गणित

अध्याय-5: सांतत्य तथा अवकलनीयता

सांतत्य

भौतिकी तथा रसायन विषयों के समस्याओं के अध्ययन के दौरान हमें उस समस्या से सम्बन्धित वक्र के बारे में ऐसी स्थितियों से सामना होता है जबकि दत्त अंतराल में परिभाषित फलन के रेखाचित्र में दत्त अन्तराल के किसी अन्तराल विशेष अथवा अन्तराल के किसी विशेष बिन्दु पर रेखाचित्र में टूटन आ जाता है अर्थात् उस बिन्दु पर फलन परिभाषित नहीं होता है। यह स्थिति शताब्दी के गणितज्ञों को निर्देशित करती है कि वे वक्र के उस बिन्दु पर सातत्य की स्पष्ट अवधारणा दें।

निम्नलिखित तीन फलनों के रेखाचित्रों की कल्पना कीजिए

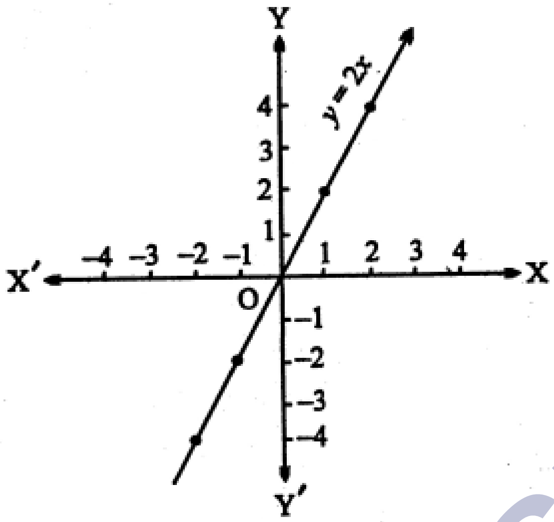
(i) $y = 2x$ (ii) $y = \begin{cases} 1, \forall x \leq 0 \\ 3, \forall x > 0 \end{cases}$

(iii) $y = \begin{cases} x+1, \forall x \neq 1 \\ 3, \quad \text{जब } x = 1. \end{cases}$

(i) Y = 2x के लिए

x	1	2	-1	-2
y	2	4	-2	-4

ध्यान दें कि उपरोक्त में y = 2x का रेखाचित्र एक टुकड़े में ही है। इसके वक्र में कहीं भी कोई खण्डन नहीं है अथवा कहें कि रेखाचित्र सतत् और अटूट है। दूसरे शब्दों में, रेखाचित्र का बिना कलम या पेन्सिल को उठाये सम्पूर्ण रेखांकन किया जा सकता है।



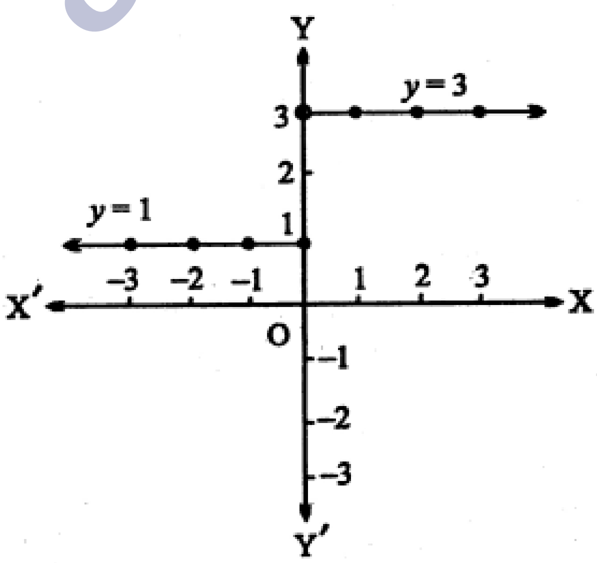
(ii) $y=\begin{cases}1, & \forall x \le 0\\ 3, & \forall x > 0\end{cases}$

अर्थात् $y = 1$ जब $x \le 0$

तथा $y = 3$ जब $x > 0$.

अतः इसका रेखाचित्र निम्न चित्र के अनुसार होगा। इसके लिए yके कुछ संगत मान, निम्न तालिका से व्यक्त किये जा सकते हैं-

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1	1	1	1	3	3	3



यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि दत्त फलन का रेखाचित्र अटूट नहीं है। इसमें x = 0 पर टूटन है। दूसरे शब्दों में, पेन्सिल को बिना उठाये इसे खींचना संभव नहीं है।

(iii) फलन की परिभाषा के अनुसार,

$$y=\begin{cases} x+1, \forall\, x\neq 1 \\ 3, \quad \text{जब } x=1 \end{cases}$$

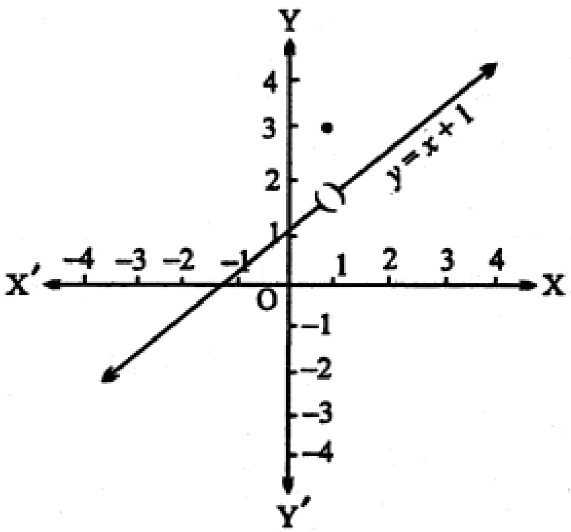
अर्थात् $\quad y=x+1, \forall\, x\neq 1$

तथा $\quad y=3,$ यदि $x=1.$

फलस्वरूप के कुछ संगत मान अग्र तालिका से व्यक्त किए जा सकते हैं

x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
y	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**3**	**4**	**5**

फलस्वरूप फलन का रेखाचित्र निम्नांकित चित्र के अनुसार होगा___ स्पष्ट रूप से फलन का रेखाचित्र सतत् सरल रेखा नहीं है। इसके बिन्दु x = 1 पर एक टूटन है तथा इस बिन्दु पर फलन एक अलग-थलग बिन्दु ..' से निरूपित है। दूसरे शब्दों में, इसका चित्रण बिना पेन्सिल को उठाये संभव नहीं होगा। x = 1 पर फलन का मान y = 3 से निरूपित होगा। फलस्वरूप बिन्दु (1,3) भी फलन के रेखाचित्र पर स्थित है परन्तु यह बिन्दु एक निर्जन बिन्दु (Secluded point) होगा।



इस प्रकार एक फलन तब संतत (Continuous) कहलायेगा जब उसका वक्र अटूट हो अर्थात् उससे निरूपित वक्र को बिना पेन्सिल को उठाये सम्पूर्ण रूप से खींचा जा सके अर्थात् इसमें कहीं कोई टूटन न हो। यदि इसके परिभाषित प्रान्त में कहीं टूटन है तो उस बिन्दु पर फलन असंतत कहलायेगा।

अतः दैनिक जीवन में संतत का जो महत्त्व है वही गणित में फलन के संतत होने का अर्थ है। जब हम कहते हैं कि फलन x = a पर संतत है तब इसका अर्थ है कि फलन f(x) के रेखाचित्र पर x = a बिन्दु पर कोई रुकावट नहीं है अर्थात् इस बिन्दु पर रेखाचित्र में कोई टूटन नहीं है तात्पर्य है कि x = Da पर फलन का रेखाचित्र अटूट है।

किसी बिन्दु पर फलन का सांतत्य (Continuity of a Function at a Point)

स्थिति i. जब फलन बिन्दु के दोनों ओरभिन्न-भिन्न रूप में परिभाषित हो

माना f(x),x का कोई वास्तविक फलन है तथा माना x = a उसके प्रान्त में कोई बिन्दु है।

फलन को x = a पर तब और केवल तब संतत कहेंगे जब

i. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ का अस्तित्व है अर्थात् फलन की x=a'पर वाम-हस्त सीमा का अस्तित्व है।

ii. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ का अस्तित्व है अर्थात् x = a पर दक्षिणहस्त सीमा का अस्तित्व है।

iii. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$।

iv. f(a) परिभाषित है।

v. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

यदि उपरोक्त प्रतिबन्धों में किसी एक की भी असफलता होती है तब x = a पर फलन को असांतत्य कहा जाता है अतः फलन दत्त प्रान्त में असांतत्य होगा।

स्थिति ii. जब फलन दत्तं बिन्दु के दोनों तरफ एकसमान परिभाषित हो

माना f(x) एक वास्तविक फलन है तथा x = a इसके प्रान्त में एक बिन्दु है। फलन को तब और केवल तब x = a पर संतत कहेंगे, जब

i. $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व है।

ii. x = a पर f(a) परिभाषित है।

iii. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

अर्थात् x = a पर फलन की सीमा और इस बिन्दु पर फलन का मान बराबर हो।

यदि इनमें कोई भी एक प्रतिबन्ध असत्य होता है तब दत्त बिन्दु पर फलन को असंतत कहेंगे। अतः दत्त प्रान्त में फलन असंतत कहलायेगा।

दत्त अन्तराल में फलन का सांतत्य (Continuity of a Function in Given Interval)

माना बन्द अन्तराल [a, b] में परिभाषित कोई वास्तविक फलन f(x) है। तब फलन को दत्त अन्तराल में तभी संतत कहेंगे जब यह अन्तराल (a, b) के प्रत्येक बिन्दु पर संतत हो तथा यह x = a और x = b पर भी संतत हो।

यहाँ x = a पर फलन के संतत होने के लिए प्रतिबन्ध होगा ।

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

इसी प्रकार, x = b पर फलन के संतत होने का प्रतिबन्ध होगा

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

असातत्यता के प्रकार (Types of Discontinuity)

प्रथम प्रकार- यदि वाम-हस्त सीमा तथा दक्षिण-हस्त सीमा दोनों का अस्तित्व हो परन्तु वे दोनों बराबर नहीं हों अर्थात् _L.H.L.≠ R.H.L. तब हम ऐसी असातत्यता को प्रथम प्रकार की न-हटाने योग्य असांतत्यता कहते हैं।

द्वितीय प्रकार- यदि किसी बिन्दु पर वाम-हस्त सीमा तथा दक्षिण-हस्त सीमा दोनों का ही अस्तित्व न हो तब इसे न-हटाने योग्य (Non-removable) असांतत्यता अथवा द्वितीय प्रकार का असांतत्य कहते हैं।

तृतीय प्रकार- यदि वाम-हस्त तथा दक्षिण-हस्त दोनों सीमाओं का अस्तित्व है और वे बराबर हैं परन्तु उनका मान दत्त बिन्दु पर फलन के मान के बराबर नहीं है अर्थात् L.H.L. = R.H.L.# f(a) तब इस स्थिति में x = a पर फलन असातत्य तो होगा पर इसे हटाने योग्य असांतत्यता (Removable dis_continuity) कहेंगे।

सांतत्यता परमूलभूत परिणाम(बिना उपपत्ति के) [Basic Results of Continuity (Without Proof)]

माना परिभाषित प्रान्तों में f(x) तथा g(x) दो सातत्य फलन हैं तथा k एक वास्तविक अचर है। तब

