गणित

अध्याय-6: अवकलज के अनुप्रयोग

SHIVOM CLASSES 8696608541

राशियों के परिवर्तन की दर (Rate of Change of Quantities)

माना कि x और y दो राशियाँ ऐसी हैं कि y का मान x के मान पर निर्भर करता है तथा यह निर्भरता सम्बन्ध y = f(x) के द्वारा निरूपित की जाती है, जहाँ f निर्भरता के स्वरूप को प्रकट करता है।

माना x में वृद्धि δx के संगत y में δy वृद्धि होती है। तब, चर x के सापेक्ष चर y के परिवर्तन की औसत दर = $\frac{\delta y}{\delta x}$

अनुपात $\frac{\delta y}{\delta x}$ की सीमा जब $\delta x \rightarrow$, x के सापेक्ष y में तात्कालिक परिवर्तन की दर को निरूपित करता है। इसे $\frac{dy}{dx}$ या f'(x) से सूचित करते हैं। $x = x_0$ पर f'(x) का मान $f'(x_0), x=x_0$ पर x के सापेक्ष y में परिवर्तन की दर को निरूपित करता है।

पुनः यदि x और y दोनों, तीसरे चर t के सापेक्ष परिवर्तित होते हैं अर्थात् x और y,t के फलन हैं, तब

$$\boxed{\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}}$$

उपर्युक्त सूत्र द्वारा एक चर के परिवर्तन की दर की गणना की जा सकती है यदि दूसरे चर के परिवर्तन की दर ज्ञात हो।

उदाहरण

उदाहरण: एक आदमी जिसकी ऊँचाई 180 सेमी है, एक बिजली के खम्भे से 12 मीटर प्रति सेकण्ड की दर से पीछे हट रहा है। यदि बिजली के खम्भे की ऊंचाई 4.5 मीटर है, तो वह दर ज्ञात कीजिए जिस पर-

(i) उसकी छाया बढ़ रही है,

(ii) छाया की छोर गति कर रही है।

हल: माना AB बिजली का खम्भा है, PQ आदमी है, Qc=x उसकी छाया है तथा t समय पर आदमी की बिजली के खम्भे से दूरी BQ = y है। तब,

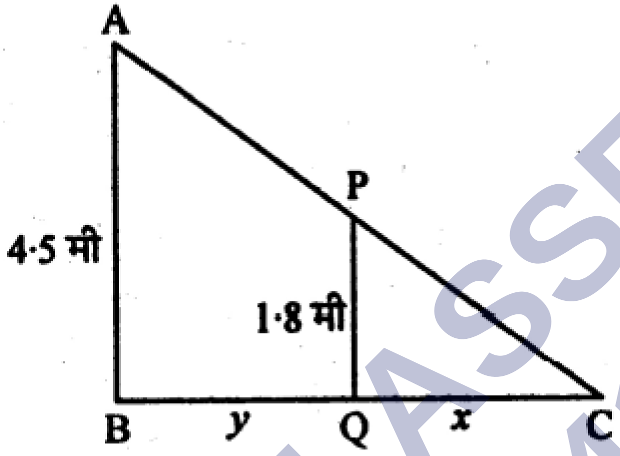
$\frac{dy}{dt}$ =1.2 वह दर है जिस पर आदमी बिजली के खम्भे से दूर हट रहा है तथा $\frac{dx}{dt}$ वह दर है जिस पर छाया बढ़ रही है।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

C छाया की छोर है जो बिजली के खम्भे से x+y दूरी पर है।

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(x+y)=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}$$

वह दर है जिस पर छाया की छोर गति कर रही है।



चित्रानुसार t समय पर,

$$\frac{x}{1\cdot 8}=\frac{x+y}{4\cdot 5}$$

$$\Rightarrow \quad 45x=18x+18y$$

$$\Rightarrow \quad 27x=18y \Rightarrow \quad 3x=2y$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{2}{3}y$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{2}{3}(1\cdot 2)=0\cdot 8 \text{ मीटर प्रति सेकण्ड}$$

तथा $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=0\cdot 8+1\cdot 2=2$ मीटर प्रति सेकण्ड।

अतः (i) छाया 0.8 मीटर प्रति सेकण्ड की दर से बढ़ रही है तथा (ii) छाया की छोर बिजली के खम्भे से 2 मीटर प्रति सेकण्ड की दर से पीछे हट रही है।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उदाहरण: एक घन की कोर 7 सेमी/सेकण्ड की दर से बढ़ रही है। जब घन की कोर 10 सेमी लम्बी है, तब घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है?

हल: माना घन की कोर a है। यदि समय t पर उसका आयतन V हो, तो

$$V = a^3 \qquad ...(1)$$

t के सापेक्ष घन के कोर में वृद्धि की दर

$$\frac{da}{dt} = 7 \text{ सेमी/सेकण्ड} \qquad ...(2)$$

t के सापेक्ष घन के आयतन में वृद्धि की दर

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(a^3)}{dt}, \qquad \text{[समी. (1) से]}$$

$$= \frac{d}{da}(a^3)\frac{da}{dt} = 3a^2.7,$$

[समी. (2) से]

$$= 21a^2$$

घन के आयतन में वृद्धि की दर जबकि $a = 10$ सेमी

$$\frac{dV}{dt} = 21a^2 = 21 \times (10)^2$$

$$= 2100 \text{ सेमी}^3\text{/सेकण्ड।}$$

वर्धमान फलन (Increasing Functions)

एक फलन f(x) वर्धमान कहलाता है यदि अंतराल I में x के बढ़ते मानों के संगत इसका मान बढ़ते हुए हो, जिसमें f(x) परिभाषित हो,f(x) का मान कभी भी नहीं घटता है,

अर्थात् $x_1 < x_2$

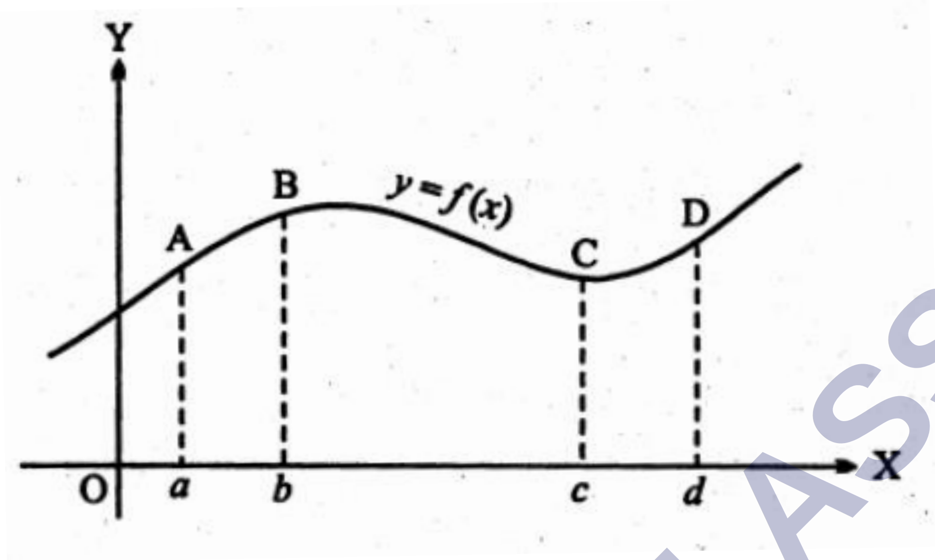
$$\Rightarrow f(x_1) \le f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$$

फलन f(x) अन्तराल I में वस्तुतः वर्धमान फलन कहलाता है यदि x के बढ़ते मानों के संगत f(x) भी बढ़ते हुए हों,

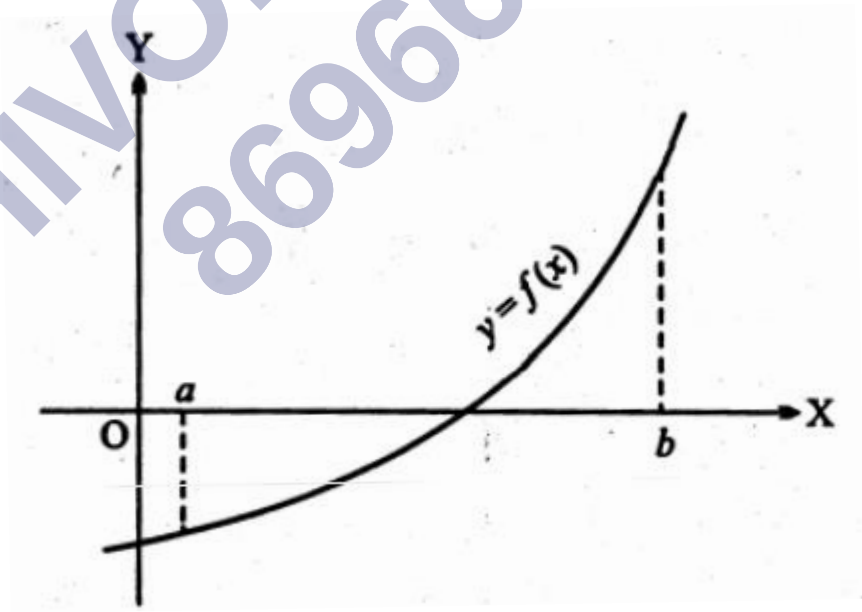
SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अर्थात् $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$$



वस्तुतः वर्धमान फलन खुले अन्तराल में हमेशा उस अन्तराल में वर्धमान होता है। खुले अन्तराल में वर्धमान फलन उस अन्तराल में वस्तुतः वर्धमान फलन नहीं हो सकता है। उपर्युक्त चित्र में अन्तराल (a,d) में फलन y= f(x) वर्धमान है। किन्तु यह (a,d) में वस्तुतः वर्धमान नहीं है। यह (a, b) और (c, d) में वस्तुतः वर्धमान फलन है।



ज्यामितीय रूप से वस्तुतः वर्धमान फलन का अर्थ है कि हम (a, b) में वक्र के अनुदिश बायें से दायें जाते हैं तो वक्र ऊपर की ओर बढ़ता है। इस स्थिति में x का विचलन R और f(x)

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

के संगत विचलन f(x+h)-f(x) का चिन्ह एकसमान होता है, अर्थात् वे या तो धनात्मक या ऋणात्मक होंगे, इस प्रकार हैं

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

हमेशा धनात्मक होता है।

विलोमतः यदि f"(x) धनात्मक है, तब h के छोटे मान के लिये भी f(x+h)-f(x) तथा h के चिन्ह समान होते हैं।

अर्थात् यदि h>0, तब x+h>x ⇒ f(x+h) > f(x) तथा h<0, तब x+h<x ⇒ f(x+h)<f(x). इससे स्पष्ट है कि f(x), x का वर्धमान फलन है।

दूसरे रूप में, चित्र से स्पष्ट है कि f(x), (a.b), में वर्धमान फलन है, तब वक्र y= f(x) के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा X-अक्ष की धन दिशा के साथ न्यून कोण θ बनाती है।

$$\therefore \tan\theta > 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0 \text{ या } f'(x) > 0, \forall x \in (a,b).$$

ह्रासमान फलन (Decreasing Functions)

एक फलन f(x) ह्रासमान फलन कहलाता है, यदि अन्तराल में के बढ़ते मान के संगत जो परिभाषित हों, y का मान कभी भी बढ़ते हुए नहीं होता है अर्थात्

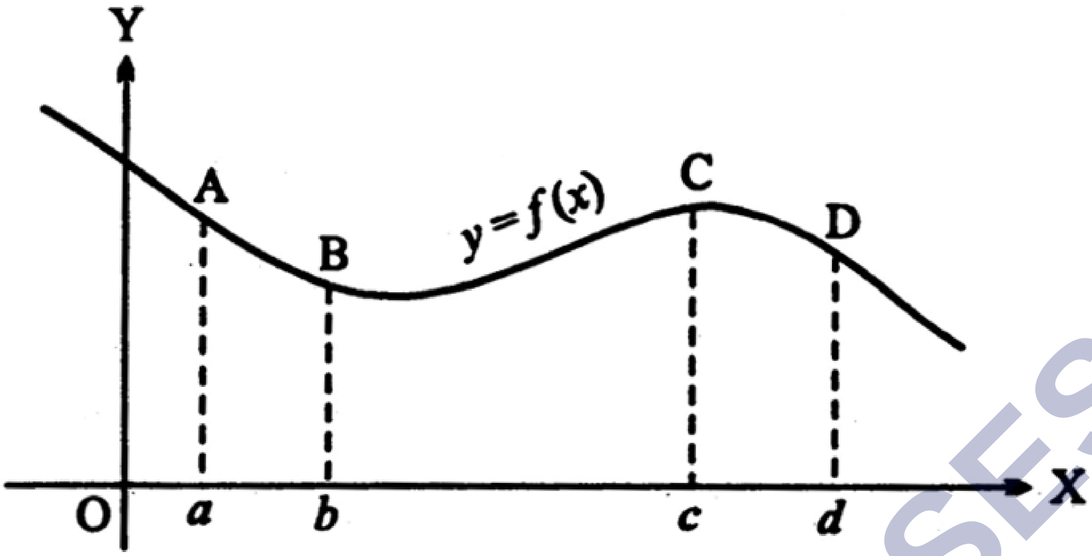
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$$

फलन f(x) अन्तराल I में वस्तुतः ह्रासमान फलन कहलाता है, यदि x के बढ़ते मान के संगत f(x) का मान हमेशा घटते हुए होता है अर्थात्

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

वस्तुतः ह्रासमान फलन खुले अन्तराल में हमेशा उस अन्तराल में घटते हुये होता है। खुले अन्तराल में ह्रासमान फलन उस अन्तराल में वस्तुतः ह्रासमान फलन नहीं हो सकता है। चित्र से स्पष्ट है कि (a,d) में y = f(x) ह्रासमान फलन है, किन्तु यह (a,d) में वस्तुतः ह्रासमान नहीं है। यह(a,b) और (c,d).में वस्तुतः ह्रासमान है।

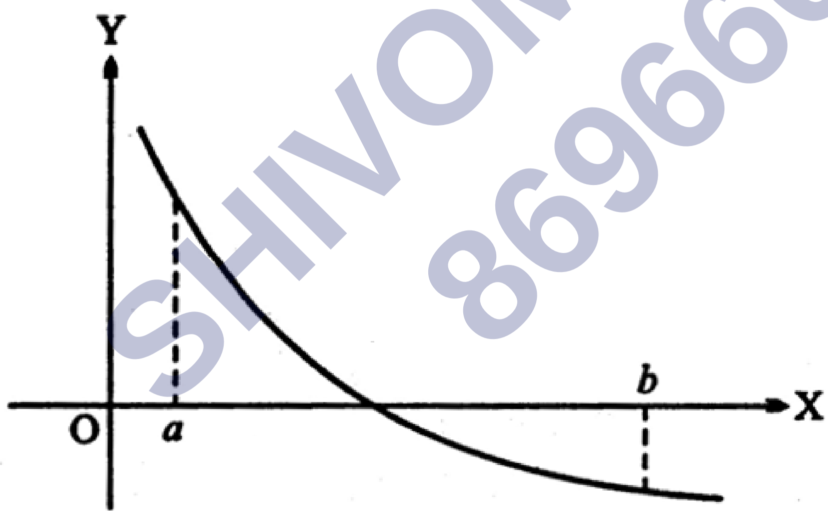
SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)



ज्यामितीय रूप में वस्तुतः ह्रासमान फलन का अर्थ है कि (a,b) में वक्र के अनुदिश बायें से दायें जाते हैं तो वक्र गिरता है। इस स्थिति में x का विचलन h के संगत f(x) का विचलन f(x+h)-f(x) का चिन्ह विपरीत होता है, इस प्रकार है-

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

हमेशा ऋणात्मक होता है।



विलोमतः यदि f"(x) ऋणात्मक है, तब सर्वप्रथम हम सिद्ध करेंगे कि f(x),x का ह्रासमान फलन है।

दूसरे रूप में, चित्र से स्पष्ट है कि अन्तराल (a,b)में ह्रासमान फलन है, तब वक्र y= f(x) के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा X-अक्ष के धन दिशा के साथ अधिक कोण θ बनाता है।

SHIVOM CLASSES 8696608541

$$\tan\theta<0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}<0 \Rightarrow f'(x)<0, \forall x \in (a,b).$$

नोट-

(i) एक फलन f(x)अन्तराल (a,b) में एकदिष्ट कहलाता है, यदि यह या तो वर्धमान हो या ह्रासमान हो।

(ii) एक फलन f(x) बिन्दु x_0 पर वर्धमान (ह्रासमान) कहलाता है, यदि यह अन्तराल (x_o - h,x_o +h) में x_o इस प्रकार है कि f(x),(x_o -h,x_o +h) में वर्धमान (ह्रासमान) है।

(iii) एक फलन f(x),[a,b] पर वर्धमान (ह्रासमान) कहलाता है यदि यह (a,b) पर वर्धमान (ह्रासमान) है और यह x = a और x = b पर भी वर्धमान (ह्रासमान) हो।

(iv) फलन f(x)के लिये x =x_0 के मान को क्रान्तिक मान कहते हैं यदि या तो f'(x) = 0 या f'(x) विद्यमान नहीं है। बिन्दु [x_o.f(x_o)] वक्र y=f(x) के क्रान्तिक बिन्दु कहलाती है।

(v) याद रखने योग्यः

क्र.	I में $f'(x)$ का मान	I में $f(x)$ की प्रवृत्ति
(i)	≥ 0	वर्धमान
(ii)	>0	वस्तुतः वर्धमान
(iii)	≤ 0	ह्रासमान
(iv)	<0	वस्तुतः ह्रासमान
(v)	$=0$	अचर

फलन f(x) के वर्धमान या ह्रासमान ज्ञात करने की कार्यविधि

फलन f(x) वर्धमान या ह्रासमान है, तो अन्तराल ज्ञात करना

(i) f'(x) ज्ञात करना।

(ii) f"(x)= 0 रखकर f(x) के क्रान्तिक मान ज्ञात करना।

f(x) के प्रान्त को इन क्रान्तिक मानों से विभिन्न खुले अन्तरालों में विभाजित करते हैं, जहाँ f(x) या तो वर्धमान या ह्रासमान होगा।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

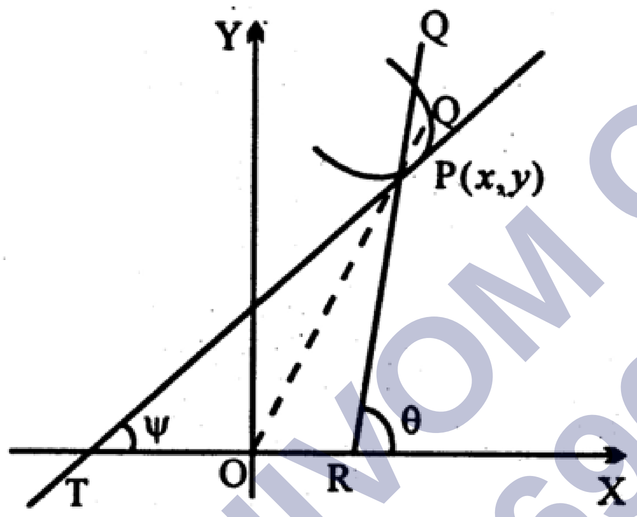
(iii) यदि n क्रान्तिक बिन्दु है तो सामान्य रूप में (n+1) अन्तराल होंगे।

(iv) प्रत्येक अन्तराल में f(x) का चिन्ह ज्ञात करते हैं। इससे फलन f(x) की प्रकृति जानी जाती है।

स्पर्श रेखाएँ एवं अभिलम्ब

प्रस्तावना (Introduction)- हम देख चुके हैं कि वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा का ढाल (प्रवणता) उस बिन्दु पर अवकलज के मान के बराबर होता है। अवकलज के इस ज्यामितीय महत्त्व का उपयोग हम स्पर्श रेखाओं के समीकरण, अभिलंब तथा दो वक्रों के बीच का कोण, ज्ञात करने में करेंगे।

व्यंजक-माना P(x,y) तथा Q(x+6x,y+6y), वक्र by = f(x) पर दो बिन्दु हैं, जो कि चित्र में दर्शाया गया है। जब



बिन्दु Q वक्र के अनुदिश चलकर, बिन्दु P के अत्यंत नजदीक प्रवृत्त होता है, तब जीवा PQ की सीमान्त स्थिति बिन्दु P पर वक्र की स्पर्श रेखा कहलाती है। जीवा PQ का समीकरण है

$$Y-y=\frac{(y+\delta y)-y}{(x+\delta x)-x}(X-x)$$

अथवा

$$Y-y=\frac{\delta y}{\delta x}(X-x)$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

अब, $P(x,y)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है,

$$Y-y=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}(X-x)$$

अथवा

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

यदि (x_1,y_1) बिन्दु P का निर्देशांक है, तब स्पर्श रेखा का समीकरण होगा,

$$Y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}.(X-x_1)$$

जहाँ, $\tan\psi=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}$

नोट—(i) वक्र के बिन्द (x_1,y_1) पर स्पर्श रेखा, X-अक्ष के समांतर होगी,यदि $\psi=0$

$$\Rightarrow \quad \tan\psi=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}=0$$

और इसका समीकरण है $Y-y_1=0$

(ii) बिन्दु (x_1,y_1) पर स्पर्श रेखा, X-अक्ष के लंबवत् होगी, यदि $\psi=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \tan\psi=\infty$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}=\infty$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1,y_1)} = 0$$

और इसका समीकरण है $x - x_1 = 0$.

उदाहरण:

उदाहरण: दर्शाइए कि वक्र $x = y^2$ और $xy = k$ एकदूसरे को समकोण पर काटते हैं यदि $8k^2=1$.

हल: दत्त वक्रों के समीकरण हैं

$x = y^2$ ...(1)

और $xy = k$ ...(2)

समी. (1) से x के मान को समी. (2) में रखने पर,

$$y^3 = k \Rightarrow y = k^{1/3}$$

$\therefore$ समी. (1) से, $x = k^{2/3}$

$\therefore$ दो वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु $(k^{2/3}, k^{1/3})$ हैं।

समी. (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$1 = 2y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ बिन्दु $(k^{2/3}, k^{1/3})$ पर $= \frac{1}{2k^{1/3}}$

इसी प्रकार, समी. (2) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$x\frac{dy}{dx} + y.1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_2$ बिन्दु $(k^{2/3}, k^{1/3})$ पर $= -\frac{k^{1/3}}{k^{2/3}} = -\frac{1}{k^{1/3}}$

दिये गये वक्र समकोण पर प्रतिच्छेद करेंगे यदि,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2k^{1/3}} \times \left(-\frac{1}{k^{1/3}}\right) = -1 \Rightarrow \frac{1}{2k^{2/3}} = 1$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

$$\Rightarrow \quad 2k^{2/3} = 1 \Rightarrow (2k^{2/3})^3 = 1^3$$

$$\Rightarrow \quad 8k^2 = 1.$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण: वक्र $y=x^3-2x^2-x$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए, जिन पर स्पर्श रेखाएं, रेखा $y=3x-2$ के समान्तर हैं।

हल- माना अभीष्ट बिन्दु (x_1,y_1) है। दत्त वक्र है,

$$y = x^3 - 2x^2 - x \qquad ...(1)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x - 1$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} = 3x_1^2 - 4x_1 - 1$$

दी हुई रेखा $y=3x-2$ की प्रवणता 3 है।

$\therefore$ बिन्दु (x_1,y_1) पर स्पर्श रेखा दत्त सरल रेखा के समान्तर है।

$$\therefore \quad 3x_1^2 - 4x_1 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow \quad 3x_1^2 - 4x_1 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x_1^2 - 6x_1 + 2x_1 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3x_1(x_1 - 2) + 2(x_1 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x_1 - 2)(3x_1 + 2) = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = 2, -\frac{2}{3}.$$

चूँकि, बिन्दु (x_1,y_1) वक्र (1) पर स्थित है, अतएव

$$y_1 = x_1^3 - 2x_1^2 - x_1$$

$\therefore$ **जब** $x_1 = 2$, **तब** $\quad y_1 = 2^3 - 2(2)^2 - 2 = -2$

और जब $x_1 = -\frac{2}{3}$, **तब** $y_1 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$

$$= -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{2}{3} = -\frac{14}{27}$$

अतः अभीष्ट बिन्दु (2,–2) और $\left(-\frac{2}{3},\frac{-14}{27}\right)$ हैं।

उदाहरण: वक्र $x^2+2y^2-4x-6y+8=0$ के उस बिन्दु पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका भुज 2 है।

हल: वक्र का समीकरण है-

$$x^2+2y^2-4x-6y+8=0 \qquad ...(1)$$

समी. (1) में $x=2$ रखने पर,

$$2^2+2y^2-4\times2-6y+8=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2-6y+4=0 \Rightarrow y^2-3y+2=0$$

$$\Rightarrow \quad (y-1)(y-2)=0,$$

$$\therefore \quad y=1,2$$

इस प्रकार, हमें बिन्दु (2,1) और (2,2) पर अभिलम्बों के समीकरण ज्ञात करना है।

अब, समी. (1) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$2x+4y\frac{dy}{dx}-4-6\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(4y-6)=4-2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{4-2x}{4y-6}=\frac{2-x}{2y-3}$$

इस प्रकार, (2,1) पर अभिलम्ब की प्रवणता,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,1)}=\frac{2-2}{2\times1-3}=0$$

∴ (2,1) पर अभिलम्ब का समीकरण है-

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,1)}(y-1)+(x-2)=0$$

$$\Rightarrow 0.(y-1)+(x-2)=0, \text{ अर्थात् } x=2.$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अब, (2,2) पर अभिलम्ब की प्रवणता

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,2)} = \frac{2-2}{2\times2-3} = 0$$

∴ (2, 2) पर अभिलम्ब का समीकरण है—

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,2)} (y-2)+(x-2)=0$$

$\Rightarrow \quad 0.(y-2)+(x-2)=0$, अर्थात् $x=2$.

उदाहरण: वक्र $3x^2 - y^2 = 8$ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $x+3y=4$ के समान्तर है।

हल: माना (x_1,y_1) वक्र

$3x^2 - y^2 = 8$ ....(1)

पर एक ऐसा बिन्दु है, जिस पर अभिलम्ब दत्त रेखा

$x+3y=4 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+4/3$ के समान्तर है। रेखा की प्रवणता $-1/3$ है।

अब, समी. (1) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$6x-2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3x}{y}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} = \frac{3x_1}{y_1}$$

∴ (x_1, y_1) पर अभिलम्ब की प्रवणता $= \frac{-y_1}{3x_1}$

∵ (x_1,y_1) पर अभिलम्ब दत्त रेखा के समान्तर है।

∴ अभिलम्ब की प्रवणता = रेखा की प्रवणता

$$\Rightarrow \quad \frac{-y_1}{3x_1} = \frac{-1}{3} \Rightarrow y_1 = x_1 \quad ...(2)$$

∵ बिन्दु (x_1,y_1) समी. (1) पर स्थित है,

$$\therefore \quad 3x_1^2 - y_1^2 = 8 \quad ...(3)$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

समी. (2) से y_1 का मान समी. (3) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है—

$$3x_1^2 - x_1^2 = 8 \Rightarrow 2x_1^2 = 8 \Rightarrow x_1^2 = 4 \Rightarrow x_1 = \pm 2$$

$\therefore$ समी. (2) से, $y_1 = (2, -2)$

$\therefore$ वक्र पर स्थित बिन्दु (2, 2) और (– 2,–2) हैं।

अब, (2, 2) पर अभिलम्ब का समीकरण है—

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow x + 3y = 8$$

तथा (– 2, – 2) पर अभिलम्ब का समीकरण है—

$$y + 2 = -\frac{1}{3}(x+2) \Rightarrow x + 3y + 8 = 0.$$

अवकल, त्रुटियाँ एवं सन्निकटन

पूर्व में ही हम y का x के सापेक्ष अवकल गुणांक परिभाषित कर चुके हैं, अर्थात् $\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ तथा $\frac{dy}{dx}$ को प्रतीक माना गया है, न कि dy का dx से विभाजन। यहाँ, हम प्रतीकों dx और dy का अर्थ बतायेंगे जिससे कि प्रतीक $\frac{dy}{dx}$ का मौलिक अर्थ तथा dy का dx से विभाजन समान हों।

माना y =f(x),x का एक फलन है तथा δx,x में किया गया थोड़ा परिवर्तन है और इसके संगत y में परिवर्तन δy है। तब हम जानते हैं कि

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

(जहाँ $\varepsilon \to 0$, जब $\delta x \to 0$)

$$\Rightarrow \quad f(x+\delta x) - f(x) = f'(x)\delta x + \varepsilon \delta x$$

$$\Rightarrow \quad \delta y = f'(x)\delta x + \varepsilon \delta x, \qquad ...(1)$$

$[\because f(x+\delta x) - f(x) = \delta y]$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

SHIVOM CLASSES 8696608541

चूँकि $\delta x \to 0$, $\varepsilon \to 0$ और इसका गुणन x अत्यन्त सूक्ष्म होने के कारण छोड़ा जा सकता है, इसलिए δy का मुख्य मान है-

$\delta y = f'(x)\delta x$ ....(2)

यदि $\delta x, x$ के मान ज्ञात करने में की गयी एक त्रुटि हो तब सूत्र (2) से हम y अथवा f(x) में त्रुटि δy का मान ज्ञात कर सकते हैं बशर्ते कि त्रुटि δx ज्ञात हो। यांत्रिकी, भौतिकी, सांख्यिकी तथा विज्ञान की कई अन्य शाखाओं में त्रुटि सिद्धान्त में, इस सूत्र का अत्यन्त महत्त्व है।

कुछ महत्त्वपूर्ण पारिभाषिक शब्द

निरपेक्ष त्रुटि- x में त्रुटि δx, निरपेक्ष त्रुटि कहलाती है।

सापेक्ष अथवा अनुपातिक त्रुटि- यदिx में त्रुटि δx है तब $\frac{\delta x}{x}$, x में सापेक्ष त्रुटि कहलाती है।

प्रतिशत त्रुटि- यदि x में त्रुटि δx है तब $\frac{\delta x}{x} \times 100$, x में प्रतिशत त्रुटि कहलाती है।

अवकल- यदि फलन y =f(x) का बिन्दु x पर अवकलज f(x) है, तब अवकलज f'(x) तथा वृद्धि δx का गुणनफल, फलन का अवकल कहलाता है और प्रतीक dy द्वारा निरूपित किया जाता है।

$$dy = f'(x)\delta x \qquad ...(3)$$

x का अवकल,

$$dx = \frac{dx}{dx}\delta x$$

$$\Rightarrow \qquad dx = \delta x$$

इस प्रकार, स्वतन्त्र चर x का अवकल dx चर x में वृद्धि δx के बराबर है। हम समी. (2) को हमेशा इस प्रकार लिख सकते हैं-

$$dy = f'(x)dx$$

अथवा $$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

अतः अवकलज f'(x) को फलन के अवकल तथा चर के अवकल के अनुपात के बराबर माना जा सकता है।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

क्रियाविधि

1. स्वतन्त्र चर में लघु परिवर्तन के संगत परतन्त्र चर में सन्निकट परिवर्तन ज्ञात करने की निम्न क्रियाविधि है-

(i) माना x तथा $x+\delta x$ स्वतन्त्र चर का क्रमशः प्रारम्भिक और परिवर्ती मान हैं।

(ii) δx ज्ञात कीजिए तथा मान लीजिए कि $dx = \delta x$

(iii) दिये हुए सम्बन्ध से, $y=f(x)$ ज्ञात कीजिए।

(iv) बिन्दु (x.y) पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

(v) सूत्र $dy = \frac{dy}{dx}.dx$ द्वारा dy ज्ञात कीजिए।

(vi) y में सन्निकट परिवर्तन δy को dy के स्थान पर δy रखकर ज्ञात करें।

2. अवकल के उपयोग से सन्निकट मान ज्ञात करने की क्रियाविधि निम्न है-

(i) दिये हुए प्रश्न के अनुसार स्वतन्त्र चर x और परतन्त्र चर y में फलनक सम्बन्ध स्थापित कीजिए।

उदाहरण के लिए, किसी संख्या का घनमूल ज्ञात करने के लिए, हम फलनक सम्बन्ध $y = x^{\frac{1}{3}}$ परिभाषित करते हैं, किसी कोण की ज्या ज्ञात करने का फलनक सम्बन्ध $y=\sin x$ है।

(ii) दिये हुए मान के निकटस्थ x के मान को इस प्रकार लेते हैं कि परिकलन सरलतापूर्वक किया जा सके।

उदाहरण के लिए, $(28)^{\frac{1}{3}}$ का सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए हम $x = 27$ लेते हैं चूंकि 27 का घनमूल सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

(iii) दिये हुए मान को $x+\delta x$ द्वारा निरूपित कीजिए।

(iv) δx ज्ञात कीजिए तथा $\delta x = dx$ रखिए।

(v) चरण (i) में प्राप्त सम्बन्ध से $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

(vi) चरण (ii) में माने गये x के मान को प्रतिस्थापित करके $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

(vii) dy ज्ञात करने के लिए सम्बन्ध $dy = \frac{dy}{dx}.dx$ का उपयोग कीजिए।

(viii) δy द्वारा dy को प्रतिस्थापित कीजिए।

(ix) चरण (ii) में लिए गये x के मान को चरण (i) में प्राप्त सम्बन्ध में रखकर y का मान ज्ञात कीजिए।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

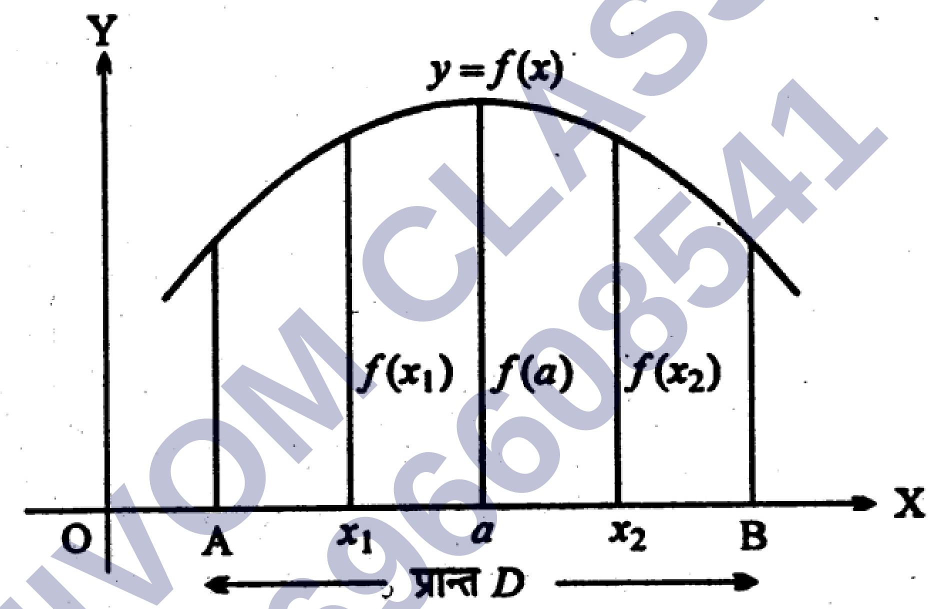
(x) तब y का सन्निकट मान है

$y+\delta y= f(x)+f'(x)\delta x$.

