुज ABC कि भुजाएँ AB और BC तथा माधिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माधिका PM के समानुपाती हैं (देखिए आकृति) दर्शाइए कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है।



उत्तर- दिया है: त्रिभुज ABC कि भुजाएँ AB और BC तथा माधिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माधिका PM के समानुपाती हैं।

सिद्ध करना है:

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

प्रमाण:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM} \dots \text{दिया है}$$

$$\text{अथवा } \frac{QAB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR} = \frac{AD}{PM}$$

$$\text{अथवा } \frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM} \dots (1)$$

(चूँकि माधिकाएँ AD तथा PM BC तथा QR को समद्विभाजित करती हैं)

अब, $\triangle ABD$ तथा $\triangle PQM$ में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM} \text{ समी. (1) से}$$

S.S.S समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABD \sim \triangle PQM$$

$$\therefore \angle B = \angle Q \dots (2)$$

अब $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \text{ दिया है}$$

और $\angle B = \angle Q$ समी. (2) से

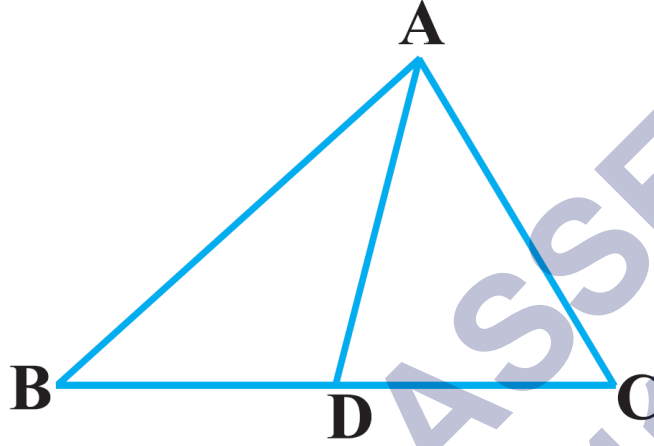
S.A.S समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

इति सिद्ध।

प्रश्न 13 एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है दर्शाइए कि $CA^2 = CB \cdot CD$ है

उत्तर-



दिया है: त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है।

सिद्ध करना है: $CA^2 = CB \cdot CD$

प्रमाण:

अब, $\angle ADC$ तथा $\triangle BAC$ में

$\angle ADC = \angle BAC$ (दिया है)

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

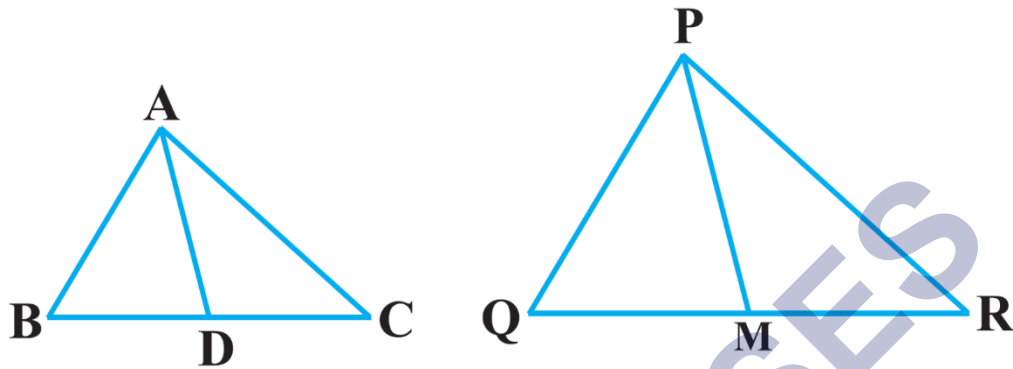
$\triangle ADC \sim \triangle BAC$

(चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।)

या $CA^2 = CB \cdot CD$ (बाई-क्रॉस गुणा करने पर)

इति सिद्ध

प्रश्न 14 एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और AC तथा माधिका AD एक अन्य त्रिभुज की भुजाओं PQ और PR तथा माधिका PM के क्रमशः समानुपाती हैं दर्शाइए कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है



उत्तर-

दिया है: $\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM} \text{ है और AD तथा PM माधिकाये है।}$$

सिद्ध करना है: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

प्रमाण:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM} \dots (1) \text{ दिया है}$$

यहाँ माधिकाएँ समान अनुपात में हैं इसलिए समान अनुपात की माधिकायें जिस भुजा को समद्विभाजित करती है वह भी समानुपाती होता है

$$\therefore \frac{AD}{PM} = \frac{BC}{QR} \dots (2)$$

समी. (1) तथा (2) से

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} \dots (3)$$

$\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} \text{ समी. (3) से}$$

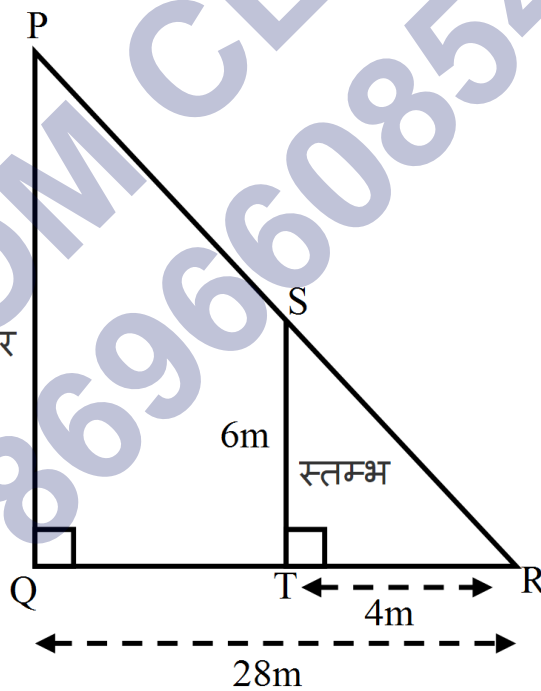
S.S.S समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

इति सिद्ध।

प्रश्न 15 लंबाई 6m वाले एक उध्वार्धर स्तम्भ की भूमि पर छाया की लंबाई 4m है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28m है मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए

उत्तर-



माना PQ मीनार है जबकि ST स्तम्भ है। TR स्तम्भ की छाया है और QR मीनार की छाया है

$$\triangle PQR \text{ तथा } \triangle STR$$

$$\angle PQR = \angle STR \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle R = \angle R \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle PQR \sim \triangle STR$$

$$\therefore \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TR} \text{ (समरूप त्रिभुज के सगत भुजाएं समानुपाती होती है)}$$

$$\frac{PQ}{6} = \frac{28}{4}$$

$$4PQ = 6 \times 28$$

$$PQ = \frac{6 \times 28}{4} = 42\text{m}$$

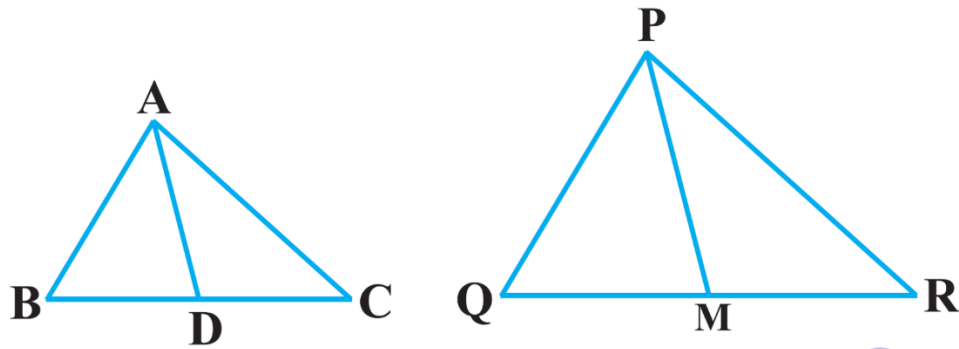
अतः मीनार की उचाई = 42m

प्रश्न 16 AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः महधिकाएँ है।

जबकि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है

$$\text{सिद्ध कीजिए की } \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$$

उत्तर-



दिया है: AD और PM त्रिभुज ABC और PQR की क्रमशः मधिकाए है।

जबकि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है

सिद्ध करना है: $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR}$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} \dots (1)$$

$$\angle B = \angle Q \dots (2)$$

$\triangle ABD$ तथा $\triangle PQM$ में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} \dots (1)$$

$$\angle B = \angle Q \dots (2)$$

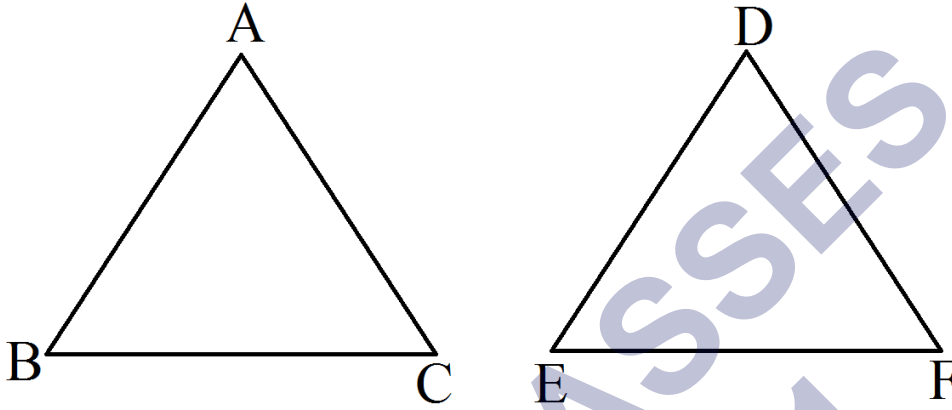
$$\triangle ABD \sim \triangle PQM$$

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM} \text{ इति सिद्धम्।}$$

प्रश्नावली 6.4 (पृष्ठ संख्या 158)

प्रश्न 1 मान लीजिए $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64cm^2 और 121cm^2 हैं यदि $EF = 15.4\text{cm}$ हो, तो BC ज्ञात कीजिए

उत्तर-



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ दिया है

\therefore प्रमेय 6.6 से

$$\frac{\text{ar}(ABC)}{\text{ar}(DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{64}{121}} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)$$

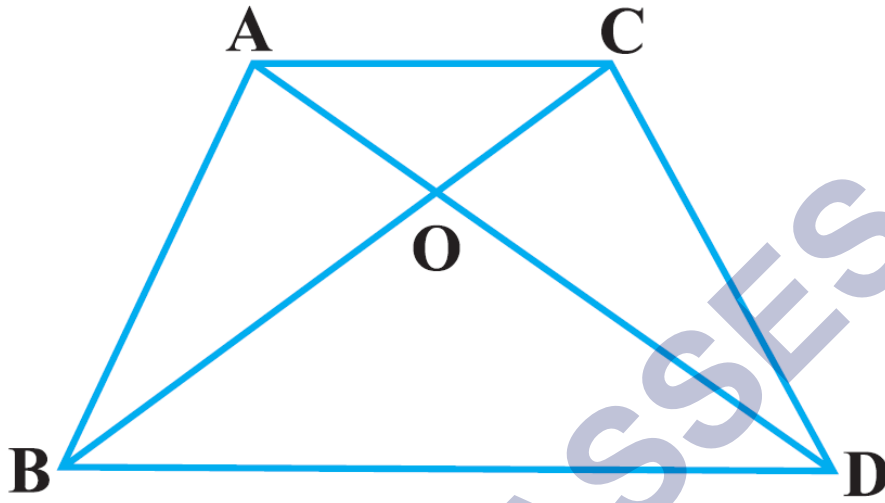
$$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$$

$$11BC = 8 \times 15.4$$

$$BC = \frac{8 \times 15.4}{11}$$

$$= \frac{8 \times 154}{110} = \frac{8 \times 14}{10} = \frac{112}{10} = 11.2$$

प्रश्न 2 एक समलंब ABCD जिसमें $AB \parallel DC$ हैं, के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं यदि $AB = 2CD$ हो तो $\triangle AOB$ और $\triangle COD$ के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए



उत्तर- दिया है: ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ हैं, के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं और $AB = 2CD$ है

$AB = 2CD$ (दिया है)

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{2}{1} \dots (1)$$

अब, $AB \parallel DC$ (दिया है)

$$\angle ABO = \angle CDO \dots (2) \text{ एकांतर कोण}$$

$\triangle AOB$ और $\triangle COD$

$$\angle AOB = \angle COD \text{ शीर्षभिमुख कोण}$$

$$\angle ABO = \angle CDO \text{ समीकरण } \dots (2)$$

A.A समरूपता कसौटी से

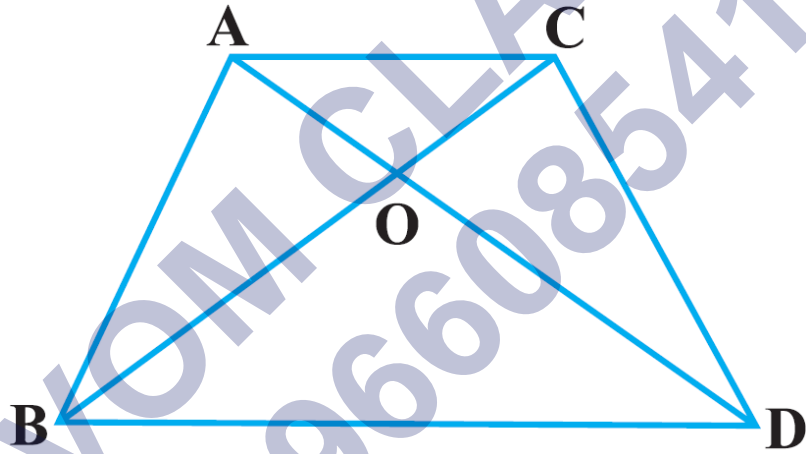
$$\triangle AOB \sim \triangle COD$$

अतः प्रमेय 6.6 से

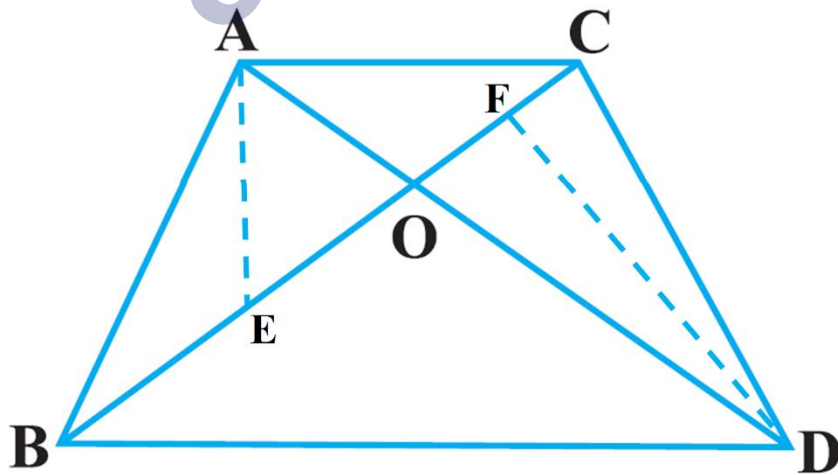
$$\frac{\text{ar}(\triangle AOB)}{\text{ar}(\triangle COD)} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{4}{1}$$

$\triangle AOB$ और $\triangle COD$ के क्षेत्रफल का अनुपात 4 : 1 है।

प्रश्न 3 आकृति में एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC बने हुए हैं यदि AD, BC को प O पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए की $\frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle DBC)} = \frac{AO}{DO}$ है



उत्तर-



हमे प्राप्त है:

$\triangle ABC$ और $\triangle DBC$ एक आधार BC पर स्थित है।

BC और AD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। $AE \perp BC$ और $DF \perp BC$ खींचो

अब, $\triangle AOE$ में $\angle AEO = 90^\circ$ और

$\triangle DOF$ में, $\angle DFO = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle AEO = \angle DFO \dots (1)$$

तथा $\angle AOE = \angle DOF$ [शीर्षाभिमुख कोण] ... (2)

(1) और (2), $\triangle AOE \sim \triangle DOF$

[AAA समरूपता कसौटी से]

\therefore इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हैं।

$$\Rightarrow \frac{AE}{DF} = \frac{AO}{DO} \dots (3)$$

$$\text{अब } \text{ar}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} BC \times AE$$

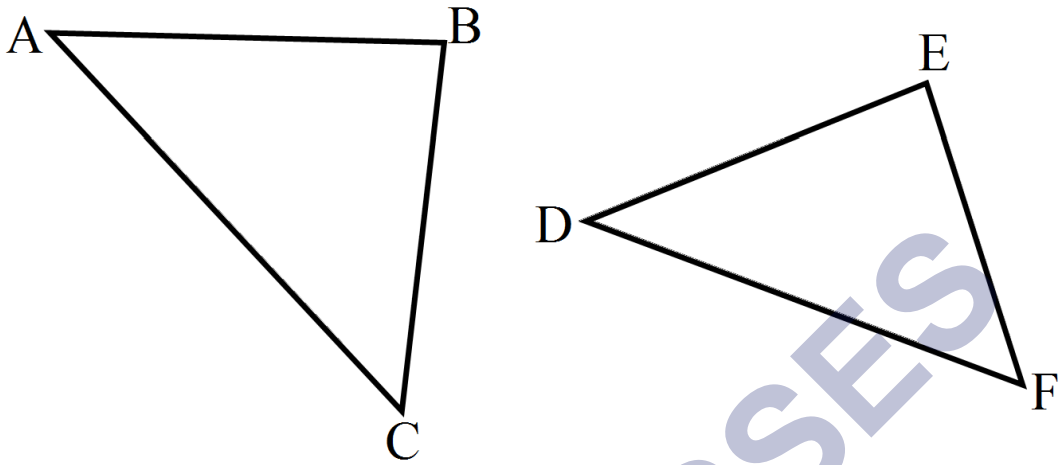
$$\text{ar}(\triangle DBC) = \frac{1}{2} BC \times DF$$

$$\therefore \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle DBC)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AE}{\frac{1}{2} \times BC \times DF} = \frac{AE}{DF}$$

$$(3) \text{ और } (4) \text{ से } \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle DBC)} = \frac{AO}{OD} \dots (4)$$

प्रश्न 4 यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं

उत्तर-



हमें प्राप्त है: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ तथा $\text{ar}(\triangle ABC) = \text{ar}(\triangle DEF)$ चुकी समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलो का अनुपात उनकी संगत भुजाओं अनुपात वर्ग के बराबर होती है।

$$\therefore \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$$

$$= \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2$$

परन्तु $\text{ar}(\triangle ABC) = \text{ar}(\triangle DEF)$ [ज्ञात है।]

$$\Rightarrow \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle DEF)} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = (1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = 1 \Rightarrow AB = DE$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{EF} = 1 \Rightarrow BC = EF$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{DF} = 1 \Rightarrow AC = DF$$

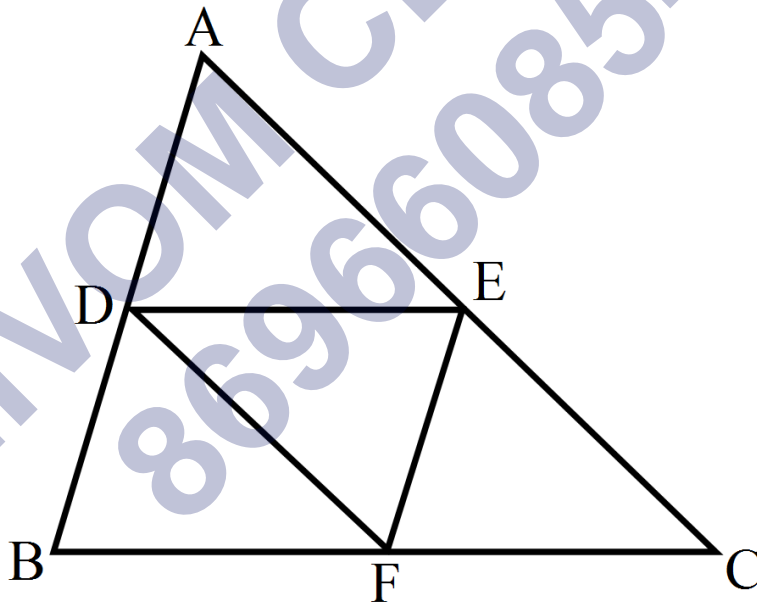
अर्थात् $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ की संगत भुजाएँ समान हैं।

$$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

[AAA सर्वांगसमता की कसौटी से]

प्रश्न 5 एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC और CA के मध्य-बिन्दु क्रमशः D, E और F हैं त्रिभुज DEF और त्रिभुज ABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} \dots (1)$$

$$\text{इसी प्रकार, } \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \dots (2)$$

(1) और (2) से हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

थेल्स प्रमेय के विलोम का प्रयोग करके हम कह सकते हैं की $DE \parallel BC$

$$\Rightarrow \angle ADE = \angle ABC \text{ [संगत कोण] ... (3)}$$

$$\text{और } \angle AED = \angle ACD \text{ [संगत कोण] ... (4)}$$

(3) और (4) से हमें प्राप्त होता है:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

[AAA समरूपता की कसौटी से]

$$\therefore \frac{\text{ar}(\triangle DEF)}{\text{ar}(\triangle ABC)} = \frac{(DE)^2}{(BC)^2} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 \dots (5)$$

[\therefore समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है]

परन्तु DE , $\triangle ABC$ की भुजाओं AB और AC के क्रमशः मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा है

$$\therefore DE = \frac{1}{2} BC \dots (6)$$

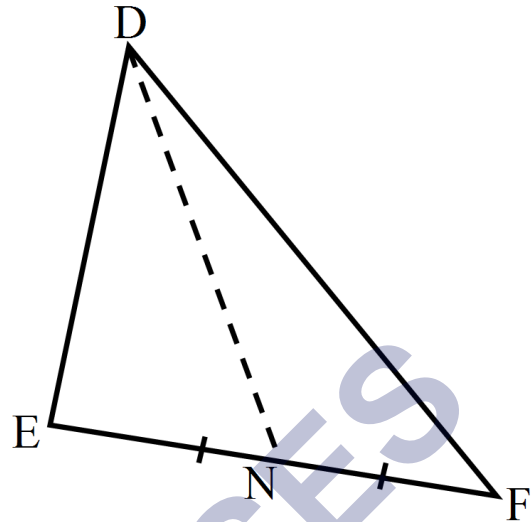
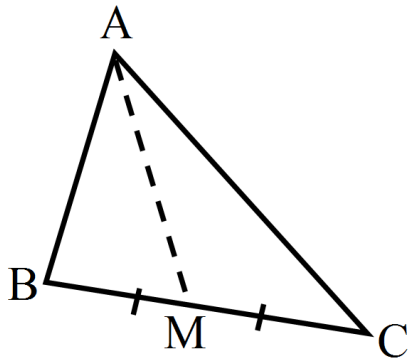
(5) और (6) से हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{\text{ar}(\triangle DEF)}{\text{ar}(\triangle ABC)} = \frac{\left(\frac{1}{2} BC\right)^2}{(BC)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{ar}(\triangle DEF) : \text{ar}(\triangle ABC) = 1 : 4$$