1. f(x) + g(x) एक सातत्य फलन है अर्थात् दो सांतत्य फलनों का योग भी एक सातत्य फलन होता है।
2. f(x) - g(x) भी सातत्य फलन है अर्थात् दो सातत्य फलनों का अन्तर भी एक सातत्य फलन है।
3. f(x) × g(x) भी सातत्य फलन है अर्थात् दो सांतत्य फलनों का गुणनफल भी एक सातत्य फलन है।
4. $\frac{f(x)}{g(x)}$ भी एक सातत्य फलन होगा यदि परिभाषित प्रान्त के किसी बिन्दु पर g(x) फलन का मान शून्य नहीं है।
5. kf(x) भी सातत्य फलन होगा।
6. $\frac{1}{f}$ तथा $\frac{1}{g}$ अर्थात् फलनों f(x) तथा g(x) के प्रतिलोम फलन भी सातत्य होंगे यदि उनके मान प्रान्त के किसी भी बिन्दु पर शून्य नहीं है।
7. $\forall n \in N, \{f(x)\}^n$ तथा $\{g(x)\}^n$ भी सातत्य होंगे।

8. यदि fog परिभाषित है तब (fog)(x) भी सातत्य होगा।

निम्नलिखित कुछ सामान्य सांतत्य फलनों का उल्लेख किया गया है जो सांतत्यता पर आधारित प्रश्नों के हल में उपयोगी साबित होंगे-

i. प्रत्येक अचर फलन संतत है।
ii. प्रत्येक तत्समक फलन संतत है।
iii. प्रत्येक बहुपदीय फलन संतत है।
iv. प्रत्येक परिमेय फलन संतत है।
v. चरघातांकीय तथा लघुगणकीय फलन संतत हैं।
vi. प्रमुख प्रान्त में प्रत्येक त्रिकोणमितीय फलन तथा उनके व्युत्क्रम फलन संतत हैं।
vii. यदि एक फलन f(x) संतत है तब $f^{-1}(x)$ का भी अस्तित्व होगा तथा वह संतत होगा।

संतत फलनों के गुणधर्म (Properties of Continuous Function)

1. यदि $f(x)$ और $g(x)$, $x=a$ पर दो संतत फलन हैं, तो $f+g$ भी $x=a$ पर संतत होगा।

प्रमाण : चूँकि $f(x)$ और $g(x)$, $x=a$ पर संतत है

$\therefore \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

और $\quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$

अब, $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$

$$= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$
$$= f(a)+g(a)$$
$$= (f+g)(a)$$

$\therefore (f+g)$, $x=a$ पर संतत हैं।

2. यदि $f(x)$ और $g(x)$, $x=a$ पर संतत है तो $f-g$ भी $x=a$ पर संतत होगा।

प्रमाण : चूँकि $f(x)$ और $g(x)$, $x=a$ पर संतत है।

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

$$\text{और} \quad \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

अब,
$$\lim_{x\to a}(f-g)(x)=\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]$$
$$=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$
$$=f(a)-g(a)$$
$$=(f-g)(a)$$

$\therefore$ $(f-g)$, $x=a$ पर संतत है।

3. **यदि f, $x=a$ पर संतत है, तो $\frac{1}{f}$ भी $x=a$ पर संतत होगा, यदि $f(a)\neq 0$.**

प्रमाण : चूँकि f, $x=a$ पर संतत है।

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} f(x)=f(x)$$

अब,
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)=\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f(a)}$$

$= x=a$ पर फलन $\frac{1}{f}$ का मान

$\therefore$ $\frac{1}{f}$, $x=a$ पर संतत है।

प्रमेय-प्रत्येक बहुपद संतत होता है (Every Polynomial Function is Continuous)

प्रमाण : माना $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n$ एक बहुपद फलन है।

यहाँ, $a_n \neq 0$ और $a_0, a_1, ..., a_n \in R$ तथा $n \in N$

माना b एक स्वेच्छ वास्तविक संख्या है

स्पष्टत:, $p(b)=a_0+a_1b+a_2b^2+.....+a_nb^n$

तो, $\lim\limits_{x\to b} p(x)=\lim\limits_{x\to b}(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)$

$$=a_0+a_1b+a_2b^2+...+a_nb^n$$

अतएव, $\lim\limits_{x\to b} p(x)=p(b)$

अत: $f(x), x=b$ पर प्रत्येक वास्तविक संख्या b के लिए संतत है।

स्पष्टत:, $p(x)$ अर्थात् बहुपद फलन भी संतत फलन है।

उपप्रमेय I : प्रत्येक अचर फलन भी संतत होता है।

प्रमाण : माना f एक अचर फलन इस प्रकार है कि $f(x)=k$ $\forall\ x$, अब x, a की ओर अग्रसर है तो $f(x)$, k की ओर अग्रसर होगा।

$\therefore \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=k$

तो, $\quad f(a)=k$

$\therefore \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

यह दर्शाता है कि $f(x), x=a$ पर संतत है। चूँकि a कोई स्वेच्छ संख्या है, इसलिए समीकरण वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

अतः प्रत्येक अचर फलन संतत होता है।

उपप्रमेय II प्रत्येक तत्समक फलन संतत होता है।

प्रमाण : तत्समक फलन इस प्रकार परिभाषित है,

$$f(x) = x, \ \forall \ x \in R$$

माना a कोई स्वेच्छ संख्या है। x, a की ओर अग्रसर है तो $f(x)$ भी a की ओर अग्रसर होगा।

अतः $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a = f(a)$

अतः $f(x) = x$, $x = a$, $\forall \ a \in R$ पर संतत है अर्थात् तत्समक फलन संतत होता है।

टिप्पणी : (i) प्रत्येक परिमेय फलन $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ संतत होता है, जब

$$g(a) \neq 0.$$

(ii) sine और cosine फलन हमेशा संतत होता है।

(iii) tangent, cosecant, secant और cotangent फलन अपने प्रान्त में ही संतत होते हैं।

(iv) $\sin^{-1} x$, $[-1, 1]$ में संतत होता है।

(v) फलन a^x, e^x हमेशा संतत होता है।

(vi) लघुगणकीय फलन अपने प्रान्त में ही संतत होता है।

टिप्पणी : (i) प्रत्येक परिमेय फलन $\frac{f(x)}{g(x)}$ संतत होता है, जब $g(a) \neq 0$.

(ii) sine और cosine फलन हमेशा संतत होता है।

(iii) tangent, cosecant, secant और cotangent फलन अपने प्रान्त में ही संतत होते हैं।

(iv) $\sin^{-1} x$, $[-1, 1]$ में संतत होता है।

(v) फलन a^x, e^x हमेशा संतत होता है।

(vi) लघुगणकीय फलन अपने प्रान्त में ही संतत होता है।

उदाहरण 6. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ -2, & x = -1 \end{cases}$

तो क्या $f(x), x = -1$ पर संतत है ?

हल : $x = -1 + h$ रखने पर

जब $x \to -1$ तब $h \to 0$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(-1+h)^2 - 1}{-1+h+1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 - 2h - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h-2)$$

$$= 0 - 2 = -2$$

$x = -1 - h$ रखने पर

जब $x \to -1$ तब $h \to 0$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(-1-h)^2 - 1}{-1 - h + 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 1}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -(h+2)$$

$$= -(0+2) = -2$$

दिया है $f(-1) = -2$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = f(-1)$$

अतः दिया गया फलन $x = -1$ पर संतत है।

उदाहरण 7. सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $x = 3$ पर असंतत है—

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 3 \\ 3, & x = 3 \\ x^2, & x > 3. \end{cases}$$

हल : $x = 3 + h$ रखने पर,

जब $x \to 3$ तब $h \to 0$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{h \to 0} (3+h)^2$$

$$= (3+0)^2 = 9$$

$x = 3 - h$ रखने पर

जब $x \to 3$ तब $h \to 0$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{h \to 0} 3(3-h)$$

$$= 3(3-0) = 9$$

दिया है $f(3) = 3$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) \neq f(3)$$

अतः दिया गया फलन $x = 3$ पर असंतत है।

अवकालनीयता (Differentiability)

माना y = f(x), x का एक फलन है, तो प्रान्त के x के प्रत्येक मान के संगत y का एक अद्वितीय मान होगा, जो कि x पर आश्रित है।

अब y = f(x)

माना x के मान में अल्प वृद्धि δx होने पर y के मान में संगत वृद्धि δy होती है, तो

$$y+\delta y = f(x+\delta x)$$

अत: $y+\delta y - y = f(x+\delta x)-f(x)$

$\Rightarrow$ $\delta y = f(x+\delta x)-f(x)$

$\therefore$ $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

$\because$ $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

(जहाँ $h = \delta x$)

यदि $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}$ अर्थात् $\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ का अस्तित्व है। तब हम कहेंगे कि $f(x)$, x के सापेक्ष अवकलज है और इस स्थिति में $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}$ को अवकलन गुणांक या y का अवकलज अर्थात् $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलन कहते हैं इसे $\frac{dy}{dx}$ या y' या y_1 से व्यक्त करते हैं।

तब, $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}$$

अर्थात्, $$f'(x) = \lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

सीमा का अस्तित्व है।

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

सीमा का अस्तित्व है इसे $f'(a)$ से व्यक्त करते हैं।

यदि फलन अवकलज़ रखता है तो x = a पर फलन अवकलनीय कहलाता है। यदि फलन अन्तराल के प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय है तो फलन उस अन्तराल के प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय कहलायेगा।

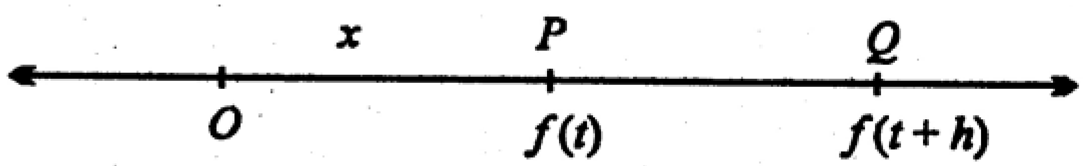
(i) यदि $\lim_{h\to 0-0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$, का अस्तित्व है तो $x = a$ पर $f(x)$ का वाम-हस्त अवकलज कहलाता है तथा इसे $f'(a-0)$ से व्यक्त करते हैं।

(ii) यदि $\lim_{h\to 0+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, का अस्तित्व है तो $x = a$ पर $f(x)$ का दक्षिण-हस्त अवकलज कहलाता है तथा इसे $f'(a+0)$ से व्यक्त करते हैं।

(iii) यदि $f'(a-0) = f'(a+0) = c$ तब $x=a$ पर $f(x)$ अवकलनीय कहलाता है और इसे $f'(a) = k$ से लिखते हैं।

अवकल-गुणांक का भौतिक अर्थ (Physical Interpretation of the Derivative)

माना एक कण एक सरल रेखा के अनुदिश गति कर रहा है। माना हम कण का विस्थापन x को रेखा पर स्थित एक निश्चित बिन्दसे माप रहे हैं। स्पष्टतः विस्थापन x, समय t पर निर्भर करता है तथा x = f(t) के द्वारा विस्थापित माना जा सकता है।



समय t = f(1) पर विस्थापन OP = x है,

समय (t + h) = f(t + h) पर विस्थापन PQ,

∴ समयान्तराल (t + h) - t में विस्थापन = h

= f(t + h) - f(t)

∴ अन्तराल में कण का औसत वेग

$$= \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

अब जैसे-जैसे h छोटा होता जाता है, वैसे-वैसे हमें t के समीपवर्ती और अधिक छोटे अन्तराल में औसत वेग मिलता चला जाता है। इस औसत वेग की सीमा जब h→0, कण का समय t पर तात्कालिक वेग कहलाती है।

∴ समय t पर वेग $(v) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

इसे $\frac{dx}{dt}$ से व्यक्त करते हैं।

इस प्रकार स्पष्ट है कि किसी फलन का अवकल गुणांक फलन से उसी प्रकार संबंधित होता है, जिस प्रकार किसी गतिमान कण का वेग, कण द्वारा चली गई दूरी से संबंधित होता है।