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ (Marima and Minima)

अपने प्रान्त में एक फलन का महत्तम एवं न्यूनतम मान

महत्तम मान- एक फलन f(x) अपने प्रान्त D में एक बिन्दु $a \in D$ पर महत्तम प्राप्त होता है, यदि D में प्रत्येक x के लिए, $f(a)\geq f(x)$ इस स्थिति में, f(a) प्रान्त D में फलन f(x) का महत्तम मान अथवा परम उच्चिष्ठ मान कहलाता है तथा 'a' फलन (x) का D में महत्तम अथवा उच्चिष्ठ बिन्दु कहलाता है।



संलग्न चित्र में x = a, फलन f(x) का अपने प्रान्त में उच्चिष्ठ बिन्दु है तथा f(a) फलन f(x) का प्रान्त D में महत्तम (उच्चिष्ठ) मान है, जो कि चित्र से स्पष्ट है कि,

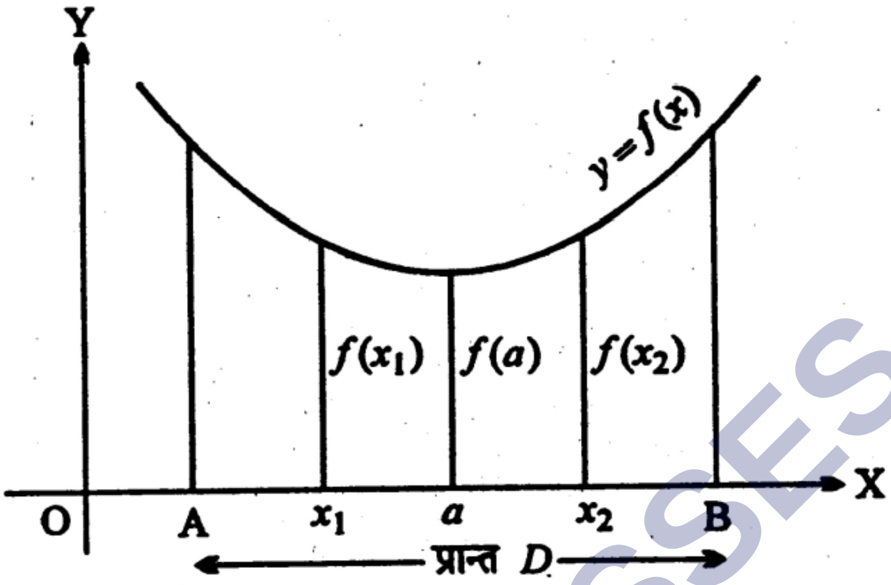
$$f(a)>f(x_1)$$

और $$f(a)>f(x_2)$$

तथा प्रान्त D के अन्य बिन्दुओं के लिए भी।

न्यूनतम मान- एक फलन f(x) अपने प्रान्त D में एक बिन्दु $a \in D$ पर न्यूनतम (निम्निष्ठ) मान रखता है, यदि प्रत्येक $x \in D$ के लिए, $f(a)<f(x)$। इस स्थिति में, f(a) फलन f(x) का D में न्यूनतम मान अथवा परम निम्निष्ठ मान कहलाता है तथा 'a' फलन f(x) का D में न्यूनतम बिन्दु कहलाता है।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)



संलग्न चित्र में x=a, f(x) का अपने प्रान्त D में न्यूनतम बिन्दु तथा f(a) न्यूनतम मान है, जो कि चित्र से स्पष्ट है कि

$$f(a)<f(x_1)$$

तथा $$f(a)<f(x2)$$

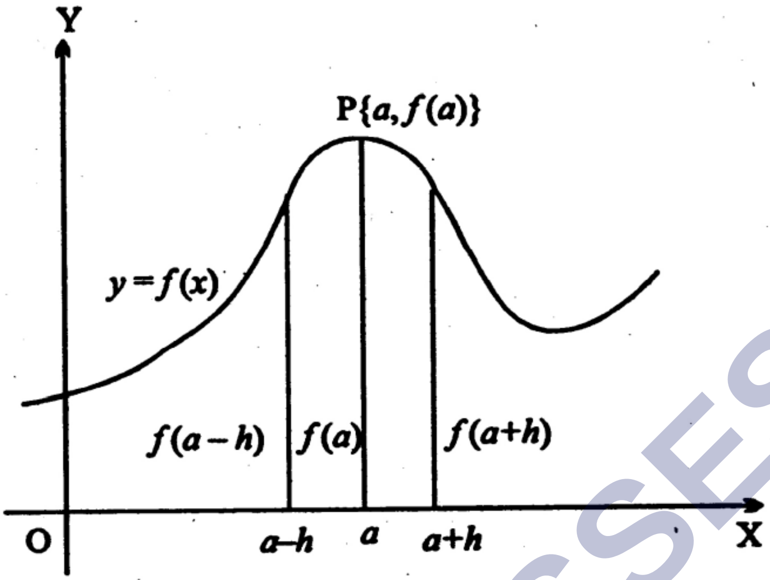
प्रान्त के अन्य सभी बिन्दुओं के लिए भी।

स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ

पूर्व अनुच्छेद में हमने अपने प्रान्त में एक फलन के अधिकतम और न्यूनतम मानों का अध्ययन किया। प्रान्त में कुछ ऐसे बिन्दु होते हैं, जिन पर फलन का मान न अधिकतम होता है और न न्यूनतम, परंतु इन बिन्दुओं पर फलन का मान इन बिन्दुओं के छोटे सामीप्य में फलन के मानों से या तो कम होता है या अधिक। इस प्रकार के बिन्दुओं को स्थानीय उच्चिष्ठ या स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु कहते हैं। अब हम स्थानीय उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ का अध्ययन करेंगे। ।

स्थानीय उच्चिष्ठ- एक फलन बिन्दु x = a पर स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है यदि फलन f(x) का x = a पर मान, बिन्दु 'a' के लघु सामीप्य में फलन के मानों से बड़ा हो। अन्य शब्दों में, यदि h>0, कितना भी छोटा हो, का अस्तित्व इस प्रकार हो कि f(x) अंतराल (a-h,a) में वर्धमान तथा अंतराल (a,a+h) में ह्रासमान हो।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

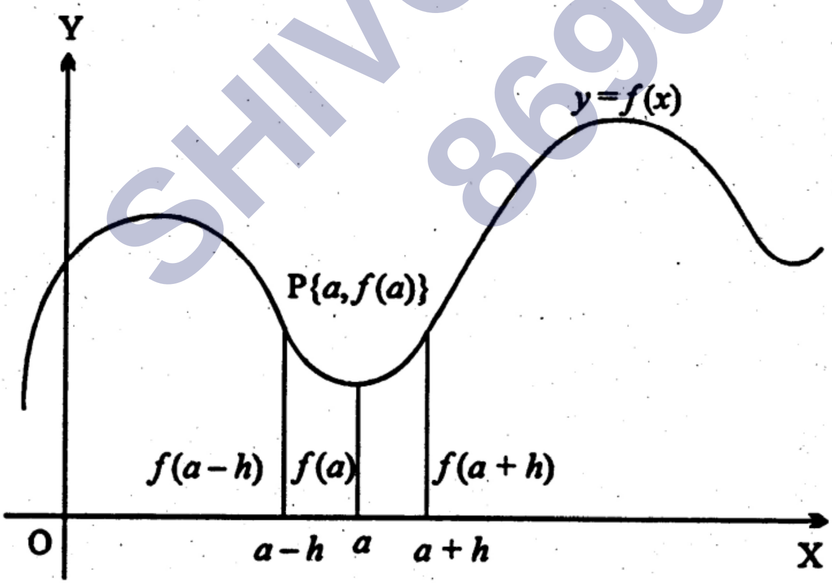


चित्र में, फलन f(x) का x=a एक स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु तथा f(a) एक स्थानीय उच्चिष्ठ मान है।

स्थानीय उच्चिष्ठ को आपेक्षिक उच्चिष्ठ या केवल उच्चिष्ठ भी कहते हैं।

स्थानीय निम्निष्ठ- एक फलन f(x) बिन्दु x=a पर स्थानीय निम्निष्ठ रखता है, यदि x = a पर फलन का मान 'a' के लघु सामीप्य में फलन के अन्य मानों से छोटा हो।

अन्य शब्दों में, यदि h > 0 कितना भी छोटा हो, का अस्तित्व इस प्रकार हो कि फलन f(x) अंतराल (a-h, a) में ह्रासमान तथा अंतराल (a, a+h) में वर्धमान हो।



संलग्न चित्र में, x = a एक फलन f(x) का एक स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु तथा f(a) स्थानीय निम्निष्ठ मान है।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

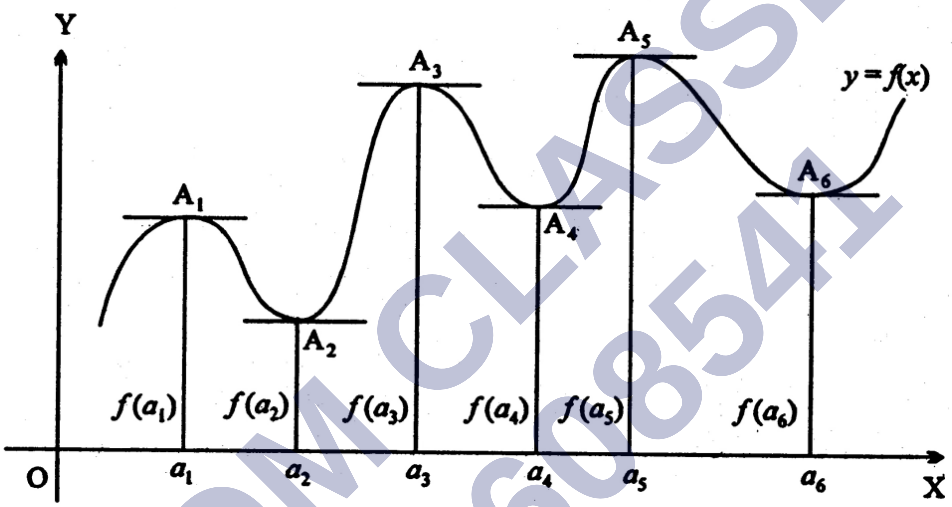
एक स्थानीय निम्निष्ठ मान को आपेक्षिक निम्निष्ठ मान या केवल निम्निष्ठ मान भी कहते हैं।

नीचे दर्शाये गये फलन y= f(x) के आलेख की विशिष्टताएँ निम्नलिखित हैं-

उच्चिष्ठ बिन्दु- a_1, a_3, a_5.

निम्निष्ठ बिन्दु- a_2, a_4, a_6.

(i) फलन f(x) के स्थानीय उच्चिष्ठ मान बिन्दुओं $x = a_1, a_3, a_5$ पर हैं तथा इसके संगत स्थानीय उच्चिष्ठ मान $f(a_1)$, $f(a_3)$, $f(a_5)$ हैं।



(ii) फलन f(x) के स्थानीय निम्निष्ठ मान बिन्दुओं $x = a_2, a_4, a_6$ पर हैं तथा इनके संगत स्थानीय निम्निष्ठ मान $f(a_2),f(a_4),f(a_6)$ हैं।

(iii) दो स्थानीय उच्चिष्ठ मानों के बीच एक स्थानीय निम्निष्ठ मान का अस्तित्व होता है, इसी प्रकार दो स्थानीय निम्निष्ठ मानों के बीच एक स्थानीय उच्चिष्ठ का अस्तित्व होता है।

(iv) कुछ बिन्दुओं पर स्थानीय निम्निष्ठ मान फलन के स्थानीय उच्चिष्ठ मान से अधिक हो सकता है। चित्र में, $x = a_4$ पर स्थानीय निम्निष्ठ मान $x = a_1$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ मान से बड़ा है, अर्थात्

$$f(a_4) > f(a_1).$$

चरम मानों के लिए आवश्यक शर्त

प्रमेय-एक फलन f(x) के x = a पर स्थानीय चरम मान रखने की आवश्यक शर्त है, कि $f''(a)=0$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रमाण- हमें दो स्थितियाँ प्राप्त होती हैं

स्थिति I. जब f(a) एक अधिकतम मान है, प्रत्येक छोटी संख्या h>0 के लिए

f(a) > f(a-h) या f(a) > f(a+h)

= f(a-h)-f(a)<0 या f(a+h)-f(a)<0 ....(1)

इसलिए,

$$Lf'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} > 0 \quad ....(2)$$

और $$Rf'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} < 0 \quad ...(3)$$

चूँकि f'(a) का अस्तित्व है,

अतः Lf'(a) = Rf'(a)

अब समी. (2) और (3) से, f'(a)= 0.

स्थिति II. जब f(a) न्यूनतम मान हो।

प्रत्येक छोटी संख्या h>0 के लिए

$f(a) < f(a-h)$ या $f(a) < f(a+h)$

$\Rightarrow \; f(a-h)-f(a) > 0$ या $f(a+h)-f(a) > 0$

...(4)

इसलिए, $$Lf'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} < 0 \quad ...(5)$$

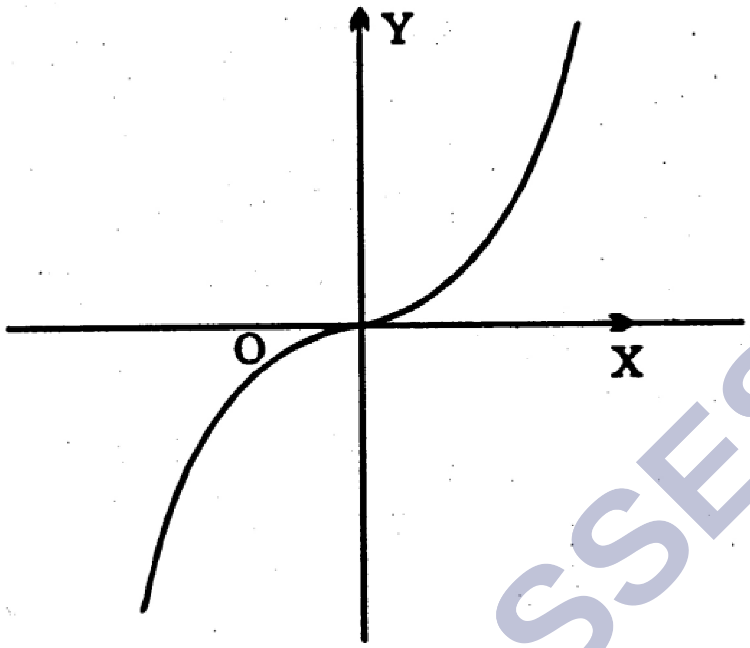
और $$Rf'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0 \quad ...(6)$$

चूँकि f'(a) का अस्तित्व है, अतः Lf'(a) = Rf"(a) अब समी. (5) एवं (6) से, f"(a) = 0.

नोट-

(i) हम जानते हैं कि स्पर्श रेखा का ढाल (प्रवणता) उस बिन्दु पर अवकलज के मान के बराबर होता है अर्थात् tanø= f'(a)= 0 अतः चरम बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा X-अक्ष के समान्तर होती है। पिछले चित्र में बिन्दुओं A_1, A_2, ..., A_6 पर स्पर्श रेखायें X-अक्ष के समान्तर हैं।

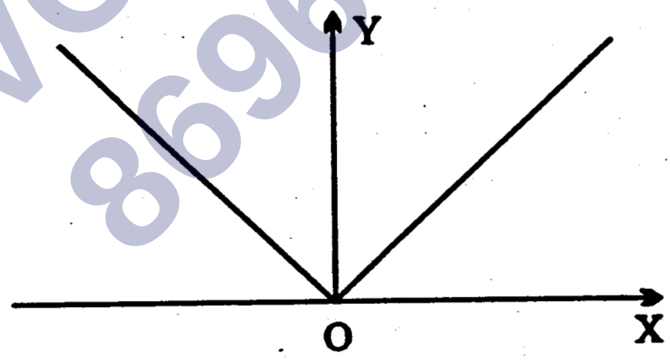
SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)



(ii) $f'(a)=0$ आवश्यक शर्त तो है, परंतु पर्याप्त शर्त नहीं है कि फलन $f(x), x = a$ पर चरम मान रखता है। उदाहरण के लिए, $f(x)=x^3$, $f'(0)= 0$.

परंतु फलन $x = 0$ पर चरम मान नहीं रखता है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है।

(iii) फलन $y=|x|$ को लेने पर जो $x = 0$ पर अवकलज नहीं रखता है परंतु इस बिन्दु पर फलन का न्यूनतम मान $y= 0$ प्राप्त होता है तथा अन्य बिन्दुओं पर $y > 0$ जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है।



इस प्रकार, एक फलन केवल दो स्थितियों में ही चरम मान रखता है, या तो अवकलज का अस्तित्व होने पर उस बिन्दु पर अवकलज का मान शून्य हो अथवा उस बिन्दु पर जहाँ अवकलज का अस्तित्व न हो। एक बिन्दु जिस पर अवकलज शून्य के बराबर हो अथवा अस्तित्व में न हो, क्रांतिक बिन्दु कहलाता है।

अतः यह प्राप्त होता है कि, प्रत्येक क्रान्तिक बिन्दु पर फलन उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान नहीं रखता है।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

एक फलन के चरम मानों को ज्ञात करने की क्रियाविधि-

(i) सर्वप्रथम y= f(x) मान लीजिए।

(ii) $\frac{dy}{dx}$ = f'(x) ज्ञात कीजिए।

(iii) f'(x) = 0 को हल कीजिए, माना $a_1,a_2,a_3,......$ x के क्रान्तिक मान अथवा मूल हैं। जिन पर फलन के चरम मान हो सकते हैं।

(iv) x = a_1, लेते हैं, यदि f'(x) अन्तराल (a_1-h, a_1+h) में धनात्मक चिन्ह से ऋणात्मक चिन्ह में परिवर्तित होता है तो x = a_1 पर फलन स्थानीय उच्चिष्ठ मान रखता है। यदि f'(x) अन्तराल (a_1-h, a_1+h) में ऋणात्मक चिन्ह से धनात्मक चिन्ह में परिवर्तित होता है, जैसा कि समी. (5) एवं (6) में दर्शाया गया है, तो फलन x = a_1, पर स्थानीय निम्निष्ठ मान रखता है।

यदि अन्तराल (a_1-h, a_1+h) पर f'(x) के चिन्ह में कोई परिवर्तन नहीं होता है, तो x = a_1 फलन f(x) का नति-परिवर्तन बिन्दु कहलाता है।

इसी प्रकार x के अन्य मानों के लिए भी यही प्रक्रिया अपनाते हैं।

नोट- यदि किसी बिन्दु पर वक्र की स्पर्श रेखा वक्र को काटती है, तो वह बिन्दु वक्र का नति-परिवर्तन बिन्दु कहलाता है।

उच्च कोटि अवकल परीक्षण (Higher Order Derivative Test)

प्रथम कोटि के अवकल परीक्षण की मदद से स्थानीय उच्चिष्ठ या स्थानीय निम्निष्ठ ज्ञात कर सकते हैं, किन्तु f(x) के चिन्ह के परिवर्तन को ज्ञात करने में समय लगता है और कठिनाई आती है। f(x) जिन बिन्दुओं से गुजरता है वे बिन्दु f'(x)= 0 से दिये जाते हैं। अन्य परीक्षण जिसे हम उच्च कोटि अवकल परीक्षण से जानते हैं, इससे स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ को आसांनी और जल्दी से ज्ञात कर सकते हैं। इस स्थिति में हम निम्न प्रमेय का प्रयोग करते हैं-

माना f अन्तराल I में अवकलनीय फलन है और a, I का आन्तरिक बिन्दु इस प्रकार है।

F'(a) = f''(a) = f'''(a) =.......=$f^{n-1}(a)$ = 0,

किन्तु $f^n(a)$ विद्यमान है और यह शून्य के बराबर नहीं है और यदि-

(i) n सम है और $f^n(a)<0$, तब x = a स्थानीय उच्चिष्ठ का बिन्दु है।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(ii) n सम है और $f^{(n)}(a) > 0$, तब $x = a$ स्थानीय निम्निष्ठ का बिन्दु है।

(iii) n विषम है तब, $x = a$ न तो स्थानीय उच्चिष्ठ और न ही स्थानीय निम्निष्ठ का बिन्दु है।

कार्यविधि

1. $f'(x)$ ज्ञात करते हैं।

2. समीकरण $f'(x) = 0$ को हल करने पर x के वास्तविक मान प्राप्त करते हैं, माना ये बिन्दु $x_1, x_2, x_3,$.........

3. $f''(x)$ज्ञात करते हैं और इसमें x के $x_1, x_2, x_3,$......... मानों को एक-एक करके रखते हैं

(i) यदि $f''(x_1) < 0$, तब $f(x_1)$ स्थानीय उच्चिष्ठ मान है।

(ii)यदि $f''(x_1) > 0$, तब $f(x_1)$ स्थानीय निम्निष्ठ मान है।

(iii) यदि $f''(x_1) = 0$, $f'''(x)$ ज्ञात करते हैं और इसमें x के लिये x_1 रखते हैं।

4. यदि $f'''(x_1) \neq 0$, तब यह $x = x_1$ पर न तो उच्चिष्ठ है और न ही निम्निष्ठ है।

5. यदि $f'''(x) = 0$, $f^{(iv)}(x)$ ज्ञात करते हैं और इसमें x के लिये x_1 रखते हैं-

(i) $f^{(iv)}(x_1) < 0$, तब $f(x_1)$ स्थानीय उच्चिष्ठ मान है।

(ii) $f^{(iv)}(x_1) < 0$, तब $f(x_1)$ स्थानीय निम्निष्ठ मान है।

(iii) fi $f^{(iv)}(x_1) = 0$, हम $f^{(v)}(x)$ ज्ञात करते हैं तथा उपर्युक्त क्रिया दुहराते हैं इसी प्रकार $x_2, x_3,$..... मानों के लिये भी परीक्षण करते हैं।

परम उच्चिष्ठ तथा परम निम्निष्ठ (Absolute Maxima and Absolute Minima)

माना [a, b] एक बन्द अन्तराल है, जिस पर फलन f (x) परिभाषित है।

माना $f'(x) = 0$ **के** $[a, b]$ **में**

$\Rightarrow x = x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n.$

तब

(i) $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots, f(x_n), f(b)$ में सबसे बड़ा मान f(x) का परम उच्चिष्ठ मान कहलाता है। इसे अन्तराल [a,b] में f(x) का केवल उच्चिष्ठ मान भी कहते हैं।

(ii) $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots, f(x_n), f(b)$ में सबसे न्यूनतम मान f(x) का निम्निष्ठ मान कहलाता है। इसे अन्तराल [a, b] में f(x) का केवल निम्निष्ठ मान भी कहते हैं।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उदाहरण-

उदाहरण: y = x(5-x),x के किस मान के लिए उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ है?

हल: दिया है: y = x(5-x)

⇒ y = 5x-x

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(5x-x^2)$$

$$=5\frac{d}{dx}x-\frac{d}{dx}x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=5-2x \qquad ...(1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(5-2x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-2 \qquad ...(2)$$

उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ के लिए,

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \quad 5-2x=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x=5$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5}{2}$$

$x=\frac{5}{2}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}=-2$ जो ऋणात्मक है। [समी. 2 से]

$\therefore\ x=\frac{5}{2}$ पर दिया गया फलन उच्चिष्ठ है।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उच्चिष्ठ मान $= y = \frac{5}{2}\left(5-\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}.$

उदाहरण: प्रथम अवकलज परीक्षण द्वारा निम्नलिखित फलनों के स्थानीय उच्चिष्ठ या स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए। स्थिति अनुसार, स्थानीय उच्चिष्ठ या स्थानीय निम्निष्ठ मान भी ज्ञात कीजिए-

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$$

हल : दिया है, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 13$

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$= 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

स्थानीय उच्चिष्ठ या स्थानीय निम्निष्ठ के लिए,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1, 3$$

अब हमें परीक्षण करना है कि क्या बिन्दु $x = 1$ और $x = 3$ स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु या स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु हैं या नहीं ?

x = 1 लेने पर, इस स्थिति में, जब x, 1 से किंचित् छोटा है; यह स्पष्ट है कि (x-1) ऋणात्मक है और (x-3) भी ऋणात्मक है। इसलिए f'(x)=3(x-1)(x-3) धनात्मक है।

जब x, 1 से किंचित् बड़ा है तब (x -1) धनात्मक है और (x-3) ऋणात्मक है, अत: f'(x) ऋणात्मक है।

इस प्रकार, जब x = 1 के बायीं ओर से दायीं तरफ x में वृद्धि होती है तब f(x) का चिन्ह धनात्मक से परिवर्तित होकर ऋणात्मक में बदल जाता है।

इसलिए x = 1 एक स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है।

$\therefore$ **स्थानीय उच्चिष्ठ मान** $= f(1)$

$$= 1^3 - 6 \times 1^2 + 9 \times 1 + 15$$
$$= 19$$

x = 3 लेने पर, इस स्थिति में, जब x किंचित् छोटा है 3 से, तब f'(x) = 3(x-1)(x-3) ऋणात्मक होगा। क्योंकि (x-1) धनात्मक तथा (x-3) ऋणात्मक है।

पुनः, जब x किंचित् बड़ा है 3 से, तब (x-1) और (x-3) दोनों धनात्मक होंगे।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

इस प्रकार, जब x = 3 के बायीं ओर से दायीं ओर x में वृद्धि होती है तब f'(x) का चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक में परिवर्तित होता है। इसलिए x = 3 एक स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है।

$\therefore$ **स्थानीय निम्निष्ठ मान** $= f(3)$

$$= 3^3 - 6\times3^2 + 9\times3 + 15$$
$$= 27 - 54 + 27 + 15 = 15$$

अतः x = 1 पर स्थानीय उच्चिष्ठ मान 19 तथा x = 3 पर स्थानीय निम्निष्ठ मान 15 है।

उदाहरण: सिद्ध कीजिए कि किसी दिये हुए गोले के अन्तर्गत उच्चिष्ठ आयतन के शंकु की ऊँचाई का गोले के व्यास से अनुपात 2:3 है।

हल: माना गोले का केन्द्र 0 और उसका व्यास AE = d है तथा गोले के अन्तर्गत शंकु (ABC) की ऊँचाई AD =x है। यदि शंकु के आधार की त्रिज्या और उसका आयतन V हो, तो

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 x \qquad ...(1)$$

ज्यामिति से हम जानते हैं कि

$$BD^2 = AD.DE$$
$$\Rightarrow \quad r^2 = x(d-x) \qquad ...(2)$$
$$\Rightarrow \quad r^2 = dx - x^2$$

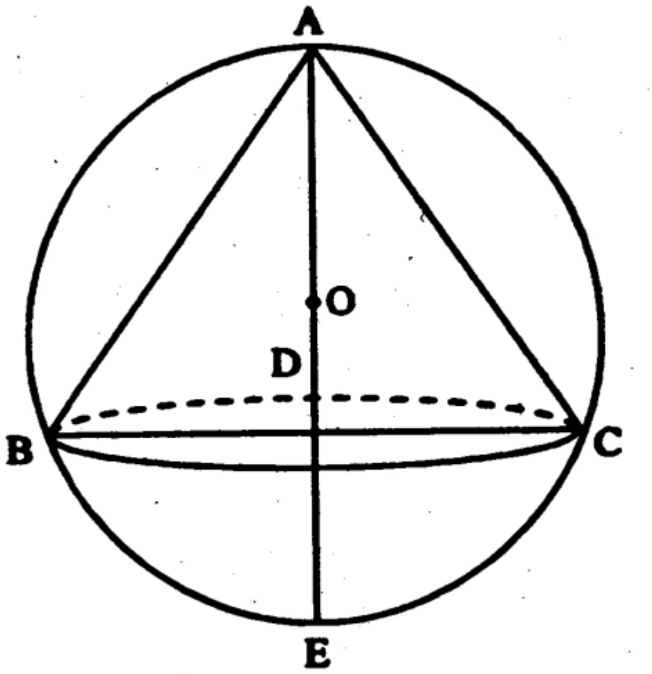
उपर्युक्त से r^2 का मान समी. (1) में रखने पर,

$$V = \frac{1}{3}\pi(dx - x^2)x$$
$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi(dx^2 - x^3)$$
$$\therefore \quad \frac{dV}{dx} = \frac{1}{3}\pi(2dx - 3x^2)$$

और $$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{3}\pi(2d - 6x).$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)



$\because$ V के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान के लिए $\frac{dV}{dx}=0,$

$\therefore \quad \frac{1}{3}\pi(2dx-3x^2)=0$

$\Rightarrow \quad 2dx-3x^2=0$

$\Rightarrow \quad x(2d-3x)=0$

$\Rightarrow \quad x=0,\frac{2d}{3}$

किन्तु शंकु की ऊँचाई x शून्य नहीं हो सकती, अतएव

$x=\frac{2d}{3}.$

अब $x=\frac{2}{3}d$ पर $\frac{d^2V}{dx^2}$ का मान $=\frac{1}{3}\pi(2d-6.\frac{2}{3}d)$

$=-\frac{2}{3}\pi d,$ (जो ऋणात्मक है।)

अतएव $x=\frac{2}{3}d$ पर शंकु का आयतन उच्चिष्ठ है। इस अवस्था में,

$\frac{x}{d}=\frac{2}{3}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\Rightarrow \quad x : d = 2 : 3$$

अत: उच्चिष्ठ आयतन के लिए शंकु की ऊँचाई और गोले के व्यास में 2 : 3 का अनुपात है। यही सिद्ध करना था।

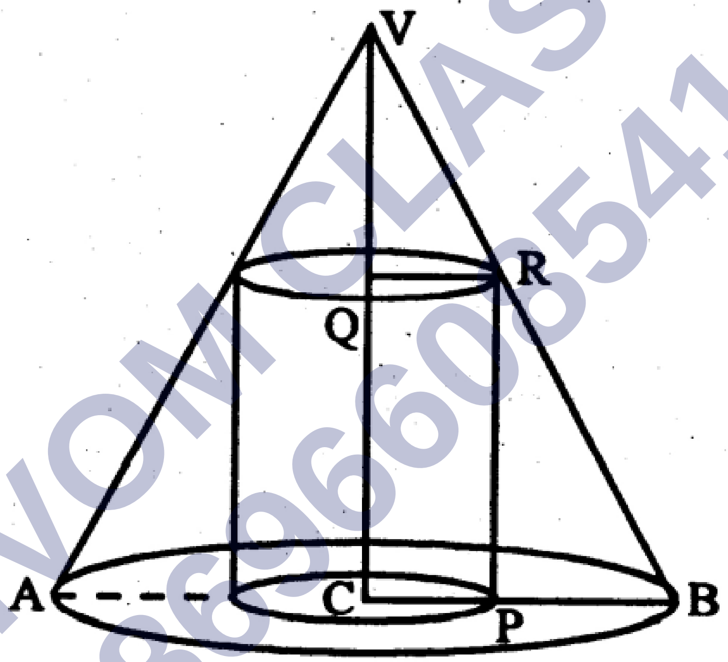
उदाहरण: सिद्ध कीजिए कि किसी शंकु के अन्तर्गत अधिकतम वक्र पृष्ठ वाले बेलन की त्रिज्या शंकु के आधार की त्रिज्या की आधी होती है।

हल: माना CB = r = शंकु के आधार की त्रिज्या

CV = h = शंकु की ऊँचाई

CP = x = शंकु के अन्तर्गत बेलन की त्रिज्या

CQ = बेलन की ऊंचाई



$$\Delta VQR \sim \Delta VCB$$

$$\therefore \quad \frac{VQ}{VC} = \frac{QR}{CB} \Rightarrow \frac{CV - CQ}{CV} = \frac{CP}{CB}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h - CQ}{h} = \frac{x}{r} \Rightarrow hr - r.CQ = xh$$

$$\Rightarrow \quad hr - xh = rCQ$$

$$\therefore \quad CQ = \frac{h(r-x)}{r} \qquad ...(1)$$

यहाँ शंकु एवं उसकी त्रिज्या व ऊंचाई दी है। अब अन्तः बेलन का वक्र पृष्ठ

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$S = 2\pi x.CQ$$

$\Rightarrow$ $$S = \frac{2\pi x.h(r-x)}{r}$$

या $$S = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2) \quad ...(2)$$

$\therefore$ $$\frac{dS}{dx} = \frac{2\pi h}{r}(r-2x)$$

तथा $$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{2\pi h}{r}(0-2)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{-4\pi h}{r}$$

वक्र पृष्ठ के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए,

$$\frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi h}{r}(r-2x) = 0$$

$\therefore$ $$r - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{2}$$

चूँकि $$\frac{d^2S}{dx^2} = -\frac{4\pi h}{r} < 0$$

अतः शंकु के अंतर्गत बेलन के अधिकतम वक्रपृष्ठ के लिए

$x = \frac{r}{2}$. यही सिद्ध करना था।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 6.1 (पृष्ठ संख्या 213-215)

प्रश्न 1. वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए, जबकि

i. r = 3 सेमी है
ii. r = 4 सेमी है।

उत्तर-

i. माना वृत्त का क्षेत्रफल A है, तब

$$A = \pi r^2$$
$$\Rightarrow \frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r \text{ सेमी}^2/\text{ सेकण्ड}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{dA}{dr}\right)_{r=3} = 2\pi \times 3 = 6\pi \text{ सेमी}^2/\text{ सेकेण्ड}$$

अत: क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर 6π सेमी^{2}/सेकण्ड है।

ii. माना वृत्त का क्षेत्रफल A है, तब

$$A = \pi r^2$$
$$\Rightarrow \frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r \text{ सेमी}^2/\text{ सेकण्ड}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{dA}{dr}\right)_{r=4} = 2\pi \times 4 = 8\pi \text{ सेमी}^2/\text{ सेकेण्ड}$$

अत: क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर 8π सेमी^{2}/ सेकण्ड है।

प्रश्न 2. एक घन का आयतन 9 सेमी^{3}/ सेकेण्ड की दर से बढ़ रहा है। यदि इसकी कोर की लम्बाई 10 सेमी है तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है?