प्रश्न 6 सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत माधिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है।

उत्तर-



$$\therefore \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 \dots (1)$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \dots (2)$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{2MB}{2EN} = \frac{BM}{EN} \dots (3)$$

$\triangle ABM$ और $\triangle DEN$ में हमें प्राप्त है।

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BM}{EN}$$

$$\angle B = \angle E$$

[समरूप \triangle के संगत कोण]

\therefore SSS सर्वांगसमता की कसौटी से

$$\triangle ABM \sim \triangle DEN$$

⇒ इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हैं।

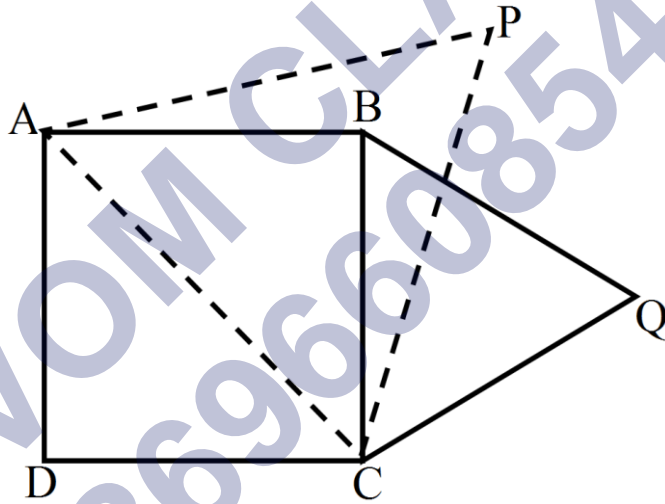
$$\therefore \frac{AB}{DM} = \frac{BM}{EN} = \frac{AM}{DN} \dots (4)$$

अब (1) और (4) से हमें प्राप्त होता है।

$$\frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle DEF)} = \left(\frac{AM}{DN} \right)^2$$

प्रश्न 7 कीजिए कि दो एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

उत्तर-



$$\therefore \triangle APC \sim \triangle BQC$$

∴ इनके क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के समान है।

$$\text{i.e., } \frac{\text{ar}(\triangle APC)}{\text{ar}(\triangle BQC)} = \left(\frac{AC}{BC} \right)^2 \dots (1)$$

चुकी एक वर्ग के विकर्ण की लम्बाई = $\sqrt{2} \times$ भुजा

$$\therefore AC = \sqrt{2} \times BC \dots (2)$$

(1) और (2) से,

$$\frac{\text{ar}(\triangle APC)}{\text{ar}(\triangle BQC)} = \left(\frac{\sqrt{2}BC}{BC} \right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

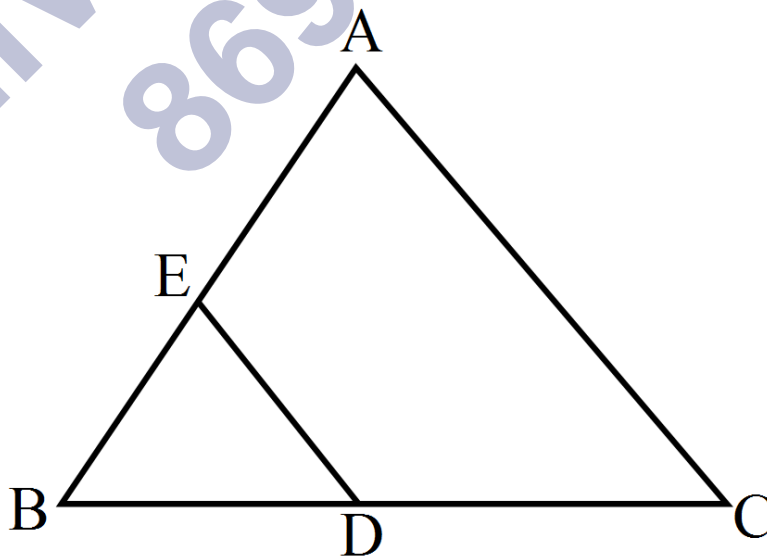
$$\Rightarrow \text{ar}(\triangle BQC) = \frac{1}{2} \text{ar}(\triangle APC)$$

प्रश्न 8 ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कोई भुजद BC का मध्य-बिन्दु है त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है:

- a. 2 : 1
- b. 1 : 2
- c. 4 : 1
- d. 1 : 4

उत्तर-

- c. 4 : 1



चूंकि सभी समबाहु त्रिभुजें समरूप होती हैं।

$$\triangle ABC \sim \triangle BDE$$

इनके क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है।

$$\therefore \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle BDE)} = \left(\frac{AB}{BD} \right)^2 \dots (1)$$

$$\therefore AB = AC = BC$$

[समबाहु $\triangle ABC$ की भुजाएँ]

$$\text{और } BD = \frac{1}{2} BC$$

[BC का मध्य बिंदु D है]

$$\Rightarrow BC = 2BD = AB \dots (2)$$

(1) और (2) से,

$$\frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle BDE)} = \left(\frac{2BD}{BD} \right)^2 = \frac{2^2}{1^2} = \frac{4}{1}$$

$$\therefore \text{ar}(\triangle ABC) : \text{ar}(\triangle BDE) = 4 : 1$$

प्रश्न 9 दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4 : 9 के अनुपात में हैं इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात है:

- a. 2 : 3
- b. 4 : 9
- c. 81 : 16
- d. 16 : 81

उत्तर-

d. 16 : 81

$$\therefore \frac{\text{क्षेत्रफल} - (\Delta - I)}{\text{क्षेत्रफल} - (\Delta - II)} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

\Rightarrow क्षेत्रफल $(\Delta - I)$ क्षेत्रफल $(\Delta - II) = 16 : 81$

प्रश्नावली 6.5 (पृष्ठ संख्या 164-166)

प्रश्न 1 कुछ त्रिभुजों की भुजाएँ नीचे दी गई हैं। निर्धारित कीजिए कि इनमें से कौन-कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं। इस स्थिति में कर्ण की लंबाई भी लिखिए।

- (i) 7cm, 24cm, 25cm
- (ii) 3cm, 8cm, 6cm
- (iii) 50cm, 80cm, 100cm
- (iv) 13cm, 12cm, 5cm

उत्तर-

(i) कर्ण² = लंब² + आधार²

$$25^2 = 7^2 + 24^2$$

$$625 = 49 + 576$$

$$625 = 625$$

चूँकि बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर है।

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की हैं।

अतः कर्ण = 25cm (सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है)

(ii) निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लंब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$8^2 = 3^2 + 6^2$$

$$64 = 9 + 36$$

$$64 = 45$$

चूँकि वायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर नहीं है।

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की नहीं है।

(iii) निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लंब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$100^2 = 50^2 + 80^2$$

$$10000 = 2500 + 6400$$

$$10000 = 8900$$

(iv) निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लंब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$13^2 = 5^2 + 12^2$$

$$169 = 25 + 144$$

$$169 = 169$$

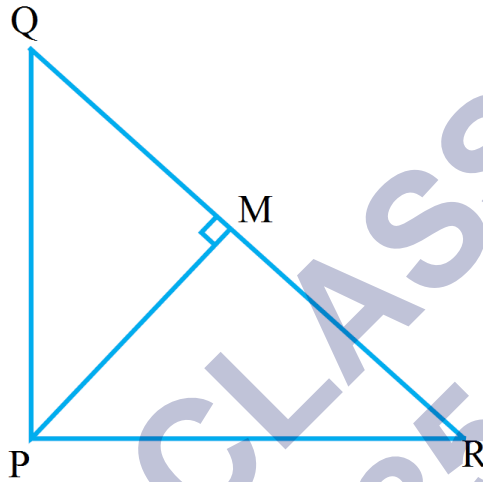
चूँकि वायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर है।

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की है।

अतः कर्ण = 13cm (सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है)

प्रश्न 2 PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ है दर्शाइए कि $PM^2 = QM.MR$ है।

उत्तर-



दिया है: PQR एक समकोण त्रिभुज है

जिसका कोण P समकोण है तथा QR

पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ है

सिद्ध करना है: $PM^2 = QM.MR$

प्रमाण: $PM \perp QR$ दिया है

इसलिए प्रमेय 6.7 से

$$\triangle PMQ \sim \triangle PRQ \dots (1)$$

इसी प्रकार,

$$\triangle PMQ \sim \triangle PRQ \dots (1)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

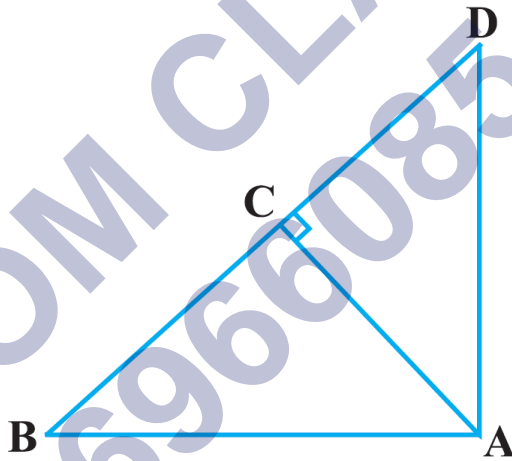
$$\triangle PMQ \sim \triangle PMR$$

अतः $\frac{PM}{QM} = \frac{MR}{PM}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।)

$$\therefore PM^2 = QM \cdot MR$$

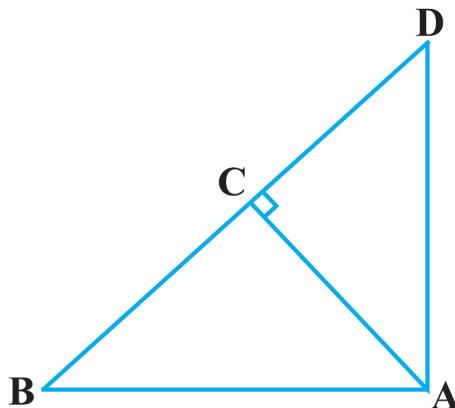
प्रश्न 3 आकृति में ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा AC \perp BD है दर्शाइए कि:

- $AB^2 = BC \cdot BD$
- $AC^2 = BC \cdot DC$
- $AD^2 = BD \cdot CD$



उत्तर- ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा AC \perp BD है

सिद्ध करना है:



1. $AB^2 = BC \cdot BD$
2. $AC^2 = BC \cdot DC$
3. $AD^2 = BD \cdot CD$

प्रमाण: (1) $\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है और $AC \perp BD$ दिया है

1. $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ प्रमेय

अतः $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।)

$\therefore AB^2 = BC \cdot BD$ इति सिद्धम्।

2. $\triangle ABC \sim \triangle ADC$

अतः $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।)

$\therefore AC^2 = BC \cdot DC$ इति सिद्धम्।

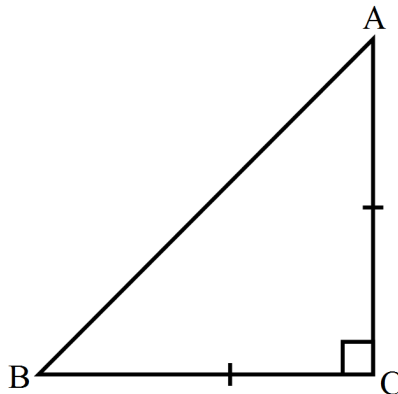
3. $\triangle ACD \sim \triangle CBD$

अतः $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।)