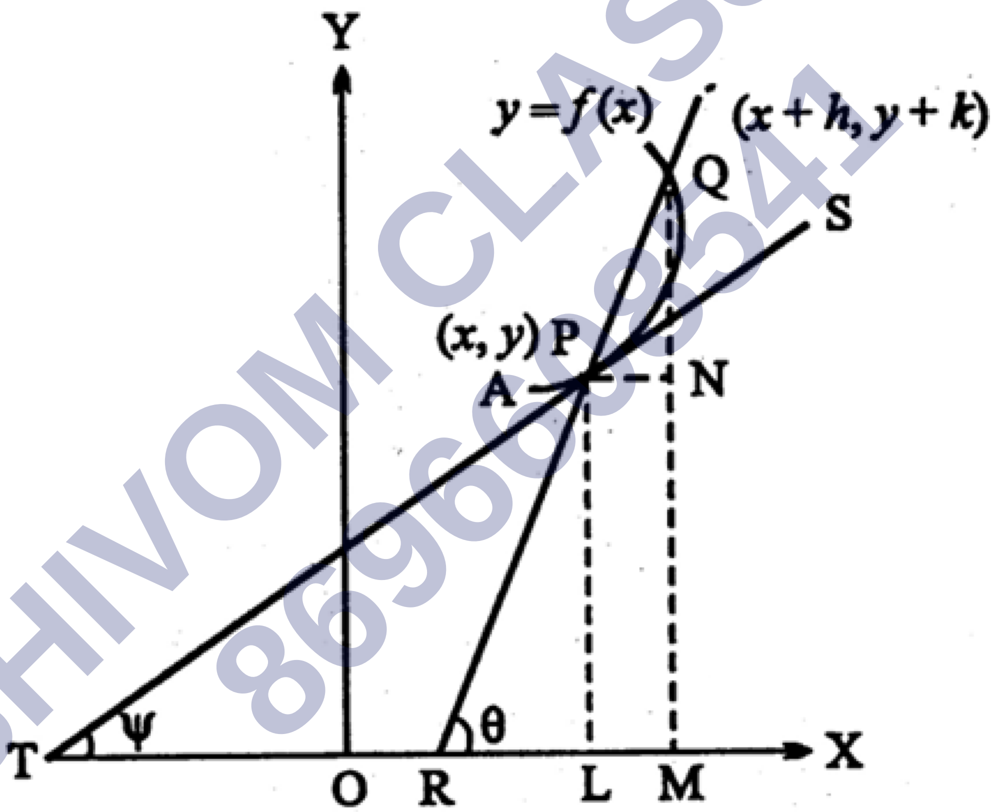
अवकल-गुणांक का ज्यामितीय अर्थ

माना वक्र (सतत् फलन) y = f(x) पर दिया बिन्दु P(x,y) है और वक्र पर Q(x+h,y+k) दूसरा बिन्दु है। माना छेदक रेखा RPQ, X-अक्ष से धन दिशा में θ कोण बनाती है।

X-अक्ष पर PL और QM लम्ब खींचा और PN, QM पर लम्ब है। तब,

$$PN = LM = OM - OL$$
$$= (x+h) - x = h,$$
$$QN = QM - NM = QM - PL$$
$$= (y+k) - y = k$$

और $\angle QPN = \angle PRX = \theta.$



चूँकि बिन्दु P(x,y) और Q(x+h,y+k) वक्र y= f(x) पर स्थित है, अतः

$y+k = f(x+h)$ और $y = f(x).$

$$\therefore \quad (y+k) - y = f(x+h) - f(x)$$

$$\Rightarrow \quad k = f(x+h) - f(x)$$

अब, समकोण ΔPNQ में

$$\tan\theta = \frac{QN}{PN} = \frac{k}{h}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

अब जैसे-जैसे Q $\to$ P अर्थात् h $\to$ 0 छेदक रेखा RPQ बिन्दु P पर स्पर्श रेखा TPS की ओर अग्रसर होगी, और कोण 0 $\to$ ψ, जो कि बिन्दु P पर स्पर्श रेखा और X-अक्ष से कोण है।

$$\therefore \quad \tan\psi = \lim_{h\to 0}\tan\theta$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \tan\psi$$

स्पष्ट है, कि वक्र y = f(x) के बिन्दु (x,y) पर अवकलज $\frac{dy}{dx}$, वक्र के बिन्दु (x,y) पर स्पर्श रेखा जो X-अक्ष से धन दिशा में बनाये कोण की स्पर्शज्या के तुल्य होता है।

दूसरे शब्दों में फलन f (x) का अवकल-गुणांक, वक्र y=f(x) के बिन्दु (x) परस्पर्श रेखा की प्रवणता को निरूपित करता है।

टिप्पणी-

(i) यदि वक्र y= f(x) की बिन्दु (x_1,y_1) पर स्पर्श रेखा X-अक्ष के समान्तर है, तो

$$\tan 0^\circ = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} = 0.$$

(ii) यदि वक्र y = f(x) की बिन्दु (x_1,y_1) पर स्पर्श रेखा X-अक्ष के लम्बवत् है, तो

$$\tan 90^\circ = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} \Rightarrow \infty = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}} = 0.$$

सांतत्यता और अवकलनीयता में संबंध

प्रमेय- यदि कोई फलन किसी बिन्दु पर अवकलनीय है तो वह फलन इस बिन्दु पर संतत भी होगा। परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।

प्रमाण- माना फलन (x) बिन्दु x = a पर अवकलनीय है।

तो,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ निश्चित मान के साथ विद्यमान है।}$$

$$\text{माना } \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \qquad \ldots(1)$$

$x = a$ पर फलन सतत् है सिद्ध करने के लिए यह दर्शाना आवश्यक है कि,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

अब,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}\left[\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)(x - a) + f(a)\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)$$

$$= \lim_{x \to a}\left[\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)(x - a)\right] + f(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(a)$$

$$= \lim_{x \to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) . \lim_{x \to a}(x - a) + f(a)$$

$$= f'(a) \times 0 + f(a), \qquad \text{[समी. (1) से]}$$

$$= f(a)$$

इससे स्पष्ट है कि फलन $x = a$ पर सतत् है।

नोट- इस प्रमेय का विलोम सत्य नहीं है, अर्थात् यदि एक फलन किसी बिन्दु पर संतत है, तो आवश्यक नहीं कि वह उस बिन्दु पर अवकलनीय भी है।

उदाहरण- आसानी से देखा जा सकता है कि, f(x) = |x|, बिन्दु x = 0 पर संतत है, परन्तु इस बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

अतः हम देखते हैं कि

(i) यदि एक फलन f(x), x=a पर अवकलनीय है, तो वह इस बिन्दु पर सतत भी है।

(ii) यदि एक फलन f(x), x= a पर संतत है, तो आवश्यक नहीं कि वह अवकलनीय भी हो।

(iii) यदि एक फलन किसी बिन्दु पर संतत नहीं है तो वह इस बिन्दु पर अवकलनीय भी नहीं है।

उदाहरण-

उदाहरण दर्शाइए कि $f(x) = x^2, x=1$ पर अवकलनीय है और f(c) ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं,

$$\text{LHD} = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{1-h-1}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(1-h)^2-f(1)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1-h)^2-1^2}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1+h^2-2h-1}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2-2h}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2-h = 2$$

और,

$$\text{RHD} = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2+h = 2$$

$\because$ LHD = RHD = 2

$\therefore f(x), x=1$ पर अवकलनीय है और $f'(1)=2.$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण: दर्शाइए कि फलन

$$f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ यदि } x<2 \\ 2x-3, \text{ यदि } x\geq 2 \end{cases}, x=2 \text{ पर अवकलनीय}$$

नहीं है।

हल: हम जानते हैं,

$$\text{RHD} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\{2(2+h)-3\}-(2\times 2-3)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1+2h-1}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2$$

और $\text{LHD} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2-h-1)-(2-1)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1-h-1}{-h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

उपरोक्त से यह स्पष्ट है कि

LHD ($x=2$ पर) $\neq$ RHD ($x=2$ पर)

अतः, $f(x), x=2$ पर अवकलनीय नहीं है।

यही सिद्ध करना था।

प्रथम सिद्धान्त से x^n अवकल गुणांक ज्ञात करना

माना $f(x)=x^n$.

तब, $f(x+h)=(x+h)^n$

$\therefore\ f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n$

$=x^n\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^n-x^n$, जब $\dfrac{h}{x}\le 1$

$$=x^n\left[1+n.\frac{h}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{h}{x}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{h}{x}\right)^3+\ldots\right]-x^n$$

$$=x^n+nhx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}.h^2x^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3.x^{n-3}+\ldots-x^n$$

$$=nhx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3.x^{n-3}+\ldots$$

अतः प्रथम सिद्धान्त से,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}h.x^{n-2}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^2.x^{n-3}+\ldots\right]$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}.0.x^{n-2}+\ldots$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.0^2.x^{n-3}+\ldots$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}}$$

विशेष स्थिति में, यदि $n = 1$ हो, तो

$$\frac{d(x)}{dx} = 1.x^{1-1} = x^0 = 1.$$

प्रथम सिद्धान्त से e^x का अवकल गुणांक

माना $f(x) = e^x$, तब $f(x+h) = e^{x+h}$

$$\therefore \quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x.e^h-e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

$$= e^x.(1), \qquad \left[\because \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1\right]$$

$$= e^x$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

दो फलनों के योग अथवा अन्तर का अवकल

माना $\quad f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$\therefore \quad f(x+h) = f_1(x+h) + f_2(x+h)$

$$\therefore \frac{d}{dx}[f_1(x)+f_2(x)]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f_1(x+h)+f_2(x+h)]-[f_1(x)+f_2(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\left\{\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}\right\}+\left\{\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}\right\}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}[f_1(x)] + \frac{d}{dx}[f_2(x)]$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[f_1(x) + f_2(x)] = \frac{d}{dx}f_1(x) + \frac{d}{dx}f_2(x)$$

अर्थात् दो फलनों के योग का अवकल गुणांक, उन फलनों के अवकल गुणांकों के योग के बराबर होता है।

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f_1 - f_2) = \frac{df_1}{dx} - \frac{df_2}{dx}.$$

नोट: इसी प्रकार दो से अधिक फलनों के योग अथवा अन्तर का अवकल गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \ldots] \\ &\qquad = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) \pm \frac{d}{dx}h(x) \pm \ldots\end{aligned}}$$

उदाहरण-

उदाहरण: यदि $y = \frac{3x^3+4x^2+5}{2x}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$y = \frac{3x^3 + 4x^2 + 5}{2x}$$

$$= \frac{3x^3}{2x} + \frac{4x^2}{2x} + \frac{5}{2x} = \left[\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}x^{-1}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}x^{-1}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\frac{d}{dx}(x^2) + 2\frac{d}{dx}(x) + \frac{5}{2}\frac{d}{dx}(x^{-1})$$

$$=\frac{3}{2}.2x+2+\frac{5}{2}(-1).x^{-1-1}$$

$$=3x+2-\frac{5}{2}x^{-2}.$$

उदाहरण: यदि $y = \log_e x + \log_a x$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ कीजिए।

हल: दिया है: $y = \log_e x + \log_a x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\log_e x+\log_a x)$$

$$=\frac{d}{dx}\log_e x+\frac{d}{dx}\log_a x$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{d}{dx}\log_a e.\log_e x$$

$$=\frac{1}{x}+\log_a e.\frac{d}{dx}\log_e x$$

$$=\frac{1}{x}+\log_a e.\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}(1+\log_a e).$$

उदाहरण: यदि $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $2x\frac{dy}{dx}+y-2\sqrt{x}=0.$

हल: दिया है: $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ ......(1)

$$\Rightarrow \quad y=(x)^{1/2}+(x)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