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उत्तर- माना घन की कोर = x सेमी, घन का आयतन = V तथा पृष्ठ क्षेत्रफल = S

तब V = x^3 तथा S = $6x^2$ जहाँ x समय t को फलन है।

प्रश्नानुसार,

$\frac{dV}{dt} = 9$ सेमी^{2}/ सेकेण्ड

या $9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3)\frac{dx}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}\ldots(i)$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{9}{3x^2} = \frac{3}{x^2}$

$\therefore \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2).\frac{dx}{dt} = 12x.\frac{3}{x^2} = \frac{36}{x}\ldots(i)$ से

$\therefore x = 10$ सेमी लेने पर, $\frac{dS}{dt} = \frac{36}{10} = 3.6$ सेमी^{2}/ सेकण्ड

अतः पृष्ठ क्षेत्रफल 3.6 सेमी^{2}/ सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 3. एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से 3 सेमी/ सेकण्ड की दर से बढ़ रही है। ज़ात कीजिए की वृत्त का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जब त्रिज्या 10 सेमी है?

उत्तर- मानी वृत्त की त्रिज्या r सेमी है, तब वृत्त का क्षेत्रफल A = πr^2 सेमी^{2}

प्रश्नानुसार,

सेमी/ सेकण्ड ...(i)

तब $\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2)\frac{dr}{dt}$

$= 2\pi r.3$ सेमी^{2}/ सेकण्ड ...(i)

$= 6\pi r$ सेमी^{2} / सेकण्ड

$\therefore \left(\frac{dA}{dt}\right)_{r=10} = 6\pi \times 10$ सेमी^{2}/ सेकण्ड $= 60\pi$ सेमी^{2}/सेकण्ड

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अत: क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर 60π सेमी²/सेकण्ड है।

प्रश्न 4. एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 सेमी/ सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 सेमी लम्बा है?

उत्तर- माना घन का आयतन = V तथा भुजा = a है,

तब $V = a^3$ ज्ञात है

$\frac{da}{dt}$ = 3 सेमी/ सेकण्ड, a = 10 सेमी

∴ समय के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर

$$\frac{dV}{dt} = 3a^2\frac{da}{dt} = 3 \times (10)^2 \times 3 = 9 \times 100 = 900 \text{ सेमी}^2/\text{ सेकण्ड}$$

अतः जब घन का किनारा 10 cm लम्बा हो तब घन का आयतन 900 सेमी²/ सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 5. एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगें वृत्तों में 5 सेमी/ सेकण्ड की गति से चलती है। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 8 सेमी है तो उस क्षण घिरा हुआ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा हैं?

उत्तर-

दिया है- $\frac{dr}{dt} = 5$ सेमी/ सेकण्ड, r = 8 सेमी

माना तरंगों से बने वृत्त का क्षेत्रफल A सेमी² है।

तब $A = \pi r^2$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \ldots (i)$$

r तथा $\frac{dr}{dt}$ का मान समी. (1) में रखने पर, $\frac{dA}{dt} = 2\pi \times 8 \times 5 = 80\pi$ सेमी²/ सेकण्ड

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अतः जब तरंग की त्रिज्या 8 सेमी हो तब तरंगों द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल 80π सेमी^{2}/ सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 6. एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 सेमी/ सेकण्ड की दर से बढ़ रही है। इसकी परिधि की वृद्धि की दर क्या है। जब r = 4.9 सेमी है?

उत्तर- माना वृत्त की त्रिज्या r सेमी है, तब परिधि C = πr

प्रश्नानुसार,

$$\frac{dr}{dt} = 0.7 \text{ सेमी/ सेकण्ड}$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d}{dt}(2\pi r) = \frac{d}{dt}(2\pi r)\frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi.(0.7) \text{ सेमि/ सेकण्ड} = 1.4\pi \text{ सेमी/ सेकण्ड}$$

अतः वृत्त की परिधि 1.4π सेमी/ सेकण्ड की दर से बढ़ रही है।

प्रश्न 7. एक आयत की लम्बाई x, 5 सेमी/मिनट की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 4 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है। जब x = 8 सेमी और y = 6 सेमी है। तब आयत के

a. परिमाप
b. क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

ज्ञात है- $\frac{dx}{dt} = 5$ सेमी/मिनट

तथा $\frac{dy}{dt} = 4$ सेमी/मिनट

माना आयत का क्षेत्रफल = A सेमी^{2}, परिमाप = p सेमी

लम्बाई = x सेमी, चौड़ाई = y सेमी

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

a. परिमाप p = 2(x + y)

$$\therefore \frac{dp}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= 2(-5 + 4) = -2 \text{ सेमी/ मिनट}$$

अतः आयत का परिमाप 2 सेमी/ मिनट की दर से घट रहा हे।

b. आयत का क्षेत्रफल A = xy

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt} \ldots (i)$$

ज्ञात है - $\frac{dx}{dt} = -5, \frac{dy}{dt} = 4$

समी. (1) में x = 8 सेमी, y = 6 सेमी, $\frac{dx}{dt} = -5, \frac{dy}{dt} = 4$ रखने पर,

$$\frac{dA}{dt} = -5 \times 6 + 8 \times 4 = -30 + 32 = 2 \text{ सेमी}^2\text{/ सेमी}$$

अतः आयत का क्षेत्रफल 2 सेमी^{2}/सेमी की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 8. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकर रहता है, एक पम्प द्वारा 900 सेमी^{3}/सेकण्ड की दर से फुलाया जाता है। गुब्बारे की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 15 सेमी है।

उत्तर- माना गुब्बारे की त्रिज्या = r तथा आयतन = V

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ सेमी}^3$$

प्रशनानुसार, $= \frac{dV}{dt} = 900$ सेमी^{3}/ सेकण्ड

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 900 \text{ सेमी}^3\text{/ सेकण्ड या } \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\frac{dr}{dt} = 900$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 900 \text{ या } \frac{dr}{dt} = \frac{900}{4\pi r^2} \text{ सेमी/ सेकण्ड}$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\therefore \left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=15} = \frac{900}{4\times\pi\times(15)^2} = \frac{900}{4\times\pi\times15\times15} = \frac{1}{\pi} \text{ सेमी/ सेकण्ड}$$

अतः त्रिज्या के परिवर्तन की दर $\frac{1}{\pi}$ सेमी/ सेकण्ड है।

प्रश्न 9. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है कि त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 सेमी है।

उत्तर- माना गुब्बारे का आयतन = V तथा त्रिज्या = r

$$\therefore V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi \times 3\, r^2 = 4\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi \times 10 \times 10 [\because r = 10 \text{ सेमी}] = 400\pi \text{ सेमी}^3/\text{सेमी}$$

अतः जब त्रिज्या 10 सेमी हो तब गुब्बारे का आयतन 400π सेमी^{3}/सेमी की दर से बढ़ता है।

प्रश्न 10. एक 5 मी लम्बी सीढी दीवार के सहारे झुकी है। सीढ़ी का नीचे का सिरा जमीन के अनुदिश दीवार से दूर 2 मी/ सेकण्ड की दर से खींचा जाता है। दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी को नीचे का सिरा दीवार से 4 मी दूर है।

उत्तर- माना दीवार OC है तथा किसी क्षण सीढ़ी AB की स्थिति इस प्रकार है कि OA = x और OB = y

OA = X और OB = y

सीढ़ी की लम्बाई AB = 5 मी

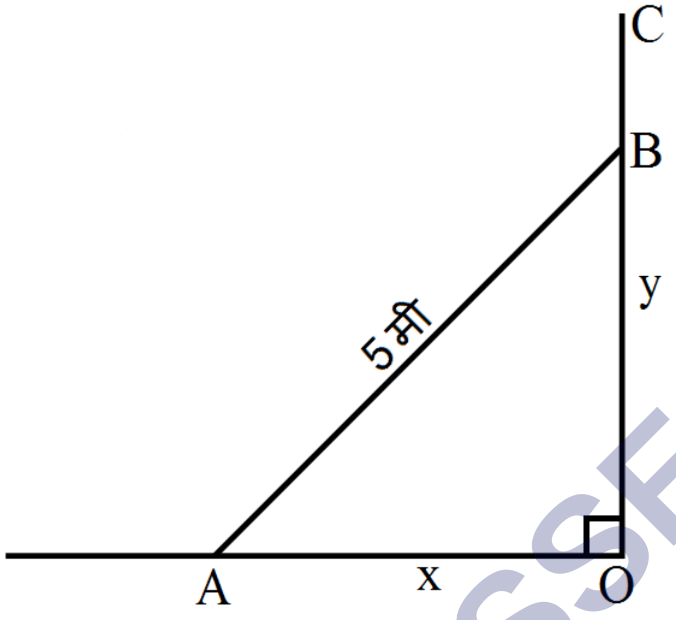
प्रश्नानुसार, $\frac{dx}{dt} = 2$ मी/ सेकण्ड

समकोण $\triangle AOB$ से

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 2x.\frac{dx}{dt} + 2y.\frac{dy}{dt} = 0$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)



$$\Rightarrow 2x.2 + 2y.\frac{dx}{dt} = 0\left(\because \frac{dx}{dt} = 2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-2x}{y} \text{ मी/ सेकण्ड}$$

अतः $x = 4$ पर, $y = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

(i) में $x = 4$ तथा $y = 3$ रखने पर, $\frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}$ मी/ सेकण्ड

अतः दीवार पर सीढ़ी की ऊँचाई $\frac{8}{3}$ मी/ सेकण्ड की दर से घट रही है।

प्रश्न 11. एक कण वक्र $6y = x^3 + 2$ के अनुगत गति कर रहा है। वक्र पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जबकि x निर्देशांक की तुलना में y निर्देशांक 8 गुना तीव्रता से बदल रहा है।

उत्तर- दिया है-

$6y = x^3 + 2$ और $\frac{dy}{dt} = 8\frac{dx}{dt}$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$6\frac{dy}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt} + 0 \Rightarrow 6 \times 8\frac{dx}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर, $6y = 64 + 2 = 66 \Rightarrow y = \frac{66}{6} = 11$

ऋणात्मक चिन्ह लेने पर, $6y = -64 + 2 = -62 \Rightarrow y = -\frac{62}{6} = -\frac{31}{3}$

$\therefore$ अभीष्ट बिंदु है (4, 11) तथा $\left(-4, -\frac{31}{3}\right)$

प्रश्न 12. हवा के बुलबुले की त्रिज्या, $\frac{1}{2}$ सेमी/सेकण्ड की दर से बढ़ रही है। बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 1 सेमी है?

उत्तर- माना बुलबुले की त्रिज्या = r तथा बुलबुले का आयत

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

प्रश्नानुसार, $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}$ सेमी/ सेकण्ड

पुनः $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^2\right).\frac{dr}{dt}$

या $\frac{dV}{dt} = \pi r^2.\frac{1}{2} = 2\pi r^2$ सेमी^{3}/ सेकण्ड

$\therefore \left(\frac{dV}{dt}\right)_{r=1} = 2\pi(1)^2 = 2\pi$ सेमी/ सेकण्ड

अतः बुलबुले का आयतन 2π सेमी^{3}/ सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 13. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, का परिवर्तनशील व्यास $\frac{3}{2}(2x + 1)$ है। x के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

उत्तर- प्रश्नानुसार,

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

SHIVOM CLASSES 8696608541

गोलाकार गुब्बारे का व्यास $= \frac{3}{2}(2x+1)$

$\therefore$ त्रिज्या $r = \frac{3}{4}(2x+1) \therefore \frac{dr}{dx} = \frac{3}{4}(2) = \frac{3}{2}$

गोलाकार गुब्बारे का आयतन $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

तब $\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right).\frac{dr}{dx} = 4\pi r^2.\frac{3}{2}$

$= 6\pi r^2 = 6\pi\left[\frac{3}{4}(2x+1)\right]^2 = \frac{54}{16}\pi(2x+1)^2 = \frac{27}{8}\pi(2x+1)^2$

अतः x के सापेक्ष अयातन के परिवर्तन की दर $\frac{27}{8}\pi(2x+1)^2$ है।

प्रश्न 14. एक पाइप से रेत 12 सेमी³/ सेकण्ड की दर से गिर रही है। गिरती रेत जमीन पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है जबकि ऊँचाई 4 सेमी है?

उत्तर- माना किसी क्षण t है पर शंकु की त्रिज्या r, ऊँचाई h तथा आयतन V है।

$h = \frac{r}{6}(2r+1)$

$\Rightarrow r = 6h$

$\therefore V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6h)^2 h = 12\pi h^3$

अब $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \times \frac{dh}{dt}$

$\Rightarrow 12 = \frac{d}{dh}(12\pi h^3) \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow 12 = 36\pi h^2 \times \frac{dh}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{3\pi h^2}$

$\Rightarrow \left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=4} = \frac{1}{(3\times\pi\times4\times4)} = \frac{1}{48\pi}$ सेमी/ सेकण्ड

अतः शंकु की ऊँचाई $\frac{1}{48\pi}$ सेमी/ सेकंड की दर से बढ़ रही है।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रश्न 15. एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन की कुल लागत C (x) (रुपये में) $C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$ से प्राप्त होती है। सीमान्त लागत ज्ञात कीजिए जबकि 17 इकाइयों का उत्पादन किया जाता है।

उत्तर- प्रश्नानुसार, $C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$

$$\Rightarrow \text{सीमांत लागत } MC = \frac{dC}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}(0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000)$$

$$= 0.007 \times 3x^2 - 0.003 \times 2x + 15$$

$$\Rightarrow (MC)_{x=17}$$

$$= \{0.007 \times 3(17)^2\} - \{0.003 \times 2(17)\} + 15$$

$$= 6.069 - 0.102 + 15$$

$$= 20.967$$

अतः 17 इकाइयों के उत्पादन की सीमान्त लागत Rs. 20.967 है।

प्रश्न 16. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय R(x) रुपये में $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ से प्राप्त होती है। सीमान्त आय ज्ञात कीजिए जब x = 7 है।

उत्तर-

प्रश्नानुसार, $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$

$$\Rightarrow \text{सीमांत आय } MR = \frac{dR}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}(13x^2 + 26x + 15) = 26x + 26$$

$$(MR)_{x=7} = 26 \times 7 + 26$$

$$= 182 + 26$$

$$= 208$$

अतः अभीष्ट सीमान्त आय Rs 208 है।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रश्न 17. एक वृत्त की त्रिज्या r = 6 सेमी पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है:

a. 10π
b. 12π
c. 8π
d. 11π

उत्तर- मानी वृत्त का क्षेत्रफल = A तथा त्रिज्या = r

क्षेत्रफल $A = \pi r^2$

r के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

r = 6 रखने पर,

$\frac{dA}{dr} 2\pi \times 6 = 12\pi$ सेमी²/ सेकण्ड

अत: विकल्प (b) सही है।

प्रश्न 18. एक उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपयों में $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब x = 15 है तो सीमान्त आये है:

a. 116
b. 96
c. 90
d. 126

उत्तर- दिया है- $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$

सीमान्त आय $= \frac{d}{dx} R(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 + 36 + 5) = (6x + 6)$

अब, x = 15, सीमान्त आय = 6 × 21 = Rs 126

अत: विकल्प (d) सत्य है।

SHIVOM CLASSES 8696608541

प्रश्नावली 6.2 (पृष्ठ संख्या 221-223)

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि R पर f(x) = 3x + 17 निरन्तर वृद्धिमान फलन है।

उत्तर-

दिया गया फलन $f(\mathrm{x}) = 3\mathrm{x} + 17$

$f'(\mathrm{x}) = 3 > 0, \forall\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}$

$f'(\mathrm{x}) > 0, \forall\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}$

$\therefore\ f(\mathrm{x}), \mathrm{R}$ पर निरन्तर वृद्धिमान फलन है।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि R पर f(x) = e^{2x} से प्रदत फलन वर्धमान हैं।

उत्तर- R में कोई भी दो नंबर बताएं x_1 और x_2

फिर, हमारे पास है:

$\mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2 \Rightarrow 2\mathrm{x}_1 < 2\mathrm{x}_2$

$\Rightarrow e^{2\mathrm{x}_1} < e^{2\mathrm{x}_2} \Rightarrow f(\mathrm{x}_1) < f(\mathrm{x}_2)$

इसलिए, R पर सख्ती से f बढ़ रहा है।

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि f(x) = sinx द्वारा दिया गया फलन

a. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरन्तर वृद्धिमान है।

b. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरन्तर ह्रासमान है।

c. $(0, \pi)$ में न तो वृद्धिमान है और न ह्रासमान।

उत्तर-

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

a. $f(x) = \sin x$

$\Rightarrow f(x) = \cos x$

$\because \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cos x > 0, \therefore f'(x) > 0, \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore f(x)$, अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरन्तर वृद्धिमान है

b. $\because \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \cos x < 0 \therefore f'(x) < 0, \forall\, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$\therefore f\,(x)$, अन्तराल $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान हैं।

c. उपरोक्त परिणामों से स्पष्ट हैं कि $f(x) = \sin x$

अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरन्तर वृद्धिमान तथा अन्तराल $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरन्तर ह्रासमान है।

$\therefore$ फलन अन्तराल $(0, \pi)$ में न तो वृद्धिमान है और न ह्रासमान।

प्रश्न 4. अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^2 - 3x$ द्वारा दिया गया फलन f

a. वृद्धिमान है,
b. निरन्तर ह्रासमान है।

उत्तर-

a. दिया गया फलन $f(x) = 2x^2 - 3x$

$f'(x) = 4x - 3 > 0, \forall\, x > \frac{3}{4}$

$\therefore f(x)$, अन्तराल $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ पर निरन्तर वृद्धिमान है।

b. पुनः $f'(3) = 4x - 3 < 0, \forall\, x < \frac{3}{4}$

$\therefore f(x)$, अन्तराल $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ पर निरन्तर ह्रासमान है।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

SHIVOM CLASSES 8696608541

प्रश्न 5. अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^2 - 3x^2 - 36x + 7$ से दिया फलन f

a. निरन्तर वृद्धिमान है,

b. निरन्तर ह्रासमान है।

उत्तर-

a. दिया गया फलन $f(x) = 2x^2 - 3x^2 - 36x + 7$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6)$$

$$= 6\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6\right] = 6\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]$$

अब $f'(x) > 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} > 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{25}{4}$

$\Rightarrow \; x - \frac{1}{2} > \frac{5}{2}$ या $x - \frac{1}{2} < -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow x > 3$ या $x < -2$

$\Rightarrow x \in (3, \infty)$ या $x \in (-\infty, -2)$

$\therefore$ अन्तराल $x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ पर फलन $f(x)$ निरन्तर वृद्धिमान हैं।

b. पुनः $f'(x) < 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 < 0$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow -\frac{5}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow -2 < x < 3 \Rightarrow x \in (-2, 3)$$

$\therefore$ अन्तराल $x \in (-2, 3)$ पर ह्रासमान हैं।

प्रश्न 6. अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें निम्नलिखित फलन निरन्तर वर्धमान अथवा ह्रासमान है:

a. $f(x)\ x^2 + 2x + 5$

b. $f(x)\ 10 - 6x - 2x^2$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

c. $f(x) - 2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$

d. $f(x)6 - 9x - x^2$

e. $f(x)\ (x + 1)^3\ (x - 3)^3$

उत्तर-

a. यहाँ $f(x) = x^2 + 2x - 5$

$\therefore f\ (x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$

$x = -1$ संख्या रेखा को दो अन्तराल में विभाजित करता है। अन्तराल $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$ है।

$(-\infty, -1)$ में $f'(x) = -ve$

अतः f ह्रासमान फलन है।

$(-1, \infty)$ में $f'(x) = +\ ve$

अतः वर्धमान फलन है।

b. $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$

$\therefore f'(x) = -6 - 4x$

$= -2(3 + 2x)$

जब $f'(x) = 0 \Rightarrow -2(-3 + 2x) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}$

बिन्दु $x = -\frac{3}{2}$ संख्या रेखा को दो भाग अंतराल $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ तथा $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ में बांटता हे।

अंतराल $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, $f'(x) = +$ धनात्मक

अतः फलन f निरंतर वर्धमान हे।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अंतराल $\left(\frac{3}{2}, \infty\right), f'(x) = -$ ऋणात्मक

अत: फलन f हासमान है।

c. यहाँ $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$

$\therefore f'(x) = -6x2 - 18x - 12 = -6(x2 + 3x + 2)$

$= -6(x + 1)(x + 2)$

$\therefore$ x = -2, x = -1 वास्तविक रेखा को तीन अन्तरालों (-∞, -2), (-2, -1), (-1, ∞) में विभाजित करते हैं।

अन्तराल (-∞, -2) में f (x) = -ve

अत: ह्रासमान फलन है। अन्तराल (-2, -1) या – 2 < x < -1 में f(x) = (-)(-)(+) = + ve अत: वर्धमान फलन है। अन्तराल (-1, ∞) या x > -1 में,

f(x) = (-)(+)(+) = -ve

$\therefore$ f ह्रासमान फलन है।

इस प्रकार (-2, -1) में वर्धमान फलन है। और (-∞, 2), (-1, ∞) में f ह्रासमान फलन है।

d. यहाँ $f(x) = 6 - 9x - x^2$

$f'(x) = -9 - 2x = -(2x + 9)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2x + 9) = 0 \Rightarrow x - \frac{9}{2}$$

बिन्दु $x = -\frac{9}{2}$ संख्या रेखा को दो भाग अंतराल $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right)$ तथा $\left(-\frac{9}{2}, \infty\right)$ में बांटता हे।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अंतराल $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right), f'(x) = (-)(-) = +$ धनात्मक

अत: फलन f निरन्तर वर्धमन हैं

अंतराल $\left(-\frac{9}{2}, \infty\right)$ में $f'(x) = (-)(+) = -$ ऋणात्मक

अत: फलन f निरन्तर हासमान हैं।

e. दिया गया फलन

$$f(x) = (x+1)^3(x-3)^3$$
$$\Rightarrow f'(x) = (x+1)^3 . \frac{d}{dx}(x-3)^3 + (x-3)^3 . \frac{d}{dx}(x+1)^3$$
$$= (x+1)^3 .3(x-3)^2 + (x-3)^3 .3(x+1)^2$$
$$= 3(x+1)^2(x-3)^2[(x+1)+(x-3)]$$
$$= 6(x+1)^2(x-3)^2(x-1)\ldots(i)$$

f(x) वृद्धिमान हे।

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0$$
$$\Rightarrow 6(x+1)^2(x-3)^2(x-1) \geq 0 \text{ [(i) से]}$$
$$\Rightarrow (x-1) \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, \infty]$$
$$\therefore f'(x), \text{ अंतराल } [1, \infty] \text{ पर वृद्धिमान हे।}$$

f(x) हासमान हैं।

$$\Rightarrow f'(x) \leq 0$$
$$\Rightarrow 6(x+1)^2(x-3)^2(x-1) \leq 0 \text{ [(i) से]}$$
$$\Rightarrow (x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\Rightarrow x \in [-\infty, 1]$

$\therefore f(x)$, अन्तराल $[\infty, 1]$ पर हसमाँ हैं।

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि $y = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}, x > -1$ अपने सम्पूर्ण प्रान्त में एक वृद्धिमान फलन है।

उत्तर- दिया गया फलन

$$y = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}, x > -1$$

स्पष्ट है कि $2 + x \neq 0$ अर्थात $x \neq -2$ और $1 + x > 0$ अर्थात $x > -1$

$\therefore$ y का प्रान्त $= (-1, \infty)$

अब $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x} - \frac{(2+x).2-2x.1}{(2+x)^2}$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{(2+x)^2-4-4x}{(1+x)(2+x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \geq 0 \; \forall x < -1$$

$\therefore$ y, अपने सम्पूर्ण प्रान्त में एक वृद्धिमान फलन हैं।

प्रश्न 8. x के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए $y = [r\ (x - 2)]^2$ एक वर्धमान फलन है।

उत्तर- ज्ञात है-

$$y = [x(x-2)]^2 = x^2(x + 4 - 4x)$$

$$= x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4(x^2 - 3x + 2) = 4x(x-1)(x-2)$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x-2) = 0 \;\therefore\; x = 0, 1, 2$$

∴ x = 0,x = 2 से वास्तविक संख्या रेखा के चार भाग अन्तराल (−∞, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 2) बनते हैं।

अन्तराल (−∞, 0) में f′(x) = (−) (−) (−) = −ve (ऋणात्मक)

अतः फलन f निरन्तर ह्रासमान है।

अन्तराल (0, 1) में f ‘ (x) = (+) (-) (-) = + ve (धनात्मक)

अतः फलन f निरन्तर वर्धमान है।

अन्तराल (1, 2) में f ‘ (x) = (+) (+) (-) = – ve (ऋणात्मक)

अतः फलन f निरन्तर ह्रासमान है।

अन्तराल (2, ∞) में f ‘ (x) = (+) (+) (+) = +ve (धनात्मक)

अतः फलन f निरन्तर वर्धमान है।

इस प्रकार (0, 1) ∪ (2, ∞) में फलन f वर्धमान है तथा (−∞, 0) ∪ (1, 2) में फलन ह्रासमान है।

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में $y = \frac{4\sin\theta}{2+\cos\theta} - \theta, \theta$ का एक वृद्धिमान फलन है।

उत्तर- ज्ञात है-

$$y = \frac{4\sin\theta}{2+\cos\theta} - \theta \text{ तथा अन्तराल } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \frac{(2+\cos\theta)4\cos\theta - 4\sin\theta(-\sin\theta)}{(2+\cos\theta)^2} - 1$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$= \frac{8\cos\theta + 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}{((2\cos\theta)^2} - 1 = \frac{8\cos\theta + 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{(2+\cos\theta)^2} - 1$$

$$= \frac{8\cos\theta + 4}{(2+\cos\theta)^2} - 1 = \frac{8\cos\theta + 4 - (4 + \cos^2\theta + 4\cos\theta)}{(2+\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{4\cos\theta - \cos^2\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{(4-\cos\theta)\cos\theta}{(2+\cos\theta)^2}$$

क्योंकि $4 - \cos\theta > 0$ तथा $(2 + \cos\theta)^2 > 0$

तब $\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} \geq 0$ क्योंकि $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में $\cos\theta \geq 0$

$\therefore \frac{dy}{d\theta} \geq 0$

$\therefore y, \theta$ का एक वृद्धिमान फलन हैं।

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए कि लघुगणकीय फलन (0, ∞) में निरन्तर वर्धमान फलन है।

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x) = \log x, x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ धनात्मक, $x > 0$ के लिए

अतः लघुगणकीय फलन अन्तराल (0, ∞) के लिए निरन्तर वर्धमान है। इति सिद्धम्

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि (-1, 1) में $f(x) = x^2 - x + 1$ से प्रदत्त फलन न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

उत्तर-

$f(x) = x^2 - x + 1$

$f(x) = 2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$x = \frac{1}{2}$, अन्तराल $(-1, 1)$ को दो भागों में बांटता करता हैं।

अंतराल $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ तथा $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

अन्तराल $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ तथा $f'(x) =$ ऋणात्मक

अन्तराल $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ तथा $f'(x) =$ धनात्मक

इस प्रकार (-1, 1) में f '(x) का चिह्न एक नहीं है।

अतः इस अन्तराल में यह फलन न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है। इति सिद्धम्

प्रश्न 12. निम्नलिखित में कौन से फलन $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरन्तर ह्रासमान है?

a. cos x
b. cos 2x
c. cos 3x
d. tan x

उत्तर-

a. माना $f(x) = \cos x, \therefore f'(x) = -\sin x$

अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में, $\sin x = +$ धनात्मक $\Rightarrow f'x = -$ ऋणात्मक

अतः फलन f निरन्तर ह्रासमान है।

b. माना $f(x) = \cos 2x$

अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में, $\sin x = +$ धनात्मक $[\because 0 < 2x < \pi]$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\therefore f'(x) = -$ ऋणात्मक

अतः फलन f निरंतर ह्रासमान हैं।

c. माना $f(x) = \cos 3x$

$\therefore f'x = -3\sin 3x$

अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में $\sin 3x$ धनात्मक व कभी ऋणात्मक $\left[\therefore 0 < 3x < \frac{3\pi}{2}\right]$

$\therefore f'(x) =$ कभी धनात्मक व कभी ऋणात्मक

अतः फलन f न तो वर्धमान हैं और न ही ह्रासमान हैं।

d. माना $f'(x) = \tan x \therefore f'(x) = \sec^2 x$

अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में, $f'(x) = +$ धनात्मक

अतः फलन f वर्धमान हैं।

अतः विकल्प (A) तथा (B) के फलन $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर ह्रासमान हैं।

प्रश्न 13. निम्नलिखित अन्तरालों में से किस अन्तराल में $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन f ह्रासमान है?

a. (0, 1)
b. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
c. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
d. इनमें से कोई नहीं

उत्तर-

दिया हैं- $f'(x) = 100x^{99} + \cos x$

$f'(x) = 100x^{99} + \cos x$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

a. अन्तराल $0 < x < 1, 0 < 100x^{99} < 100$

तथा $\cos x = +$ धनात्मक

$\therefore f'(x) = +$ धनात्मक

अतः फलन f वृद्धिमान हैं।

b. अन्तराल हैं, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\therefore f'(x) = 100x^{99} + \cos x = +$ धनात्मक

अतः फलन f वृद्धिमान हैं।

c. अन्तराल हैं, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

यहाँ पर $100x^{99}$ तथा $\cos x$ दोनों धनात्मक हैं।

$\therefore f'(x) = +ve$

अतः फलन f वृद्धिमान हैं।

$\because$ विकल्प (a), (b) तथा (c) निरन्तर वर्धमान फलन हैं।

अतः विकल्प (d) सही हैं।

प्रश्न 14. a का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अंतराल (1, 2) में $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन f, वर्धमान है।

उत्तर- $\because f(x) = x^2 + ax + 1$

$\Rightarrow f'(x) = 2x + a$

$\because$ बिन्दु (1, 2) पर, f(x) एक वर्धमान फलन है

$\because f'(x) > 0 \ \forall \ 1 < x < 2$ अब $f''(x) = 2 > 0, \forall x \in (1, 2)$

$\Rightarrow f'(x)$, बिन्दु (1, 2) पर वर्धमान फलन है

⇒ बिन्दु (1, 2) पर f(1), f' (x) की न्यूनतम मान है

∵ $f'(1) > 0$

⇒ $2 + a > 0$

⇒ $a > -2$

अतः a का न्यूनतम मान -2 है।

प्रश्न 15. मान लीजिए (-1, 1) से असंयुक्त एक अन्तराल I हो तो सिद्ध कीजिए कि I में $f(x) = x + \frac{1}{x}$ से प्रदत्त फलन f, वर्धमान है।