$\therefore AD^2 = BD \cdot CD$ इति सिद्धम्।

प्रश्न 4 $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है।

उत्तर-



दिया है: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है

जिसका कोण C समकोण है

सिद्ध करना है: $AB^2 = 2AC^2$

प्रमाण: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है

$$AC = BC \dots (1)$$

और ABC एक समकोण त्रिभुज है

पाइथागोरस प्रमेय से

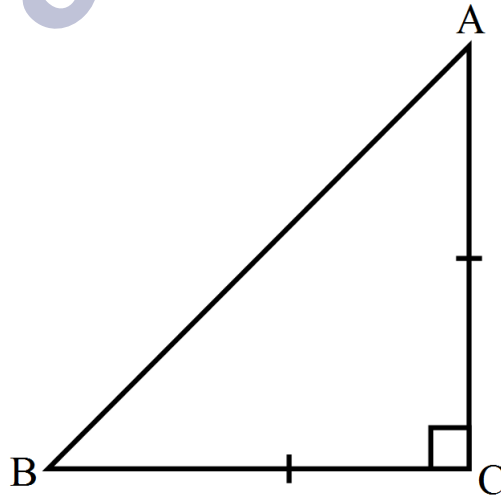
$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\text{अथवा } AB^2 = AC^2 + AC^2 \text{ (समी. 1 से)}$$

$$\text{अथवा } AB^2 = 2AC^2 \text{ इति सिद्धम्।}$$

प्रश्न 5 ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है

उत्तर-



दिया है: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

जिसमें $AC = BC$ है और $AB^2 = 2AC^2$ है।

सिद्ध करना है: ABC एक समकोण त्रिभुज है।

प्रमाण: $AC = BC$ (1) दिया है।

और $AB^2 = 2AC^2$ (दिया है।)

अथवा $AB^2 = AC^2 + AC^2$

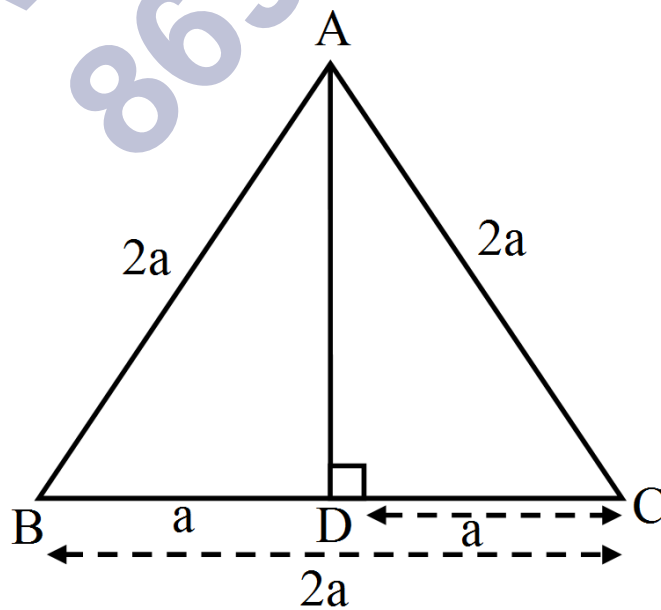
अथवा $AB^2 = BC^2 + AC^2$ (समी. 1 से)

अतः पाइथागोरस प्रमेय के विलोम (प्रमेय 6.9) से

ABC एक समकोण त्रिभुज है। इति सिद्धम्।

प्रश्न 6 एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है

$$AB = BC = AC = 2a$$

रचना: $AD \perp BC$ डाला

अतः समकोण त्रिभुज ACD में

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$(2a)^2 = AD^2 + (a)^2$$

$$4a^2 = AD^2 + a^2$$

$$AD^2 = 4a^2 - a^2$$

$$AD^2 = 3a^2$$

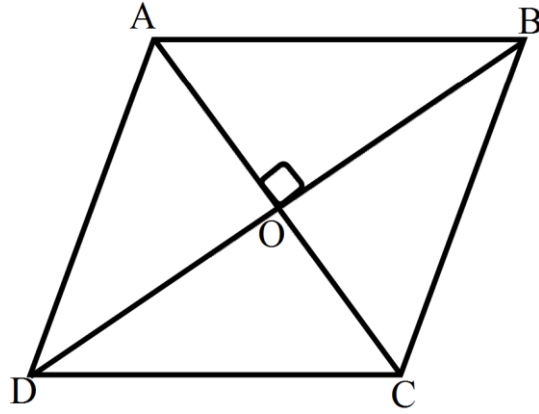
$$AD = \sqrt{3a^2}$$

$$AD = a\sqrt{3}$$

प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई $a\sqrt{3}$

प्रश्न 7 सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

उत्तर-



दिया है: ABCD एक समचतुर्भुज है जिसकी

भुजाएँ AB, BC, CD तथा AD है और विकर्ण

AC तथा BD एक दुसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं

सिद्ध करना है: $AB^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

प्रमाण: समचतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं इसलिए,

समकोण $\triangle AOB$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 \dots (1)$$

इसी प्रकार $\triangle BOC$, $\triangle COD$ और $\triangle AOB$ में,

$$BC^2 = CO^2 + BO^2 \dots (2)$$

$$CD^2 = CO^2 + DO^2 \dots (3)$$

$$AD^2 = AO^2 + DO^2 \dots (4)$$

समी. (1), (2), (3) और (4) जोड़ने पर

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$$

$$\begin{aligned}
&= AO^2 + BO^2 + CO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 + AO^2 + DO^2 \\
&= 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2) \\
&= 2\left[\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right) + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2\right] \\
&= 2\left[\frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{2}BD^2\right] \\
&= 2 \times \frac{1}{4}[AC^2 + BD^2 + AC^2 + BD^2] \\
&= \frac{1}{2}[2AC^2 + 2BD^2] \\
&= \frac{1}{2} \times 2[AC^2 + BD^2] \\
&= AC^2 + BD^2
\end{aligned}$$

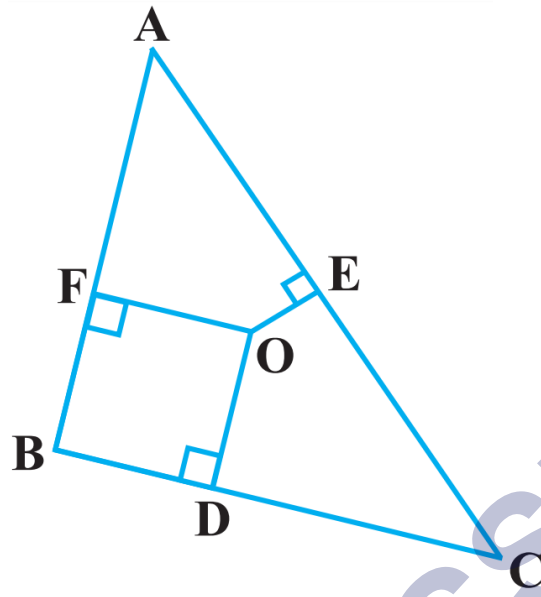
$\therefore AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$ इति सिद्धम्।

प्रश्न 8 आकृति में $\triangle ABC$ के अन्तर्गत में स्थित कोई बिंदु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp AB$ है।

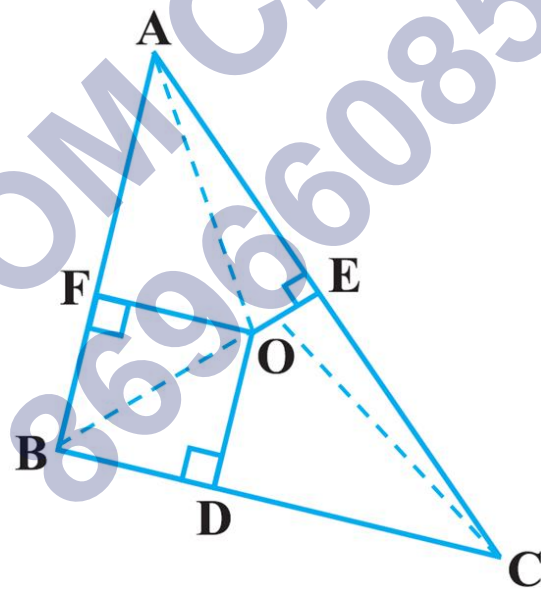
दर्शाए कि,

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$$

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$$



उत्तर-



दिया है: $\triangle ABC$ के अभ्यंतर में स्थित कोई बिंदु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp AB$ है।

सिद्ध करना है:

1. $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$
2. $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$

प्रमाण:

समकोण $\triangle AOF$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$OA^2 = AF^2 + OF^2 \dots(i)$$

समकोण $\triangle BOD$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$OB^2 = BD^2 + OD^2 \dots(II)$$

समकोण $\triangle COE$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$OC^2 = CE^2 + OE^2 \dots(III)$$

समीकरण (I), (II) तथा (III) को जोड़ने पर

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = AF^2 + OF^2 + BD^2 + OD^2 + CE^2 + OE^2$$

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2 \text{ इति सिद्धम्।}$$

अब, पुनः

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$$

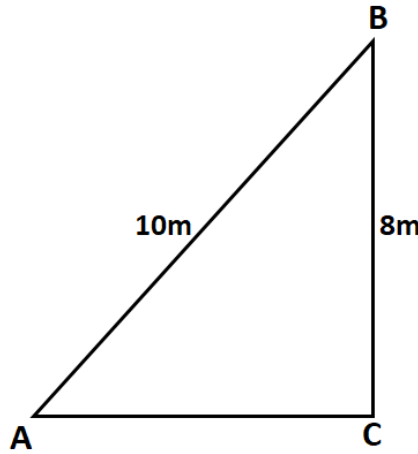
$$\text{या } AF^2 + BD^2 + CE^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2$$

$$\text{या } AF^2 + BD^2 + CE^2 = (OA^2 - OE^2) + (OB^2 - OF^2) + (OC^2 - OD^2)$$

या $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$ पाइथागोरस प्रमेय से

प्रश्न 9 10m लंबी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8m की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



AB एक 10m लम्बी सीढ़ी है जिसे दीवार BC पर टिकाया गया है। दीवार पर स्थित खिड़की B दीवार पर उसके आधार से 8m की ऊँचाई तक जाती है। सीढ़ी का निचला सिरा A दीवार के आधार C से AC की दूरी पर है।

अब समकोण $\triangle BCA$ में, $\angle C = 90^\circ$

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 \text{ [पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

$$AC^2 = (10)^2 - (8)^2$$

$$= 100 - 64$$

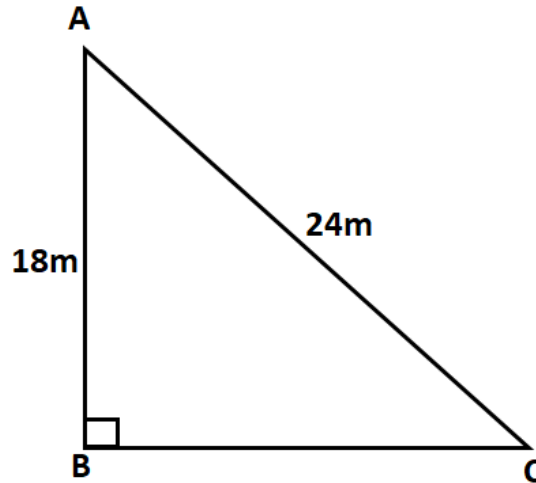
$$= 36$$

$$AC^2 = \sqrt{36} = 6 \text{ m}$$

अतः सीढ़ी के निचले सिरे की दीवार के आधार से अभीष्ट दूरी = 6 m है।

प्रश्न 10 18m ऊँचे एक ऊर्ध्वाधर खंभे के ऊपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है तथा तार का दूसरा सिरा एक खूटे से जुड़ा हुआ है। खंभे के आधार से खूटे को कितनी दूरी पर गाड़ा जाए कि तार तना रहे जबकि तार की लंबाई 24m है।