दोनों पक्षों में 2x से गुणा करने पर,

$$\Rightarrow \quad 2x\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad 2x\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}-y\right), \qquad [\text{समी. (1) से}]$$

$$\Rightarrow \quad 2x\frac{dy}{dx}=2\sqrt{x}-y$$

$$\Rightarrow \quad 2x\frac{dy}{dx}+y-2\sqrt{x}=0.$$

यही सिद्ध करना था।

त्रिकोणमितीय फलनों के अवकल गुणांक

(i) sin x का अवकल गुणांक

माना $\quad f(x)=\sin x$

$\therefore \quad f(x+h)=\sin(x+h)$

अवकलन की परिभाषा से,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos\left(x+\frac{0}{2}\right)\times 1,\left[\because \lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1\right]$$

$$= \cos x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x}$$

(ii) cos x का अवकल गुणांक

माना $\quad f(x)=\cos x$

$\therefore \quad f(x+h)=\cos(x+h)$

अवकलन की परिभाषा से,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{h/2}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -\sin\left(x+\frac{0}{2}\right)\times 1, \left[\because \lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right]$$

$$= -\sin x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$$

(iii) tan x का अवकल गुणांक

माना $f(x) = \tan x$

$\therefore f(x+h) = \tan(x+h)$

अवकलन की परिभाषा से,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cos x-\sin x\cos(x+h)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{\sin h}{h} . \lim_{h\to0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos x.\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}.$$

(iv) cot x का अवकल गुणांक

माना $f(x) = \cot x$

$\therefore$ $f(x+h) = \cot(x+h)$

अवकलन की परिभाषा से,

$$f'(x) = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{\cot(x+h)-\cot x}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{\dfrac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \dfrac{\cos x}{\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{\cos(x+h)\sin x - \cos x\sin(x+h)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{\sin(x-x-h)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -\lim_{h\to0} \frac{\sin h}{h} . \lim_{h\to0} \frac{1}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -1\frac{1}{\sin x.\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\text{cosec}^2 x$$

$\therefore$ $\boxed{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x}$

(v) sec x का अवकल गुणांक

माना $f(x) = \sec x$

$\therefore$ $f(x+h) = \sec(x+h)$

अवकलन की परिभाषा से,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(x+h)}-\frac{1}{\cos x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x-\cos(x+h)}{h\cos(x+h).\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \sin x . 1 . \frac{1}{\cos x . \cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{1}{\cos x} = \sec x \tan x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$$

(vi) cosec x का अवकल गुणांक

माना $f(x) = \text{cosec } x$

$\therefore \quad f(x+h) = \text{cosec}(x+h)$

अवकलन की परिभाषा से,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{cosec}(x+h) - \text{cosec } x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h \sin(x+h) . \sin x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h \sin x \sin(x+h)}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin x\sin(x+h)}$$

$$= -\cos x.1.\frac{1}{\sin x.\sin x}$$

$$= -\text{cosec}\, x\cot x.$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\text{cosec}\, x) = -\text{cosec}\, x\cot x}$$

उदाहरण-

उदाहरण: $e^{\sin x}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

हल: माना $y = e^{\sin x}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{\sin x}$$

$$= \frac{d}{dx}e^t, \qquad [\sin x = t \text{ रखने पर }]$$

$$= \frac{d}{dt}e^t.\frac{dt}{dx}, \qquad \left[\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} \text{ से}\right]$$

$$= e^t.\frac{dt}{dx}$$

$$= e^{\sin x}.\frac{d}{dx}\sin x, \qquad [\because t = \sin x]$$

$$= \cos x.e^{\sin x}.$$ **उत्तर**

उदाहरण: $y = \sqrt{\sin x}$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है : $y = \sqrt{\sin x}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{\sin x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}t^{1/2} = \frac{d}{dt}t^{1/2}\frac{dt}{dx},$$

[$\sin x = t$ रखने पर]

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{d}{dx}\sin x = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}.\cos x. \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण: यदि $y = \log_a(\sec x)$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना $y = \log_a(\sec x)$

$$\Rightarrow \quad y = \log_e \sec x \times \log_a e$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \log_a e.\frac{d}{dx}\log_e(\sec x)$$

$$= \log_a e.\frac{d}{dt}\log_e t.\frac{dt}{dx}, \quad [\sec x = t \text{ रखने पर}]$$

$$= \log_a e.\frac{1}{t}.\frac{d}{dx}\sec x$$

$$= \log_a e.\frac{1}{\sec x}.\sec x \tan x$$

$$= \log_a e.\tan x.$$

त्रिकोणमितीय एवं प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलन

कभी-कभी त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन करने पर प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलन अत्यधिक सुगमता से किया जा सकता है।

प्रतिस्थापन द्वारा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलन में उपयोगी कुछ महत्वपूर्ण परिणाम-

(i) $\sin^{-1}(\sin x) = \sin(\sin^{-1} x) = x$

(ii) $\cos^{-1}(\cos x) = \cos(\cos^{-1} x) = x$

(iii) $\tan^{-1}(\tan x) = \tan(\tan^{-1} x) = x$

(iv) $\sin 2A = 2\sin A \cos A$

(v) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

(vi) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(vii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(viii) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

(ix) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(x) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(xi) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

(xii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right) = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

(xiii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right) = \dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

(xiv) $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1} \dfrac{a+b}{1-ab}$

(xv) $\tan^{-1} a - \tan^{-1} b = \tan^{-1} \dfrac{a-b}{1+ab}$

(xvi) $\sin^{-1} x \pm \sin^{-1} y = \sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}]$

(xvii) $\cos^{-1} x \pm \cos^{-1} y = \cos^{-1}[xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}]$

(xviii) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(xix) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(xx) $\sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$.

कुछ महत्त्वपूर्ण प्रतिस्थापन- कुछ प्रतिलोम वृत्तीय फलन जिसमें निम्न पद सम्मिलित होते हैं, को भी निम्नलिखित प्रतिस्थापनों द्वारा सरल रूप में न्यूनीकृत किया जा सकता है।

फलनों में सम्मिलित पद	प्रतिस्थापन
(i) $a^2 - x^2$	$x = a\sin\theta$ या $a\cos\theta$
(ii) $a^2 + x^2$	$x = a\tan\theta$ या $a\cot\theta$
(iii) $x^2 - a^2$	$x = a\sec\theta$ या $a\operatorname{cosec}\theta$
(iv) $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ या $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a\cos 2\theta$
(v) $\sqrt{\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}$ या $\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$	$x^2 = a^2\cos 2\theta$
(vi) $\sqrt{2ax - x^2}$	$x = a(1-\cos\theta)$.

उदाहरण-

उदाहरण: यदि $y = \sin^{-1}(\sqrt{1-9x^2})$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल: $y = \sin^{-1}(\sqrt{1-9x^2})$

$$y=\sin^{-1}[2(3x)\sqrt{1-(3x)^2}]$$

$3x=\sin\theta$ रखने पर,

तब $\theta=\sin^{-1}3x$

$$y=\sin^{-1}(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta})$$

$$y=\sin^{-1}[2\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta}]$$

$$y=\sin^{-1}[2\sin\theta\cos\theta]$$

$$y=\sin^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$y=2\theta$$

$$y=2\sin^{-1}3x$$

$$\frac{dy}{dx}=2\frac{d}{dx}\sin^{-1}(3x)$$

$$=\frac{2\times 3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

उदाहरण यदि $y = \tan^{-1}\left[\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right]$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल:

$$y=\tan^{-1}\left[\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan x}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}+x, \qquad [\because \tan^{-1}(\tan x)=x]$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=0+1=1.$$

उच्चघाती अवकलन (Differentiation of Higher Order)

यदि y चर x का कोई फलन हो, तो x के सापेक्ष y का अवकल गुणांक $\frac{dy}{dx}$ भी x का एक फलन होगा।

प्रथम अवकलज $\frac{dy}{dx}$ y_1

इसके उच्चपाती अवकलन निम्नानुसार होते हैं-

द्वितीय अवकलज $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}=y_2$

तृतीय अवकलज $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}=y_3$

y_2, y_3 आदि उच्चघाती अवकलज कहलाते हैं।

उत्तरोत्तर अवकलन (Successive Differentiation)

यदि y चर x का कोई फलन हो, तो x के सापेक्ष y का अवकल गुणांक $\frac{dy}{dx}$ भी x का एक फलन होगा। x के सापेक्ष $\frac{dy}{dx}$ के अवकल गुणांक $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ को y का द्वितीय अवकल गुणांक (Second differential coefficient) अथवा द्वितीय अवकलज (Second derivative) कहते हैं और इसे y'', y_2, D^2y, $f''(x)$ या $\frac{d^2y}{dx^2}$ से व्यक्त करते हैं।

इसी प्रकार, द्वितीय अवकलज का भी अवकलन किया जा सकता है। इसे तृतीय अवकल गुणांक या तृतीय अवकलज कहते हैं। इसी तरह चतुर्थ, पंचम, ... अवकलज भी प्राप्त किये जा सकते हैं।

n अवकल गुणांक या अवकलज को $y_n, D^ny, \frac{d^ny}{dx^n}$ से व्यक्त करते हैं।

उदाहरण-

उदाहरण: यदि $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $= \frac{d^2y}{dx^2}=m^2y$

हल:

दिया है : $y=ae^{mx}+be^{-mx}$ ...(1)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=ae^{mx}.m+be^{-mx}(-m)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=ame^{mx}-bme^{-mx} \quad ...(2)$$

पुनः अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = am\,e^{mx}.(m) - bm\,e^{-mx}(-m)$$

$$= m^2(ae^{mx} + be^{-mx}) \text{ [समी. (1) से]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m^2y. \qquad \text{यही सिद्ध करना था।}$$

उदाहरण: यदि y = tan x + sec x हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$

हल: दिया है : y = tanx + secx

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \sec x \tan x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \sec x(\sec x + \tan x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}\left[\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1}{(1-\sin x)}$$

$$= \frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1}{(1-\sin x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-\sin x}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-\sin x).0 - 1.(0-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}.$$

यही सिद्ध करना था।

अस्पष्ट फलनों के अवकलज (Derivatives of Implicit Functions)

यदि ऐसा सम्बन्ध दिया गया हो जिसमें y को x के पदों में स्पष्ट रूप से व्यक्त नहीं किया जा सकता है तो y को x का अस्पष्ट फलन कहते हैं। जैसे- $ax^2 + by^2 + 2hxy = 0$ में x का अस्पष्ट फलन है।

उदाहरण

उदाहरण: $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $x^2 + y^2 = a^2$

हल: दिया है, $x^2 + y^2 = a^2$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}a^2$$

$$\Rightarrow \quad 2x + \frac{d}{dy}y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}.$$

उदाहरण: $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

हल: दिया है: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

दोनों पक्षों के प्रत्येक पद का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}y^3 - 3a\frac{d}{dx}(xy) = 0$$

$$3x^2+\frac{d}{dy}y^3\cdot\frac{dy}{dx}-3a\left(y\frac{d}{dx}x+x.\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$3x^2+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}-3a\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2\frac{dy}{dx}-ax\frac{dy}{dx}-ay=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(y^2-ax)=ay-x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

लघुगणकीय अवकलन (Logarithmic Differentiation)

यदि वह फलन जिसका हमें अवकलन करना है-

(i) कई फलनों का गुणनफल हो, अथवा

(ii)दो फलनों का भागफल हो, अथवा

(iii) एक फलन की फलनीय घात (functional power) हो, तब दिए फलन का अवकलन करने से पूर्व हम उसका लघुगणक लेते हैं। इस प्रकार अवकलन क्रिया सरल हो जाती है। लघुगणक लेकर अवकलन की क्रिया लघुगणकीय अवकलन कहलाती है।