उत्तर-

दिया गया फलन $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, -1$

$\therefore$ अन्तराल हैं $(-\infty, 1), [-1, 1], (1, \infty)$

क्योंकि I और $[-1, 1]$ असंयुक्त हैं।

$\therefore I = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

जब $x \in (-\infty, -1)$ तब $-\infty < x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0$ तथा $x - 1 < 0$

$\therefore f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} > 0$

$\Rightarrow f(x)$ निरंतर वर्धमान हैं जब $x \in (-\infty, -1)$

पुनः जब $x \in (-1, \infty) \Rightarrow 1 < x < \infty \Rightarrow x - 1 > 0$ तथा $x - 1 > 0$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\therefore (x-1)(x+1) > 0$

$\therefore f'(x) > 0$

$\Rightarrow f(x)$ निरन्तर वृद्धिमान है जब $x \in (1, \infty)$

अतः $f(x), I$ पर निरन्तर वृद्धिमान है।

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि फलन f(x) = log sinx, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान और $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में ह्रासमान है।

उत्तर-

दिया है- $f(x) = \log \sin x$

$\therefore f'(x) = \frac{1}{\sin x} . \cos x = \cot x$

अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में, $\cot x =$ धनात्मक

अतः f अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में एक निरंतर वर्धमान फलन हैं। इति सिद्धम्

अन्तराल $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में, $\cot x =$ ऋणात्मक $\therefore f'(x) =$ ऋणात्मक

अतः फलन f अन्तराल $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में एक निरन्तर ह्रासमान हैं। इति सिद्धम्

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए कि फलन f(x) = log |cos x| $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान और $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ में ह्रासमान है।

उत्तर-

दिया गया फलन $f(x) = \log \cos x$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x = -\tan x > 0$ जब $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\therefore f(x), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर वर्धमान हैं।

पुनः $f'(x) = -\tan x < 0$ जब $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore f'x, \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर ह्रासमान हैं।

प्रश्न 18. सिद्ध कीजिए कि R में दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ वर्धमान है।

उत्तर- यहाँ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1)$

$= 3(x - 1)^2$

$\therefore x \in R, f''(x) = +ve$

अतः वर्धमान फलन है।

प्रश्न 19. निम्नलिखित में से किस अन्तराल में $y = x^2 - e^{-x}$ वर्धमान है?

a. $(-\infty, \infty)$
b. $(-2, 0)$
c. $(2, \infty)$
d. $(0, 2)$

उत्तर-

यहाँ $f(x) = x^2 e^{-x}$

$\therefore f'(x) = x^2(-e^{-x}) + e^{-x}.2x$

$= -x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

SHIVOM CLASSES 8696608541

$= -xe^{-x}(x - 2)$

यदि f वर्धमान फलन है तो $f'(x) > 0$

या $xe^{-x}(2 - x) > 0$ या $-xe^{-x}(x - 2) > 0$

e-x सदैव धनात्मक है।

$\therefore -x(x - 2) > 0$ या $x(x - 2) < 0$

$\Rightarrow x \in (0, 2)$ का अर्थ है $f'(x) = +ve$

अतः f वर्धमान फलन है यदि $x \in (0, 2)$

अतः विकल्प (D) सही है।

प्रश्नावली 6.3 (पृष्ठ संख्या 227-229)

प्रश्न 1. वक्र $y = 3x^4 - 4x$ के $x = 4$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है वक्र का समीकरण

$y = 3x^4 - 4x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवलकन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 4 = 4(3x^3 - 1)$$

$x = 4$ रखने पर,

$$\text{स्पर्श रेखा की प्रवणता } x = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4} = 4[3 \times 4(-4)^3 - 1]$$

$$= 4[3 \times 64 - 1]$$

$$= 4[192 - 1]$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

SHIVOM CLASSES 8696608541

$= 4 \times 191$

$= 764$

∴ स्पर्श रेखा की प्रवणता = 764

प्रश्न 2. वक्र $y = \frac{x-1}{x-2}$, $x \neq 2$ के $x = 10$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण $y = \frac{x-1}{x-2}$, $x \neq 2$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)\frac{d}{dx}(x-1)-(x-1)\frac{d}{dx}(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{(x-2).1-(x-1).1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

$x = 10$ रखने पर,

∴ स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=10} = \frac{-1}{(10-2)^2} = -\frac{1}{(8)^2} = -\frac{1}{64}$$

प्रश्न 3. वक्र $y = x^3 - x + 1$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिन्दु पर ज्ञात कीजिए जिसका x-निर्देशांक 2 है।

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण $y = x^3 - x + 1$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$$

$x = 2$ रखने पर,

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

∴ स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = 3 \times (2)^2 - 1 = 3 \times 4 - 1 = 12 - 1 = 11$$

प्रश्न 4. वक्र $y = x^3 - 3x + 2$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिन्दु पर ज्ञात कीजिए जिसका x – निर्देशांक 3 है।

उत्तर-

$$\text{वक्र } y = x^3 - 3x + 2 \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता} = \frac{dy}{dx} = 3x^3 - 3$$

$$\text{यदि x- निर्देशांक 3 हो तो प्रवणता} = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 3(3)^2 - 3 = 27 - 3 = 24$$

प्रश्न 5. वक्र $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin 3\theta$ के $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलम्ब की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है, वक्र को समीकरण $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin 3\theta$

दोनों पक्षों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta \text{ तथा } \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ रखने पर,

$$\text{स्पर्श रेखा की प्रवणता x} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\therefore \text{अभिलम्ब की प्रवणता} = -\frac{1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1$$

प्रश्न 6. वक्र $x = 1 - a\sin\theta$, $y = b\cos^2\theta$ के $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर अभिलम्ब की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण $x = 1 - a\sin\theta$, $y = b\cos^2\theta$

दोनों पक्षों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = -a\cos\theta \text{ तथा } \frac{dy}{d\theta} = -2b\cos\theta.\sin\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-2b\cos\theta\sin\theta}{-a\cos\theta} = \frac{2b\sin\theta}{a}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ रखने पर,

$$\text{स्पर्श रेखा की प्रवणता } m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2b\sin\frac{\pi}{2}}{a} = \frac{2b}{a}\left[\because \sin\frac{\pi}{2} = 1\right]$$

$$\therefore \text{ अभिलम्ब की प्रवणता} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\frac{2b}{a}} = -\frac{a}{2b}$$

प्रश्न 7. वक्र $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ x – अक्ष के समान्तर हैं।

उत्तर- वक्र $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$

यदि स्पर्श रेखाएँ x- अक्ष के समान्तर हो तो प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Rightarrow 3(x - 3)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = -1, 3$

यदि $x = -1$, तो $y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7 = -1 - 3 + 9 + 7 = 12$, इसलिए बिंदु = $(-1, 12)$

SHIVOM CLASSES 8696608541

यदि x = 3, तो y = $(3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 7 = 27 - 27 - 27 + 7 = -20$, इसलिए बिंदु = (3, -20)

अतः, वक्र $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ पर बिंदु (-1, 12) और (3, -20) पर स्पर्श रेखा x- अक्ष के समांतर हैं।

प्रश्न 8. वक्र $y = (x - 2)^2$ पर एक बिन्दु ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा बिन्दुओं (2, 0) और (4, 4) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण $y = (x - 2)^2$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 2(x - 2) = 2(x - 2)$$

माना बिन्दु P(2, 0) तथा Q(4, 4) को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m = \frac{4-0}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\therefore \text{स्पर्श रेखा की प्रवणता} = \frac{dy}{dx} = 2(x - 2)$$

चूँकि स्पर्श रेखा बिन्दुओ (2, 0) तथा (4, 0) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर हैं।

चूँकि रेखा की प्रवणता = वक्र की प्रवणता

⇒ 2 = 2(x - 2)

⇒ x - 2 = 1

⇒ x = 1 + 2 = 3

जब x = 3, तब $y = (3 - 2)^2 = 1$

अतः बिंदु (3, 1) पर स्पर्श रेखा जीवा के समान्तर होगी।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रश्न 9. वक्र $y = x^3 - 11x + 5$ पर उस बिन्दु को ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा $y = x - 11$ है।

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण y = x3 – 11x + 5

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 11 \ldots (i)$

स्पर्श रेखा y = x - 11 की प्रवणता = 1 ...(ii)

समी.(i) तथा (ii) से,

$3x^2 - 11 = 1$

$\Rightarrow 3x^2 = 12$

$\Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = \pm 2$

जब x = 2, तब $y = (2)^3 - 11 \times 2 + 5 = 8 - 22 + 5 = 13 - 22 = -9$

जब x = -2, तब $y = (-2)^3 - 11 \times (-2) + 5 = -8 + 22 + 5 = 27 - 8 + 22 + 5 = 27 - 8 = 19$

∵ (2, 19) स्पर्श रेखा y = x -11 पर नहीं हैं। अतः बिंदु असंभव हैं।

∵ बिंदु (2, -9) पर स्पर्श रेखा y = x - 11 हैं।

प्रश्न 10. प्रवणता -1 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-1}, x \neq -1$ को स्पर्श करती है।

उत्तर- दिया गया वक्र y = 1

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

परन्तु स्पर्श रेखा की प्रवणता = -1 (दिया है)

$$\therefore -\frac{1}{(x-1)^2} = 1$$

$\Rightarrow (x - 1)^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 + 1 - 2x = 1$

$\Rightarrow x (x - 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0, 2$

जब $x = 0$ तब $y = -1$

तथा जब $x = 2$ तब $y = 1$

अभीष्ट बिन्दु (0, -1) व (2, 1) हैं।

अब बिन्दु (0, -1) पर स्पर्शी का समीकरण

$y + 1 = (-1)(x - 0)$

$y + 1 = -x$

$\Rightarrow x + y + 1 = 0$

तथा बिन्दु (2, 1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$y - 1 = (-1)(x - 2)$

$\Rightarrow y - 1 = -x + 2$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\Rightarrow x + y = 3$

अतः अभीष्ट समीकरण $x + y + 1 = 0$ तथा $x + y = 3$ हैं।

प्रश्न 11. प्रवणता 2 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-3}, x \neq 3$ को स्पर्श करती है।

उत्तर-

दिया है, वक्र का समीकरण $y = \frac{1}{x-3}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-3)\frac{d}{dx}(-1)-1\frac{d}{dx}(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{0-(1-0)}{(x-3)^2} \text{ या } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-3)^2} \ldots (i)$$

चूँकि स्पर्श रेखा की प्रवणता = 2

समीकरण (1) तथा (2) से,

$$-\frac{1}{x-3)^3} = 2$$

$$\Rightarrow 2(x-3)^2 = -1 \therefore (x-3)^2 - 1 \therefore (x-3)^2$$

$$= -\frac{1}{2} \therefore x - 3 = \pm\sqrt{\frac{-1}{2}}$$

∵ यह सम्भव नहीं हैं।

अतः ऐसी कोई भी स्पर्श रेखा नहीं होगी जिसकी प्रवणता 2 हैं।

प्रश्न 12. प्रवणता 0 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x^2-2x+3}$ को स्पर्श करती है।

SHIVOM CLASSES 8696608541

उत्तर- दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-2x+3)\times 0-1(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2}$$

$$= \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2} = \frac{-2(x-1)}{(x^2-2x+3)^2}$$

चूँकि स्पर्श रेखा की प्रवणता = 0

$$\therefore \frac{-2(x-1)}{(x^2-2x+3)^2} = \frac{0}{1}$$

$$\Rightarrow -2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

जब $x = 1$, तब $y = \frac{1}{1-2+3} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ बिंदु $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{2} = 0(x-1) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 0$$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण $y = \frac{1}{2}$

प्रश्न 13. वक्र $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ,

i. x-अक्ष के समान्तर हैं,
ii. y-अक्ष के समान्तर हैं।

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण

$$\frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{16} = 1$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{2x}{9} + \frac{2y}{16}\frac{dy}{dx} = 0 \text{ या } \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{9} \times \frac{16}{2y} = -\frac{16}{9}\frac{x}{y}$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

i. जब स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हो तब $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore -\frac{16}{9}\frac{x}{y} = 0 \therefore x = 0$$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ में $x = 0$ रखने पर,

$$\frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y^2 = 16 \therefore y = \pm 4$$

x-अक्ष के समांतर स्पर्श रेखाएँ बिंदु $(0, \pm 4)$ पर हैं।

ii. जब स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर हो तब

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 0 \Rightarrow \frac{9y}{16x} = \therefore y = 0$$

y = 0, समीकरण $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ में रखने पर,

$$\frac{x^2}{9} = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \therefore x = \pm 3$$

अतः y-अक्ष के समान्तर स्पर्श रेखाएं बिंदु $(\pm 3, 0)$ पर हैं।

प्रश्न 14. दिए वक्रों पर निर्दिष्ट बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा और अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए

i. $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ के (0, 5) पर
ii. $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ के (1, 3) पर
iii. $y = x^3$ के (1, 1) पर
iv. $y = x^2$ के (0, 0) पर
v. $x = \cos t$, $y = \sin t$ के $t = \frac{\pi}{4}$ पर

उत्तर-

i. वक्र $y = x^4 - 6x^3 = 13x^2 - 10x + 5$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$= \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

बिंदु (0, 5) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$= \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(0,5)} = 4(0)^3 - 18(0)^2 + 26(0) - 10 = 10$$

इसलिए बिंदु (0, 5) पर स्पर्श रेखा

$$y - 5 = -10(x - 0) \Rightarrow 10x + y = 5$$

बिंदु (0, 5) पर अभिलम्ब की प्रवणता

$$= -\left.\frac{dx}{dy}\right]_{(0,5)} = \frac{1}{10}$$

इसलिए बिंदु (0, 5) पर अभिलम्ब

$$y - 5 = \frac{1}{10}(x - 0) \Rightarrow x - 10y + 50 = 0$$

ii. वक्र $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ के (1, 3) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$= \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$$

बिंदु (1, 3) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,3)} = 4(1)^3 - 18(1)^2 + 26(1) - 10 = 2$

इसलिए बिंदु (1, 3) पर स्पर्श रेखा $y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 1$

बिंदु (1, 3) पर अभिलम्ब की प्रवणता $= -\left.\frac{dx}{dy}\right]_{(1,3)} = -\frac{1}{2}$

इसलिए बिंदु (1, 3) पर अभिलम्ब $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x + 2y = 7$

iii.

वक्र $y = x^3$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 3x^2$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

बिंदु (1, 1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,1)} = 3(1)^2 = 3$

इसलिए बिंदु (1, 1) पर स्पर्श रेखा $y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 2$

बिंदु (1, 1) पर अभिलम्ब की प्रवणता $= -\left.\frac{dx}{dy}\right]_{(1,1)} = -\frac{1}{3}$

इसलिए बिंदु (1, 3) पर अभिलम्ब $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow x + 3y = 4$

iv.

वक्र y = x² पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 2x$

बिंदु (0, 0) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(0,0)} = \frac{1}{0}$

इसलिए बिंदु (0, 0) पर स्पर्श रेखा $y - 0 = 0(x - 0) \Rightarrow x = 0$

बिंदु (0, 0) पर अभिलम्ब की प्रवणता $= -\left.\frac{dx}{dy}\right]_{(0,0)} = -\frac{1}{0}$

इसलिए बिंदु (0, 0) पर अभिलम्ब $y - 0 = -\frac{1}{0}(x - 0) \Rightarrow x = 0$

v. दिया हैं, वक्र का समीकरण x = cos t तथा y = sin t

दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dx}{dt} = -\sin t$ तथा $\frac{dy}{dt} = \cos t \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$

जब $t = \frac{\pi}{4}$, तब स्पर्श रेखा की प्रवणता $(m) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$

$x = \cot t = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $y = \sin t = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अतः बिंदु $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$\Rightarrow y - \frac{1}{\sqrt{2}} = (-1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -x + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x + y - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow x + y - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\therefore x + y - \sqrt{2} = 0$$

अभिलम्ब की प्रवणता $= -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-1} = 1$

$\therefore$ बिंदु $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ पर अभिलम्ब का समीकरण $y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\therefore y = x$$

अतः स्पर्श रेखा का समीकरण $x + y - \sqrt{2} = 0$ तथा अभिलम्ब का समीकरण $y = x$

प्रश्न 15. वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

i. रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समान्तर है।
ii. रेखा $5y - 15x = 13$ पर लम्ब है।

उत्तर-

i. दिया है, वक्र का समीकरण $y = x^2 - 2x + 7$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = 2x - 2 =$ स्पर्श रेखा की प्रवणता ...(i)

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

दिया हैं, रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समान्तर हैं

प्रवणता $= -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-1} = 2 \ldots \text{(ii)}$

चूँकि स्पर्श रेखा समान्तर हैं अतः प्रवणताएँ समान होंगी।

$\therefore 2x - 2 = 2$

$\Rightarrow 2x = 4$

$\therefore x = 2$

$x = 2$ वक्र के समीकरण में रखने पर,

$y = (2)^2 - 2 \times 2 + 7 = 4 - 4 + 7 + 7$

बिंदु (2, 7) पर स्पर्श का समीकरण

$y - 7 = 2(x - 2)$

$\Rightarrow y - 7 = 2x - 4$

$\Rightarrow 2x - y - 4 + 7 = 0$

$\therefore 2x - y + 3 = 0$

ii. दिया है, रेखा $5y - 15x = 13$ पर लम्ब है

इसकी प्रवणता $= -\frac{a}{b} = \frac{-15}{-5} = 3$

स्पर्श रेखा $5y - 15x = 13$ पर लम्ब हैं।

$\therefore$ स्पर्श रेखा की प्रवणता $= -\frac{1}{3}$

SHIVOM CLASSES 8696608541

समीकरण (1) और (3) समान होंगे।

$$\therefore 2x - 2 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

$x = \frac{5}{6}$ समीकरण वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ में रखने पर,

$$y = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) + 7 = \frac{25}{6} - \frac{5}{3} + 7$$

$$= \frac{25-60+252}{36} = \frac{217}{36}$$

बिंदु $\left(\frac{5}{6}, \frac{217}{36}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y - \frac{217}{36} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{6}\right)$

दोनों पक्षों में 36 से गुणा करने पर,

$$36y - 217 = -12x + 10$$

$$\Rightarrow 12x + 36y - 10 - 217 = 0$$

$$\therefore 12x + 36y - 227 = 0$$

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि वक्र $y = 7x^3 + 11$ के उन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएँ समान्तर हैं जहाँ $x = 2$ तथा $x = -2$ है।

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण $y = 7x^3 + 11$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 21x^2$

जब $x = 2$, तब स्पर्श रेखा की प्रवणता $= 21 \times 2^2 = 21 \times 4 = 84$

जब $x = -2$, तब स्पर्श रेखा की प्रवणता $= 21 \times (-2)^2 = 84$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$x = 2$ तथा $x = -2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता समान हैं।

अतः इन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएँ समान्तर हैं। इति सिद्धम्

प्रश्न 17. वक्र $y = x^3$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखा की प्रवणता बिन्दु के y-निर्देशांक के बराबर है।

उत्तर- दिया है, वक्र की समीकरण $y = x^3$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

माना वक्र पर बिंदु (x_1, y_1) हैं।

$\therefore$ बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= 3x_1^2$

$\because = 3x_1^2 = y_1 \dots (i)$

(x_1, y_1) वक्र $y = x^3$ पर स्थित हैं।

$\therefore y_1 = x_1^3 \dots (ii)$

समीकरण (1) और (2) से, $x_1^3 = 3x_1^2 \Rightarrow x_1 = 3{,}0$

जब $x_1 = 0$, तब $y_1 = x_1^3$ से, $y_1 = 0$

जब $x_1 = 3$, तब $y_1 = x^3$ से, $y_1 = 3^3 = 27$

अतः अभीष्ट बिंदु = (0, 0) तथा (3, 27) हैं।

प्रश्न 18. वक्र $y = 4x^3 - 2x^5$, पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ मूल बिन्दु से होकर जाती हैं।

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण $y = 4x^3 - 2x^5$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 10x^4$$

माना वक्र पर बिंदु (x_1, y_1) हैं।

$\therefore (x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $12x_1^2 - 10x_1^4 \ldots (ii)$

चूँकि (x_1, y_1) वक्र पर भी स्तिथ हैं।

$$\therefore y_1 = 4x_1^3 - 2x_1^5 \ldots (iii)$$

(x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = (12x_1^2 - 10x_1^4)(x - x_1)$$

चूँकि यह मूल बिंदु (0, 0) से होकर जाती हैं अतः x = 0, y = 0 रखने पर,

$$0 - y_1 = (12x_1^2 - 10x_1^4)(0 - x_1)$$

या $-y_1 = (12x_1^2 - 10x_1^4)(-x_1) \ldots (iv)$

समी० (3) से y_1 का मान समी० (4) में रखने पर,

$$(4x_1^3 - 2x_1^5) = x_1(12x_1^2 - 10x_1^4)$$
$$\Rightarrow x_1^3(4 - 2x_1^2) = x_1^3(12 - 10x_1^2)$$
$$\Rightarrow 4 - 2x_1^2 = 12 - 10x_1^2$$
$$\Rightarrow -2x_1^2 + 10x_1^2 = 12 - 4$$
$$\Rightarrow 8x_1^2 = 8$$
$$\Rightarrow x_1^2 = 1 \therefore x_1 = \pm 1, x_1 = 0$$

समीकरण (3) से, $y_1 = 4x_1^3 - 2x_1^5$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

जब $x_1 = 0$, तब $y_1 = 0$ जब $x_1 = 1$, तब $y_1 = 4 - 2 = 2$

जब $x_1 = -1$, तब $y_1 = -4 + 2 = -2$

अतः अभीष्ट बिंदु = (0, 0), (1, 2), (-1, -2)

प्रश्न 19. वक्र $x^2 + y^2 – 2x – 3 = 0$ के उन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ पर वे x-अक्ष के समान्तर हैं।

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण $x^2 + y^2 – 2x – 3 = 0$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\Rightarrow 2(x + y)\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$$

चूँकि स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हैं। $\therefore \frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \frac{1-x}{y} = \frac{0}{1}$$

$$\Rightarrow 1 - x = 0$$

$$\therefore x = 1$$

$x = 1$, वक्र के समीकरण $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ में रखने पर,

$$1 + y^2 - 2 - 3 = 0$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\Rightarrow y^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = 4$$

$$\therefore y = \pm 2$$

अतः अपेक्षित बिंदु = (1, 2), (1, -2)

प्रश्न 20. वक्र $ay^2 = x^3$ के बिन्दु (am^2, um^3)पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए और m का मान बताइए जिसके लिए अभिलम्ब बिन्दु (a, 0) से होकर जाता है।

उत्तर- वक्र $ay^2 = x^3$ ....(1)

समीकरण (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2ay\frac{dy}{dx} = 3x^2 \text{ या } \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2ay}$$

∴ बिंदु (am^2, am^3) पर वक्र (1) की स्पर्शी की प्रवणता

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(am^2,am^3)} = \frac{3(am^2)^2}{2a(am^3)} = \frac{3a^2m^4}{2a^2m^3} = \frac{3}{2}m$$

तब बिंदु (am^2, am^3) पर वक्र (1) के अभिलम्ब की प्रवणता

$$M = -\frac{1}{\frac{3}{2}m} = -\frac{2}{3m}$$

अतः सूत्र $(y - y_1) = M(x - x_1)$ से, बिंदु (am^2, am^3) पर अभिलम्ब का समीकरण

$$y - am^3 = -\frac{2}{3m}(x - am^2) \text{ या } 3my - 3am^4 = -2x + 2am^2$$

$$\text{या } 3my + 2x = am^2(3m^2 + 2)$$

यदि अभिलम्ब बिंदु (a, 0) से होकर जाता हैं, अब

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$2.a + 3m.0 = am^2(3m^2 + 2)$$

या $2 = 3m^4 + 2m^2$ या $3m^4 + 2m^2 - 2 = 0$

$$\therefore m^2 = \frac{-2+\sqrt{(4+24)}}{6}$$

$$= \frac{-2+2\sqrt{7}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}-1}{3}\right)}$$

प्रश्न 21. वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ के उन अभिलम्बो के समीकरण ज्ञात कीजिये जो रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समान्तर हैं।

उत्तर- वक्र y = x3 + 2x + 6 का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 2$

वक्र y = x3 + 2x + 6 पर अभिलम्ब की प्रवणता $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{3x^2+2}$

रेखा x + 14y + 4 = 0 की प्रवणता $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{14}$

यदि वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ का अभिलम्ब x + 14y + 4 = 0 के समान्तर हैं। तब दोनों की प्रवणताएँ समान होंगी।

इसलिए,

$$= -\frac{1}{3x^2+2} = -\frac{1}{14}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2 = 14$$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ में x = 2 रखने पर, y = (2)3 + 2(2) + 6 = 18, इसलिए बिंदु = (2, 18)

इसलिए बिंदु (2, 18) पर अभिलम्ब $y - 18 = -\frac{1}{14}(x - 2) \Rightarrow x + 14y = 254$

वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ में x = -2 रखने पर, y = (-2)3 + 2(-2) + 6 = -6, इसलिए बिंदु = (-2, -6)

इसलिए बिंदु (-2, -6) पर अभिलम्ब $y + 6 = -\frac{1}{14}(x + 2) \Rightarrow x + 14y + 86 = 0$

प्रश्न 22. परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा और अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण $y^2 = 4ax$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y} = \frac{2a}{y}$$

बिंदु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$\frac{dy}{dx} = m = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

बिंदु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$$

$$\Rightarrow yt - 2at^2 = x - at^2$$

$$\Rightarrow yt = x + at$$

अभिलम्ब की प्रवणता $= -\frac{1}{m} = -t$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

SHIVOM CLASSES 8696608541

∴ बिंदु $(at^2, 2at)$ पर अभिलम्ब का समीकरण, $y - 2at = -t(x - at^2)$

$\Rightarrow y - 2at = -tx + at^3$

$\Rightarrow y = -tx + 2at + at^3$

प्रश्न 23. सिद्ध किजिये की वक्र $x = y^2$ और $xy = k$ एक दूसरे को समकोण पर काटती हैं, यदि $8K^2 = 1$ हैं।

उत्तर- $x = y^2$ ...(i)

$xy = k$ ...(ii)

समीकरण (1) से x का मान समीकरण (2) में रखने पर, $y^3 = k \Rightarrow y = k^{\frac{1}{3}}$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर, $x = k^{\frac{1}{3}}$

अतः, दोनों वक्र एक दूसरे को बिंदु $\left(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}}\right)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

वक्र $x = y^2$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $1 = 2y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

वक्र $x = y^2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

इसलिए बिंदु $\left(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}}\right)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{\left(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{1}{2k^{\frac{1}{3}}}$$

वक्र $xy = k$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y + x\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

वक्र xy = k पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

इसलिए बिंदु $\left(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}}\right)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$m_1 = \frac{dy}{dx}\Big]_{\left(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{1}{2k^{\frac{1}{3}}}$$

$$m_1 \times m_2 = \frac{1}{2k^{\frac{1}{3}}} \times \left(-\frac{k^{\frac{1}{3}}}{k^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$= -\frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{8^{\frac{1}{3}} k^{\frac{2}{3}}}$$

$$= -\frac{1}{(8k^2)^{\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{(1)^{\frac{1}{3}}} = -1$$

⇒ वक्र $x = y^2$ और xy = k एक दूसरे को समकोण पर काटती हैं।

प्रश्न 24. अतिपरवलय $\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण $\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\therefore (x_0, y_0)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$

अतः स्पर्श रेखा का समीकरण $y - y_0 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} (x_0, y_0)$

दोनों पक्षों में $\frac{y_0}{b^2}$ से गुणा करने पर,

$$\frac{y\,y_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{xx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{xx_0}{a^2} - \frac{y\,y_0}{a^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$\left[\because\right.$ बिंदु (x_0, y_0), वक्र $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्थित हैं$\left.\right]$

अतः स्पर्श रेखा का समीकरण $\frac{xx-0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

चूँकि स्पर्श रेखा की प्रवणता $m = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$

चूँकि अभिलम्ब की प्रवणता $= -\frac{1}{m} = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$

अभिलम्ब का समीकरण $y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 y_0}(x - x_0)$

$$\frac{y-y_0}{a^2 y_0} = -\frac{x-x_0}{b^2 x_0}$$

$$\therefore \frac{x-x_0}{b^2 x_0} + \frac{y-y_0}{a^2 y_0} = 0$$

प्रश्न 25. वक्र $y = \sqrt{3x - 2}$ की उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा 4x - 2y + 5 = 0 के समान्तर है।

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण $y = \sqrt{3x - 2}$ ... (i)

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{3x-2}} \times 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

स्पर्श रेखा 4x - 2y + 5 = 0 के समान्तर हैं। अत: प्रवणता $= \frac{4}{2} = 2$

स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

∵ स्पर्श रेखा की प्रवणता = रेखा की प्रवणता

$$\Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} = 2$$

$$\Rightarrow 3 = 4\sqrt{3x-2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$9 = 16(3x-2) \Rightarrow \frac{9}{16} = 3x - 2$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{9}{16} + 2 = \frac{9+32}{16} = \frac{41}{16}$$

$$\therefore x = \frac{41}{48}$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = \sqrt{3 \times \frac{41}{48} - 2} = \sqrt{\frac{41}{16} - 2}$$

$$= \sqrt{\frac{41-32}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{14}$$

बिंदु $\left(\frac{41}{48}, \frac{3}{4}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y - \frac{3}{4} = 2\left(x - \frac{41}{48}\right)$$

$$\Rightarrow y - \frac{3}{4} = 2x - \frac{41}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{4y-3}{A} = \frac{48x-41}{24}$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

$$\Rightarrow \frac{4y-3}{1} = \frac{48x-41}{6}$$

$$\Rightarrow 24y - 18 = 48x - 41$$

⇒ स्पर्श रेखा का समीकरण 48x – 24y – 23 = 0

प्रश्न 26. $y = 2x^2 + 3\sin x$ के x = 0 पर अभिलम्ब की प्रवणता है

a. 3
b. $\frac{1}{3}$
c. 3
d. $-\frac{1}{3}$

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण $y = 2x^2 + 3\sin x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 4x + 3\cos x$

x = 0 पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 4 \times 0 + 3\cos 0 = 3$

∴ अभिलम्ब की प्रवणता $= -\frac{1}{m} = -\frac{1}{3}$

अतः विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 27. किस बिन्दु पर y = x + 1, वक्र $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा है?

a. (1,2)
b. (2,1)
c. (1,- 2)
d. (-1, 2)

उत्तर- दिया है, वक्र का समीकरण $y^2 = 4x$ ...(i)

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$2y\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

∴ स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{2}{y}$

दी हुई स्पर्श रेखा y = x + 1 की प्रवणता = 1

∴ समीकरण (2) तथा (3) से, $\frac{2}{y} = 1 \Rightarrow y = 2$

y का मान समी० (1) में रखने पर, 4 = 4x ⇒ x = 1

बिंदु (1, 2) पर रेखा y = x + 1 स्पर्श रेखा हैं।

अतः विकल्प (A) सही हैं।

प्रश्नावली 6.4 (पृष्ठ संख्या 232-233)

प्रश्न 1. अवकल का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का सन्निकट मान दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए:

a. $\sqrt{25.3}$
b. $\sqrt{49.5}$
c. $\sqrt{0.6}$
d. $(0.009)^{\frac{1}{3}}$
e. $(0.999)^{\frac{1}{10}}$
f. $(15)^{\frac{1}{4}}$
g. $(26)^{\frac{1}{3}}$
h. $(255)^{\frac{1}{4}}$
i. $(82)^{\frac{1}{4}}$
j. $(401)^{\frac{1}{4}}$
k. $(0.0037)^{\frac{1}{2}}$
l. $(26.57)^{\frac{1}{3}}$

SHIVOM CLASSES 8696608541

m. $(81.5)^{\frac{1}{4}}$
n. $(3.968)^{\frac{3}{2}}$
o. $(32.15)^{\frac{1}{5}}$

उत्तर-

a. माना फलन $y = f(x) = \sqrt{x}$

माना x = 25 और x + Δx = 0.3, तब Δx = 25.3 – 25 = 0.3

x = 25 के लिए $y = \sqrt{25} = 5$

माना dx = Δx = 0.3

पुनः $y = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=25} = \frac{1}{2(5)} = \frac{1}{10}$$

$$\because dy = \frac{dy}{dx}dx$$

$$\Rightarrow dy = \frac{1}{10}(0.03) \Rightarrow \Delta y = 0.3\ (\because \Delta y \cong dy)$$

$$\therefore \sqrt{25.3} = y + \Delta y = 5 + 0.03 = 5.03$$

b. माना $y = \sqrt{x}$, दि x = 49 तो $y = \sqrt{49} = 7$,

माना $\Delta x = 0.5$ इसलिए $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$ में मान रखने पर,

$$7 + \Delta y = \sqrt{49 + 0.5} \Rightarrow 7 + \Delta y = \sqrt{49.5} \ldots (i)$$

अब Δy सन्निकटतः dy के बराबर हैं और निम्नलिखित से प्रदात हैं:

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x \Rightarrow \Delta y = \frac{1}{2\sqrt{x}}(0.5)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{49}}(0.5) = \frac{1}{14}(0.5) = 0.035$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

समीकरण (1) में मान रखने पर, $\sqrt{49.5} = 7 + \Delta y$

$$\Rightarrow \sqrt{25.3} = 7 + 0.035 = 7.035$$

इस प्रकार के सन्निकट मान 7.035 हैं।

c. मान लीजिये $f(\mathrm{x}) = \sqrt{\mathrm{x}} \Rightarrow f'^{(\mathrm{x})} = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}}$