उत्तर-



एक ऊर्ध्वाधर खम्भा $AB = 18 \text{ m}$ है जो सिरे A से एक तार $AC = 24 \text{ m}$ से एक खूटे C से जुड़ा है। खम्भे के आधार B से खूटे C की दूरी BC है।

अब समकोण $\triangle ABC$ में पाइथागोरस प्रमेय से, चूँकि

$$BC^2 = AC^2 - AB^2$$

$$BC^2 = (24)^2 - (18)^2$$

$$BC^2 = 576 - 324$$

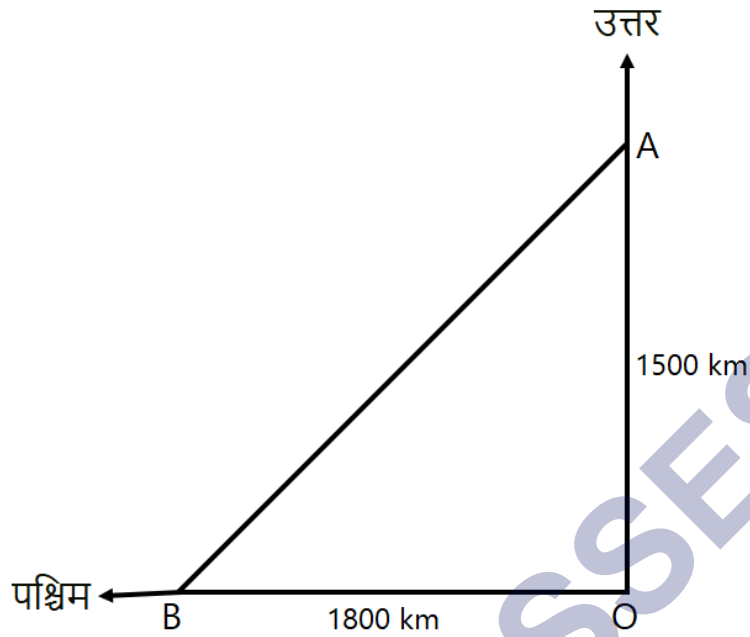
$$= 252$$

$$BC = \sqrt{252} = 6\sqrt{7} \text{ m}$$

अतः खूटे की खम्भे के आधार से अभीष्ट दूरी $= 6\sqrt{7} \text{ m}$.

प्रश्न 11 एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 km/hr की चाल से उड़ता है। इसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 km/hr की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी कितनी होगी?

उत्तर-



पहले हवाई जहाज द्वारा $1\frac{1}{2}$ घण्टे में उत्तर की ओर चली गई दूरी $= \frac{3}{2} \times 1000 = 1500 \text{ km}$ तथा

दूसरे हवाई जहाज द्वारा $1\frac{1}{2}$ घण्टे में पश्चिम की ओर चली गई दूरी $= \frac{3}{2} \times 1200 = 1800 \text{ km}$
जहाज A और B की स्थिति $1\frac{1}{2}$ घण्टे बाद दूरी की संलग्न आकृति में प्रदर्शित की गई है तथा उनके बीच की दूरी AB है।

चूँकि समकोण त्रिभुज AOB में $\angle AOB$ समकोण है।

$$AB^2 = (AO)^2 + (BO)^2$$

पाइथागोरस प्रमेय से]

$$AB^2 = (1500)^2 + (1800)^2$$

$$= 2250000 + 3240000$$

$$= 5490000$$

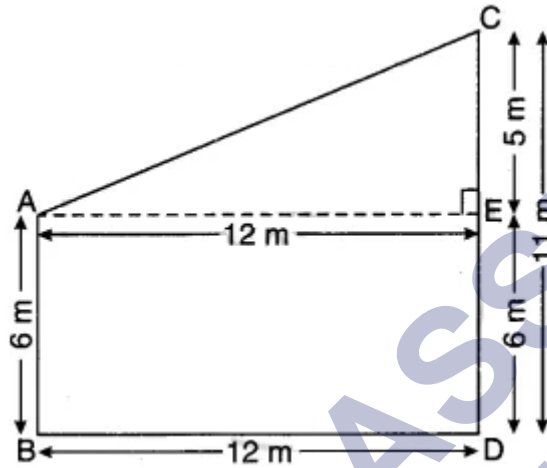
$$AB = \sqrt{5490000} = \sqrt{90000 \times 61}$$

$$= 300\sqrt{61} \text{ km}$$

अतः दोनों हवाई जहाजों के बीच की अभीष्ट दूरी $= 300\sqrt{61} \text{ km}$ है।

प्रश्न 12 दो खंभे जिनकी ऊँचाईयाँ 6m और 11m हैं तथा ये समतल भूमि पर खड़े हैं। यदि इनके पाद बिंदुओं के बीच की दूरी 12m है तो इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दो खंभे $AB = 6\text{m}$ एवं $CD = 11\text{m}$ समतल भूमि पर दूरी $BD = 12\text{m}$ पर स्थित है उनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी AC है। (देखिए संलग्न आकृति) E से $AE \perp CD$ खींचिए।

अब समकोण $\triangle AEC$ में,

भुजा $AE = BD = 12\text{ m}$ एवं $ED = AB = 6\text{ m}$

एवं $CD = 11\text{ m}$

$$CE = CD - ED$$

$$= 11\text{ m} - 6\text{ m}$$

$$= 5\text{m}$$

अब समकोण $\triangle AEC$ में (जहाँ $\angle AEC = 90^\circ$),

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 \text{ [पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

$$AC^2 = (12)^2 + (5)^2$$

$$= 144 + 25$$

$$= 169$$

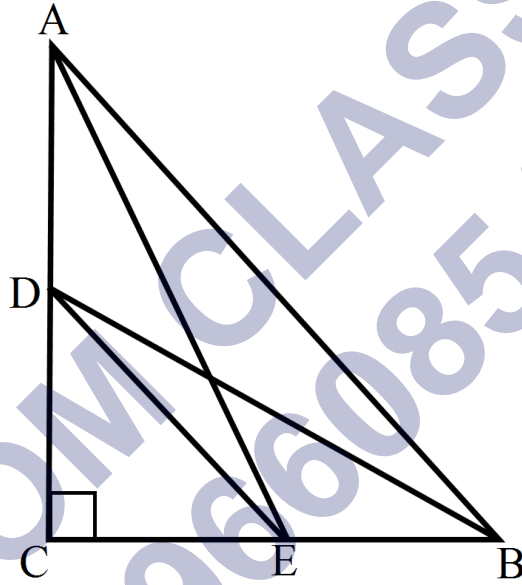
$$AC = \sqrt{169} = 13\text{m}$$

अतः खम्भों के ऊपरी सिरे के बीच की अभीष्ट दूरी = 13m है।

प्रश्न 13 किसी त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA और CB पर क्रमशः बिंदु D और E स्थित है

सिद्ध कीजिए कि $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ है

उत्तर-



दिया है: त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है की भुजाओं CA और CB पर क्रमशः बिंदु D और E स्थित है।

सिद्ध करना है:

$$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$$

रचना: D को E से मिलाया

प्रमाण: समकोण $\triangle ACE$ में पाईथागोरस प्रमेय से

$$AE^2 = AC^2 + CE^2 \dots(1)$$

इसीप्रकार,

समकोण $\triangle BCD$ में, पाईथागोरस प्रमेय से

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 \dots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$AE^2 + BD^2 = AC^2 + CE^2 + BC^2 + CD^2$$

$$AE^2 + BD^2 = (AC^2 + BC^2) + (CE^2 + CD^2)$$

$$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$$

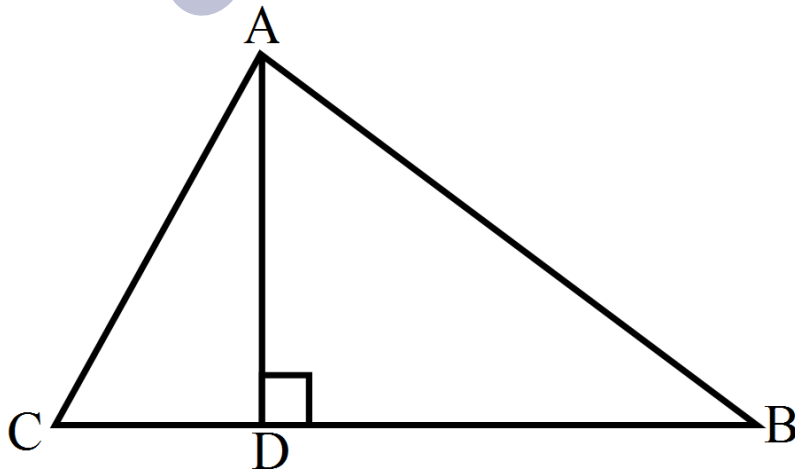
पाईथागोरस प्रमेय से,

$$[\because AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{ और } DE^2 = CE^2 + CD^2]$$

प्रश्न 14 किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A से BC पर डाला गया लंब BC को बिंदु D पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि $DB = 3CD$ है

सिद्ध कीजिए कि : $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ है

उत्तर-



दिया है: ABC का त्रिभुज है जिससे $AD \perp BC$ है तथा $DB = 3CD$ है।

सिद्ध करना है:

$$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$$

प्रमाण:

$$CD = BC - BD$$

$$CD = BC - 3CD$$

$$4CD = BC$$

$$CD = \frac{BC}{4} \dots (1)$$

$$DB = 3CD \text{ दिया है।}$$

$$DB = \frac{3BC}{4} \dots (2)$$

समकोण $\triangle ACD$ पाईथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 \dots (3)$$

समकोण $\triangle ABD$ पाईथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$AB^2 = AC^2 - CD^2 + BD^2$$

$$AB^2 = AC^2 - \left(\frac{BC}{4}\right)^2 + \left(\frac{3BC}{4}\right)^2$$

$$AB^2 = AC^2 - \frac{BC^2}{16} + \frac{9BC^2}{16}$$

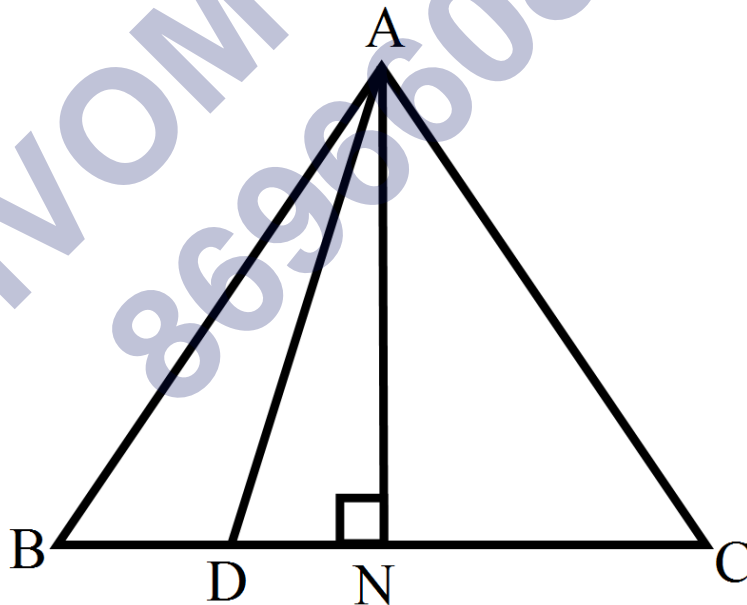
$$AB^2 = AC^2 + \frac{8BC^2}{16}$$

$$AB^2 = AC^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2 \text{ इति सिद्धम्।}$$