फलन y = $[f(x)]^{f(x)}$ का अवकलज ज्ञात करना-

$$y=[f(x)]^{f(x)})$$

दिया है : $y=[f(x)]^{f(x)}$

दोनों पक्षों का log लेने पर,

$$\log y=\log[f(x)]^{f(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \log y=f(x)\log f(x)$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}\log y = f(x)\frac{d}{dx}\log f(x) + \log f(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\log y\frac{dy}{dx} = f(x).\frac{d}{dx}\log t + \log f(x) f'(x),$$

$[f(x) = t$ रखने पर$]$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = f(x).\frac{d}{dt}\log t\frac{dt}{dx} + f'(x)\log f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = f(x)\times\frac{1}{t}\frac{d}{dx}f(x) + f'(x)\log f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{f(x)}f'(x) + f'(x)\log f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = f'(x) + f'(x)\log f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = f'(x)[1 + \log f(x)]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = yf'(x)[1 + \log f(x)]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = [f(x)]^{f(x)} f'(x)[1 + \log f(x)].$$

उदाहरण-

उदाहरण: यदि $y = x^x$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = x^x\,[1 + \log x]$

हल: दिया है : $y = x^x$

दोनों पक्षों में log लेने पर,

$$\log y = \log x^x$$

$$\log y = x \log x, \qquad [\because \log m^n = n \log m]$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}\log y = \log x \cdot \frac{d}{dx}x + x\frac{d}{dx}\log x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\log y \cdot \frac{dy}{dx} = \log x.1 + x \times \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \log x$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = y[1 + \log x]$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = x^x[1 + \log x].$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण: यदि $y = (\sin x)^{\sin x}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\sin x} = \cos x \; [1 + \log(\sin x)]$

हल: दिया है: $y = (\sin x)^{\sin x}$

दोनों पक्षों में log लेने पर,

$$\log y = \log(\sin x)^{\sin x}$$

$$\Rightarrow \qquad \log y = \sin x.\log(\sin x)$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}\log y = \sin x\frac{d}{dx}\log(\sin x) + \log(\sin x).\frac{d}{dx}\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\log y\frac{dy}{dx}$$

$$= \sin x \frac{d}{dx} \log t + \log(\sin x) . \cos x,$$

($\sin x = t$ रखने पर)

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x \times \frac{d}{dt} \log t \frac{dt}{dx} + \cos x . \log (\sin x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{t} . \frac{d}{dx} \sin x + \cos x . \log (\sin x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin x} \times \cos x + \cos x \log (\sin x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y[\cos x + \cos x \log(\sin x)]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\sin x} . \cos x [1 + \log(\sin x)].$$

यही सिद्ध करना था।

फलन $y = [f(x)]^{g(x)}$ का अवकलज ज्ञात करना

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

दिया है : $y = [f(x)]^{g(x)}$

दोनों पक्षों में log लेने पर,

$$\log y = \log [f(x)]^{g(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \log y = g(x) . \log f(x)$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx} \log y = \log f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} \log f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\log y \frac{dy}{dx} = \log f(x)[g'(x)] + g(x)\frac{d}{dx}\log t,$$

$(f(x) = t$ रखने पर)

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = g'(x)\log f(x) + g(x).\frac{d}{dt}\log t \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = g'(x)\log f(x) + \frac{g(x)}{t}\frac{d}{dx}f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = g'(x)\log f(x) + \frac{g(x)}{f(x)}f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{g(x)f'(x)}{f(x)} + g'(x)\log f(x)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = [f(x)]^{g(x)}\left[\frac{g(x)f'(x)}{f(x)} + g'(x)\log f(x)\right].$$

प्राचलिक फलन के अवकलज

यदि चर x और y को तीसरे चर t के पदों में व्यक्त किया जाये तो तीसरे चर t को प्राचल (parameter) कहते हैं। वे समीकरण जो x और y को अलग-अलग तीसरे चर t के रूप में व्यक्त करते हैं, प्राचलिक समीकरण कहलाते हैं।

प्रमेय: यदि x = f(t) तथा y = ∅(t) हो, तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

उपपत्ति (Proof): माना 1 के मान में अल्प वृद्धि δt की जाती है जिससे x और y के मान में क्रमशः δx और δy की वृद्धि होती है।

अत: δt → 0 ⇒ δx → 0 तथा δy → 0

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y/\delta t}{\delta x/\delta t}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta y/\delta t}{\delta x/\delta t} = \frac{\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta y}{\delta t}}{\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t}}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

उदाहरण-

उदाहरण: $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए यदि x = a(t+sin t), y = a(1-cos t).

हल: दिया है: x = a(t + sint)

$$\therefore \qquad \frac{dx}{dt} = a(1+\cos t)$$

पुनः $\qquad y = a(1-\cos t)$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dt} = a(0+\sin t) = a\sin t$$

$$\text{अतः} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a(1+\cos t)}$$

$$= \frac{\sin t}{1+\cos t} = \frac{2\sin t/2 \cos t/2}{2\cos^2 t/2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \tan\frac{t}{2}.$$

उदाहरण: यदि x = $a\cos^3 t$ तथा y = $a\sin^3 t$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है: $x = a\cos^3 t$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{d}{dt}\cos^3 t$$

$\cos t = u$ रखने पर,

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{d}{dt}u^3 \quad = a\frac{d}{du}u^3\frac{du}{dt}$$

$$= a \times 3u^2\frac{d}{dt}\cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t$$

माना $y = a\sin^3 t$

$$\frac{dy}{dt} = a\frac{d}{dt}\sin^3 t$$

$\sin t = u$ रखने पर,

$$\frac{dy}{dt} = a\frac{d}{dt}u^3$$

$$= a\frac{d}{du}u^3\frac{du}{dt} \quad = 3au^2\frac{d}{dt}\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t.\cos t$$

अत: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\tan t.$$

एक फलन का दूसरे फलन के सापेक्ष अवकल गुणांक

माना $y_1 = f_1(x)$ तथा $y_2 = f_2(x)$

तब, $\frac{dy_1}{dx} = f_1'(x)$ तथा $\frac{dy_2}{dx} = f_2'(x)$

अत: $\dfrac{dy_1}{dy_2} = \dfrac{\frac{dy_1}{dx}}{\frac{dy_2}{dx}} = \dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$.

इस प्रकार,

फलन y_1 का y_2 के सापेक्ष अवकल गुणांक $= \dfrac{x \text{ के सापेक्ष } y_1 \text{ का अवकलन}}{x \text{ के सापेक्ष } y_2 \text{ का अवकलन}}$

उदाहरण-

उदाहरण: e^x का $\sqrt{x}$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

हल:

$$y_1 = e^x \quad \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = e^x$$

तथा $\quad y_2 = \sqrt{x} \Rightarrow \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\therefore \quad \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{e^x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= 2\sqrt{x} \cdot e^x.$$

उदाहरण: $e^{\tan x}$ का $\sin x$ के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल:

$$y_1 = e^{\tan x}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx} e^{\tan x}$$

$$= \frac{d}{dt} e^t \cdot \frac{dt}{dx}, \qquad (\tan x = t \text{ रखने पर})$$

$$= e^t \frac{d}{dx} \tan x$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy_1}{dx} = e^{\tan x} \cdot \sec^2 x$$

$$y_2 = \sin x$$

अब x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx} \sin x \Rightarrow \frac{dy_2}{dx} = \cos x$$

$$\therefore \qquad \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\frac{dy_1}{dx}}{\frac{dy_2}{dx}} = \frac{e^{\tan x} \cdot \sec^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{e^{\tan x}}{\cos^3 x}$$

रोले का प्रमेय (Rolle's Theorem)

यदि f(x) एक ऐसा फलन है कि

(i) f(x), [a, b] में संतत है,

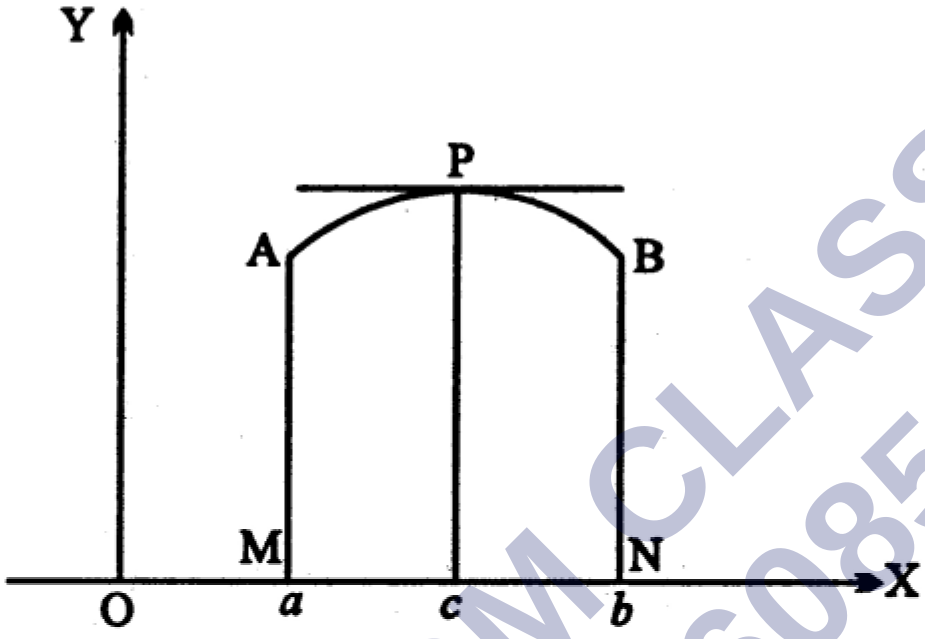
(ii) f(x), (a, b) में अवकलनीय है, तथा

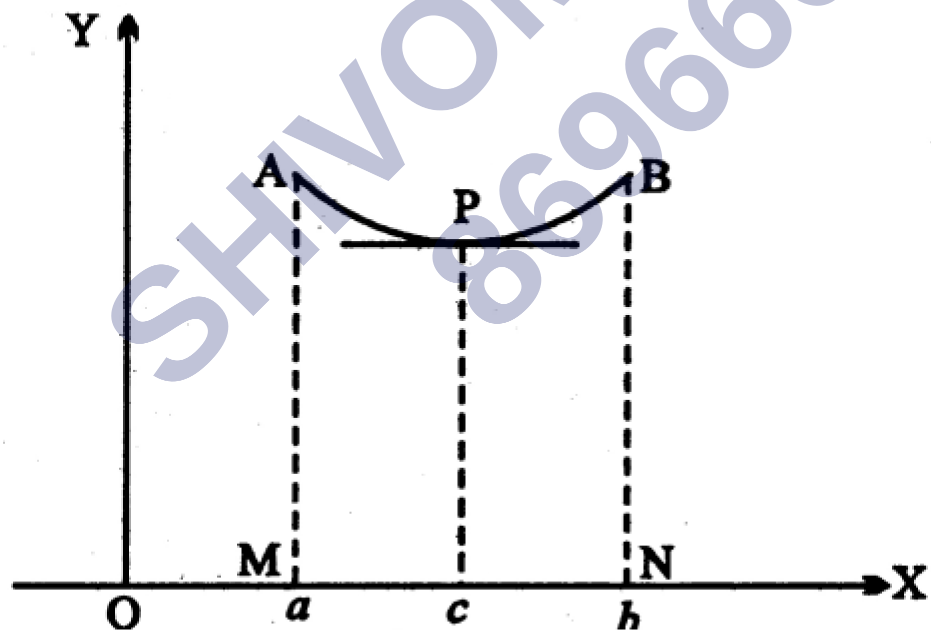
(iii) f(a) = f(b)