पुनः मान लीजिये $\mathrm{x} = 0.64$ और $\Delta\mathrm{x} = -0.04$

अब, $f(\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x}) \cong f(\mathrm{x}) + \Delta\mathrm{x} f'(\mathrm{x})$

$$\Rightarrow \sqrt{\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x}} \cong \sqrt{\mathrm{x}} + \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}} \times \Delta\mathrm{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{0.64 - 0.04} \cong \sqrt{0.64} + \frac{(-0.04)}{0\sqrt{0.64}}$$

$$= 0.8 - \frac{0.04}{2 \times 0.8} = 0.8 - 0.025 = 0.775$$

$$\Rightarrow \sqrt{0.6} \cong 0.775$$

d. माना $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(\mathrm{x}) = \frac{1}{3}\mathrm{x}^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\mathrm{x}^{\frac{2}{3}}}$$

माना $\mathrm{x} = 0.008, \Delta\mathrm{x} = 0.001 \Rightarrow d\mathrm{x} = 0.001$

$\mathrm{x} = 0.008$ के लिए, $\mathrm{y} = \mathrm{x}^{\frac{1}{3}} = (0.008)^{\frac{1}{3}} = 0.2$

अब, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mathrm{x}=0.008} = \frac{1}{3(0.008)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(0.04)} = \frac{1}{0.12}$

$$\therefore dy = \frac{dy}{dx}dx = \frac{1}{0.12} \times (0.001) = \frac{0.001}{0.12}$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{0.001}{0.120}$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

$$\therefore (0.009)^{\frac{1}{3}} = y + \Delta y = 0.2 + \frac{0.001}{0.120}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{1}{120} = \frac{25}{120} = 0.208$$

e. माना $y = x^{\frac{1}{10}}$, यदि x = 1 तो $y = (1)^{\frac{1}{10}} = 1$,

माना $\Delta x = -0.001$, इसलिए $y + \Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{10}}$ मान रखने पर,

$$1 + \Delta y = (1 - 0.001)^{\frac{1}{10}}$$

$$\Rightarrow 1 + \Delta y = (0.999)^{\frac{1}{10}} \ldots (i)$$

अब Δy सन्निकटत: dy के बराबर हैं और निम्नलिखित से प्रदात्त हैं:

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x \Rightarrow \frac{1}{10(x)^{\frac{9}{10}}}(-0.001)$$

$$= \frac{1}{10(1)^{\frac{9}{10}}}(-0.001) = \frac{1}{10}(-0.001) = -0.0001$$

समीकरण (1) में मान रखने पर, $(0.999)^{\frac{1}{10}} = 11 + \Delta y \Rightarrow (0.999)^{\frac{1}{10}} = 1 - 0.0001 = 0.9999$

इस प्रकार, $(0.999)^{\frac{1}{10}}$ के सन्निकट मान 0.9999 हैं।

f. माना $y = f(x) = x^{\frac{1}{4}} \ldots (i)$

माना $x = 16$ और $x + \Delta x = 15$

$$\Rightarrow \Delta x = -1 \Rightarrow dx = -1 (\because \Delta x \cong dx)$$

$x = 16$ के लिए $y = (16)^{\frac{1}{4}} = 2$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$x = 16$ के लिए $y = (16)^{\frac{1}{4}} = 2$

अब, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=16} = \frac{1}{4(16)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{32}$

$\therefore dy = \frac{dy}{dx}dx = \frac{1}{32} \times (-1) = -\frac{1}{32}$

$\Rightarrow \Delta y = -\frac{1}{32}(\because \Delta y \cong dy)$

$\therefore dy = \frac{dy}{dx}dx = \frac{1}{32} \times (-1) = -\frac{1}{32} \Rightarrow \Delta y = -\frac{1}{32}$

$\therefore (15)^{\frac{1}{4}} = y + \Delta y = 2 - \frac{1}{32} = \frac{63}{32} = 1.9688$

g. माना $y = (x)^{\frac{1}{3}}$

माना x = 27 और $x + \Delta x = 26$

$\Rightarrow \Delta x = -1 \Rightarrow dx = -1(\because \Delta x = dx)$

x = 27 के लिए $y = (27)^{\frac{1}{3}} = 3$

अब $\frac{0dy}{dx} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=27} = \frac{1}{3(27)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\times9} = \frac{1}{27}$

$\because dy = \frac{dy}{dx}dx \Rightarrow dy = \frac{1}{27}(-1) = -\frac{1}{27}$

$\Rightarrow \Delta y = -\frac{1}{27}(\because \Delta y \cong dy)$

$\therefore (26)^{\frac{1}{3}} = y + \Delta y = 3 - \frac{1}{27} = \frac{80}{27} = 2.963$

h. हम जानते हैं की $(256)^{\frac{1}{4}}$ और $y = x^{\frac{1}{4}}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}};$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right).\,\delta x = (x+\delta x)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}$$

रखने पर x = 256 और $\delta x = -1$

$$\Rightarrow \frac{1}{4(256)^{\frac{3}{4}}}.\,(-1) = (256)^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow (256)^{\frac{1}{4}} = \frac{1024-1}{256} = \frac{1023}{256} = 3.9961$$

i. माना $y = x^{\frac{1}{4}}$

माना $x = 81$ और $x + \Delta x = 82 \Rightarrow \Delta x = 1 \Rightarrow dx = 1$

$x = 81$ के लिए $y = (81)^{\frac{1}{4}} = 3$

अब $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=81} = -\frac{1}{4(81)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4(3)^3} = \frac{1}{108}$

$\because dy = \frac{dy}{dx}dx \therefore dy = \frac{1}{108}(1) = \frac{1}{108}$

$\Rightarrow \Delta y = \frac{1}{108} (\because dy \cong \Delta y)$

$\therefore (82)^{\frac{1}{4}} = y + \Delta y = 3 + \frac{1}{108} = \frac{325}{108} = 3.009$

j. माना $y = \sqrt{400} = 20\ [\because 401 = 400 + 1]$

$y = x^{\frac{1}{2}},\ x = 400,\ y = 20$ तथा $\Delta x = 1$

$y = x^{\frac{1}{2}}$ से, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

$\therefore dy = \frac{dy}{dx} \times \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{400}} \times 1 = \frac{1}{2\times 20} = \frac{1}{40}$

SHIVOM CLASSES 8696608541

$$= 0.025$$

$$\therefore (401)^{\frac{1}{2}} = y + dy = 20 + 0.025 = 20.025$$

k. माना $y = \sqrt{0.0036} = 0.06$ [$\because 0.0037 = 0.0036 - 0.0001$]

$$y = \sqrt{x},\ x = 0.0036,\ y = 0.06 \text{ तथा } \Delta x = 0.0001$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} \text{ से, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore dy = \frac{dy}{dx} \times \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{0.0036}} \times 0.0001$$

$$= \frac{0.0001}{2\times 0.06} \frac{0.0001}{0.12} = \frac{1}{1200} = 0.000833$$

$$\therefore \sqrt{0.0037} = y + dy = 0.06 + 0.000833 = 0.060833$$

$$= 0.0608$$

l. माना $y = (27)^{\frac{1}{3}} = 3$ [$\because 26.57 = 27 - 0.43$]

$$y = (x)^{\frac{1}{3}},\ x = 27,\ y = 3 \text{ तथा } \Delta x = -0.43$$

$$y = x^{\frac{1}{3}} \text{ से, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore dy = \frac{dy}{dx} \times \Delta x = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \times \Delta x = \frac{1}{3(27)^{\frac{2}{3}}} \times (-0.43)$$

$$= \frac{-0.43}{27} = -0.0159259$$

$$\therefore (26.57)^{\frac{1}{3}} = y + dy = 3 - 0.0159259 = 2.9840741$$

$$= 2.984$$

m. माना $y = (81)^{\frac{1}{4}} = 3$ [$\because 81.5 = 81 + 0.5$]

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$y = x^{\frac{1}{4}},\ x = 81,\ y = 3$ तथा $\Delta x = 0.5$

$y = x^{\frac{1}{4}}$ से, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$

$\therefore dy = \frac{dy}{dx} \times \Delta x = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} \times \Delta x$

$= \frac{1}{4(81)^{\frac{3}{4}}} \times 0.5 = \frac{0.5}{4\times 27} = \frac{0.5}{108}$

$= 0.0046295$

$\therefore (81.5)^{\frac{1}{4}} = y + dy = 3 + 0.0046295$

$= 3.0046295 = 3.005$

n. माना $y = (4)^{\frac{3}{2}} = 8\ [\because 3.968 = 4 - 0.032]$

$\therefore y = x^{\frac{3}{2}},\ x = 4,\ y = 8$ तथा $\Delta x = -0.032$

$y = x^{\frac{3}{2}}$ से, $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$\therefore dy = \frac{dy}{dx} \times \Delta x = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \times \Delta x = \frac{3}{2}\sqrt{4} \times (-0.032)$

$= 3 \times (-0.32) = -0.096$

$\therefore (3.968)^{\frac{3}{2}} = y + dy = 8 + 0.096 = 7.904$

o. माना $y = (32)^{\frac{1}{5}} = 2\ [\because 32.15 = 32 + 0.15]$

$\therefore y = x^{\frac{1}{5}},\ x = 32,\ y = 2$ तथा $\Delta x = 0.15$

$y = x^{\frac{1}{5}}$ से, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}} = \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}$

$\therefore dy = \frac{dy}{dx} \times \Delta x = \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}} \times \Delta x = \frac{1}{5\times 16} \times 0.15 = \frac{0.15}{80}$

SHIVOM CLASSES 8696608541

$$= 0.001875$$

$$\therefore (32.15)^{\frac{1}{5}} = y + dy = 2 + 0.001875 = 2.001875 = 2.002$$

प्रश्न 2. f (2.01) का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए जहाँ f(x) = 4x + 5x + 2 है।

उत्तर- यदि $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$ हो, तब

$f(2) = 4(2)^2 + 5 \times 2 + 2 = 16 + 10 + 2 = 28$

$\Delta x = 0.01$

$\therefore f(x) = 8x + 5$

$df'(x) = f'(x) \times \Delta x = (x + 5)\ \Delta x$

$= (8 \times 2 + 5) \times 0.01$

$= 21 \times 0.01 = 0.21$

$\therefore f(2.01) = f(2) = df\ (x)$

$= 28 + 0.21 = 28.21$

प्रश्न 3. f(5.001) का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$ है।

उत्तर- $\because f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$

$\because f(5) = (5)^3 - 7(5)^2 + 15$ (x = 5 रखने पर)

$= 140 - 175 = -35$

$\Delta x = 0.001$

$\because f(x) = 3x^2 - 14x$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\because f(x) = f'(x) \times \Delta x$

$= (3x^2 - 14x) \times 0.001$

$= [3(5)^2 - 14 \times 5] \times 0.001$

$= (75 - 70) \times 0.001$

$= 5 \times 0.001 = 0.005$

$\therefore f(5.001) = f(5) + df(x)$

$= -35 + 0.005$

$= -34.995$

प्रश्न 4. xm भुजा वाले धन की भुजा में 1% वृद्धि के कारण घन के आयतन में होने वाला सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना घन का आयतन $V = x^3$

पुनः $dV = \frac{dV}{dx}.\Delta x \; (\because dx = \Delta x)$

$$= \frac{d}{dx}(x^3).\Delta x = 3x^2.(0.01)x = 0.03x^3 \left(\because \Delta x = \frac{x \times 1}{100} = 0.001x\right)$$

घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन 0.03 x^3 मी है।

प्रश्न 5. x मी भुजा वाले घन की भुजा में 1% ह्रास होने के कारण घन के पृष्ठ क्षेत्रफल में होने वाला सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

उत्तर- घन का पृष्ठ क्षेत्रफल $S = 6x^2$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\frac{dS}{dx} = 12x$

पुनः $dS = \frac{dS}{dx}.\Delta x\ (\because dx = \Delta x)$

$= 12x.\left(-\frac{1}{100}x\right)\left(\because \Delta x = -\frac{x}{100}\right)$

$= -0.12x^2$

प्रश्न 6. एक गोले की त्रिज्या 7 मी मापी जाती है जिसमें 0.02 मी की त्रुटि है। इसके आयतन के परिकलन में सन्निकट त्रुटि ज्ञात कीजिए।

उत्तर- ज्ञात है- गोले की त्रिज्या = 7 मी ।

Δr = त्रिज्या में अशुद्धि = 0.02 मी

V = गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi.3r^2$

गोले के आयतन परिकलन में सन्निकट त्रुटि $= \frac{dV}{dr} \times \Delta r$

$= 4\pi r^2 \times \Delta r = 4 \times \pi \times 49 \times 0.02$

$= 3.92\pi$ मी^{2}

प्रश्न 7. एक गोले की त्रिज्या 9 मी मापी जाती है जिसमें 0.03 सेमी० की त्रुटि है। इसके पृष्ठ क्षेत्रफल के परिकलन में सन्निकट त्रुटि ज्ञात कीजिए।

उत्तर- ज्ञात है- r = गोले की त्रिज्या = 9 मी

Δr = त्रिज्या में अशुद्धि = 0.03

S = गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

$\Rightarrow \frac{dS}{dr} = 8\pi r$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल के परिकलन में अन्निकट त्रुटि $= \frac{dS}{dr} \times \Delta r$

$= 8\pi r \times \Delta r$

$= 8\pi \times 9 \times 0.03 = 2.16\pi$ मी^{2}

प्रश्न 8. यदि $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$ हो तो $f(3.02)$ का सन्निकट मान है–

a. 47.66
b. 57.66
c. 67.66
d. 77.66

उत्तर-

d. 77.66

यदि $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$

$f(x) = 6x + 15$

$f(3) = 3 \times 9 + 15 \times 3 + 5$

$= 27 + 45 + 5 = 77$

$df(x) = f'(x) \times \Delta x = (6x + 5) \times \Delta x$

$= (6 \times 3 + 15) \times 0.02$ [$\because x = 3, \Delta x = 0.02$]

$= (18 + 15) \times 0.02$

$= 33 \times 0.02 = 0.66$

$\therefore f(3.02) = f(3) + df(3) = 77 + 0.66 = 77.66$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अतः विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 9. भुजा में 3% वृद्धि के कारण भुजा x के घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन है:

a. 0.06 x^3 मी^{3}
b. 0.6 x^3 मी^{3}
c. 0.09 x^3 मी^{3}
d. 0.9 x^3 मी^{3}

उत्तर-

c. 0.09 x^3 मी^{3}

चूँकि घन का आयतन V = x3 (∴ भुजा = x मी)

भुजा में वृद्धि, Δx = 3% = x का

$3\% = \frac{x \times 3}{100} = 0.03x$

अतः आयतन में वृद्धि $= \frac{dV}{dx} \times \Delta x$

= $3x^2 \times \Delta x = 3x^2 \times 0.03x$

= $0.09x^3$ मी^{2}

अतः विकल्प (C) सही है।

प्रश्नावली 6.5 (पृष्ठ संख्या 249-251)

प्रश्न 1. निम्नलिखित दिए गए फलनों के उच्चतम या निम्नतम मान, यदि कोई हो तो ज्ञात कीजिए

i. f (x) = $(2x - 1)^2 + 3$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

ii. $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$

iii. $f(x) = -(x - 1)^2 + 10$

iv. $g(x) = x^2 + 1$

उत्तर-

i. $f(x) = (2x - 1)^2 + 3$

$(2x - 1)^2$ का कम – से – कम मान = 0

$\therefore$ f(x) का निम्नतम मान = 3

ii. $f(x) = 9x^2 + 12x + 2 = 9x^2 + 12x + 4 - 2$

$= (3x + 2)^2 - 2$

$(3x + 2)^2$ का निम्नतम मान = 0

$\therefore$ f (x) का निम्नतम मान = – 2

iii. $f(x) = -(x - 1)^2 + 10$

$-(x - 1)^2$ का अधिकतम मान = 0

$\therefore$ f का उच्चतम मान = 10

iv. $g(x) = x^3 + 1$

$g'(x) = 3x^2$ जो $x \in R$ के लिए धनात्मक है।

$\therefore$ g एक वर्धमान फलन है; अतः इसका कोई न्यूनतम तथा अधिकतम मान नहीं है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित दिए गए फलनों के उच्चतम मान या निम्नतम मान, यदि कोई हो तो ज्ञात कीजिए

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

i. $f(x)\ |x + 2| - 1$

ii. $g(x) = -|x + 1| + 3$

iii. $h(x) = \sin(2x) + 5$

iv. $f(x) = |\sin 4x + 3|$

v. $h(x) = x + 1,\ x \in (-1, 1)$

उत्तर-

i. $f(x) = |x + 2| - 1$

$|x + 2|$ का न्यूनतम मान 0 है।

$\therefore$ f का निम्नतम मान = -1

अत: उच्चतम मान का अस्तित्व नहीं है।

ii. $g(x) = -|x + 1| + 3$

$-|x + 1|$ का अधिकतम मान = 0

$\therefore g(x) = -|x + 1| + 3$ का उच्चतम मान $0 + 3 = 3$

निम्नतम मान का अस्तित्व नहीं है।

iii. $h(x) = \sin(2x) + 5$

$\sin 2x$ का अधिकतम मान = 1

$\therefore h(x) = \sin 2x + 5$ का उच्चतम मान, $1 + 5 = 6$

$\sin 2x$ का न्यूनतम मान = -1

$\therefore h(x) = \sin 2x + 5$ का निम्नतम मान = $-1 + 5 = 4$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

iv. f (x) = |sin 4x + 3|

sin 4x का अधिकतम मान = 1

f(x) = |sin 4x + 3| का उच्चतम मान = |1 + 3| = 4

तथा sin 4x का निम्नतम मान = – 1

f (x) = |sin 4x + 3| का निम्नतम मान = |- 1 + 3| = 2

v. h (x) = x + 1 .

h'(x) = 1 = धनात्मक

h वर्धमान फलन है।

इसका कोई उच्चतम या निम्नतम मान नहीं है।

प्रश्न 3. निम्नलिखित फलनों के स्थानीय उच्चतम या निम्नतम, यदि कोई हो तो ज्ञात कीजिए तथा स्थानीय उच्चतम या स्थानीय निम्नतम मान,जैसी स्थिति हो, भी ज्ञात कीजिए।

i. f (x) = x2
ii. g (x) = x3 – 3x
iii. h(x) = sin x + cos x, o < x < $\frac{\pi}{2}$
iv. f (x) = sin x – cos x, 0 < x < 2π
v. f (x) = x3 – 6x2 + 9x + 15
vi. g (x) = $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}, x > 0$
vii. g (x) = $\frac{1}{x^2+2}$
viii. f (x) = $x\sqrt{1-x}, x > 0$

उत्तर-

i. f (x) = x^2

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$f'(x) = 2x$

यदि $f'(x) = 0$ तब $2x = 0$ या $x = 0$

$f'(x)$ जैसे ही $x = 0$ से होकर आगे बढ़ता है तो इसका चिह्न ऋणात्मक से धनात्मक में बदल जाता है।

$\therefore$ $x = 0$ पर f स्थानीय निम्नतम है।

स्थानीय निम्नतम मान = $f(0) = 0$

ii. $g(x) = x^3 - 3x$

$\therefore g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

यदि $g'(x) = 0$ तब $3x^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = -1$ पर $g'(x)$ का चित $- \; - = +$

$- \; + = -$

जैसे ही x, $x = -1$ से होकर आगे बढ़ता है, g' का चिह्न + ve से – ve में परिवर्तित होता है।

$\therefore$ $x = -1$ पर g उच्चतम है।

उच्चतम मान = $g(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$

$x = 1$ पर $g'(x)$ के चिह्न जैसे ही x, $x = 1$ से होकर आगे बढ़ता है,

$- \; + = -$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$+ \; + = +$

g’ (x), ऋणात्मक से धनात्मक में परिवर्तित हो जाता है।

x = 1 पर g निम्नतम है।

निम्नतम मान = g(1) = $1^3 - 3 = -2$

iii. दिया गया फलन $h(x) = \sin x + \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\therefore h'(x) = \cos x - \sin x = \cos x\,(1 - \tan x)$

$x = \frac{\pi}{4}$ पर x का मान $\frac{\pi}{4}$ से थोड़ा कम करने से tan x, 1 से कम होगा तथा x का मान $\frac{\pi}{4}$ से थोड़ा अधिक रखने पर tan x, 1 से ज्यादा होगा।

इस प्रकार 1 – tan x का चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक में परवर्तित होता हैं। cos x में चिन्ह में कोई परिवर्तन नहीं होता।

अतः $x = \frac{\pi}{4}$,h उच्चतम हैं।

स्थानीय उच्चतम मान $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

iv. दिया गया फलन $f(x) = \sin x - \cos x, 0 < x < 2$

$\therefore f'(x) = \cos + \sin x = \cos x(1 + \tan x)$

यदि $f'(x) = 0$, तब $1 + \tan x = 0 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

अब $f'(x) = \frac{d}{dx}(\cos x + \sin x) = -\sin x + \cos x$

SHIVOM CLASSES 8696608541

$x = \frac{3\pi}{4}$ पर $f'(x) = -\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}$

$= -\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ ऋणात्मक

$\therefore x = \frac{3\pi}{4}$ पर $f(x)$ उच्चतम हैं।

तथा $f(x)$ का उच्चतम मान

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

पुनः $x = \frac{\pi}{4}$ पर, $f'(x) = -\sin\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}$

$= -\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (धनात्मक)

$\therefore x = \frac{7\pi}{4}$ पर $f(x)$ में निम्नतम हैं।

तथा $f(x)$ का निम्नतम मान $= f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{7\pi}{4}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

v. दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$

$\Rightarrow x = 1$ या $x = 3$

$\therefore x$ निम्नतम या उच्चतम मान $x = 1$ या $x = 3$ पर हो सकता हैं।

$f'(x) = 3(2x - 4) = 6x - 12$

$x = 1$ पर, $f'(x) = 6 \times 1 - 12 = -6$ (ऋणात्मक)

$\therefore x = 1$ फलन का मान स्थानीय उच्चतम हैं।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

तथा उच्चतम मान $= f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 15$

$= 1 - 6 + 9 + 15 = 19$

$x = 3$ पर, $f' = 6 \times 3 - 12 = 6$ धनात्मक

$\therefore x = 3$ पर $f(x)$ स्थानीय निम्नतम हैं।

तथा निम्नतम मान $= f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 15$

$= 27 - 54 + 27 + 15 = 15$

vi. दिया गया फलन $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, x > 0$

$\therefore g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$

$g'(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \therefore x = -2, 2$

$\therefore$ क्रांतिक बिंदु -2, व 2 हैं, परन्तु $x > 0 \therefore$ क्रांतिक बिंदु = 2

अब $g'(x) = 0 - \frac{3\times2}{x^3} = \frac{6}{x^3}$

$x = 2$ पर, $g'(x) = \frac{6}{2^3} = \frac{3}{4}$ (धनात्मक)

$\therefore x = 2$ पर, $g(x)$ का मान निम्नतम हैं।

तथा निम्नतम मान $= g(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 2$

vii. दिया गया फलन $g(x) = \frac{1}{x^2+2}$ ... (i)

यदि $g'(x) = 0$, तब $-\frac{2x}{(x^2+2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0$ पर, $g'(x)$ का चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक में बदल रहा हैं।

$\therefore g$ स्थानीय उच्चतम हैं। $[x = 0, (1)$ में रखने पर$]$

$\therefore x = 0$ पर स्थानीय उच्चतम मान $= g(0) = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

viii. दिया गया फलन $f(x) = x\sqrt{1-x}, 0 < x < 1$ ... (i)

$$\therefore f'(x) = 1.\sqrt{1-x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1).x$$

$$= \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

यदि $f'(x) = 0$, तब $\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} = 0, \therefore x = \frac{2}{3}$

$x = \frac{2}{3}$ पर, चिन्ह परिवर्तित धनात्मक से ऋणात्मक होता हैं। जब x, $x = \frac{2}{3}$ से हो कर आगे बढ़ता हैं।

∴ बिंदु f पर स्थानीय उच्चतम हैं।

अतः स्थानीय उच्चतम मान $f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$\left[\text{समि० (1) से, } x = \frac{2}{3}, \text{(i) में रखने पर}\right]$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित फलनों का उच्चतम यो निम्नतम मान नहीं है

i. $f(x) = e^x$
ii. $g(x) = \log x$
iii. $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

उत्तर-

i. दिया गया फलन $f(x) = e^x$

∴ f'(x) = ex

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

f'(x), x ∈ R कभी भी शून्य के समान नहीं है।

अत: f का कोई उच्चतम या निम्नतम मान नहीं है। इति सिद्धम्

ii. दिया गया फलन $g(x) = \log x \quad \therefore g'(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow x \in R, g'(x)$ कभी भी शून्य के समान नहीं हैं। इति सिद्धम्

iii. दिया गया फलन $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$\therefore h'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

यदि $3x^2 + x + 1 = 0$, तो

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{-2}}{3}$ [जो काल्पनिक राशि हैं]

$x \in R$ के लिए, $h'(x) \neq 0$

अत: h कोई उच्चतम या निम्नतम मान नहीं हैं। इति सिद्धम्

प्रश्न 5. प्रदत्त अन्तरालों में निम्नलिखित फलनों के निरपेक्ष उच्चतम मान और निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

i. $f(x) = x^3, x \in [-2, 2]$
ii. $f(x) = \sin x + \cos x \; x \in [0, \pi]$
iii. $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2, x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right]$
iv. $f(x) = (x-1)^2 + 3, x \in [-3, 1]$

उत्तर-

i. $f(x) = x^3$, अन्तराल $[-2, 2]$

$\therefore (x) = 3x^2$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

यदि f’ (x) = 0, तब $3x^2 = 0 \therefore x = 0$

$f(-2) = (-2)^3 = -8$

$f(0) = (0)^3 = 0$

तथा $f(2) = (2)^3 = 8$

निरपेक्ष उच्चतम मान = 8

निरपेक्ष निम्नतम मान = – 8

ii. दिया गया फलन f (x) = sin x + cos x, अंतराल [0, π]

$\therefore f'(x) = \cos x - \sin x$

यदि $f'(x) = 0$

तब $\cos x - \sin x = 0 \therefore \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

x = 0 पर, $f(0) = \sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$

$x = \frac{\pi}{4}$ पर, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

x = π पर, $f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = 0 - 1 = -1$

$\therefore$ निरपेक्ष उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

तथा निरपेक्ष निम्नतम मान = -1

iii. दिया गया फलन $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2$, अंतराल $\left[-2, \frac{9}{2}\right]$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\therefore f'(x) = 4 - \frac{1}{2}.2x = 4 - x$

यदि $f'(x) = 0$, तब $4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$

$x = -2$ पर, $f(-2) = 4(-2) - \frac{1}{2}(-2)^2$

$= -8 - \frac{1}{2} \times 4 = -8 - 2 = -10$

$x = 4$ पर, $f(4) = 4(4) - \frac{(4)^2}{2} = 16 - \frac{16}{2} = 16 - 8 = 8$

$x = \frac{9}{2}$ पर, $f\left(\frac{9}{2}\right) = 4 \times \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{81}{2}$

$= 18 - \frac{81}{8} = \frac{144-81}{8} = \frac{63}{8} = 7.875$

∴ निरपेक्ष उच्चतम मान = 8

तथा निरपेक्ष निम्नतम मान = -10

iv. दिया गया फलन $f(x) = (x - 1)^2 + 3$, अंतराल [−3, 1]

$\therefore f'(x) = 2(x - 1)$

यदि $f'(x) = 0$, तब $2(x - 1) = 0, \ \Rightarrow x = 1$

$x = 1$ पर, $f(1) = (1 - 1)^2 + 3 = 0 + 3 = 3$

$x = -3$ पर, $f(-3) = (-3 - 1)^2 + 3 = 16 + 3 = 19$

∴ निरपेक्ष उच्चतम मान = 19

तथा निरपेक्ष निम्नतम मान = 3

प्रश्न 6. यदि लाभ फलन $P(x) = 41 - 72x - 18x^2$ से प्रदत्त है तो किसी कम्पनी द्वारा अर्जित उच्चतम लाभ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया गया फलन लाभ $P(x) = 41 - 72x - 18x^2$...(i)

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$p'(x) = -72 - 36x = -36(2+x)$$

$$p'(x) = -36$$

यदि $p'(x) = 0$, तब $-36(2+x) = 0 \Rightarrow 2 + x = 0 \therefore x = -2$

$$p'(x) = -ve$$

अतः $x = -2$ पर p(x) उच्चतम है।

$\therefore$ उच्चतम लाभ $= p(-2)$

[समी० (1) में $x = -2$ रखने पर]

$$= 41 - 72(-2)^2 - 18(-2)^2$$

$$= 41 + 144 - 72$$

$= 43$ इकाई

प्रश्न 7. अन्तराल [0, 3] पर $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$ के उच्चतम मान और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

माना $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 24x - 48$$

$$= 12[x^3 - 2x^2 + 2x - 4] = 12[x^2(x-2) + 2(x-2)]$$

$$= 12(x-2)(x^2+2)$$

यदि $f'(x) = 0$, तब $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x^2 + 2 = 0$ असंभव हैं।

अब हम $x = 2$ अंतराल $[0, 3]$ के अंत बिन्दुओ पर f का मान ज्ञात करते हैं।

$x = 0$ पर, $f(0) = 25$

$x = 2$ पर, $f(2) = 3(2)^4 - 8(3)^3 + 12(3)^2 - 48(3) + 25$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$= 3 \times 16 - 8 \times 8 + 12 \times 4 - 48 \times 2 + 25$$

$$= 48 - 64 + 48 - 96 + 25 = -39$$

$$\mathrm{x} = 3 \text{ पर, } f(3) = 3(3)^4 - 8(3)^3 + 12(3)^2 - 48(3) + 25$$

$$= 3 \times 81 - 8 \times 27 + 12 \times 9 - 48 \times 3 + 25$$

$$= 243 - 216 + 108 - 144 + 25 = 16$$

∴ निरपेक्ष उच्चतम मान = 25

तथा निरपेक्ष मान = -39

प्रश्न 8. अन्तराल [0, 2π] के किन बिन्दुओं पर फलन sin 2x अपना उच्चतम मान प्राप्त करता है।

उत्तर-

$$\text{माना } f(\mathrm{x}) = \sin 2\mathrm{x}, \text{ अन्तराल } [0, 2\pi]$$

$$f'(\mathrm{x}) = 2\cos 2\mathrm{x}$$

$$\text{यदि } f'(\mathrm{x}) = 0 \Rightarrow 2\cos 2\mathrm{x} = 0$$

$$\Rightarrow 2\mathrm{x} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{x} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

इसलिए हम $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{5}, \frac{7\pi}{2}$ और अंतराल [0, 2π] के बिंदु पर f मान ज्ञात करते हैं।

$$\mathrm{x} = 0 \text{ पर, } f(0) = \sin 0 = 0$$

$$\mathrm{x} = 2\pi \text{ पर, } f(2\pi) = \sin 2 \times 2\pi = \sin 4\pi = 0$$

$$\mathrm{x} = \frac{\pi}{4} \text{ पर, } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$x = 0$ पर, $f(0) = \sin 0 = 0$

$x = 2\pi$ पर, $f(2\pi) = \sin 2 \times 2\pi = \sin 4\pi = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$ पर, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

इस प्रकार फलन $fx = \frac{\pi}{4}$ तथा $x = \frac{5\pi}{4}$ पर अधिकतम मान = 1 प्राप्त करता हैं।

प्रश्न 9. फलन sin x + cos x का उच्चतम मान क्या है?