प्रश्न 15 किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है की $BD = \frac{1}{3}BC$ है। सिद्ध कीजिए की $9AD^2 = 7AB^2$ है।

उत्तर-



दिया है: ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

जिसमें $BD = \frac{1}{3} BC$ है।

सिद्ध करना है: $9AD^2 = 7AB^2$

रचना: $AN \perp BC$ खींचा।

प्रमाण:

$$BD = \frac{1}{3} BC \dots (1) \text{ दिया है।}$$

$$BN = \frac{1}{2} BC [\because AN \perp BC] \dots (2)$$

$$DN = BN - BD$$

$$= \frac{1}{2} BC - \frac{1}{3} BC$$

$$= \frac{3BC - 2BC}{6} = \frac{BC}{6}$$

समकोण $\triangle ADN$ में पाईथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = AN^2 + BN^2$$

$$AB^2 = (AD^2 - DN^2) + BN^2 \text{ समी. (1) से}$$

$$AB^2 = AD^2 = \left(\frac{BC}{6}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$AB^2 = AD^2 = \frac{BC^2}{36} + \frac{BC^2}{4}$$

$$AB^2 = AD^2 - \frac{BC^2 + 9BC^2}{36}$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{8BC^2}{36}$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{2BC^2}{9}$$

$$9AB^2 = 9AD^2 + 2BC^2$$

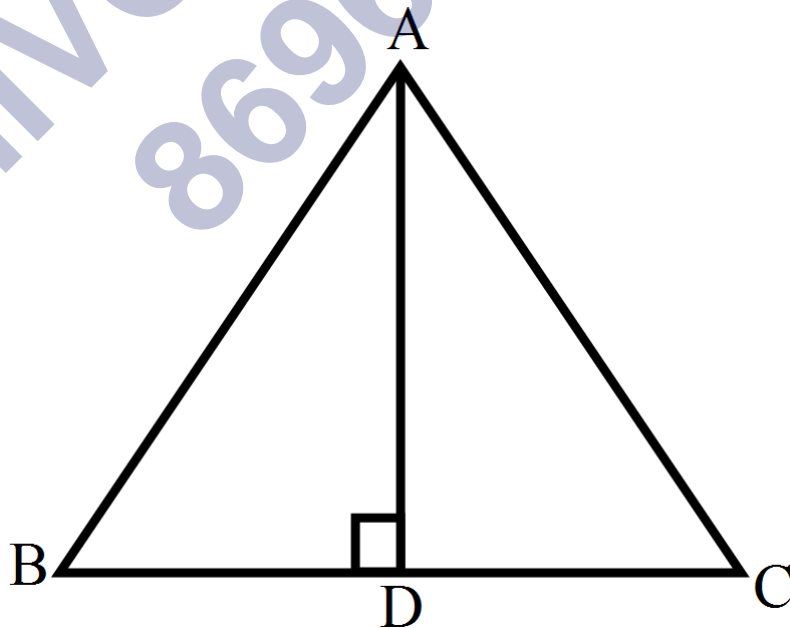
$$9AB^2 = 9AD^2 + 2AB^2$$

$$9AB^2 - 2AB^2 = 9AD^2$$

$$7AB^2 = 9AD^2$$

प्रश्न 16 किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलंब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।

उत्तर-



दिया है: ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

जिसमें $AD \perp BC$ है।

सिद्ध करना है: $3AB^2 = 4AD^2$

प्रमाण: समकोण त्रिभुज ABD में पाईथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$AB^2 = AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \left[\because DB = \frac{1}{2}BC\right]$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{BC^2}{4}$$

$$4AB^2 = 4AD^2 + BC^2$$

$$4AB^2 = 4AD^2 + AB^2 \left[\because AB = BC\right]$$

$$4AB^2 - AB^2 = 4AD^2$$

$$3AB^2 = 4AD^2$$

प्रश्न 17 सही उत्तर चुनकर उसका औचित्य दीजिए $\triangle ABC$ में $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AC = 12$ cm और $BC = 6$ cm है कोण B है।

- 120°
- 60°
- 90°
- 45°

उत्तर-

c. 90°

सही उत्तर 90° है, क्योंकि

$$(AB)^2 = (6\sqrt{3})^2 = 108$$

$$(AC)^2 = (12)^2 = 144$$

$$(BC)^2 = (6)^2 = 36$$

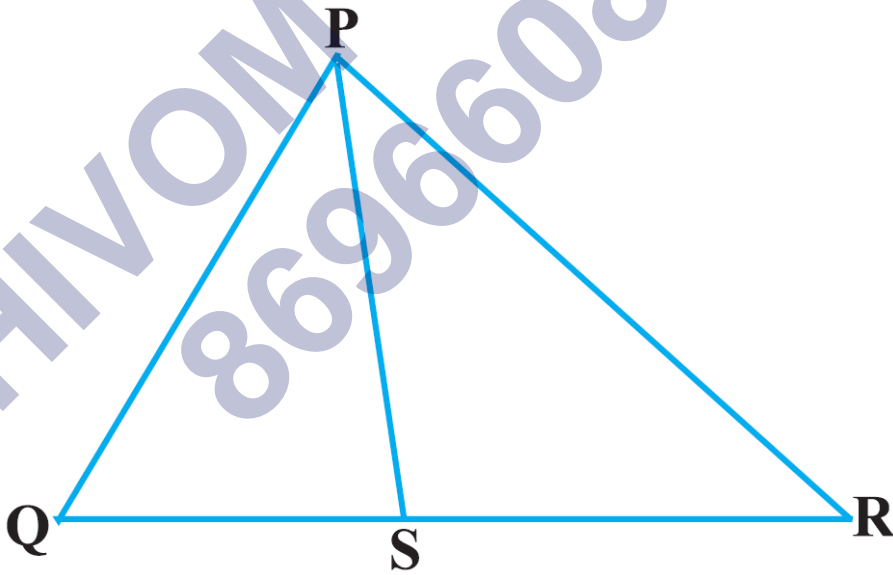
$$\Rightarrow 108 + 36 = 144$$

$$\Rightarrow (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

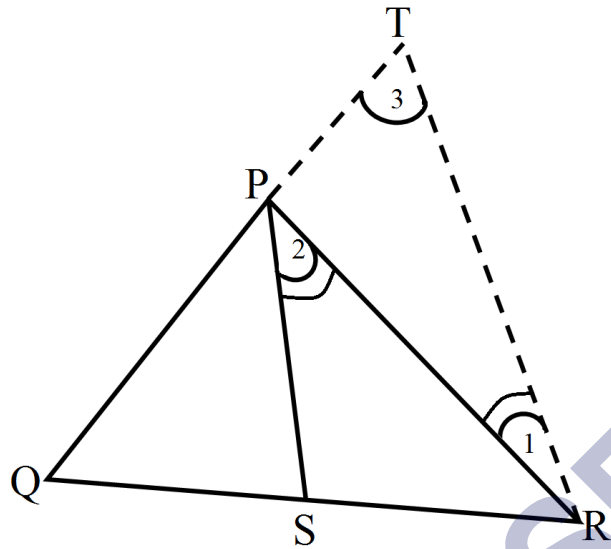
$\Rightarrow \angle B = 90^\circ$ समकोण[पाइथागोरस प्रमेय के विलोम द्वारा]

प्रश्नावली 6.6 (पृष्ठ संख्या 166-168)

प्रश्न 1 आकृति में PS कोण QPR का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$ है।



उत्तर-



हमें प्राप्त है: $\triangle PQR$ जिसमें $\triangle QPR$ का समद्विभाजक PS है।

$$\therefore \angle QPS = \angle RPS$$

रचना: $RT \parallel RS$ खींचो जो QP (बढ़ाए जाने पर) को T पर प्रतिच्छेदक करे।

$$\angle 1 = \angle RPS \text{ [एकांतर कोण]}$$

$$\angle 3 = \angle QPS \text{ [संगत कोण]}$$

$$\angle RPS = \angle QPS \text{ [ज्ञात है]}$$

$$\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow PT = PR$$

[\because किसी \triangle के समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।]

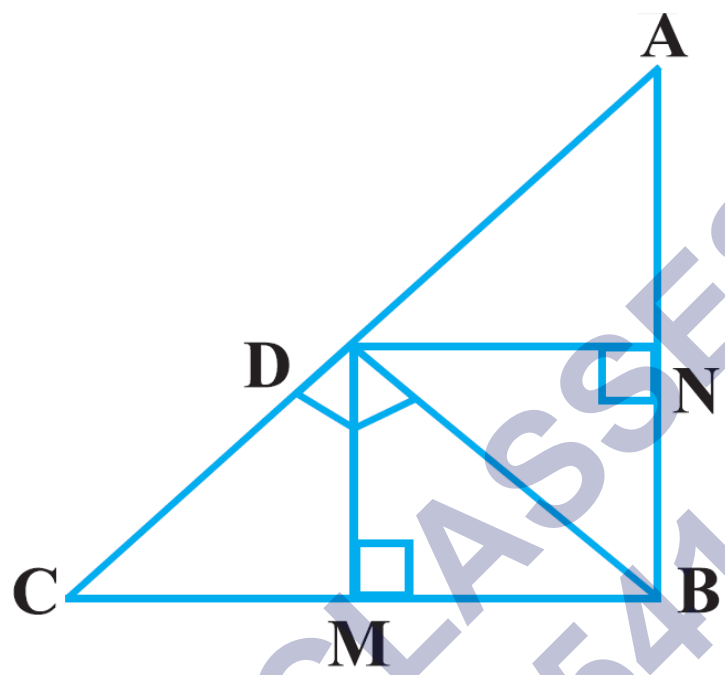
अब $\triangle QRT$ में $PR \parallel RT$ [रचना द्वारा]

\therefore मूलभूत समानुपातिकता प्रमेय के प्रयोग से हमें प्राप्त होती है।

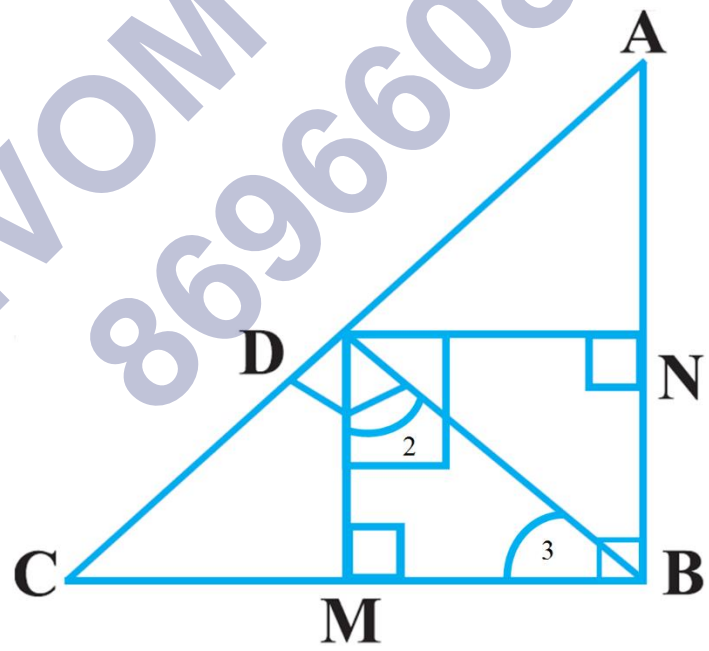
$$\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PT} \Rightarrow \frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR} \text{ [}\because PT = PR\text{]}$$

प्रश्न 2 आकृति में D त्रिभुज ABC के कर्ण AC पर स्थित एक बिन्दु है तथा $DM \perp BC$ और $DN \perp AB$ है। सिद्ध कीजिए कि:

- (i) $DM^2 = DN \cdot MC$
- (ii) $DN^2 = DM \cdot AN$



उत्तर-



हमें प्राप्त है: की त्रिभुज ABC में AC विकर्ण है तथा $BD \perp AC$, $DM \perp BC$ और $DN \perp AB$.