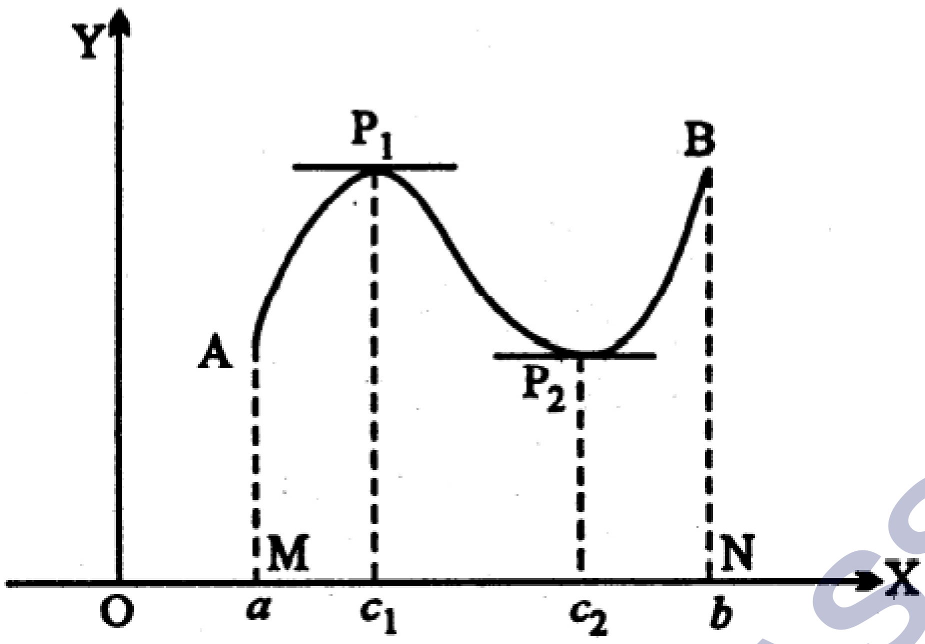
तब (a,b) में x का कम-से-कम एक मान 'c' इस प्रकार से अस्तित्व रखता है कि f'(c) = 0

रोले के प्रमेय की ज्यामितीय व्याख्या

संलग्न चित्रों में वक्र Y = f(x) का ग्राफ AB अन्तराल [a,b] में प्रदर्शित किया गया है तथा f(a) = f(b). चूँकि अन्तराल [a, b] में फलन संतत है, A और B के बीच ग्राफ संतत होगा। अन्तराल (a, b) में फलन f(x) अवकलनीय है। अतः A और B के बीच प्रत्येक बिन्दु पर एक अद्वितीय स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।







पुनः चूंकि f(a) = f(b) अर्थात् AM = BN वक्र पर कम-से-कम एक बिन्दु P ऐसा अवश्य होगा जिस पर खींची गई स्पर्श रेखा X-अक्ष के समान्तर होगी। इस स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ = 0 अर्थात् f'(x) = 0 होगी।

इस प्रकार यदि बिन्दु P की भुजा c हो, तो a < c < b तथा f"(c) = 0.

उदाहरण-

उदाहरण: रोले के प्रमेय की जांच $f(x) = x^2 - 4x + 3$ के लिए अन्तराल [1,3] में कीजिए।

हल:

(i) फलन $f(x) = x^2 - 4x + 3$ बहुपदीय फलन है। अत: यह अन्तराल [1,3] में संतत होगा।

(ii) $f'(x) = 2x - 4$ जो x के सभी मानों के लिए अस्तित्व रखता है। अतः यह अन्तराल (1,3) में अवकलनीय है।

(iii) $f(1) = (1)^2 - 4(1) + 3 = 0$

तथा $f(3) = 3^2 - 4\times3 + 3 = 0$

अतः f(1) = f(3)

अब विवृत्त अन्तराल (1,3) में c इस प्रकार है कि f'(c) = 0

$\therefore \quad f'(c) = 2c - 4 = 0$

[f'(x) = 2x - 4 में x = c रखने पर]

∴ c = 2, यह स्पष्टतः अन्तराल (1,3) के अन्तर्गत है। इस प्रकार 1<2<3

अतः रोले का प्रमेय सत्यापित होता है।

उदाहरण: फलन f(x) = sinx + cosx - 1 के लिए अन्तराल 0,5 में रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

हल:

(i) चूँकि ज्या (sine), कोज्या (cosine) तथा बहुपद फलन संतत होते हैं।

∴ $f(x)=\sin x+\cos x-1$, बन्द अन्तराल $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ में संतत होता है।

(ii) $f'(x)=\cos x-\sin x$ जो $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में स्थित x के सभी मानों के लिए अस्तित्व रखता है। अत: $f(x)$, अन्तराल $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में अवकलनीय है।

(iii) $f(0)=\sin 0+\cos 0-1=0+1-1=0$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-1=1+0-1=0$$

$$\therefore \quad f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

अत: $f(x)$, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ में रोले के प्रमेय की तीनों शर्तों को सन्तुष्ट करता है। अत: $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में c के कम-से-कम एक मान का अवश्य अस्तित्व होना चाहिए जिसके लिए $f'(c)=0$

अब $f'(c)=0$

$\Rightarrow \cos c-\sin c=0$

$\Rightarrow \sin c=\cos c$

$\Rightarrow \tan c=1=\tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore c=\frac{\pi}{4}$

स्पष्टतः $0<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$

अतः रोले का प्रमेय सत्यापित होता है।

यही सिद्ध करना था।

लैग्रांज का मध्यमान प्रमेय

यदि f(x) एक ऐसा फलन है कि

(i) f(x), [a,b] में संतत है।

(ii)f(x),(a,b) में अवकलनीय है।

(iii) f(a) $\neq$ f(b)

तब, (a, b) में f(x) का कम-से-कम एक मान c इस प्रकार अस्तित्व रखता है कि

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f-c.$$

ज्यामितीय व्याख्या

संलग्न चित्र में फलन y = f(x) का ग्राफ AB प्रदर्शित किया गया है।

माना A और B के निर्देशांक (a,f(a)) तथा (b,f(b)) हैं।

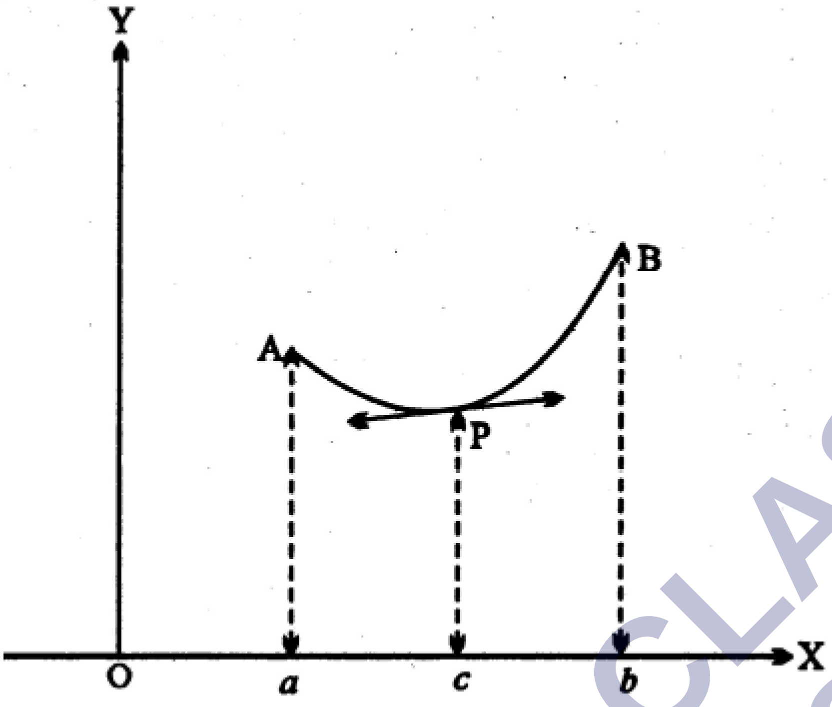
तब जीवा AB की प्रवणता = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

यदि फलन f(x) अन्तराल [a,b] में संतत है, तो ग्राफ A और B के मध्य संतत होगा।

पुनः यदि अन्तराल (a,b) में अवकलनीय है तो A और B के बीच प्रत्येक बिन्दु पर एक अद्वितीय स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। माना कि कोई बिन्दु P (c,f(c)) है और c ऐसा है कि

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'c.$$

तब बिन्दु P पर स्पर्श रेखा की प्रवणता = f'(c)



चित्र

इस प्रकार, हम देखते हैं कि जीवा AB और बिन्दु P पर स्पर्श रेखा की प्रवणता समान है। अतः बिन्दु A और B के मध्य P एक ऐसा बिन्दु है, जिस पर खींची गई स्पर्श रेखा जीवा AB के समान्तर है।

नोट: लैग्रांज के मध्यमान प्रमेय को ही प्रथम मध्यमान प्रमेय या मध्यमान प्रमेय (mean value theorem) कहा जाता है।

उदाहरण-

उदाहरण: फलन $f(x)=2x^2-10x+29$ के लिए अन्तराल [2, 7] में लैग्रांज के प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

हल:

(i) $f(x) = 2x^2 - 10x + 29$ बहुपदीय फलन है।

अतः $f(x)$ अन्तराल [2, 7] में संतत होगा।

(ii) $f'(x) = 4x - 10$, यह अन्तराल (2, 7) में अवकलनीय है।

(iii) $f(2) = 2(2)^2 - 10 \times 2 + 29 = 8 - 20 + 29 = 17$

$$f(7)=2(7)^2-10(7)+29=98-70+29=57$$

इस प्रकार $\quad f(2)\neq f(7)$

मध्यमान प्रमेय से, $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{57-17}{7-2}$

$$=\frac{40}{5}=8$$

अतः $\quad f'(x)=4x-10$ से,

$$f'(c)=4c-10$$

$\therefore \quad 4c-10=8$

$\Rightarrow \quad c=\dfrac{9}{2}=4{\cdot}5$

इस प्रकार $2<4{\cdot}5<7$.

अतः लैग्रांज का मध्यमान प्रमेय सत्यापित होता है।

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण: $f(x)=e^x$ के लिए अन्तराल [0, 1] में लैग्रांज के मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

हल :

(i) $f(x)=e^x$ चरघातांकी फलन है। अतः $f(x)$ अन्तराल [0, 1] में संतत है।

(ii) $f'(x)=e^x$, यह अन्तराल (0,1) में अवकलनीय है।

(iii) $f(0)=e^0=1$ तथा $f(1)=e^1=e$ इस प्रकार $f(0)\neq f(1)$

मध्यमान प्रमेय से, $\quad f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow \quad f'(c)=\dfrac{e-1}{1-0}=e-1$

अतः $f'(x)=e^x$ से, $f'(c)=e^c$

$\therefore \quad e-1=e^c$

$$c=\log(e-1)$$

स्पष्ट है कि $0<\log(e-1)<1$

अतः लैग्रांज का प्रमेय सत्यापित होता है।

उदाहरण: यदि x=acosθ+bsinθ और y=asinθ-bcosθ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$y^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

हल:

$$x = a\cos\theta + b\sin\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(a\cos\theta + b\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{d\theta} = a\frac{d}{d\theta}\cos\theta + b\frac{d}{d\theta}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta + b\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{d\theta} = -(a\sin\theta - b\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{d\theta} = -y$$

$$\Rightarrow \quad y = a\sin\theta - b\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(a\sin\theta - b\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\theta} = a\frac{d}{d\theta}\sin\theta - b\frac{d}{d\theta}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta + b\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\theta} = x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\left(y\frac{d}{dx}x - x\frac{dy}{dx}\right)}{y^2}$$

$$\Rightarrow \quad y^2\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(y \times 1 - x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y^2\frac{d^2y}{dx^2} = -y + x\frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow y^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0.$ **यही सिद्ध करना था।**