उत्तर- माना f(x) = sin x + cos x, अन्तराल [0, 2π]

f′(x) = cos x − sin x

उच्चतम व निम्नतम मान के लिए,

f′(x) = 0 ⇒ cos x − sin x = 0 ⇒ tanx = 1

$\therefore x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

f(x) = sin x + cos x में x के मान क्रमशः रखने पर,

$x = 0$ पर, $f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$

$x = 2\pi$ पर, $f(2\pi) = \sin 2\pi + \cos 2\pi = 1$

$x = \frac{\pi}{4}$ पर, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$x = \frac{5\pi}{4}$ पर, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

अतः $x = \frac{\pi}{4}$ पर उच्चतम मान $= \sqrt{2}$ हैं।

प्रश्न 10. अन्तराल [1,3] में $2x^3 - 24x + 107$ का महत्तम मान ज्ञात कीजिए।इसी फलन का अन्तराल [- 3, − 1]में भी महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उत्तर-

माना $f(x) = 2x^3 - 24x + 107$, अन्तराल $[1, 3]$

$f'(x) = 6x^2 - 24$

उच्चतम व निम्नतम मान के लिए, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 24 = 0$

$\Rightarrow 6x^2 = 24$

$\Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = \pm 2$

अन्तराल $[1, 3]$ के लिए $f(x) = 2x^3 - 24x + 107$ में x के मान रखने पर,

$x = 1$ पर, $f(1) = 2(1)^3 - 24(1) + 107 = 2 - 24 + 107 = 85$

$x = 3$ पर, $f(3) = 2(3)^3 - 24(3) + 107 = 54 - 72 + 107 = 89$

$x = 2$ पर, $f(2) = 2(2)^3 - 24(2) + 107 = 16 - 48 + 107 = 75$

इस प्रकार अधिकतम मान $f(x) = 89$,

x = 3 पर, अन्तराल [−3, −1] के लिए हम x = −3, −2, −1 पर f(x) का मान ज्ञात करते हैं।

$x = -3$ पर, $f(-3) = 2(-3)3 - 24(-3) + 107$

$= -54 + 72 + 107 = -54 + 179 = 125$

$x = -1$ पर, $f(-1) = 2(-1)^3 - 24(-1) + 107 = -2 + 24 + 107 = 129$

$x = -2$ पर, $f(-2) = 2(-2)^3 - 24(-2) + 107 = -16 + 48 + 107 = 139$

इस प्रकार अधिकतम मान $f(x) = 139, x = -2$ पर।

प्रश्न 11. यदि दिया है कि अन्तराल [0, 2] में x = 1 पर फलन $x^4 - 62x^3 + ax + 9$ उच्चतम मान प्राप्त करता है तो a का मान ज्ञात कीजिए।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

SHIVOM CLASSES 8696608541

उत्तर-

माना $f(x) = x^4 - 62x^2 + ax + 9$

$f'(x) = 4x^3 - 124x + a$

उच्चतम व निम्नतम मान के लिए, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 4x^3 - 124x + a = 0$

दिया है, $x = 1$ पर, f उच्चतम है

$\Rightarrow f(1) = 0$

$4x^3 - 124x + a = 0$ में $x = 1$ रखने पर

$4 \times 1 - 124 \times 1 + a = 0$

$\Rightarrow 4 - 124 + a = 0$

$\Rightarrow -120 + a = 0$

$a = 120$

इसलिए a का मान 120 है।

प्रश्न 12. [0, 2π] पर x + sin 2x का उच्चतम और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

माना $f(x) = x + \sin 2x$

$f'(x) = 1 + 2\cos 2x$

उच्चतम व निम्नतम मान के लिए, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 1 + 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\Rightarrow 2x = \frac{2\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

इसलिए हम $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ और अंतराल [0, 2π] के अंत बिंदु पर f(x) का मान ज्ञात करते हैं।

$x = 0$ पर, $f(0) = 0 + \sin 0 = 0$

$x = 2\pi$ पर, $f(2\pi) = 2\pi + \sin 4\pi = 2\pi$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + \sin\frac{8\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sin\frac{10\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore f(x)$ उच्चतम मान $= 2\pi$ तथा $f(x)$ का निम्नतम मान $= 0$

प्रश्न 13. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 24 है और जिनका गुणनफल उच्चतम हो।

उत्तर- माना पहली संख्या = x तब दूसरी संख्या = 24 − x है।

प्रश्नानुसार, उनका गुणनफल $p = x(24 - x) = 24x - x^2$...(i)

उच्चतम व निम्नतम मान के लिए, $\frac{dp}{dx} = 0$

समी० (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dp}{dx} = 24 - 2x$$

$\Rightarrow 0 = 24 - 2x$

SHIVOM CLASSES 8696608541

$\Rightarrow 2x = 24$

$\therefore x = 12$

पुनः समी० (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{d^2p}{dx^2} = -2$ (ऋणात्मक मान)

$\Rightarrow$ p, x = 12 के लिए उच्चतम हैं।

अतः संख्याएँ 12, 12 हैं।

प्रश्न 14. ऐसी दो धन संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए ताकि $x + y = 60$ और xy^3 उच्चतम हो।

उत्तर- दिया है,

$$x + y = 60$$

$$x = 60 - y \ldots (i)$$

$$\text{माना } xy^3 = P \ldots (ii)$$

समीकरण (1) से x का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$(60 - y)y^3 = p$

$\Rightarrow p = 60y^3 - y^4$

दोनों पक्षों का y के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dp}{dx} = 180y^2 - 4y^3 = 4y^2(45 - y) \ldots (iii)$$

उच्चतम व निम्नतम मान के लिए, $\frac{dp}{dx} = 0$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\therefore 4y^2(45 - y) = 0$

$\Rightarrow y = 45, y \neq 0$

समीकरण (iii) का पुनः y के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2p}{dy^2} = 360y - 12y^2 = 12y(30 - y)$$

y = 45 रखने पर,

$$\frac{d^2p}{dy^2} = 12 \times 45(30 - 45) = 540 \times (-15) = -8100 = \text{ऋणात्मक मान}$$

∴ y = 45 पर p उच्चतम हैं। यदि y = 45 तब -(1) से x = 15

अतः x = 15,y = 45 के लिए, $p = xy^2$ उच्चतम हैं।

प्रश्न 15. ऐसी दो धन संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए जिनका योग 35 हो और गुणनफल x^2y^5 उच्चतम हो।

उत्तर- दो धन संख्याएँ x, y हैं।

दिया है, x + y = 35

⇒ y = 35 − x...(i)

प्रश्नानुसार, माना गुणनफल $p = x^2y^5$...(ii)

समीकरण (1) से y का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$p = x^2(35 - x)5$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\frac{dp}{dx} = x^2.5(35-x)^4(-1)+(35-x)^5.2x$$

$$= x(35-x)^4[-5x+2(35-x)]$$

$$= x(35-x)^4[-5x+70-2x)]$$

$$= x(35-x)^4(70-7x)$$

उच्चतम व निम्नतम मान के लिए, $\frac{dp}{dx} = 0$

⇒ x(35 – x0⁴(70 – 7x) = 0

∴ x = 0, 10, 35

केवल 10 स्वीकृत मान हैं तथा x = 0, 35 अस्वीकृत कर दिए जाते हैं।

∵ x + y = 35

x = 10 रखने पर,

जब x, 10 के निकट और 10 की बाईं ओर हो तो

$$\frac{dp}{dx} = (+)(+)(+) = (+)\text{ve}$$ (धनात्मक)

इस प्रकार x, 10 से होता हुआ आगे बढ़ता हैं $\frac{dp}{dx}$, धनात्मक से ऋणात्मक को परिवर्तित होता हैं।

⇒ x = 10 पर p उच्चतम हैं।

∴ y = 35 – 10 = 25

अतः अभीष्ट संख्याएँ 10 और 25 हैं।

प्रश्न 16. ऐसी दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 16 हो और जिनके घनों का योग निम्नतम हो।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उत्तर- माना, दो संख्याएँ x और y हैं।

प्रश्नानुसार, $x + y = 16 \Rightarrow y = 16 - x$ ...(i)

घनो का योग $p = x^3 + y^3$

$\Rightarrow p = x^3 + (16 - x)^3$ [समीकरण (i) से मान रखने पर]

इसलिए, $p'(x) = 3x^3 - 3(16 - x)^2$

$= 3x^3 - 3(256 + x^2 - 32x) = 96x - 768$ हैं।

अब, $p'(x) = 0 \Rightarrow 96x - 768 = 0 \Rightarrow x = 8$ इसलिए, $p''(x)=96$

$x = 8$ के लिए, $p''(8) = 96 > 0$

यहाँ, $p''(8) > 0$ हैं,इसलिए द्वितीय अवकलन परिक्षण द्वारा, $x = 8$ स्थानीय निम्नराम बिंदु हैं।

समीकरण (1) से, $y = 16 - 8 = 8$

अतः, संख्याएँ x और y के मान क्रमशः 8 और 8 हैं।

प्रश्न 17. 18 सेमी भुजा के टिन के किसी वर्गाकार टुकड़े से प्रत्येक कोने पर एक वर्ग काटकर तथा इस प्रकार बने टिन के फलकों को मोड़कर ढक्कन रहित एक सन्दूक बनाना है। काटे जाने वाले वर्ग की भुजा कितनी होगी जिससे सन्दूक का आयतन उच्चतम होगा?

उत्तर- माना वर्ग की प्रत्येक भुजा x सेमी काटी गई है।

∴ सन्दूक के लिए,

लम्बाई $= 18 - 2x$

चौड़ाई $= 18 - 2x$

ऊँचाई $= x$

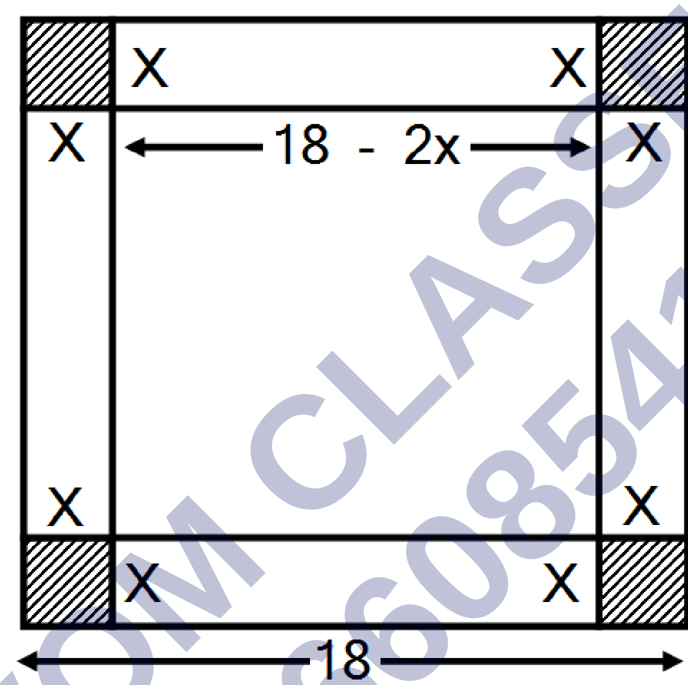
SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

आयतन V = ल० × चौ० × ऊँ०

= x(18 − 2x) (18 − 2x)

= x(18 − 2x)x²...(i)

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,



$$\frac{dV}{dx} = x.2(18 - 2x)(-2) + (18 - 2x)^2.1$$

$$= (18 - 2x)(-4x + 18 - 2x) = (18 - 2x)(18 - 6x)$$

उच्चतम व निम्नतम मान के लिए, $\frac{dV}{dx} = 0$

⇒ (18 − 2x) (18 − 6x) = 0

⇒ 18 − 2x = 0

⇒ 2x = 18

⇒ x = 9

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

तथा $18 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{18}{6} = 3$

∴ x = 3,9

परन्तु x = 9 सेमी सम्भव नहीं हैं।

सम० (ii) का पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2p}{dx^2} = (18 - 2x)(-6) = 18 - 6x)(-2)$$

$$x = 3 \text{ पर, } \frac{d^2V}{dx^2} = (18 - 2 \times 3)(-6) + (18 - 6 \times 3)(-2)$$

$$= (18 - 6)(-6) + (18 - 18)(-2)$$

$$= 12 \times (-6) + 0$$

$$= -72 < 0, -\text{ve}$$

∴ x = 3 पर आयतन अधिकतम होगा अर्थात् वर्ग की भुजा प्रत्येक कोने से 3 सेमी कटी गई हैं तो आयतन उच्चतम होगा।

प्रश्न 18. 45 सेमी लम्बी और 24 सेमी चौड़ी आयताकार लोहे की एक चादर के चारों कोनों से समान भुजा का एक वर्गाकार निकालने के पश्चात् खुला हुआ एक सन्दुक बनाया जाता है। वर्गों की भुजा की माप ज्ञात कीजिये जिसके काटने पर बने सन्दूक का आयतन महत्तम होगा।

उत्तर- माना अभीष्ट वर्ग की भुजा x है तब ।।

सन्दूक की लम्बाई = (45 – 2x)

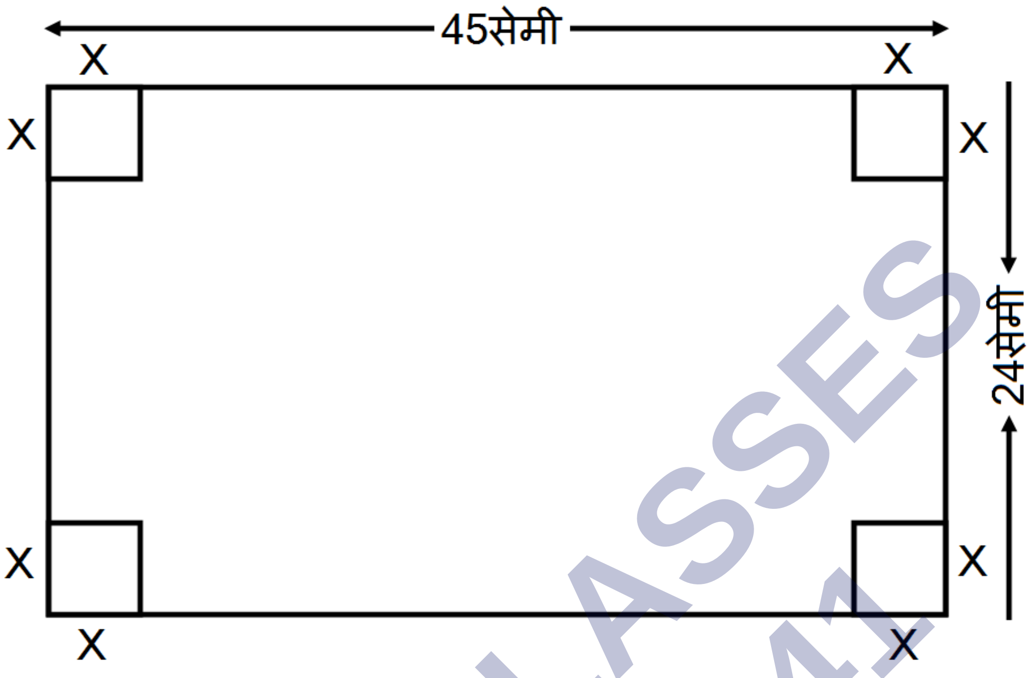
तथा सन्दूक की चौड़ाई = (24 – 2x)

सन्दूक की ऊँचाई = x

∴ सन्दूक का आयतन

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

V = (45 – 2x) (24 – 2x)x



$$= (4x^3 - 138x^2 + 1080x) \ldots (i)$$

(1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 276x + 1080 \ldots (ii)$$

V के महत्तम मान के लिए, $\frac{dV}{dx} = 0$

या $12x^2 - 276x + 1080 = 0$ या $x\,\hat{}\,2 - 23x + 90 = 0$

या $x^2 - 18x - 5x + 90 = 0$ या $x(x - 18) - 5(x - 18) = 0$

या $(x - 18)(x - 5) = 0 \therefore x, 18$

(2) का x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर, $\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 276$

$x = 5$ पर, $\frac{d^2V}{dx^2} = 24 \times 5 - 276 =$ (ऋणात्मक)

∴ x = 5 पर V का मान महत्तम होगा।

SHIVOM CLASSES 8696608541

∴ वर्ग की भुजा 5 सेमी होगी।

प्रश्न 19. सिद्ध कीजिए कि एक दिए वृत्त के अन्तर्गत सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चतम होता है।

उत्तर- माना a त्रिज्या के वृत्त के अन्तर्गत आयत की लम्बाई x तथा चौड़ाई y है।

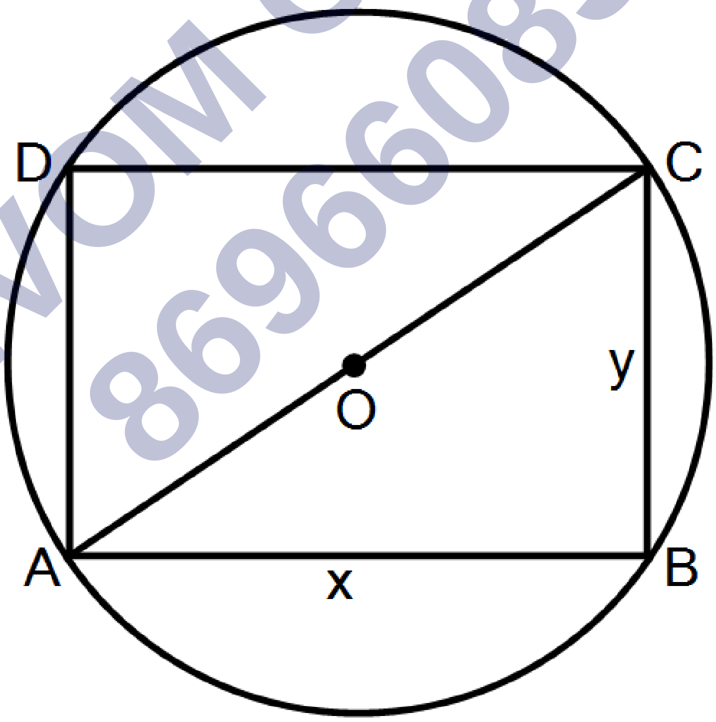
चित्र ABC में,

AC = व्यास = a

$$\therefore x^2 + y^2 = (2a)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4a^2 \Rightarrow y = \sqrt{4a^2 - x^2} \ldots (i)$$

$$\therefore \text{आयतन का क्षेत्रफल} = xy \ldots (ii)$$



समीकरण (1) से y का मान (2) में रखने पर,

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

माना क्षेत्रफल $A = x\sqrt{4x^2 - x}$

$\therefore \frac{dA}{dx} = x. \frac{-2x}{2\sqrt{4a^2 - x^2}} + 1.\sqrt{4a^2 - x^2}$

$= \frac{-x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}} + \sqrt{4a^2 - x^2}$

$= \frac{-x^2 + 4a^2 - x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}} = \frac{4a^2 - 2x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$

क्षेत्रफल के उच्चतम व निम्नतम मान के लिए, $\frac{dA}{dx} = 0$

$\Rightarrow 4a^2 - 2x^2 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 = 4a^2$

$\Rightarrow x^2 = 2a^2$

$\therefore x = \sqrt{2}\,a$

x^2 का मान (1) में रखने पर,

$y = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = \sqrt{2a^2}$

$\therefore y = \sqrt{2}\,a$

$\frac{dA}{dx} = \frac{2(\sqrt{2}a - x)(\sqrt{2}a + x)}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$

जब x बिंदु $x = \sqrt{2a}$ से होकर जाता हैं तो $\frac{dA}{dx}$ का चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक में बदल जाता हैं।

अतः आयत का क्षेत्रफल उच्चतम होगा, जब $x = \sqrt{2a}$ और $y = \sqrt{2a}$ होगा।

अर्थात आयत वर्ग होगा। इति सिद्धम्

SHIVOM CLASSES 8696608541

प्रश्न 20. सिद्ध कीजिए कि दिए हुए सम्पूर्ण पृष्ठ और महत्तम आयतन के लम्बवृत्तीय बेलन की ऊँचाई, उसके आधार के व्यास के बराबर है।

उत्तर- माना बेलन की ऊँचाई h तथा आधार की त्रिज्या r है।

पुनः माना बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ S और आयतन V है, तब

$$\mathrm{S} = 2\pi \mathrm{r}^2 + 2\pi \mathrm{rh} \ldots (\mathrm{i})\ \mathrm{V} = \pi \mathrm{r}^2 \mathrm{h} \ldots (\mathrm{i})$$

(i) से, $\mathrm{h} = \frac{(\mathrm{S}-2\pi \mathrm{r}^2)}{2\pi \mathrm{r}^2}$, (ii) में रखने पर,

$$\mathrm{V} = \pi \mathrm{r}^2 \left[\frac{(\mathrm{S}-2\pi \mathrm{r}^2)}{2\pi \mathrm{r}^2}\right] = \frac{1}{2}.\mathrm{r}.\mathrm{S} - \pi \mathrm{r}^3 \ldots (\mathrm{iii})$$

r के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dV}{dr} = \frac{1}{2}S - 3\pi r^2 \ldots (iv)$

V के महत्तम अथवा निम्नतम मान के लिए, $\frac{dV}{dr} = 0$

या $\frac{1}{2}\mathrm{S} - 3\pi \mathrm{r}^2 = 0$ अर्थात् $\mathrm{S} = 6\pi \mathrm{r}^2$ अर्थात् $\mathrm{r} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{S}}{6\pi}\right)}$

(iv) का r के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{d^2V}{dr^2} = -6\pi r$(∵ अचर हैं)

$\mathrm{r} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{S}}{6\pi}\right)}$ पर, $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{V}}{\mathrm{dr}^2} = -6\pi\sqrt{\left(\frac{\mathrm{S}}{6\pi}\right)} = -\sqrt{(6\pi \mathrm{S})}$ (ऋणात्मक)

$\therefore r = \sqrt{\left(\frac{S}{6\pi}\right)}$ पर आयतन उच्चिष्ठ होगा।

अब $S = 6\pi r^2$ का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$6\pi r^2 = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ या $4\pi r^2 = 2\pi rh$

या $h = 2r$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अतः बेलन का आयतन ,महत्तम होगा, यदि बेलन की ऊँचाई आधार के व्यास के बराबर होगी।

प्रश्न 21. 100 सेमी^{3} आयतन वाले डिब्बे सभी बेलनाकार (लम्ब वृत्तीय) डिब्बों में से न्यूनतम पृष्ठ क्षेत्रफल वाले डिब्बे की विमाएँ ज़ात कीजिए।

उत्तर- माना बेलनाकार डिब्बों की त्रिज्या r और ऊँचाई h है।

आयतन = $\pi r^2 h$100 सेमी^{3}

$$\therefore h = \frac{100}{\pi r^2} \quad \ldots (i)$$

डिब्बों का कुल वृत्तीय क्षेत्रफल, S = $2\pi rh + 2\pi r^2$

$$= 2\pi r \times \frac{100}{\pi r^2} + 2\pi r^2 \left[\because h = \frac{100}{\pi r^2} \text{ रखने पर}\right]$$

$$= \frac{200}{r} + 2\pi r^2$$

दोनों पक्षों का r के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\therefore \frac{dS}{dr} = -\frac{200}{r^2} + 4\pi r = \frac{-200 + 4\pi r^3}{r^2}$$

उच्चतम व निम्नतम मान के लिए, $\frac{dS}{dr} = 0$

$$\frac{-200 + 4\pi r^2}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 - 200 = 0 \Rightarrow \pi r^3 = 50$$

$$\therefore r = \left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

समी० (2) का पुनः r के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2S}{dr^2} = \frac{400}{r^3} + 4\pi = +ve \; [\because r > 0]$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

जब $r=\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ तथा $h=2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ हैं तो S न्यूनतम होगा।

अतः कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम होगा।

प्रश्न 22. 28 मीटर लम्बे तार के दो टुकड़े करके एक को वर्ग तथा दूसरे को वृत्त के रूप में मोड़ा जाता है। दोनों टुकड़ों की लम्बाई ज्ञात कीजिए यदि उनसे बनी आकृतियों को संयुक्त क्षेत्रफल न्यूनतम है।

उत्तर- तार की लम्बाई l = 28 मी

माना वर्ग की भुजा x तथा वृत्त की त्रिज्या r है, तब

l = वर्ग का परिमाप + वृत्त की परिधि = 4x + 2πr = 28...(i)

माना संयुक्त क्षेत्रफल A है।

A = वर्ग की क्षेत्रफल + वृत्त का क्षेत्रफल = $x^2 + \pi r^2$

$$=x^2\pi\left(\frac{80-4x}{2\pi}\right)\left[\because \text{(i) से } r=\frac{28-4x}{2\pi}\right]$$

$$\text{या } A=\frac{\left[4\pi x^2+(28^2-8x\times 28+16x^2)\right]}{4\pi}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(8\pi x-224+32x)}{4\pi}=\frac{(2\pi x-56+8x)}{\pi}$$

$$\text{तथा } \frac{d^2A}{dx^2}=\frac{(2\pi+8)}{\pi} \text{ (धनात्मक) ...(ii)}$$

$$\text{अब } \frac{dA}{dx}=0 \text{ रखने पर, } 2\pi x-56+8x=0 \Rightarrow x=\frac{28}{\pi+4}$$

$$\therefore x=\frac{28}{\frac{22}{7}+4}=\frac{28\times 7}{50}=\frac{98}{25} \text{ के लिए A निम्निष्ठि हैं।}$$

$$\therefore \text{पहले टुकड़े की लम्बाई}=4x=4\times\frac{98}{25}=\frac{392}{25} \text{ मी}$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

तथा (1) से दूसरे टुकड़े की लम्बाई $= 2\pi x = 28 - 4x$

$= 28 - \frac{392}{25} = \frac{70-392}{25} = \frac{308}{25}$ मी

अतः टुकड़े की लम्बाई क्रमशः $\frac{392}{25}$ मी तथा $\frac{308}{25}$ मी हैं।

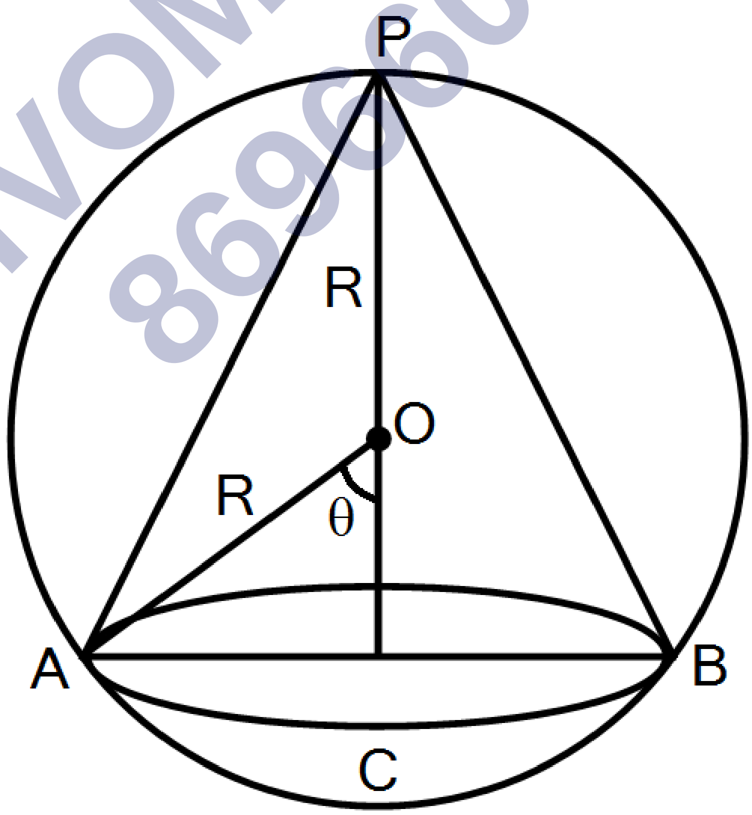
प्रश्न 23. सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अन्तर्गत विशालतम शंकु का आयतन गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है।

उत्तर- माना V, AB गोले के अन्तर्गत विशालतम शंकु का आयतन है। स्पष्टतया अधिकतम आयतन के लिए शंकु का अक्ष

गोले की ऊँचाई के साथ होना चाहिए।

माना $\angle AOC = \theta$,

$\therefore$ AC, शंकु के आधार की त्रिज्या = $R \sin \theta$, जहाँ R गोले की त्रिज्या है।



SHIVOM CLASSES 8696608541

शंकु की ऊँचाई $PC = PO + OC = R + R\cos\theta$

शंकु का आयतन, $V = \frac{1}{3}\pi(AC)^2 \times (PC)$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 \sin^2\theta(R + R\cos\theta)$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^3 \sin^2\theta(1 + \cos\theta)$$

दोनों पक्षों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\therefore \frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{3}\pi R^3\left[\sin^2\theta(-\sin\theta) + (1+\cos\theta).2\sin\theta\cos\theta\right]$$

$$\left[\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^3[-\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta(1-\sin^2\theta)]$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2[-sin^3\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta - 2\sin^3\theta]$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^3[-3\sin^3\theta + 2\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta] \ldots (i)$$

न्यूनतम व अधिकतम के लिए, $\frac{dV}{d\theta} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi R^3(-3\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta) = 0$$

$$\Rightarrow -3\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta(-3\sin^2\theta + 2\cos + 2) = 0$$

$$\Rightarrow -3\sin^2\theta + 2\cos\theta + 2 = 0, \ [\because \sin\theta \neq 0]$$

$$\Rightarrow -3(1-\cos^2\theta) + 2\cos + 2 = 0$$

$$\Rightarrow -3 + 3\cos^2\theta + 2\cos\theta + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (3\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \cos\theta = -1$

परन्तु $\cos\theta \neq -1$ क्योंकि $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$ जो संभव नहीं हैं।

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{3}$

जब $\cos\theta = \frac{1}{3}$, तब $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

समी० (1) का पुनः θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{1}{3}\pi R^3[-9\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos\theta - 2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta]$$

$\cos\theta = \frac{1}{3}$ और $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ रखने पर, $\frac{d^2V}{d\theta^2} = -ve$

तब $\cos\theta = \frac{1}{3}$ हैं तो V अधिकतम हैं।

$\cos\theta$ के इस मान के लिए शंकु की ऊँचाई

$$PC = R + R\cos\theta = R + R \times \frac{1}{3} = \frac{4R}{3}$$

शंकु की त्रिज्या $= AC = R\sin\theta = R \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$

$\therefore$ शंकु का अधिकतम आयतन V

$$= \frac{1}{3}\pi(AC)^2(PC) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{2}R}{3}\right)^2\left(\frac{4R}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times \frac{8}{9}R^2 \times \frac{4R}{3} = \frac{8}{27}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$= \frac{8}{27} \times$ गोले का आयतन इति सिद्धम्

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रश्न 24. दर्शाइये कि एक निश्चित आयतन के शंक्वाकार डेरे के बनाने में कम-से-कम कपड़ा लगेगा जब उसकी ऊँचाई आधार की त्रिज्या के $\sqrt{2}$ गुना होगी।

उत्तर- माना शंकु की ऊँचाई h, त्रिज्या r तथा तिरछी ऊँचाई है-

$\therefore$ शंकु का आयतन $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \ldots (i)$

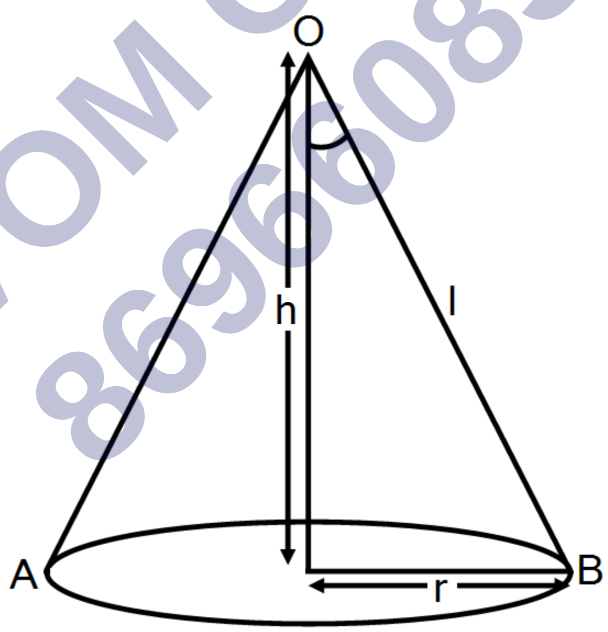
तथा वक्र पृष्ठ $S = \pi r l$

$= \pi r \times \sqrt{h^2 + r^2}$

$\because l = \sqrt{h^2 + r^2}$

दोनो ओर वर्ग करने पर, $S^2 = \pi^2 r^2 (h^2 + r^2)$

$= \pi^2 r^2 \left(\frac{9V}{\pi^2 r^4} + r^2\right)$



(i) से h का मान रखें पर,

या $S^2 = \frac{9V^2}{r^2} + \pi^2 r^4$

(ii) के दोनों पक्षों का r के सापेक्ष अवकलन करने पर,

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\frac{dS^2}{dr} = -\frac{18V^2}{r^3} + 4\pi^2 r^3 \ldots (i)$$

अब यदि S^2 निम्निष्ठ होगा तो S भी निम्निष्ठ होगा।

$\therefore S^2$ के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान के लिए, $\frac{dS^2}{dr} = 0$

या $\frac{-18V^2}{r^2} + 4\pi^2 r^2 = 0$ या $V^2 = \frac{2\pi^2 r^6}{9} \ldots (iii)$

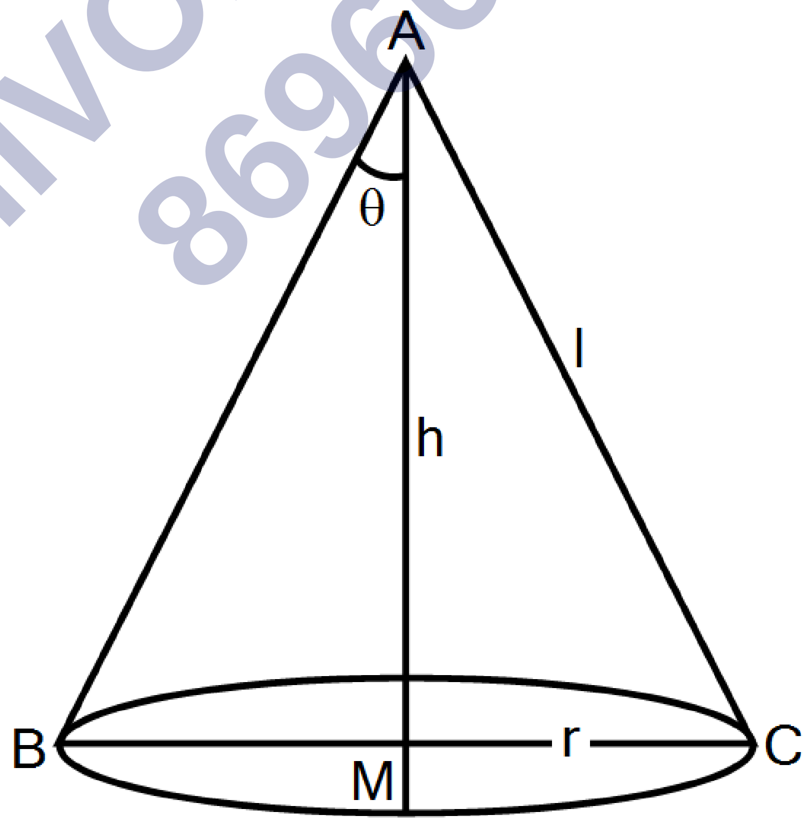
प्रश्न 25. सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्द्ध शीर्ष कोण $\tan - 1\sqrt{2}$ होता है।