\Rightarrow BMBN आयत है।

$\therefore BM = ND$ [आयत की सम्मुख भुजाएँ]

1. $\triangle BMD$ और $\triangle DMC$ में,

$$\angle DMB = 90^\circ = \angle DMC \dots (1)$$

$$\therefore BD \perp AC$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\triangle BDM, \angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3 \dots (2)$$

(1) और (2) से,

$$\triangle BMD \sim \triangle DMC \text{ [AA समरूपता से]}$$

\therefore इनकी भुजाएँ हैं।

$$\Rightarrow \frac{BM}{DM} = \frac{MD}{MC} \Rightarrow \frac{DN}{DM} = \frac{DM}{MC}$$

[\because DN और BM, आयत की सम्मुख भुजाएँ हैं]

$$\therefore DN = BM$$

$$\Rightarrow DN \times MC = DM \times DM$$

$$\Rightarrow DN \times MC = DM^2$$

$$DM^2 = DN \times MC$$

2. $\triangle BND$ और $\triangle DNA$, हमें प्राप्त है।

$$\angle BND = \angle DNA \text{ [प्रत्येक } 90^\circ]$$

$$\angle DBN = \angle ADN \text{ [(1) में सिद्ध किया है]}$$

$$\Rightarrow \triangle BND \sim \triangle DNA \text{ [AA समरूपता]}$$

\therefore इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हैं।

$$\Rightarrow \frac{BN}{DN} = \frac{ND}{NA}$$

$$\Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{DN}{NA}$$

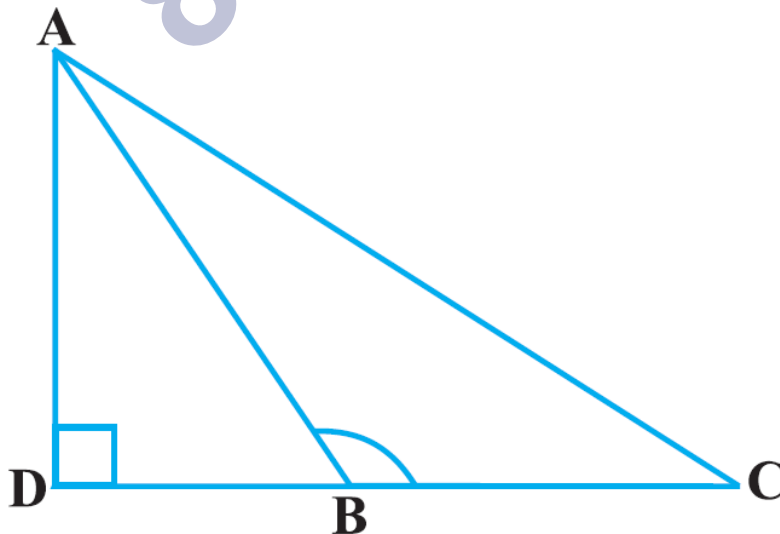
[\because BN और DM, आयत की सम्मुख भुजाएँ हैं]

$$\Rightarrow DM \times NA = DN \times DN$$

$$\Rightarrow DM \times NA = DN^2$$

$$DN^2 = DM \times AN$$

प्रश्न 3 आकृति में ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC > 90^\circ$ है तथा $AD \perp CB$ है सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$ है।



उत्तर-

$\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC > 90^\circ$ और $AD \perp CB$

$\therefore \triangle ADB$ में, $\angle D = 90^\circ$

\therefore पाईथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \dots (1)$$

पुनः $\triangle ADC$

$\angle D = 90^\circ$

\therefore पाईथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$= AD^2 + [BD + BC]^2$$

$$= AD^2 + [BD^2 + BC^2 + 2BD \cdot BC]$$

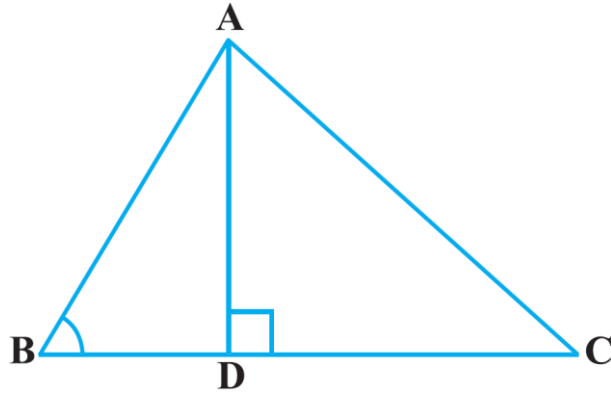
$$\Rightarrow AC^2 = [AD^2 + DB^2 + 2BC \cdot BD] \dots (1)$$

हमें प्राप्त होता है।

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$$

प्रश्न 4 आकृति में ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC < 90^\circ$ है तथा $AD \perp BC$ है सिद्ध कीजिए कि

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD \text{ है।}$$



उत्तर-

$\triangle ABC$ में $\angle B < 90^\circ$ और $AD \perp BC$ समकोण $\triangle ADB$ में, $\angle D = 90^\circ$

\therefore पाईथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \dots (1)$$

तथा समकोण $\triangle ADC$ में $\angle D = 90^\circ$

\therefore पाईथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर, हमें मिलता है।

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = AD^2 + [BC - BD]^2$$

$$= AD^2 + [BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD]$$

$$= [AD^2 + BD^2] + BC^2 - 2BC \cdot BD$$

$$= AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD \dots (1) \text{ से,}$$

इस प्रकार,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$$

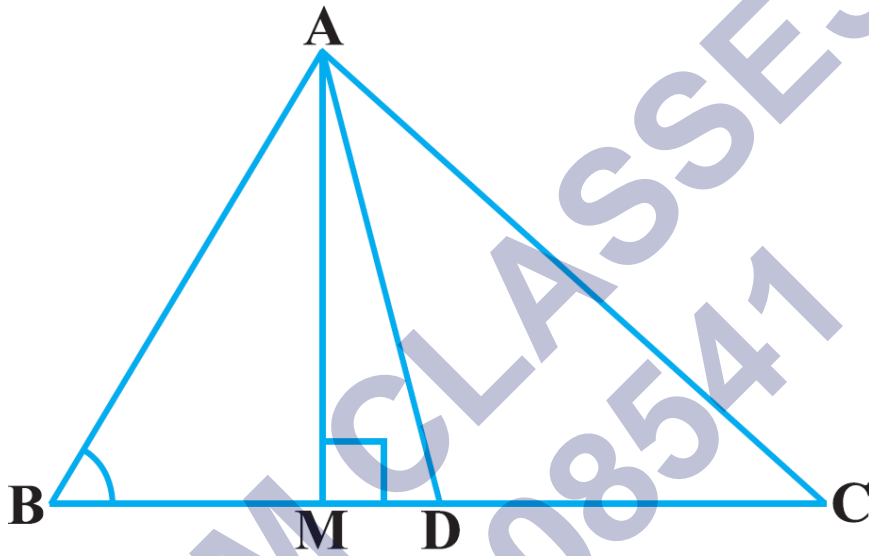
जो की अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 5 आकृति में AD त्रिभुज ABC की एक माधिका है तथा $AM \perp BC$ है सिद्ध कीजिए की:

$$1. AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$2. AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$3. AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{BC}^2$$



उत्तर-

$$1. = AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 2MD \cdot \frac{BC}{2}$$

[\because BC की मध्यबिंदु D]

$$= AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + BC \cdot DM$$

इस प्रकार,

$$AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

2. $\triangle AMB$ में,

$$\angle AMB = 90^\circ$$

\therefore पाईथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर, हमें मिलता है।

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 = AM^2 + (BD - DM)^2$$

$$= AM^2 + BD^2 + DM^2 - 2BD \cdot DM$$

$$[\because DM^2 + AM^2 = AD^2]$$

$$= AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{BC}{2} \cdot DM$$

$$= AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - BC \cdot DM$$

इस प्रकार,

$$AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + \left[\frac{BC}{2}\right]^2 \dots (2)$$

3. (1) और (2) को जोड़ने पर

$$AB^2 + AC^2 = \left[AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]$$

$$+ \left[AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]$$

$$= AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + AD^2 + BC \cdot MD + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$= 2AD^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

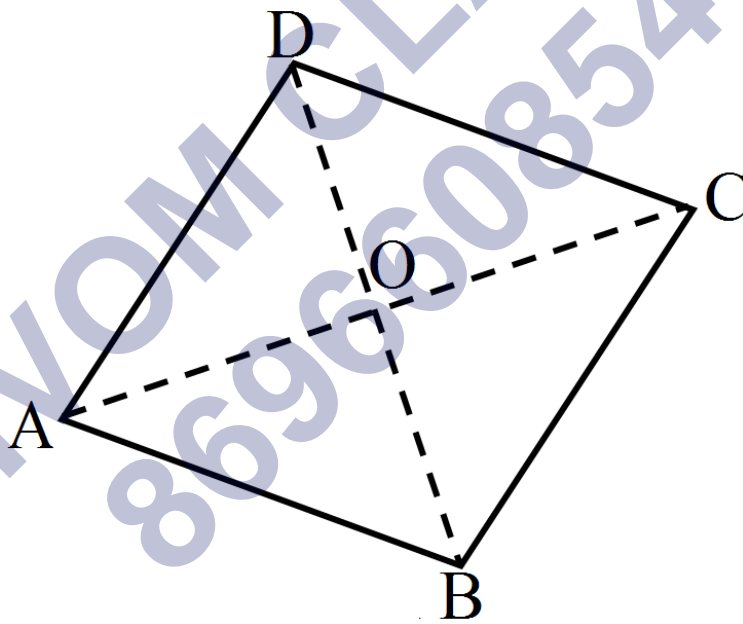
$$= 2AD^2 + 2\frac{BC^2}{4}$$

$$= 2AD^2 + \frac{BC^2}{2}$$

इस प्रकार $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$ जो की अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 6 सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

उत्तर-



हमें प्राप्त है: एक समांतर चतुर्भुज ABCD, AC और BD समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण हैं चुकी एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित होते हैं।

∴ AC और BD का मध्य बिंदु O है। अब $\triangle ABC$ में, BO एक मधिका है।

$$\therefore AB^2 + BC^2 = 2BO^2 + \frac{1}{2}AC^2 \dots (1)$$

तथा $\triangle ABC$, में DO एक मधिका है।

$$\therefore AD^2 + CD^2 = 2DO^2 + \frac{1}{2}AC^2 \dots (2)$$

(1) और (2) से हमें प्राप्त होता है।

$$AB^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2$$

$$= 2BO^2 + \frac{1}{2}AC^2 + 2DO^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$= 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}AC^2 + 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$[\because BO = \frac{1}{2}BD \text{ और } DO = \frac{1}{2}BD]$$

$$= 2\left[\frac{BD^2}{4} + \frac{BD^2}{4}\right] + \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