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 5.1 (पृष्ठ संख्या 173-176)

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि फलन f(x) = 5x - 3, x = 0, x = -3 तथा x = 5 पर संतत है।

उत्तर- यहाँ, f(x) = 5x – 3

i. x = 0 पर, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(5x - 3) = 5 \times 0 - 3 = -3$

तथा $f(0) = -3$

$\because \lim_{x \to 0} f(x) = -3 f(0)$

अतः x = 0 पर f संतत है।

ii. x = -3 पर, $\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3}(5x - 3) = 5 \times (-3) - 3 = -15 - 3 = -18$

तथा $f(-3) = -18$

अतः x = -3 पर f संतत है।

iii. x = 5 पर, $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5}(5x - 3) = 5 \times 5 - 3 = 25 - 3 = 22$

तथा $f(5) = 22$

अतः x = 5 पर संतत है।

प्रश्न 2. x = 3 पर फलन f(x) = 2x² - 1 के सांतत्य की जाँच कीजिए।

उत्तर- यहाँ, f(x) = 2x – 1

x = 3 पर, $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(2x^2 - 1) = 2 \times 9 - 1 = 18 - 1 = 17$

तथा $f(3) = 17$

$\because \lim_{x \to 3} = 17 = f(3)$

अतः x = 3 पर f संतत है।

प्रश्न 3. निम्नलिखित फलन के सांतत्य की जाँच कीजिए:

i. $f(x) = x - 5$
ii. $f(x) = \frac{1}{x-5}, x \neq 5$
iii. $f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}, x \neq -5$
iv. $f(x) = |x - 5|$

उत्तर-

i. $f(x) = x - 5$

∵ (x − 5) एक बहुपद है।

अतः प्रत्येक बिन्दु $x \in R$ पर f संतत है।

ii. $f(x) = \frac{1}{x-5} \because f(5) = \frac{1}{5-5} = \frac{1}{0} = \infty$

चूँकि x = 5 पर f(x) परिभाषित नहीं है।

अतः x = 5 पर f संतत नहीं है। लेकिन $x \in R - \{5\}$ के प्रत्येक बिन्दु पर f संतत है।

iii. $f(x) = \frac{x^2-25}{x+5} \because f(-5) = \frac{25-25}{-5+5} = \frac{0}{0} = 0$

a. x = -5 पर f परिभाषित नहीं है।

∴ x = −5 पर f संतत भी नहीं है।

b. $x \neq -5$,

माना $x = c \neq -5$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{x^2-25}{x+5}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)} = \lim_{x \to c} (x-5) = c-5$$

अतः x ∈ R − {−5} के प्रत्येक बिन्दु पर f संतत है।

iv. f(x) = |x − 5|

x = 5 पर, $\lim_{x\to5} f(x) = \lim_{x\to5} |x-5| = 0$

तथा $f(5) = 0 \because \lim_{x\to5} = 0 = f(5)$

∴ x = 5 पर f संतत है।

पुनः यदि x > 5,

माना x = c > 5

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} |x-5| = c-5 = f(c) \ [\because c > 5]$$

∴ जब x > 5, f संतत है।

यदि x < 5,

माना x = c < 5

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} |x-5| = -(c-5) = 5-c = f(c)$$

∴ जब x < 5, तब f संतत है।

अतः x ∈ R, प्रत्येक बिन्दु पर f संतत है।

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^n$, $x = n$ पर संतत है, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

उत्तर- दिया है- $f(x) = x^n$ एक बहुपदीय फलन है।

संतत है, यदि $x \in R$ तथा $x \in N$

यहाँ $x = n$ एक पूर्णांक है।

अत: $f(x) = x^n$ संतत फलन है।

प्रश्न 5.

क्या $f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \le 1 \\ 5, & \text{if } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f

$x = 0$, $x = 1$, तथा $x = 2$ पर संतत है?

उत्तर- $x = 0$ तथा $x = 2$ पर फलन एक बहुपद है।

अतः $x = 0$ तथा $x = 2$ पर फलन संतत है।

$x = 1$ पर, $f(x) = x < 1$ के लिए, $f(x) = 5$, $x > 1$ के लिए

$$\text{L.H.S.} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x) = 1$$

$$\text{तथा R.H.S.} = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x) = 5$$

$$\because \quad = \lim_{x \to 1^-} f(x) \ne \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

प्रश्न 6. f के असांतत्य के बिन्दु को ज्ञात कीजिए जबकि f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{if } x \le 2 \\ 2x - 3, & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

उत्तर-

दिया है- $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{if } x \le 2 \\ 2x-3, & \text{if } x > 2 \end{cases}$

i. x = 2 पर तथा जब x < 2 हो तब f(x) = 2x + 3

$$\text{L.H.S.} = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0}[2(0-h)+3] = \lim_{h - 0}[-2h+3] = 3$$

ii. जब x > 2 हो तब f(x) = 2x – 3

$$\text{R.H.S.} = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} 2(0+h) - 3 = -3$$

$$\Rightarrow \text{L.H.S.} \neq \text{R.H.S.}$$

अतः x = 2 पर फलन f संतत नहीं है।

∵ x ≠ 2 पर फलन बहुपदी द्वारा परिभाषित है।

अतः x ≠ 2 के अतिरिक्त फलन सभी बिन्दुओं पर संतत है।

प्रश्न 7.

$$f(x) = \begin{cases} |x|+3, & \text{if } x \le -3 \\ -2x, & \text{if } -3 < x < 3 \\ 6x+2, & \text{if } x \ge 3 \end{cases}$$

उत्तर-

$$f(x)=\begin{cases}|x|+3, & \text{if } x\le -3\\ -2x, & \text{if } -3<x<3\\ 6x+2, & \text{if } x\ge 3\end{cases}$$

दिया गया फलन वास्तविक संख्या -3 व 3 के अतिरिक्त सभी बिन्दुओं पर संतत है। माना c वास्तविक संख्या रेखा पर कोई बिन्दु नहीं है।

स्थिति (i) x = -3 पर, f(x) = |x| + 3, यदि x < -3

$$\text{L.H.S.}=\lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(-3-h)=\lim_{h\to 0}(|-3-h|+3)$$

$$=\lim_{h\to 0}(3+h)+3=3+0+3=6$$

जब $x>-3,\ f(x)=-2x$

$$\text{R.H.S.}=\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{h\to 0} f(-3+h)=\lim_{h\to 0}-2(-3+h)$$

$$=\lim_{h\to 0}(6-h)=6-0=6$$

जब $x=-3,\ f(x)=|x|+3$

$$\therefore f(-3)=|-3|+3=6$$

इस प्रकार, $\lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^+} f(x)=f(-3)$

अतः $\text{L.H.S.}=\text{R.H.S}=f(-3)$

अतः x = -3 पर फलन f संतत है।

स्थिति (ii) x = 3 पर, जब x < 3, f(x) = -2x

$$\text{L.H.S.}=\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(3-h)=\lim_{h\to 0}-2(3-h)$$

$$= -2(3 - 0) = -6$$

जब x > 3 f(x) = 6x + 2

$$\text{R.H.S.} = \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(3 + h) \lim_{h \to 0} [6(3 + h) + 2]$$

$$= 6(3 \times 0) + 2 = 20$$

अतः $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \Rightarrow \text{L.H.S} \neq \text{R.H.S}$

अतः x = 3 पर फलन f संतत नहीं है।

स्थिति (iii) x = c < -3, तब f(c) = -c + 3

$$\therefore \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-x + 3) = |-c| + 3 = f(c)$$

$\therefore$ x, -3 से छोटी सभी बिन्दुओं पर संतत है।

स्थिति (iv) यदि -3 < c < 3, तब f(c) = -2c

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-2x) = -2c$$

$$\Rightarrow f(x) = f(c)$$

अतः x = c, -3 < c < 3 पर फलन f संतत है।

स्थिति (v) x = c > 3, तब f(c) = 6c + 2

और $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} (6x + 2) = (6c + 2)$

अतः x = c > 3 पर फलन f संतत है।

अतः फलन केवल x = 3 पर असंतत है।

प्रश्न 8.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & \text{if } x\neq 0\\ 0, & \text{if } x=0\end{cases}$$

उत्तर-

$$\text{L.H.S. at } x=0$$

$$=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(0-h)=\lim_{h\to 0} f(-h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|-h|}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{-h}=\lim_{h\to 0}-1=-1$$

$$\text{R.H.S. at } x=0$$

$$=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{h\to 0} f(0+h)=\lim_{h\to 0} f(h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

अतः फलन असंतत है।

प्रश्न 9.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & \text{if } x<0\\ -1, & \text{if } x\geq 0\end{cases}$$

उत्तर-

ज्ञात है, $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & \text{if } x<0\\ -1, & \text{if } x\geq 0\end{cases}$

i. x = 0 पर, जब < 0, $f(x)=\frac{x}{|x|}$, $[\because |x|=-x$ जब $x<0]$

$$\text{L.H.S} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{x}{|x|}\right) = -1$$

जब x > 0, f(x) = -1

$$\text{R.H.S} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$$

तथा f(0) = -1

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

अतः x = 0 पर फलन f संतत है।

ii. x = c < 0 पर, $f(x) = \frac{x}{|x|}$

अतः $\lim_{x \to c} f(x) = -1 = f(c)\ [\because |x| = -x]$

iii. $x = c > 0, f(x) = -1$

$$\therefore \lim_{x \to c} f(x) = -1 = f(c)$$

$\therefore x = c > 0$ पर फलन f संतत है।

अतः दिया हुआ फलन $x \in R$, सभी बिन्दुओं पर संतत है।

प्रश्न 10.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{if } x \geq 1 \\ x^2 + 1, & \text{if } x < 1 \end{cases}$$

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{if } x\geq 1 \\ x^2+1, \text{if } x<1 \end{cases}$

∵ फलन x > 1 तथा x < 1 के लिए बहुपदीय फलन है।

∴ यह x > 1 तथा x < 1 के R के प्रत्येक मान के लिए संतत है।

i. x = 1 पर, $f(x) = x^2 + 1$, जब x < 1

$$\text{L.H.S.} = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2+1) = 1+1 = 2$$

$\therefore f(x) = x + 1$ जब x >1

$$\text{R.H.S.} = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 1+1 = 2$$

ii. जब x = 1, f(x) = x + 1

$$\therefore\ f(1) = 1+1 = 2$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

अतः x = 1 पर फलन f संतत है।

अतः $x \in R$, f के सभी बिन्दुओं पर संतत है।

प्रश्न 11.