उत्तर- माना शंकु की त्रिज्या = r, अर्द्धशीर्ष $\angle BAM = \theta$

ऊँचाई = h; तिर्यक ऊँचाई = l

ऊर्ध्वाधर ऊँचाई, $h = AM = l \cos \theta$

शंकु की त्रिज्या, $r = MC = l \sin \theta$



SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

शंकु का आयतन, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$V = \frac{1}{3}\pi(1\sin\theta)^2(l\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{3}\pi l^3 \sin^2\theta\cos\theta$$

दोनों पक्षों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$V = \frac{1}{3}\pi l^3[2\sin\theta\cos\theta\times\cos\theta + \sin^2\theta(-\sin\theta)]$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{3}\pi l^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta.\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{3}\pi l^3\sin\theta(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

निम्नतम व उच्चतम आयतन के लिए, $\frac{dV}{d\theta} = 0$

$$\Rightarrow \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\therefore \tan\theta = \sqrt{2},$$

$$\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$$

परन्तु $\theta = 0$ सम्भव नहीं हैं। इस प्रकार $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$

$\frac{dV}{d\theta}$ का चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक में बदल जाता हैं, जब θ का मान $\tan^{-1}\sqrt{2}$ से होकर जाता हैं।

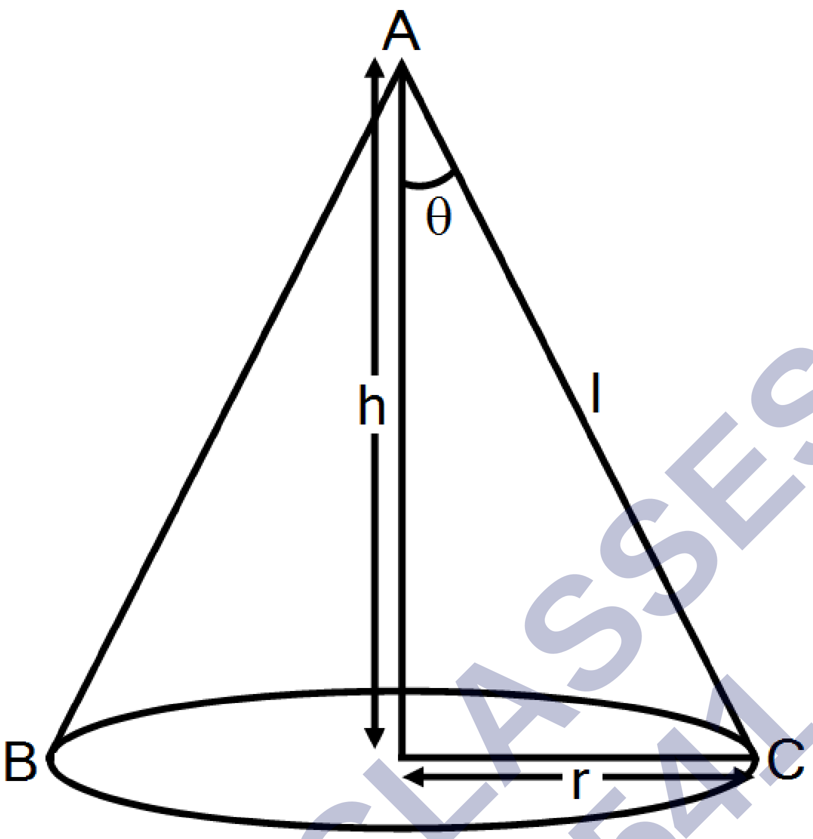
V अधिकतम हैं यदि $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$ अर्थात् जब अर्द्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ हैं तो V अधितम हैं। इति सिद्धम्

प्रश्न 26. सिद्ध कीजिए कि दिए हुए पृष्ठ और महत्त्म आयतन वाले लम्बवृत्तीय शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होता है।

उत्तर- माना शंकु की त्रिज्या r, तिरछी ऊँचाई l सम्पूर्ण पृष्ठ S तथा आयतन V है।

सम्पूर्ण पृष्ठ $S = \pi r(r + l)$ या $\pi rl = S - \pi r^2$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)



या $l = \frac{S - \pi r^2}{\pi r} = \frac{S}{\pi r} - r \ldots (i)$

तथा आयतन $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

या $V^2 = \frac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2 = \frac{1}{9}\pi^2 r^4 (l^2 - r^2)$

$[\because \triangle OAC$ से, $h^2 = l^2 r^2]$

या $V^2 = \frac{\pi^2 r^4}{9}\left[\left(\frac{S}{\pi r} - r\right)^2 - r^2\right]$ (l का मान रखने पर)

$= \frac{\pi^2 r^2}{9}\left[\frac{S^2}{\pi^2 r^2} - \frac{-2S}{\pi + r^2} - r^2\right] = \frac{\pi^2}{9}\left[\frac{S^2 r^2}{\pi^2} - \frac{2Sr^4}{\pi}\right]$

$\therefore V^2 = \frac{S^2 r^2}{9} - \frac{2\pi S r^4}{9} = u$ (माना) ...(ii)

(ii) का r के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{du}{dr} = \frac{S^2}{9} \times 2r - \frac{2}{9}\pi S \times 4r^3 \ldots (iii)$

u अर्थात् V^2 के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान के लिए, $\frac{du}{dr} = 0$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अर्थात् $\frac{S^2}{9} \times 2r - \frac{2}{9}\pi \times S \times 4r^3 = 0$

या $\frac{2Sr}{9}[S - 4\pi r^2] = 0$

$\therefore S = 4\pi r^2$

या $\pi r(l + r) = 4\pi r^2$ या $l + r = 4r$

या $l = 3r$ या $r = \frac{l}{3}$

(3) का r के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{2S^2}{9}\,\frac{8}{9}\pi S \times 3r^2$

$S = 4\pi r^2$ पर, $\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{2(4\pi r^2)^2}{9} - \frac{8}{9}\pi \times 4\pi r^2 \times 3r^2$

$= \frac{32\pi^2 r^4}{9} - \frac{9\pi^2 r^4}{9} = -\frac{64\pi^2 r^4}{9}$ (ऋणात्मक)

$\therefore r = \frac{l}{3}$ पर, u उच्चिष्ठ होगा, अर्थात् शंकु का आयतन V उच्चिष्ठ होगा।

परन्तु जब $r = \frac{l}{3}$

तब यदि शंकु का अर्द्ध-शीर्ष कोण θ हैं, तो

$\sin\theta = \frac{r}{l} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$ या $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

अतः शंकु का आयतन महत्तम होगा यदि अर्द्ध-शीर्ष कोण $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होगा।

प्रश्न 27. वक्र $x^2 = 2y$ पर (0, 5) से न्यूनतम दूरी पर स्थित बिन्दु है

i. $(2\sqrt{2}, 4)$
ii. $(2\sqrt{2}, 0)$
iii. (0, 0)
iv. (2, 2)

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उत्तर-

i. $(2\sqrt{2}, 4)$

हल-

मना वक्र $x^2 = 2y$ पर कोई बिन्दु P(x, y) है।

दिया हुआ बिन्दु A(0, 5) है।

$$PA^2 = (x - 0)^2 + (y - 5)^2 = z \text{ (माना)}$$

$$Z = x^2 + (y - 5)^2 \ldots (i)$$

$$\text{तथा वक्र } x^2 = 2y \ldots (ii)$$

x^2 का मान समी० (1) में रखने पर,

$$Z = 2y + (y - 5)^2 = 2y + y^2 + 25 - 10y = y^2 + 25 - 8y$$

दोनों पक्षों का y के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dZ}{dy} = 2y - 8$

उच्चतम व निम्नतम मान के लिए, $\frac{dZ}{dy} = 0$

$\Rightarrow 2y - 8 = 0$

$\therefore y = 4$

समी० (ii) से, $x^2 = 2 \times 4 = 8$

$\therefore x = 2\sqrt{2}$

दोनों पक्षों का पुनः y के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{d^2Z}{dy^2} = 2 = +ve$

$x = 2\sqrt{2}, y = 4$ पर Z निम्नतम हैं।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रश्न 28. x के सभी वास्तविक मानों के लिए $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ का न्यूनतम मान है–

a. 0

b. 1

c. 3

d. $\frac{1}{3}$

उत्तर-

d. $\frac{1}{3}$

हल-

माना $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-1+2x)(1+x+x^2)-(1-x+x^2)(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$$

$$= \frac{(-1-x-x^2)+(2x+2x^2+2x^3)-(1-x+x^2+2x-2x^2+2x^3)}{(1+x+x^2)^2}$$

$$= \frac{-1-x-x^2+2x+2x^2+2x^3-1+x-x^2-2x+2x^2-2x^3}{(1+x+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2+2x^2}{(1+x+x^2)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{2(x-1)(x+1)}{(1+x+x^2)^2}$$

उच्चतम व निम्नतम मान क लिए, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{2(x-1))x+1)}{(1+x+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = 1, -1$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

$x = 1$ पर $\frac{dy}{dx}$ का चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक में परिवर्तित होता हैं जब बिंदु $x = 1$ से होकर आगे बढ़ता हैं।

$\therefore$ y बिंदु $x = 1$ पर मान निम्नतम हैं।

निम्नतम मान, $f(1) = \frac{1-1+1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$

प्रश्न 29. $[x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}, 0 \leq x \leq 1$ का उच्चतम मान है:

a. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$
b. $\frac{1}{2}$
c. 1
d. 0

उत्तर-

c. 1

हल-

माना $y = [x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}[x(x-1)+1]^{\frac{-2}{3}} \frac{d}{dx}[x(x-1)+1]$$

$$= \frac{1}{3}[x(x-1)+1]^{\frac{-2}{3}} \times (2x-1)$$

$$= \frac{2x-1}{3[x(x-10+1]^{\frac{2}{3}}}$$

उच्चतम व निम्नतम मान के लिए, $\frac{dy}{dx} = 0$

SHIVOM CLASSES 8696608541

$\Rightarrow 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

अब बिंदु $x = \frac{1}{2}$ और अंतराल [0, 1] के अंत बिन्दुओ पर f का मान ज्ञात करते हैं

$$x = 0 \text{ पर, } f(0) = 1^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$x = 1 \text{ पर, } f(1) = 1^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ पर, } f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \times 1\right]^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$\frac{dy}{dx}, x = \frac{1}{2}$ पर चिन्ह -ve से +ve मेँ परिवर्तित हो रहा हैं।

$\therefore x = \frac{1}{2}$ पर y निम्नतम हैं।

उच्चतम मान = 1

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 259-261)

प्रश्न 1. अवकलज का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का सन्निकट मान ज्ञात कीजिये:

i. $\left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$

ii. $(33)^{-\frac{1}{5}}$

उत्तर-

i.

माना $y = x^{\frac{1}{4}}$

माना $x = \frac{16}{81}$ और $\Delta x = \frac{1}{81}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

इसलिए, $\Delta y = (x+\Delta x)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}$

$= \left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{2}{3}$

$\therefore \left(\frac{17}{81}\right) = \frac{2}{3} + \Delta y$

बहुत छोटे मानो के लिए Δy को dy के रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \frac{1}{4(x)^{\frac{1}{4}}}(\Delta y)$

$= \frac{1}{4\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{1}{81}\right) = \frac{27}{4\times 8} \times \frac{1}{81} = \frac{1}{32\times 3} = \frac{1}{96} = 0.010$

अतः, $\left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ का सन्निकट मान $= \frac{2}{3} + 0.010 = 0.677$

ii.

माना $y = x^{-\frac{1}{5}}$

माना $x = 32$ और $\Delta x = 1$

तब, $\Delta y = (x+\Delta x)^{-\frac{1}{5}} - x^{-\frac{1}{5}}$

$= (33)^{-\frac{1}{5}} - (32)^{-\frac{1}{5}} = (33)^{-\frac{1}{5}} - \frac{1}{2}$

$\therefore (33)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2} + \Delta y$

बहुत छोटे मानो के लिए Δy को dy के रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \frac{-1}{5(x)^{\frac{6}{5}}}(\Delta x)\left(\text{as } y = x^{-\frac{1}{5}}\right)$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$= -\frac{1}{5(2)^6}(1) = -\frac{1}{320} = -0.003$$

अतः, $(33)^{-\frac{1}{5}}$ का सन्निकट मान $= \frac{1}{2} + (-0.003) = 0.5 - 0.003 = 0.497$

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिये कि $f(x) = \frac{\log x}{x}$ द्वारा प्रदत्त फलन x = e पर उच्चतम है।

उत्तर-

दिया गया फलन $f(x) = \frac{\log x}{x}$

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{1}{x}\right) - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

अब, $f'(x) = 0$

$$1 - \log x = 0$$

$$\Rightarrow \log x = 1$$

$$\log x = \log e$$

$$\therefore x = e$$

इसलिए, $f''(e) = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \log x)(2x)}{x^4} = \frac{x - 2x(1 - \log x)}{x^4} = \frac{-3 + 2\log x}{x^3}$

यहाँ, $f''(e) = \frac{-3 + 2\log e}{e^3} = \frac{-3 + 2}{e^3} = \frac{-1}{e^2} < 0$

इसलिए, द्वितीय अवकलज परिक्षण द्वारा, f का उच्चतम मान बिंदु $x = e$ पर हैं।

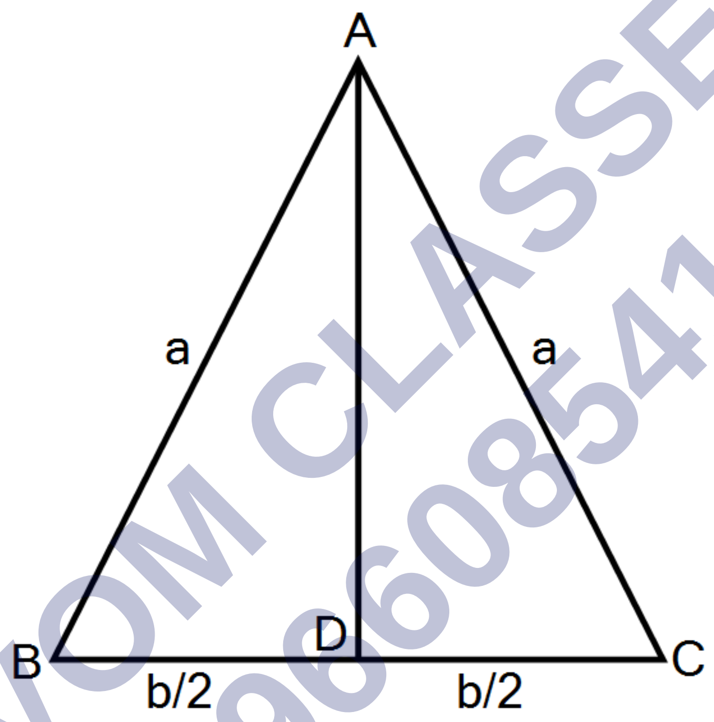
प्रश्न 3. किसी निश्चित आधार b के एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाएँ 3 सेमी/ सेकंड की दर से घट रहीं है। उस समय जब त्रिभुज की समान आधार के बराबर है, उसका क्षेत्रफल कितनी तेजी से घट रहा है।

SHIVOM CLASSES 8696608541

उत्तर- माना △ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसके आधार BC की लंबाई b है। माना △ABC की अन्य दो भुजाओं की लंबाई a है। AD ⊥ BC बनाया

यहाँ, △ADC में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AD = \sqrt{a^2 - \frac{b^3}{4}}$$



त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$(A) = \frac{1}{2} b\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

समय (t) के सापेक्ष क्षेत्रफल की दर,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} b. \frac{2a}{2\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}} \frac{da}{dt} = \frac{ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}} \frac{da}{dt}$$

दिया हैं कि त्रिभुज की समान भुजाएँ 3 सेमि/ सेकंड की दर से दर से घट रही हैं, इसलिए $\frac{da}{dt} = -3$ सेमि/ सेकण्ड से घट रहा हैं।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रश्न 4. वक्र $y^2 = 4x$ के बिंदु(1, 2) पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिये।

उत्तर- दिए गए वक्र का समीकरण: $y^2 = 4x$,

इसलिए, x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$= 2y\frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,2)} = \frac{2}{2} = 1$$

बिंदु (1, 2) पर अभिलम्ब प्रवणता $= \dfrac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,2)}} = \dfrac{-1}{1} = -1$

इसलिए, बिंदु (1, 2) पर अभिलम्ब का समीकरण:

$y - 2 = -1(x - 1)$

$\Rightarrow y - 2 = -x + 1$ i.e.

$x + y - 3 = 0$

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिये कि वक्र $x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta$,$y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta$ के किसी बिंदु θ पर अभिलम्ब मुल बिंदु से अचर दुरी पर हैं।

उत्तर-

दिया हैं: $x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta + a\sin\theta + a\theta\cos\theta = a\theta\cos\theta$$

अब, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta$

किसी बिंदु θ पर, अभिलम्ब की प्रवणता $= -\dfrac{1}{\tan\theta}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

इसलिए, अभिलम्ब का समीकरण $y - a\sin + a\theta\cos\theta = -\frac{1}{\tan\theta}(x - a\cos\theta - a\theta\sin\theta)$

$\Rightarrow y\sin\theta - a\sin^2\theta + a\theta\sin\theta\cos\theta = -x\cos\theta + a\cos^2\theta + a\theta\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow x\cos\theta + y\sin\theta - a(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 0$

$\Rightarrow x\cos\theta + y\sin\theta - a = 0$

मूल बिंदु से अभिलंब की पकी लंबवत दुरी $= -\frac{|-a|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}} = \frac{|-a|}{\sqrt{1}} = |-a|$, जोकि अचर हैं।

अतः, अभिलम्ब मूल बिंदु से एक अचर दुरी पर स्थित हैं।

प्रश्न 6. अंतराल ज्ञात कीजिये जिन पर $f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2+\cos x}$ से प्रदत्त फलन f(i) निरंतर वर्धमान (ii) निरंतर हासमान हैं।

उत्तर-

$$f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2+\cos x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2+\cos x)(4\cos x + \sin x) - (4\sin x - 2x - x\cos x)(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2+\cos x)(3\cos x - 2 + x\sin x) + \sin x(4\sin x - 2x - x\cos x)}{(2+\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{6\cos x - 4 + 2x\sin x + 3\cos^2 x - 2\cos x + x\sin x\cos + 4\sin^2 x - 2x\sin x - x\sin x\cos x}{(2+\cos x^2)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4\cos x - 4 + 3\cos^2 x + 4\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4\cos x - 4 + 3\cos^2 x + 4 - 4\cos^2 x}{(2+\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4\cos x - \cos^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{\cos x(4-\cos x)}{(2+\cos x)^2}$$

यहाँ, $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ या $\cos x = 4$

लेकिन $\cos x \neq 4$, इसलिए $\cos x = 0$ अर्थात् $x = \frac{\pi}{2}, \frac{36\pi}{2}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अब, $x = \frac{\pi}{2}$ और $x = \frac{3\pi}{2}$ अंतराल $(0, \pi)$ को तीन भागो में विभाजित करते हैं। जोकि $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ और $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ हैं।

अन्तरालों $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ और $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ में, $f'(x) > 0$

अतः, फलन $f'(x)$ अंतराल $0 < x < \frac{\pi}{2}$ और $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ के लिए निरंतर वर्धमान हैं।

अंतराल $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ में, $f'(x) < 0$

अतः, फलन $f'(x)$ अंतराल $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ में निरंतर ह्रासमान हैं।

प्रश्न 7. अंतराल ज्ञात कीजिये जिन पर $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}, x \neq 0$ से प्रदत फलन (i) वर्धमान (ii) ह्रासमान हैं।

उत्तर-

$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^3}$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^4} = \frac{3x^6 - 3}{x^4}$

इसलिए, $f'(x) = 0$ रखने पर, $3x^6 - 3 = 0$

$\Rightarrow x^6 = 1$

$\Rightarrow x = \pm 1$

अब $x = 1$ और $x = -1$ वास्तविक संख्या रेखा को तीन अंतरालों में विभाजित करता हैं।

अर्थात $(-\infty, -1), (-1, 1)$ और $(1, \infty)$

अंतरालों $(-\infty, -1)$ और $(1, \infty)$ में जब $x < -1$ और $x > 1, f'(x) > 0$

अतः, जब $x < -1$ या $x > 1$, फलन f वर्धमान हैं।

अंतराल $(-1, 1)$ में, जब $-1 < x < 1, f'(x) < 0$

अतः, जब $-1 < x < 1$, फलन f ह्रासमान हैं।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रश्न 8. दीर्घवृत $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अंतर्गत उस समद्विबाहु त्रिभुज का महत्तम क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये शीर्ष दीर्घ अक्ष का एक सिरा हैं।

उत्तर- दिया गया दीर्घवृत $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

माना दीर्घवृत के अंतर्गत ABC कोई त्रिभुज हे जिसका शीर्ष C बिंदु (a, 0) पर स्थित हैं।

दीर्घवृत x-अक्ष तथा y-अक्ष के सममित हैं, इसलिए बिंदु A के निर्देशांक ($-x_1$, y_1) लेने पर, बिंदु B के निर्देशांक ($-x_1$, y_1) होंगे।

इसलिए $y_1 = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x\frac{2}{1}}$

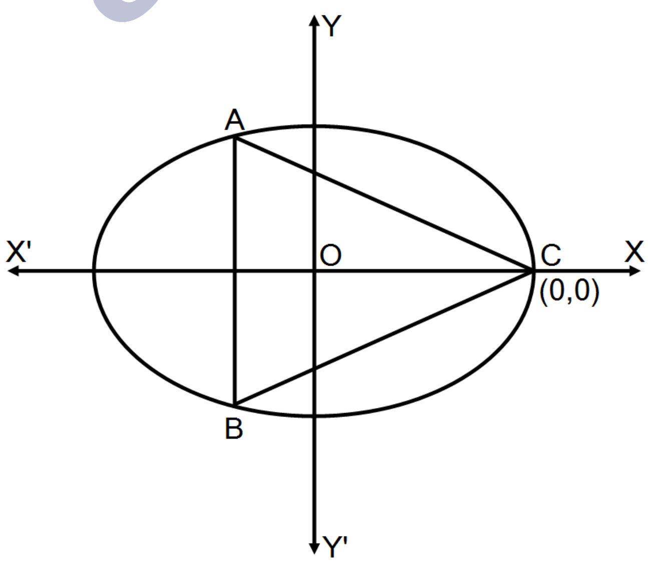
अब, बिंदु A के निर्देशांक

$\left(x_1, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x\frac{2}{1}}\right.$

हैं तथा बिंदु B के निर्देशांक

$\left(x_1, -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x\frac{2}{1}}\right.$ हैं।

बिंदु (x_1, y_1) दीर्घवृत पर स्तिथ हैं, इसलिए ट्रूज ABC का क्षेत्रफल,



SHIVOM CLASSES 8696608541

$$A=\frac{1}{2}\left|a\left(\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}\right)+(-x_1)\left(-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}\right)+(-x_1)\left(-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}\right)\right|$$

$$\Rightarrow A=b\sqrt{a^2-x_1^2}+x_1\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}\ldots(i)$$

$$\frac{dA}{dx_1}=\frac{-2x_1b}{2\sqrt{a^2-x_1^2}}+\frac{b}{a}\sqrt{a^2x_1^2}-\frac{2bx_1^2}{2a\sqrt{a^2}-x_1^2}$$

$$\Rightarrow\frac{dA}{dx_1}=\frac{b}{a\sqrt{a^2-x_1^2}}\left[-x_1a+\left(a^2-x_1^2\right)\right]$$

$$\Rightarrow\frac{dA}{dx_1}=\frac{b-\left(-2x_1^2-x_1a+a^2\right.}{a\sqrt{a^2-x_1^2}}$$

अब $\frac{dA}{dx_1}=0\Rightarrow-2x_1^2-x_1a+a^2=0$

$$\Rightarrow x_1=\frac{a\pm\sqrt{a^2}-4(-2)(a^2)}{2(-2)}=\frac{a\pm\sqrt{9a^2}}{-4}=\frac{a\pm3a}{-4}$$

$\Rightarrow x_1=-a$ या $\frac{a}{2}$

लेकिन, $x_1\neq-a$

इसलिए, $x_1=\frac{a}{2}=\frac{b}{a}\left\{\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}\right\}\Rightarrow\frac{ba}{2a}\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}\,b}{2}$

अब, $\frac{d^2A}{dx_1^2}=\frac{b}{a}\left\{\frac{\sqrt{a^2-x_1^2}(-4x_1-a)-(-2x_1^2-x_1a+a^2)\frac{(-2x_1)}{2\sqrt{a^2-x_1^2}}}{a^2-x_1^2}\right\}$

$$=\frac{b}{a}\left\{\frac{(a^2-x_1^2)(-4x_1-a)+x_1(-2x_1^2-x_1a+a^2}{(a^2-x_1^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{b}{a}\left\{\frac{2x^3-3a^2x-a^3}{(a^2x_1^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

और जब $x_1=\frac{a}{2}$ हैं, तो

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\frac{d^2A}{dx_1^2} = \frac{b}{a}\left\{\frac{2\frac{a^3}{8} - 3\frac{a^3}{2} - a^3}{\left(\frac{3a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\} = \frac{b}{a}\left\{\frac{\frac{a^3}{4} - \frac{3}{2} - a^3}{\left(\frac{3a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\} = -\left\{\frac{\frac{9}{4}a^3}{\left(\frac{3a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\} < 0$$

अतः, बिंदु $x_1 = \frac{b}{a}$ पर क्षेत्रफल अधिकतम होगा।

त्रिभुज का अधिकतम क्षेत्रफल निम्नलिखित होगा:

$$A = b\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} + \left(\frac{a}{2}\right)\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$= ab\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)\frac{b}{a} \times \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{ab\sqrt{3}}{2} + \frac{ab\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}ab$$

प्रश्न 9. आयताकार आधार व आयताकार दीवारों की 2 मीटर गहरी और 8 मीटर^2 आयतन की एक बिना ढक्कन की टंकी का निर्माण करना हैं। यदि टंकी के निर्माण में आधार के लिए ₹70/ मीटर^2 और दीवारों पर ₹45/ मीटर^2 व्यय आता हैं तो निम्नतम खर्च से बनी टंकी की लागत क्या हैं?

उत्तर- माना l, b तथा h क्रमशः टंकी की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई को दर्शाते हैं।

इसलिए, ऊँचाई (h) = 2 मीटर

टंकी की आयतन = 8 मीटर3

परन्तु, टंकी का आयतन = l × b × h

∴ 8 = l × b × 2

lb = 4 ⇒ b = $\frac{4}{l}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अब, आधार का क्षेत्रफल = lb = 4

चारों दीवारों का क्षेत्रफल (A) = 2h(l + b)

$$A = 4\left(l + \frac{4}{l}\right) \Rightarrow \frac{dA}{dl} = 4\left(1 - \frac{4}{l^2}\right)$$

अब, $\frac{dA}{dt} = 0$

$\Rightarrow 1 - \frac{4}{l^2} = 0$

$\Rightarrow l^2 = 4$

$\Rightarrow l = \pm 2$

लम्बाई ऋणात्मक नहीं होती, इसलिए l = 2 हैं। इसलिए, $b = \frac{4}{l} = \frac{4}{2} = 2$

अब, $\frac{d^2A}{dt^2} = \frac{32}{l^3}$

जब $l = 2, \frac{d^2A}{dt^2} = \frac{32}{8} = 4 > 0$

इसलिए, द्वितीय अवकलज परिक्षण द्वारा, बिंदु l = 2 पर क्षेत्रफल निम्नतम हैं।

अतः, l = b = h = 2

चूँकि टंकी के आधार को बनाने में कुल खर्च = ₹70 × (lb) = ₹70(4) = ₹280

टंकी की दीवारों को बनाने में = ₹2h (l + b) × 45 = ₹90(2)(2 + 2) = ₹8(90) = ₹720

अतः, टंकी की दीवारों को बनाने में कुल खर्च = ₹(280 + 720) = ₹1000

प्रश्न 10. एक व्रत और एक वर्ग के परिमापों का योग k हैं, जहाँ k एक अचर हैं। सिद्ध कीजिये की उनके क्षेत्रफल का योग निम्नतम हैं जब वर्ग की भुजा वृत की त्रिज्या की दुगुनी हैं।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उत्तर- माना वृत की त्रिज्या r हैं तथा वर्ग की भुजा a हैं। इसलिए, प्रश्नानुसार

$2\pi r + 4a = k$ (जहाँ k एक अचर हैं) $\Rightarrow a = \frac{k-2\pi r}{4}$

इसलिए, वृत तथा वर्ग के क्षेत्रफल का योग (A)

$$A = \pi r^2 + a^2 = \pi r^2 + \frac{(k-2\pi r)^2}{16}$$

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r + \frac{2(k-2\pi r)(-2\pi)}{16} = 2\pi r - \frac{\pi(k-2\pi r)}{4}$$

अब, $\frac{dA}{dr} = 0$ रखने पर

$$\Rightarrow 2\pi r = \frac{\pi(k-2\pi r)}{4}$$

$$\Rightarrow 8r = k - 2\pi r$$

$$\Rightarrow (8 + 2\pi)r = k$$

$$\Rightarrow r = \frac{k}{8+2\pi} = \frac{k}{2(4+\pi)}$$

यहाँ, $\frac{d^2A}{dr^2} = 2\pi + \frac{\pi^2}{2} > 0$

$\therefore$ जब $r = \frac{k}{2(4+\pi)'}\ \frac{d\hat{}2A}{dr^2} > 0$

अतः, क्षेत्रफल का योग न्यूनतम होगा जब $r = \frac{k}{2(4+\pi)}$ हैं।

अब $a = \frac{k-2\pi\left[\frac{k}{2(4+\pi)}\right]}{4} = \frac{k(4+\pi)-\pi k}{4(4+\pi)} = \frac{4k}{4(4+\pi)} = 2r$

अत, यह सिद्ध होता है कि यदि क्षेत्रफल का योग निम्नतम हैं तो वर्ग की भुजा वृत की भुजा की त्रिज्या की दुगुनी होगी।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रश्न 11. किसी आयत के ऊपर बने अर्धवृत के आकार वाली खिड़की हैं। खिड़की का सम्पूर्ण परिमाप 10 मीटर हैं। पूर्णतयः खुली खिड़की से अधिकतम प्रकाश आने के लिए खिड़की की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना आयताकार खिड़की की लम्बाई x तथा चौड़ाई y हैं।

इसलिए, अर्ध वृताकार खिड़की की त्रिज्या = $\frac{x}{2}$

खिड़की परिमाप = 10 मीटर

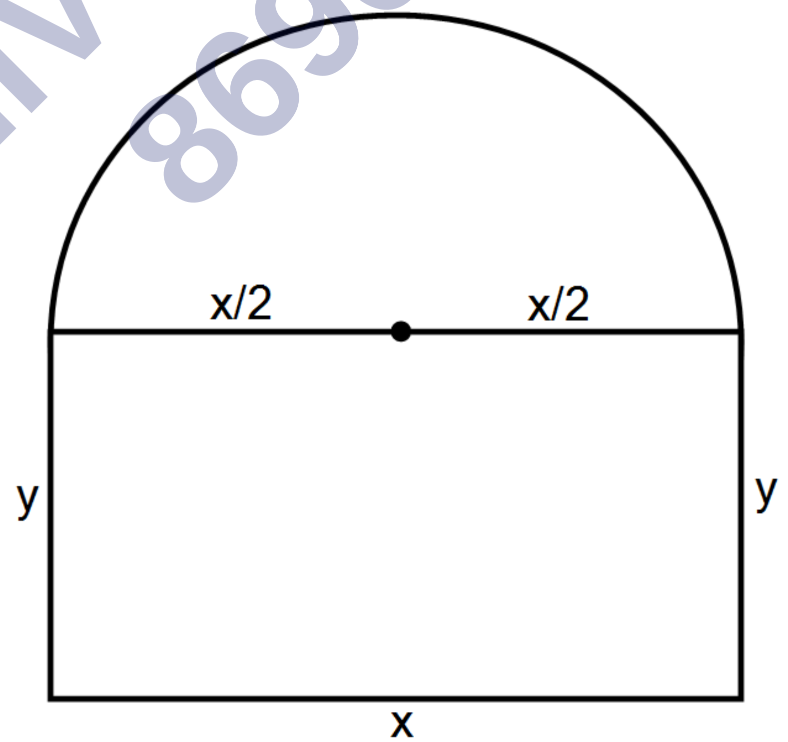
$$\Rightarrow x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 10$$

$$\Rightarrow x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + 2y = 10$$

$$\Rightarrow 2y = 10 - x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = 5 - x\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

इसलिए, खिड़की का कुल क्षेत्रफल (A),



SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$A = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$= A = x\left[5 - x\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{\pi x^2}{8} = 5x - x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dx} = 5 - 2x\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi x}{4} = 5 - x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4}x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} = -1 - \frac{\pi}{4}$$