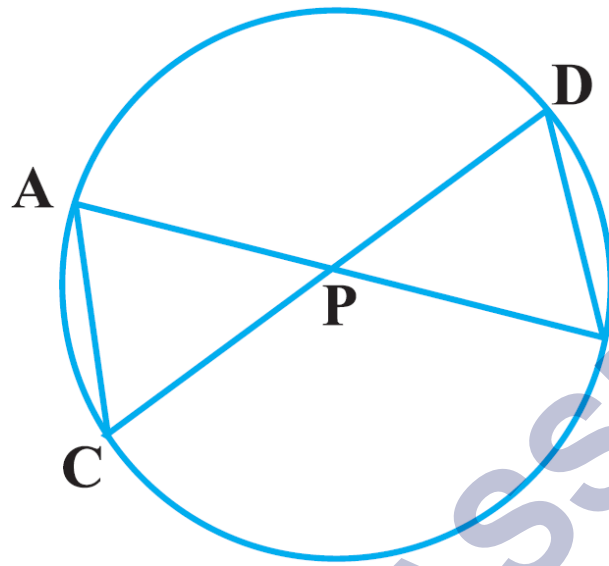
$$= 2\left[\frac{2BD^2}{4}\right] + AC^2 = BD^2 + AC^2$$

$$= 2\left[\frac{2BD^2}{4}\right] + AC^2 = BD^2 + AC^2$$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 \text{ जो की अभीष्ट संबन्ध है।}$$

प्रश्न 7 आकृति में एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD परस्पर बिन्दु p पर प्रतिच्छेद करती हैं सिद्ध कीजिए कि:

$$1. \triangle APC \sim \triangle DPB$$

2. $AP \cdot PB = CP \cdot DP$ 

उत्तर-

हमे प्राप्त है: की वृत्त की दो जीवाए AB और CD है AB और CD परस्पर P पर प्रतिच्छेद करती है।

$$\therefore \angle APC = \angle DPB$$

[शीर्षभिमुख कोण](1)

रचना: AC और BD को मिलाओ।

1. $\triangle APC$ और $\triangle DPB$

[एक ही वृत्तखंड में बने कोण](2)

(1) और (2) से AA समरूपता का प्रयोग करने पर $\triangle APC \sim \triangle DPB$

2. चूकी $\triangle APC \sim \triangle DPB$ [ऊपर सिद्ध किया है]

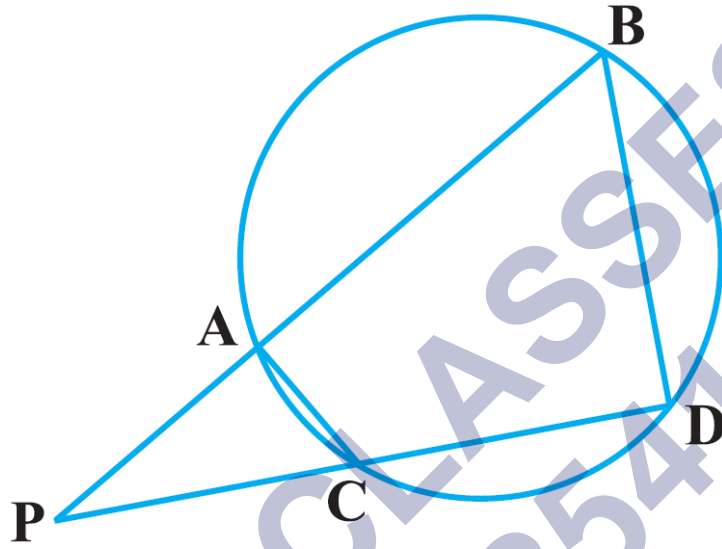
\therefore इनकी संगत भुजाए समानुपाती है।

$$\Rightarrow \frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$$

$$\Rightarrow AP \times BP = CP \times DP \text{ जो की अभीष्ट संबन्ध है।}$$

प्रश्न 8 आकृति में एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD बढ़ाने पर परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं सिद्ध कीजिए कि

1. $\triangle PAC \sim \triangle PDB$
2. $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



उत्तर- वृत्त के अंदर दो जीवाएँ AB और CD हैं जो की (बढ़ाने पर) वृत्त के बाहर बिंदु P पर मिलते हैं।

1. चूंकि एक चक्रीय चतुर्भुज का बाह्य कोण अतः सम्मुख कोण के समान है।

$$\therefore \angle PAC = \angle PDB \dots (1)$$

$$\angle PCA = \angle PBD \dots (2)$$

\therefore (1) और (2) से [AAA समरूपता कसौटी का प्रयोग करके]

$$\triangle PAC \sim \triangle PBD$$

2. चुकी, $\triangle PAC \sim \triangle PDB$

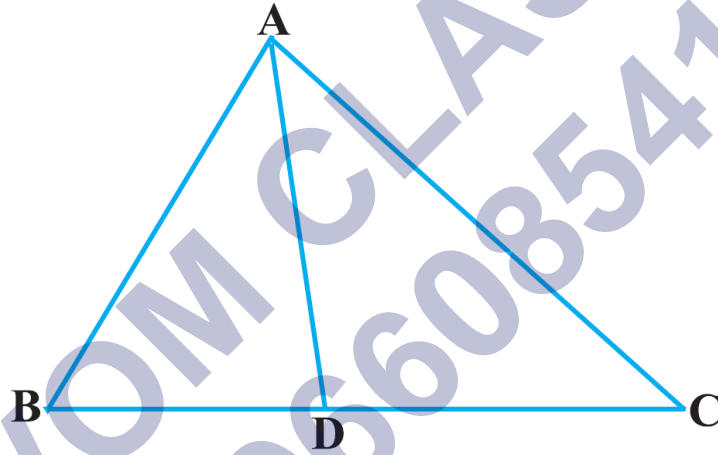
[ऊपर सिद्ध किया गया है।]

\therefore इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती है।

$$\Rightarrow \frac{PA}{BD} = \frac{PC}{PB}$$

$$\Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

प्रश्न 9 आकृति में त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ है। सिद्ध कीजिए कि AD, कोण BAC का समद्विभाजक है।



उत्तर- वृत्त के अंदर दो जीवाएँ AB और CD हैं जो की (बढ़ाने पर) वृत्त के बाहर बिंदु P पर मिलते हैं।

1. चुकी एक चक्रीय चतुर्भुज का बाह्य कोण अतः सम्मुख कोण के समान है।

$$\therefore \angle PAC = \angle PDB \dots (1)$$

$$\angle PCA = \angle PBD \dots (2)$$

\therefore (1) और (2) से [AAA समरूपता कसौटी का प्रयोग करके]

$$\triangle PAC \sim \triangle PBD$$

2. चुकी, $\triangle PAC \sim \triangle PDB$

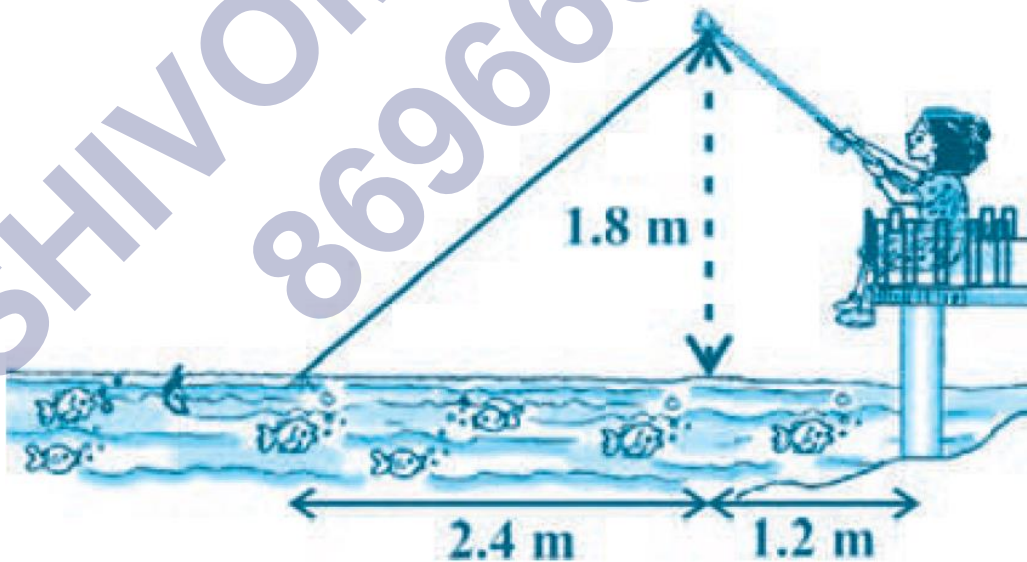
[ऊपर सिद्ध किया गया है।]

∴ इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती है।

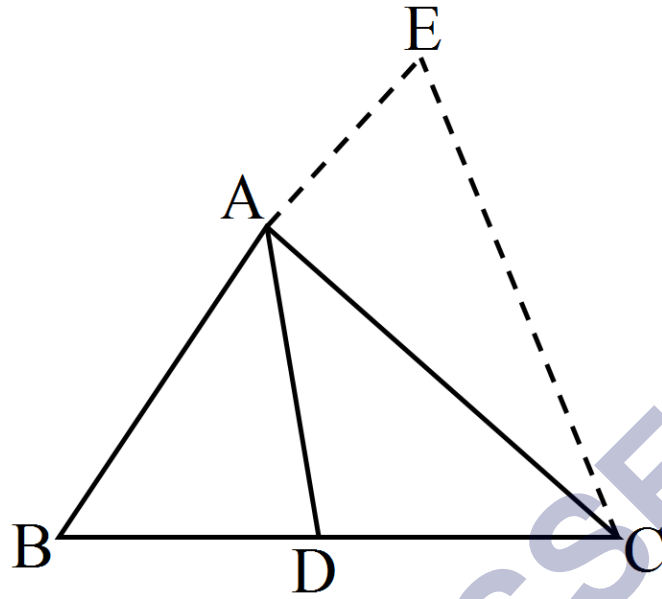
$$\Rightarrow \frac{PA}{BD} = \frac{PC}{PB}$$

$$\Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

प्रश्न 10 नाजिमा एक नदी की धारा में मछलियाँ पकड़ रही है उसकी मछली पकड़ने वाली छड़ का सिरा पानी की सतह से 1.8m ऊपर है तथा डोरी के निचले सिरे से लगा काँटा पानी के सतह पर इस प्रकार स्थित है कि उसकी नाजिमा से दुरी 3.6m है और छड़ के सिरे के ठीक नीचे पानी के सतह पर स्थित बिन्दु से उसकी दुरी 2.4m है यह मानते हुए कि उसकी डोरी (उसकी छड़ के सिरे से काँटे तक) तनी हुई है, उसने कितनी डोरी बाहर निकाली हुई है (देखिए आकृति)? यदि वह डोरी को 5cm/s की दर से अन्दर खींचे, तो 12 सेकंड के बाद नाजिमा की काँटे से क्षैतिज दुरी कितनी होगी?



उत्तर-



रचना:

1. BAको E तक इस प्रकार बढ़ाओ की $AE = AC$
2. EC को मिलाओ चुकी

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$$

$$AC = AE$$

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$$

अब, $\triangle BCE$ में $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$

\therefore मूलभूत-समरूपता प्रमेय के विलोम से, $AD \parallel CE$ और BE एक तिर्यक रेखा है।

$$\Rightarrow \angle BAD = \angle AEC \dots (1) \text{ [संगत कोण]}$$

$$\angle CAD = \angle ACE \dots (2) \text{ [एकांतर कोण]}$$

चुकी $AC = AE$

\therefore इनके सम्मुख कोण भी समान होगी,

$$\Rightarrow \angle AEC = \angle ACE \dots (3)$$

(1) और (3) से,

$$\angle BAD = \angle ACE \dots (4)$$

(2) और (4) से,

$$\angle BAD = \angle CAD$$

\Rightarrow AD कोण $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।

SHIVOM CLASSES
8696608541