अब, $\frac{dA}{dx} = 0$

$$\Rightarrow 5 - x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4}x = 0$$

$$\Rightarrow x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{20}{\pi+4}$$

इस, प्रकार जब $x = \frac{20}{\pi+4}$ तो $\frac{d^A}{dx^2} < 0$

इसलिए, द्वितीय अवकलज परिक्षण द्वारा, बिंदु $x = \frac{20}{\pi+4}$ मीटर क्षेत्रफल अधिकतम है।

अब, $y = 5 - \frac{20}{\pi+4}\left(\frac{2+\pi}{4}\right) = 5 - \frac{5(2+\pi)}{\pi+4} = \frac{10}{\pi+4}$ मीटर

अतः, पूर्णतयः खुली खिड़की से अधिकतम प्रकाश आने के लिए खिड़की की विमाएँ $\frac{20}{\pi+4}$ मीटर और $\frac{10}{\pi+4}$ मीटर है।

प्रश्न 12. त्रिभुज की भुजाओ से a और b दुरी पर त्रिभुज के कारण पर स्तिथ एक बिंदु हैं। सिद्ध कीजिए कि कारण की न्यूनतम लम्बाई $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{3}{2}}\right)$ हैं।

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उत्तर- माना ABC एक समकोण त्रिभुज हैं जिसका कोण B समकोण हैं। माना AB = x तथा BC = y हैं।

माना P कोई बिंदु हैं जो भुजाओ से a और b पर स्थित हैं।

माना $\angle C = \theta$

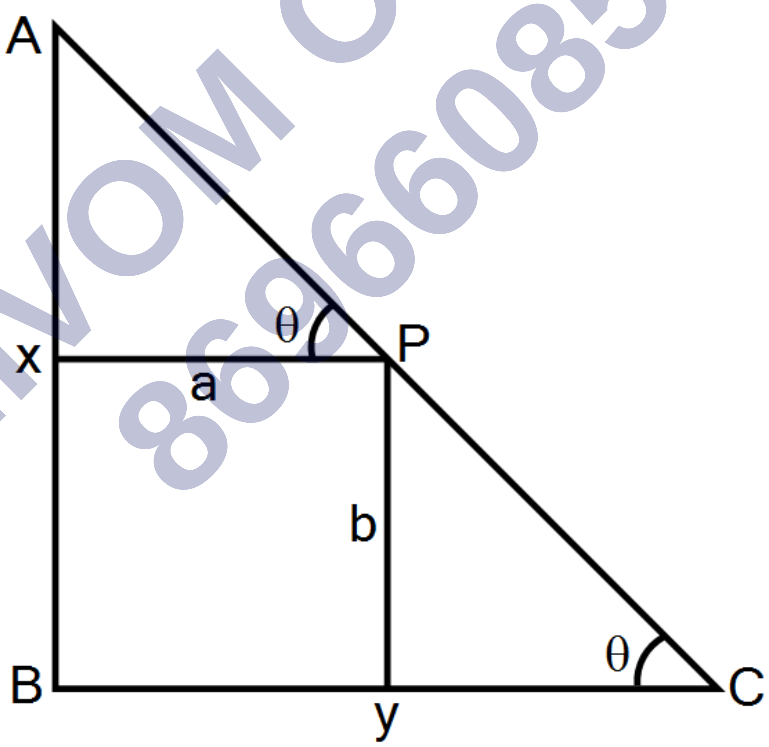
यहाँ, $AC = \sqrt{x^2 + y^2}$

अब, $PC = b \operatorname{cosec}\theta$ और $AP = a \sec\theta$

$\Rightarrow AC = AP + PC$

$\Rightarrow AC = a \sec\theta + b \operatorname{cosec}\theta \ldots (i)$

$\frac{d(AC)}{d\theta} = -b \operatorname{cosec}\theta \cot\theta + a \sec\theta \tan\theta$



$\therefore \frac{d(AC)}{d\theta} = 0 \Rightarrow a \sec\theta \tan\theta = b \operatorname{cosec}\theta \cot\theta$

$\Rightarrow \frac{a}{\cos\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\Rightarrow a\sin^3\theta = b\cos^3\theta \Rightarrow \tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{(b)}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}}}} \text{ और } \cos\theta = \frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}} \ldots (ii)$$

यहाँ, $\frac{d^2(AC)}{d\theta} > 0$ जब $\tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$

इसलिए, द्वितीय अवकलज परिक्षण द्वारा, जब $\tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ हैं तो कर्ण की लम्बाई न्यूनतम हैं।

अब, यदि $\tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$, तब:

$$AC = \frac{b\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{b\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{2}{3}}} \text{ [समीकरण (1) और (2) से]}$$

$$= \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

अतः, कर्ण की न्यूनतम लम्बाई $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$ हैं।

प्रश्न 13. उन बिन्दुओ को ज्ञात जिन पर, $f(x) = (x - 2)^4 (x + 1)^3$ द्वारा प्रदत फलन f का,

(i) स्थानीय उच्चतम बिंदु हैं (ii) स्थानीय निम्नतम बिंदु हैं (iii) नत परिवर्तन बिंदु हैं।

उत्तर-

दिया गया फलन: $f(x) = (x-2)^4(x+1)^3$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(x-2)^3(x+1)^3 + 3(x+1)^2(x-2)^4$$

$$= (x-2)^3(x+1)^2[4(x+1) + 3(x-2)]$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

$$= (x-2)^3(x+1)^2(7x-2)$$

यहाँ, $f'(x) = 0$ से $x = -1$ या $x = \frac{2}{7}$ या $x = 2$

अब, x के मान पर, जो $\frac{2}{7}$ के निकटतम हैं तथा $\frac{2}{7}$ से कम हैं, के लिए, $f'(x) < 0$

तथा x के मान पर, जो $\frac{2}{7}$ के निकटतम हैं तथा $\frac{2}{7}$ से अधिक हैं, के लिए, $f'(x) < 0$

अतः, $x = \frac{2}{7}$ एक स्थानीय उच्चतम बिंदु हैं।

अब, x के मान पर, जो 2 के निकटतम हैं तथा 2 से कम हैं के लिए, $f'(x) < 0$

तथा x के मान पर, जो 2 के निकटतम हे तथा 2 से अधिक हैं, के लिए, $f'(x) > 0$

अतः, x = 2 एक स्थनीय निम्नतम बिंदु हैं।

अब x के मान में -1 के लिए परिवर्तन करने पर, $f'(x)$ का चिन्ह नहीं बदलता हैं।

अतः, x = -1 एक नत परिवर्तन बिंदु हैं।

प्रश्न 14. $f(x) = \cos^2 x + \sin x$, $x \in [0, \pi]$ द्वारा प्रदत फलन f के निरपेक्ष उच्चतम और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$f'(x) = \cos^2 x + \sin x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2\cos x(-\sin x) + \cos x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2\sin x\cos x + \cos x$$

अब, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos x = \cos x$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\Rightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ या } \cos x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ या } \frac{\pi}{2} \text{ क्योंकि } x \in [0, \pi]$$

अब, f का मान, बिन्दुओ $x = \frac{\pi}{2}$ और $x = \frac{\pi}{6}$ पर तथा अंतराल [0, π] के अंत्य बिन्दुओ (अर्थात् x = 0 तथ x = π पर) पर ज्ञात करने पर:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$f(0) = \cos^2 0 + \sin 0 = 1 + 0 = 1$$

$$f(\pi) = \cos^2\pi + \sin\pi = (-1)^2 + 0 = 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1$$

अतः, फलन f का निरपेक्ष उच्चतम मान $\frac{5}{4}$ बिंदु $x = \frac{\pi}{6}$ पर प्राप्त होता हैं तथा निरपेक्ष निम्नतम मान 1 बिंदु x = 0, $\frac{\pi}{2}$ और π पर, प्राप्त होता हैं।

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिये कि एक r त्रिज्या के गोले के अंतर्गत उच्चतम आयतन के लम्ब वृतीय शंकु की ऊँचाई $\frac{4r}{3}$ हैं।

उत्तर- माना एक शंकु, एक निश्चित त्रिज्या (r)वाले गोले के अंतर्गत स्तिथ हैं।

माना R और H क्रमशः शंकु की त्रिज्या तथा ऊँचाई हैं।

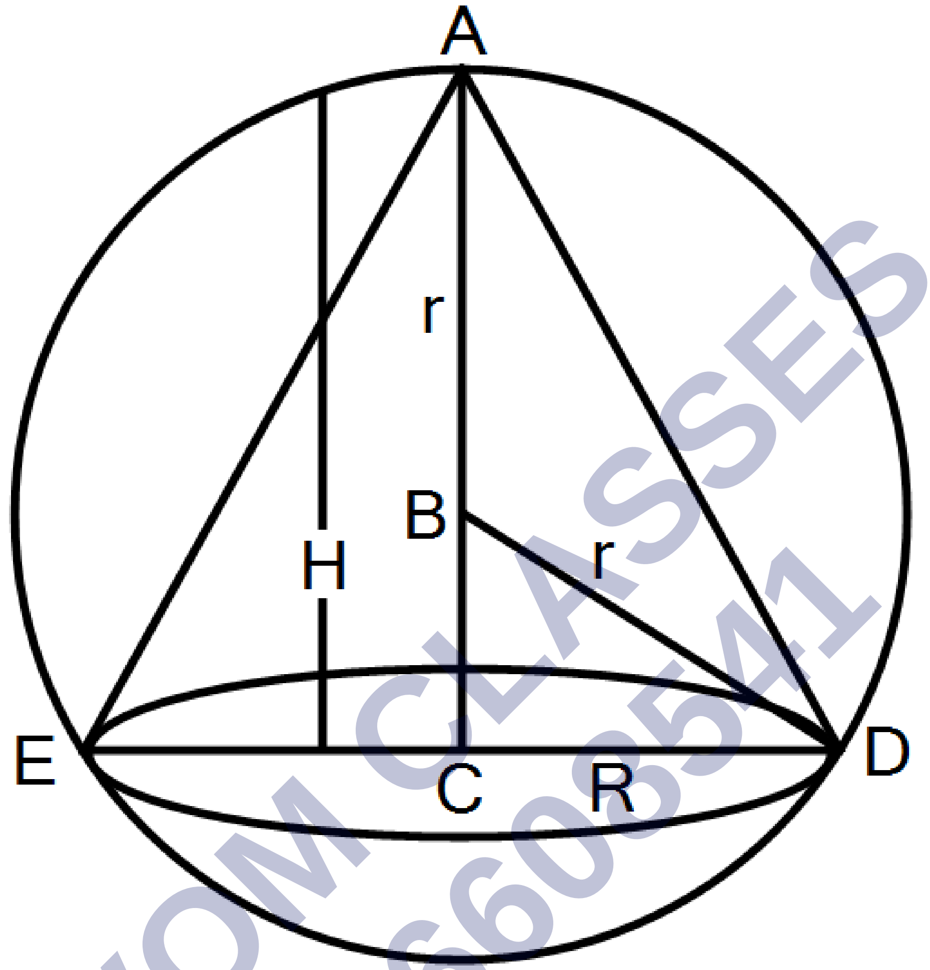
शंकु का आयतन $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

अब, समकोण त्रिभुज BCD में, $BC = \sqrt{r^2 - R^2}$

$$H = r + \sqrt{r^2 - R^2}$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\pi\mathrm{R}^2\left(\mathrm{r} + \sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{R}^2}\right) = \frac{1}{3}\pi\mathrm{R}^2\mathrm{r} + \frac{1}{3}\pi\mathrm{R}^2\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{R}^2}$$



$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dR}} = \frac{2}{3}\pi\mathrm{Rr} + \frac{2}{3}\pi\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{R}^2} + \frac{\mathrm{R}^2}{3} . \frac{(-2\mathrm{R})}{2\sqrt{\mathrm{r}^2-\mathrm{R}^2}}$$

$$= \frac{2}{3}\pi\mathrm{Rr} + \frac{2}{3}\pi\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{R}^2} + \frac{\mathrm{R}^2}{3} . \frac{\mathrm{R}\hat{\ }3}{3\sqrt{\mathrm{r}^2-\mathrm{R}^2}}$$

$$= \frac{2}{3}\pi\mathrm{Rr} + \frac{2\pi\mathrm{R}(\mathrm{r}^2-\mathrm{R}^2)-\pi\mathrm{R}^3}{3\sqrt{\mathrm{r}^2-\mathrm{R}^2}} = \frac{2}{3}\pi\mathrm{Rr} + \frac{2\pi\mathrm{Rr}^2-3\pi\mathrm{R}^3}{3\sqrt{\mathrm{r}^2-\mathrm{R}^2}}$$

यहाँ, $\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dR}} = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\pi\mathrm{Rr} = \frac{3\pi\mathrm{R}^3-2\pi\mathrm{Rr}^2}{3\sqrt{\mathrm{r}^2-\mathrm{R}^2}}$$

$$\Rightarrow 2\mathrm{r}\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{R}^2} = 3\mathrm{R}^2 - 2\mathrm{r}^2$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

$$\Rightarrow 4r^2(r^2 - R^2) = (3R^2 - 2r^2)^2$$

$$\Rightarrow 4r^3 - 4r^4R^2 = 3R^4 + r^4 + 4r^4 - 12R^2r^2$$

$$\Rightarrow 9R^4 - 8R^2r^2 = 0$$

$$R^2 = \frac{8r^2}{9}$$

अब, $\frac{d^2V}{dR^2} = \frac{2\pi r}{3} + \frac{3\sqrt{r^2-R^2}(2\pi r^2-9\pi R^2)+(2\pi Rr^2-3\pi R^3)(-6R)\frac{1}{2\sqrt{r^2-R^2}}}{9(r^2-R^2)}$

$$= \frac{2\pi r}{3} = + \frac{3\sqrt{r^2-R^2}(2\pi r^2-9\pi R^2)+(2\pi Rr^2-3\pi R^3)(3R)\frac{1}{2\sqrt{r^2-R^2}}}{9(r^2-R^2)}$$

यहाँ, $R^2 = \frac{8r^2}{9}$ पर, $\frac{d^2V}{dR^2} < 0$ दर्शाया जा सकता हैं।

अतः, आयतन अधिकतम होगा, यदि $R^2 = \frac{8r^2}{9}$

जब $R^2 = \frac{8r^2}{9}$, तो शंकु की ऊँचाई $= r + \sqrt{r^2 - \frac{8r^2}{9}} = r + \sqrt{\frac{r^2}{9}} = r + \frac{r}{3} = \frac{4r}{3}$

प्रश्न 16. मान लीजिये [a, b] पर परिभाषित एक फलन f हैं प्रकार कि सभी $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) > 0$ है तो सिद्ध कीजिये की [a, b] पर f एक वर्धमान हैं।

उत्तर- हमें सिद्ध करना है कि फलन निरंतर वर्धमान है, अर्थात

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ सभी } x_2 > x_1 \text{ के लिए } \left[\text{जहाँ } x_1, x_2 \in [a, b]\right]$$

माना x_1 और x_2 दो संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $x_1, x_2 \in [a, b]$ तथा $x_2 > x_1$

फलन f अंतराल $[x_1, x_2]$, में संतत तथा अवकलनीय है क्योंकि ये फलन [a, b] में संतत तथा अवकलनीय है।

माध्यान प्रमेय से, कोई बिंदु $c \in [x_1, x_2]$, इस प्रकार हैं कि

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

दिया है: $f'(x) > 0$ सभी $x \in [a, b]$ के लिए

इसलिए, $f'(c) > 0$ सभी $x \in [x_1, x_2]$ के लिए

$$\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

अब, किन्ही दो बिन्दुओ x_1, $x_2 \in [a, b]$, जहाँ $x_2 > x_1$, हमें $f(x_2) > f(x_1)$ प्राप्त होता है।

अतः, अंतराल [a, b] पर फलन f वर्धमान हैं।

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए कि एक R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत आयतन के बेलन की ऊँचाई $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ है। अधिकतम आयतन भी ज़ात कीजिए।

उत्तर- गोले की त्रिज्या = R माना r तथा h क्रमशः बेलन की त्रिज्या तथा ऊंचाई हैं।

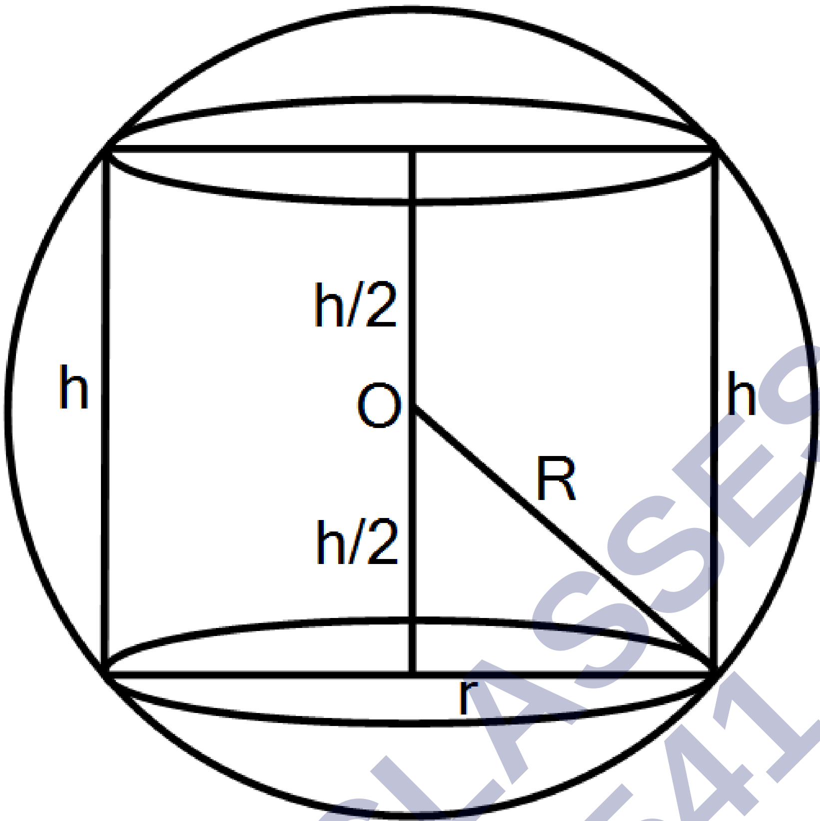
आकृति से, $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$

बेलन का आयतन (V)

$$V = \pi r^2 h = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{2\pi r^2(-2r)}{2\sqrt{R^2-r^2}}$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)



$$= 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{2\pi r^3}{2\sqrt{R^2-r^2}}$$

$$= \frac{4\pi r(R^2-r^2)-2\pi r^3}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{4\pi rR^2-6\pi r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

अब, $\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow 4\pi rR^2 - 6\pi r^3 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{2R^2}{3}$

तथा $\frac{d^2V}{dR^2} = \frac{\sqrt{R^2-r^2}(4\pi R^2-6\pi r^2)-(4\pi R^2-6\pi r^3)\frac{(-2r)}{2\sqrt{R^2-r^2}}}{R^2-r^2}$

$$= \frac{(R^2-r^2)(4\pi R^2-18\pi r^2)-(4\pi R^2-6\pi r^3)}{(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi R^2-22\pi r^2R^2+12\pi r^4+4\pi r^2R^2}{(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

यहाँ, $r^2 = \frac{2R^2}{3}$ पर, $\frac{d^2V}{dR^2} < 0$

$\therefore r^2 = \frac{2R^3}{3}$ पर, आयतन अधिकतम हैं।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

जब $r^2 = \frac{2R^2}{3}$, बेलन की ऊंचाई $h = 2\sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

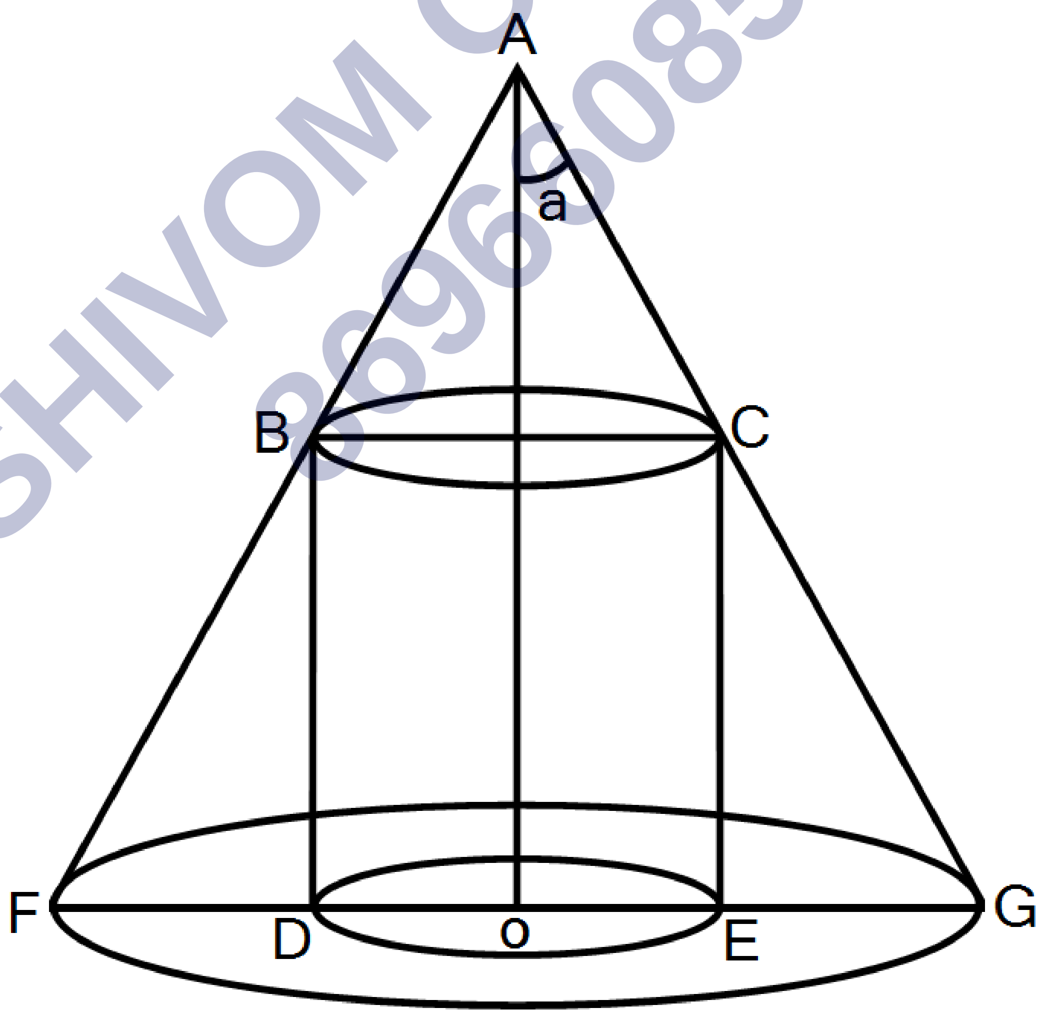
अतः, बेलन का आयतन अधिकतम होगा, यदि बेलन की ऊँचाई $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ हो।

प्रश्न 18. सिद्ध कीजिए कि अर्ध शीर्षकोण α और ऊँचाई h के लम्ब वृतीय शंकु के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन दी ऊँचाई, शंकु की एक तिहाई हैं और बेलन और अधिक़तन आयतन $\frac{4}{27}\pi h^2 \tan^2 a$ हैं।

उत्तर- दिए गए शंकु की ऊँचाई h तथा अर्ध शीर्षकोण α हैं। माना बेलन की त्रिज्या तथा ऊँचाई क्रमशः R और H हैं।

$\therefore GAO = \alpha, OG = r, OA = h, OE = R$ और $CE = H$ तथा $r = h \tan \alpha$

क्योंकि $\triangle AOG$ और $\triangle CEG$ समरूप हैं, इसलिए



SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$\frac{AO}{OG} = \frac{CE}{EG}\ \frac{h}{r} = \frac{H}{r-R}[EG = OG - OE]$$

$$\Rightarrow H = \frac{h}{r}(r - R)$$

$$= \frac{h}{h \tan\alpha}(h \tan\alpha - R) = \pi R^2 h - \frac{\pi R^3}{\tan\alpha}$$

बेलन का आयतन

$$V = \pi R^2 H = \frac{\pi R^2}{\tan\alpha}(h \tan\alpha - R) = \pi R^2 h - \frac{\pi R^3}{\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dR} = 2\pi RH - \frac{3\pi R^2}{\tan\alpha}$$

अब, $\frac{dV}{dR} = 0 \Rightarrow 2\pi RH = \frac{3\pi R^2}{\tan\alpha}$

$$\Rightarrow 2h\tan\alpha = 3R \Rightarrow R = \frac{2h}{3}\tan\alpha$$

तथा, $\frac{d^2V}{dR^2} = 2\pi h - \frac{6\pi R}{\tan\alpha}$

यहाँ $R = \frac{2h}{3}\tan\alpha$ के लिए, $\frac{d^2V}{dR^2} = 2\pi h - \frac{6\pi}{\tan\alpha}\left(\frac{2h}{3}\tan\alpha\right) = 2\pi h - 4\pi h < 0$

इसलिए, द्वितीय अवकलज परिक्षण द्वारा, बेलन का आयतन अधिकतम हैं जब $R = \frac{2h}{3}\tan\alpha$ हैं।

अतः शंकु के अंतर्गत स्धिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई, शंकु की एक तिहाई हैं।

अब, अधिकतम आयतन

$$V\pi\left(\frac{2h}{3}\tan\alpha\right)^2\left(\frac{h}{3}\right) = \pi\left(\frac{4h^2}{3}\tan\alpha\right)\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{4}{27}\pi h^3\tan^2\alpha$$

प्रश्न 19. एक 10 मीटर त्रिज्या के बेलनाकार टंकी में 314 मीटर³/ घंटा की दर से गेहूं भरा जाता हैं। भरे गेहूं की गहराई वृद्धि दर हैं:

a. 1 मीटर/ घंटा

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

b. मीटर/ घंटा

c. मीटर/ घंटा

d. 0.5 मीटर/ घंटा

उत्तर-

a. 1 मीटर/ घंटा

हल-

माना बेलनाकार टंकी की त्रिज्या r हैं।

इसलिए, टंकी क आयतन V = π (त्रिज्या)^2 × ऊँचाई ⇒ V = π(10)^{2}h = 100πh

समय t के सापेक्ष अवकलज करने पर, $\frac{dV}{dt} = 100\pi \frac{dh}{dt}$

बेलनाकार टंकी में 314 मीटर^2/ घंटा की दर से गेहूं भरा जाता हैं $\frac{dV}{dt} = 314$ मीटर^3/ घंटा

इसलिए, $314 = 100\pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{314}{100(3.14)} = \frac{314}{314} = 1$

अतः, भरे गए गेहूं की गहराई वृद्धि दर = 1 मीटर/ घंटा।

प्रश्न 20. वक्र x = $t^2 + 3t - 8$, y = $2t^2 - 2t - 5$ के बिन्दु (2, -1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है-

a. $\frac{22}{7}$

b. $\frac{6}{7}$

c. $\frac{7}{6}$

d. $\frac{-6}{7}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उत्तर-

b. $\frac{6}{7}$

हल-

दिए गए वक्र $x = t^2 + 3t - 8$ और $y = 2t^2 - 2t - 5$

इसलिए, $\frac{dx}{dt} = 2t + 3$ और $\frac{dy}{dt} = 4t - 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{4t-2}{2t+3}$

दिया गया बिंदु = (2, -1)

बिंदु x = 2 पर, $t^2 + 3t - 8 = 2 \Rightarrow t^2 + 3t - 10 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t + 5) = 0 \Rightarrow t = 2$ या t = -5

बिंदु y = -1 पर, $2t^2 - 2t - 5 = -1 \Rightarrow 2t^2 - 2t - 4 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t + 1) = 0 \Rightarrow t = 2$ या t = -1

t का उभयनिष्ठ मान 2 हैं।

अतः, बिंदु (2, -1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=2} = \frac{4(2)-2}{2(2)+3} = \frac{6}{7}$$

प्रश्न 21. रेखा y = mx + 1, वक्र $y^2 = 4x$ की एक स्पर्श रेखा हैं यदि m का मान हैं:

a. 1
b. 2
c. 3
d. $\frac{1}{2}$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उत्तर-

a. 1

हल-

दिया गए वक्र की स्पर्श रेखा का समीकरण: $y = mx + 1$

समीकरण $y = mx + 1$ से y का मान $y^2 = 4x$ रखने पर,

$(2m - 4)^2 - 4m^2(1) = 0 \Rightarrow 4m^2 + 16m - 4m^2 = 0 \Rightarrow 16 = 16m \Rightarrow m = 1$

अतः, m का अभीष्ट मान 1 हैं।

प्रश्न 22. वक्र $2y + x^2 = 3$ के बिंदु (1, 1) पर अभिलम्ब, का समीकरण हैं:

a. $x + y = 0$
b. $x - y = 0$
c. $x + y + 1 = 0$
d. $x - y = 1$

उत्तर-

b. $x - y = 0$

हल-

वक्र का समीकरण: $2y + x^2 = 3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{2dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,1)} = -1$$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

बिंदु (1, 1) पर, अभिलम्ब की प्रवणता $= \dfrac{-1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{(1,1)}} = 1$

अतः, बिंदु (1, 1) अभिलम्ब का समीकरण: y - 1 = 1(x - 1)

⇒ y - 1 = x - 1

⇒ x - y = 0

प्रश्न 23. वक्र $x^2 = 4y$ का बिंदु (1, 2) से हो कर जाने वाला अभिलम्ब हैं:

a. x + y = 3

b. x - y = 3

c. x + y = 1

d. x - y = 1

उत्तर-

a. x + y = 3

हल-

दिया गया वक्र का समीकरण: $x^2 = 4y$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x = 4.\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

अतः, बिंदु (h, k) पर, अभिलम्ब की प्रवणता $\dfrac{-1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{(1,1)}} = \dfrac{-2}{h}$

∴ बिंदु (h, k) पर, अभिलम्ब का समीकरण: $y - k = \dfrac{-2}{h}(x - h)$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

दिया हैं कि अभिलम्ब बिंदु (1, 2) से होकर जाता हैं। इसलिए

$$y - k = \frac{-2}{h}(1 - h) \Rightarrow k = 2 + \frac{2}{h}(1 - h)\ldots(i)$$

क्योंकि बिंदु (h, k), वक्र $x^2 = 4y$ पर स्तिथ है, इसलिए

$$h^2 = 4k \Rightarrow k = \frac{h^2}{4}$$

समीकरण (i) से,

$$\frac{h}{4} = 2 + \frac{2}{h}(1 - h)$$

$$\Rightarrow \frac{h^3}{4} = 2h + 2 - 2h = 2$$

$$\Rightarrow h^3 = 8 \Rightarrow h = 22$$

$$\therefore k = \frac{h^3}{4} \Rightarrow k = 1$$

अतः, अभिलम्ब का समीकरण:

$$y - 1 = \frac{-2}{2}(x - 2) \Rightarrow x + y = 3$$

प्रश्न 24. वक्र $9x^2 = x^3$ पर वे बिंदु जहाँ पर वक्र का अभिलम्ब अक्षो से समान अंतः खंड बनाता है:

a. $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$

b. $\left(4, \pm\frac{-8}{3}\right)$

c. $\left(4, \pm\frac{3}{8}\right)$

d. $\left(\pm 4, \frac{8}{3}\right)$

SHIVOM CLASSES 8696608541

उत्तर-

a. $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$

हल-

वक्र का समीकरण: $9y^2 = x^3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$9(2y)\frac{dy}{dx} = 33x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{6y}$$

बिंदु (x_1, y_1) पर, अभिलम्ब की प्रवणता $\frac{-1}{\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1,y_1)}} = -\frac{6y_1}{x_1^2}$

∴ बिंदु (x_1, y_1) पर, अभिलम्ब क्क समीकरण:

$$y - y_1 = -\frac{6y_1}{x_1^2}(x - x_1)$$
$$\Rightarrow x_1^2y - x_1^2y = -6xy_1 + 6x_1y_1$$
$$\Rightarrow 6xy_1 + x_1^2y = 6x_1y_1 + x_1^2y_1$$
$$\Rightarrow \frac{6xy_1}{6x_1y_1+x_1^2y_1} + \frac{x_1^2y_1}{6x_1y_1+x_1^2y_1} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{x_1(6+x_1)}{6}} + \frac{y}{\frac{y_1(6+x_1)}{x_1}} = 1$$

दिया हैं की वक्र का अभिलम्ब अक्षो से समान अंतः खंड बनाता हैं, इसलिए

$$\frac{x_1(6+x_1)}{6} = \frac{y_1(6+x_1)}{x_1}$$
$$\Rightarrow \frac{x_1}{6} = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow x_1^2 = 6y_1 \ldots(i)$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

बिंदु (x_1, y_1) वक्र स्तिथ हैं, इसलिए

$$9y_1^2 = x_1^3 \ldots (ii)$$

समीकरण (i) और (2) से, हमे प्राप्त होता हैं:

$$9\left(\frac{x_1^2}{6}\right)^2 = x_1^3$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^4}{4} = x_1^3 \Rightarrow x_1 = 4$$

समीकरण (2) से, $9y_1^2 = (4)^3$

$$\Rightarrow y_1^2 = \frac{64}{9} \Rightarrow y_1 = \pm\frac{8}{3}$$

अतः, अभीष्ट बिंदु $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ हैं।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)