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3, \text{if } x\leq 2 \\ x^2+1, \text{if } x>2 \end{cases}$$

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x)=\begin{cases} x^3-3, \text{if } x\leq 2 \\ x^2+1, \text{if } x>2 \end{cases}$

$\because$ फलन x > 2 तथा x < 2 के लिए बहुपदीय फलन है।

अतः x < 2 तथा $x > 2 \in R$ के प्रत्येक मान के लिए फलन संतत है।

x = 2 पर, f(x) = x^3 - 3, जब x < 2

$$\text{L.H.S.} = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (x^3 - 3) = 8 - 3 = 5$$

जब x > 2, f(x) = x^2 + 1

$$\text{R.H.S.} = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 + 1) = 4 + 1 = 5$$

जब x = 2, f(x) = x^3 - 3

$$f(2) = (2)^3 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$\therefore \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$$

अतः x = 2 पर फलन f संतत है।

अतः फलन $f, x \in R$ सभी बिन्दुओं पर संतत है।

प्रश्न 12.

$$f(x) = \begin{cases} x^{10} - 1, \text{if } x \leq 1 \\ x^2, \quad \text{if } x > 1 \end{cases}$$

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x) = \begin{cases} x^{10} - 1, \text{if } x \leq 1 \\ x^2, \quad \text{if } x > 1 \end{cases}$

दिया गया फलन वास्तविक संख्या रेखा के बिन्दुओं पर परिभाषित है। माना वास्तविक संख्या रेखा पर कोई बिन्दु c है।

स्थिति i

$x = 1$ पर, $f(x) = x^{10} - 1$ जब $x < 1$

$$\text{L.H.S.} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^{10} - 1) = 1 - 1 = 0$$

$f(x) = x^2$, जब $x > 1$

$$\text{R.H.S.} = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2) = 1$$

$x = 1$ पर

$$\therefore \text{L.H.S.} \neq \text{R.H.S.}$$

अतः $x = 1$ पर फलन f असंतत है।

स्थिति ii

$x = c < 1$ पर, $f(x) = x^{10} - 1$

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = c^{10} - 1$$

$\therefore$ फलन $x < 1$ के सभी बिन्दुओं के लिए संतत है।

स्थिति iii

$x = c > 1$ पर, $f(x) = x^2$

$$\therefore \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x^2) = f(c) = x^2 = c^2$$

$\therefore$ $x = c > 1$ पर f संतत है।

$\Rightarrow x \in R - \{1\}$ के लिए फलन f संतत है।

अतः $x = 1$ पर फलन f संतत नहीं है।

प्रश्न 13. क्या

$$f(x) = \begin{cases} x+5, \text{if } x \le 1 \\ x-5, \text{if } x > 1 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन, एक संतत फलन है?

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x) = \begin{cases} x+5, \text{if } x \le 1 \\ x-5, \text{if } x > 1 \end{cases}$

∵ फलन x < 1 तथा x > 1 के लिए बहुपद द्वारा परिभाषित है।

∵ x < 1 व x > 1 के लिए फलन संतत है।

x = 1 पर, f(x) = x + 5, जब x < 1

$$\text{L.H.S.} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+5) = (1+5) = 6$$

f(x) = x - 5, जब x > 1

$$\therefore \text{R.H.S.} = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x-5) = (1-5) = -4$$

$$\Rightarrow \text{L.H.S.} \neq \text{R.H.S.}$$

अतः x = 1 पर फलन f असंतत है।

अतः $x \in R - \{1\}$ के सभी बिन्दुओं पर फलन f संतत है।

फलन f, के सांतत्य पर विचार कीजिए, जहाँ f निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है:

प्रश्न 14.

$$f(x) = \begin{cases} 3, \text{if } 0 \le x \le 1 \\ 4, \text{if } 1 \le x \le 3 \\ 5, \text{if } 3 \le x \le 10 \end{cases}$$

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x)=\begin{cases}3, \text{if } 0\le x\le 1\\ 4, \text{if } 1\le x\le 3\\ 5, \text{if } 3\le x\le 10\end{cases}$

स्थिति i

$x=1$ पर, $f(x)=3,$ जब $x\le 1$

$\therefore x=1$ पर, L.H.S. $=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3, f(1)=3$

f(x) = 4, जब x > 1

$\therefore x=1$ पर, R.H.S. $=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\Rightarrow$ L.H.S. $\ne$ R.H.S.

अतः x = 1 पर फलन f संतत नहीं है।

स्थिति ii

x = 3 पर, f(x) = 4, जब x < 3

$\therefore x=3$ पर, L.H.S. $=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=4$

$f(x)=5,$ जब $x\ge 3$

$\therefore x=3$ पर, R.H.S. $=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=5, f(3)=5$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

$\Rightarrow$ L.H.S. $\neq$ R.H.S.

अतः x = 3 पर फलन f संतत नहीं है।

स्थिति iii

$x = c, 0 \leq c \leq 1$ पर, $f(x) = 3,$ जब $x < 1$

$$\lim_{x \to c} f(x) = 3, f(c) = 3$$

अतः x = c < 1 पर फलन f संतत है।

स्थिति iv

x = c, 1 < c < 3, f(x) = 4

$$\lim_{x \to c} f(c) = 4, f(c) = 4$$

अतः x = c, 1< c < 3 पर फलन f संतत है।

स्थिति v

$x = c, 3 \leq x \leq 10$ पर, $f(x) = 5,$ जब $x > 3$

$$\therefore \lim_{x \to c} f(x) = 5 = f(c)$$

अतः $x = c, 3 \leq x \leq 10$ पर फलन f संतत है।

इस प्रकार x = 1, x = 3 पर फलन f असंतत है तथा $x \in R = \{1, 3\},$ पर फलन f संतत है।

प्रश्न 15.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{if } x < 0 \\ 0, \ \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 4x, \text{if } x > 1 \end{cases}$$

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x)=\begin{cases}2x, \text{if } x<0\\ 0, \ \text{if } 0\le x\le 1\\ 4x, \text{if } x>1\end{cases}$

स्थिति i

x = 0 पर, f(x) = 2x,

$$\text{L.H.S.}=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x)=0$$

$f(x)=0,$ जब $x\ge 0$

$\text{R.H.S.}=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$ तथा $f(0)=0$

$$\therefore \text{R.H.S.}=\text{R.H.S.}=f(0)$$

अतः x = 0 पर फलन f संतत है।

स्थिति ii

x = 1 पर, f(x) = 0,

जब $x\le 1,\ \text{L.H.S.}=\lim_{x\to 1^-} f(x)=0$ तथा $f(1)=0$

f(x) = 4x, जब x >1

$$\therefore \text{R.H.S.}=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(4x)=(4\times 1)=4$$

$$\text{L.H.S.}\neq \text{R.H.S.}$$

अतः x = 1 पर फलन f असंतत है।

स्थिति iii

x = c < 0 पर, f(x) = 2x, जब x < 0

$$\lim_{x\to c} f(x)=2c,\ f(c)=2c$$

अतः x = c < 0 पर फलन f संतत है।

स्थिति iv

$x = c_1,\ 0 < c_1 < 1\ f(x) = 0$, जब $0 < x < 1$

$$\lim_{x \to c_1} f(x) = 0, \text{ और } f(c_1) = 0$$

अतः $x = c_1,\ 0 < c_1 < 1$ पर फलन f संतत है।

स्थिति v

$x = c_2 > 1,\ f(x) = 4x$, जब $x > 1$

$$\lim_{x \to c_2} f(x) = \lim_{x \to c_2} (4x) = 4c_2, f(c_2) = 4c_2$$

$\therefore x = c_2 > 1$ पर फलन f संतत है।

अतः $x = 1$, पर फलन f असंतत है।

$\Rightarrow x \in R - \{1\}$ पर फलन f संतत है।

प्रश्न 16.

$$f(x) = \begin{cases} -2, \text{if } x \leq -1 \\ 2x, \text{ if } -1 < x \leq 1 \\ 2, \quad \text{if } x > 1 \end{cases}$$

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x) = \begin{cases} -2, \text{if } x \leq -1 \\ 2x, \text{ if } -1 < x \leq 1 \\ 2, \quad \text{if } x > 1 \end{cases}$

स्थिति i

$x = -1$ पर, $f(x) = -2$, जब $x \leq -1$

ज्ञात है- $f(x) = \begin{cases} -2, \text{if } x \leq -1 \\ 2x, \ \text{if} - 1 < x \leq 1 \\ 2, \quad \text{if } x > 1 \end{cases}$

स्थिति i

$x = -1$ पर, $f(x) = -2$, जब $x \leq -1$

$\therefore x = -1$ पर, $\text{L.H.S.} = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (-2) = -2$

⇒ f(-1) = -2

f(x) = 2x, जब x > -1

$\therefore x = 1$ पर, $\text{R.H.S.} = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2x) = -2$

$\therefore \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} = f(-1)$

अतः x = -1 पर, फलन f संतत है।

स्थिति ii

$x = 1$ पर, $f(x) = 2x$, जब $x \leq 1$

$\therefore x = 1$ पर $\text{L.H.S.} = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x) = 2$

⇒ f(1) = 2

f(x) = 2, जब x > 1

$\therefore x = 1$ पर, $\text{R.H.S.} = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$

प्रश्न 17. a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, \text{if } x \leq 3 \\ bx + 3, \text{if } x > 3 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन x = 3 पर संतत है।

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x)=\begin{cases} ax+1, \text{if } x \le 3 \\ bx+3, \text{if } x > 3 \end{cases}$

$x=3$ पर, $f(x)=ax+1$, जब $x \le 3$

$$\text{L.H.S.} = \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (ax+1) = 3a+1$$

और f(3) = 3a + 1

f(x) = bx + 3, जब x > 3

$$\text{R.H.S.} = \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (b+3) = 3b+3$$

x = 3 पर यदि f संतत है तब $\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$

$$\therefore 3a+1 = 3b+3 \Rightarrow a = b + \frac{2}{3}$$

स्वेच्छा से b के मान के लिए a का मान ज्ञात किया जा सकता हैं।

प्रश्न 18. λ के किस मान के लिए

$$f(x)=\begin{cases} \lambda(x^2-2x), \text{if } x \le 0 \\ 4x+1, \quad \text{if } x > 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन x = 0 पर संतत है। x = 1 पर इसके सातत्य पर विचार कीजिए।

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x)=\begin{cases} \lambda(x^2-2x), \text{if } x \le 0 \\ 4x+1, \quad \text{if } x > 0 \end{cases}$

i. $x = 0$ रखने पर, $f(x) = \lambda(x^2 - 2x)$, जब $x \le 0$

$$\text{L.H.S.} = \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \lambda(x^2 - 2x) = 0$$

तथा f(0) = 0

f(x) = 4x + 1, जब x > 0

$$\therefore \text{R.H.S.} = \lim_{x\to0^+} f(x) = (4x + 1) = 1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) \ne \lim_{x\to0^+} f(x)$$

$$\Rightarrow \text{L.H.S.} \ne \text{R.H.S.}$$

$\therefore x = 0$ पर λ के किसी भी मान के लिए f संतत नहीं है।

ii. x = 1 पर, f(x) = 4x + 1, जब x > 0

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(4x + 1) = 4 + 1 = 5 = f(1)$$

अतः x = 1 पर, f संतत है।

अतः x = 0 पर λ के किसी मान के लिए f संतत नहीं है।

x = 1 पर f संतत है।

प्रश्न 19. दर्शाइए कि g(x) = x – [x] द्वारा परिभाषित फलन समस्त पूर्णांक बिन्दुओं पर असंतत है। यहाँ [x] उस महत्तम पूर्णांक निरूपित करता है, जो x के बराबर अथवी x से कम है।

उत्तर- x = c पूर्णांक पर, g(x) = x – [x]

$$\text{L.H.S.} = \lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c}(x - [x])$$

$$= \lim_{h\to0}((c - h) - [c - h])$$ [x = (c - h) रखने पर]

$$= \lim_{h \to 0}(c - h - (c - 1))$$ ($\because$ [c - h] = c - 1)

$$= c - 0 - c + 1 = 1$$

$$R.H.S. = \lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c}(x - [x])$$ [x = c + h रखने पर]

$$= \lim_{h \to 0}(c + h - [c + h])$$

$$= \lim_{h \to 0}[c + h - c] = 0$$

$$f(c) = c - [c] = c - c = 0$$

$$\therefore L.H.S. \neq R.H.S. = f(c)$$

अतः x = c पूर्णांक पर, f संतत नहीं है।

प्रश्न 20. क्या $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \pi$ पर संतत है?

उत्तर-

माना- $f(x) = x^2 - \sin x + 5$

$x = \pi$ पर, $L.H.S. = \lim_{x \to \pi^-}(x^2 - \sin x + 5)$,

$$= \lim_{h \to 0}[(\pi - h)^2 - \sin(\pi - h) + 5]$$ ($x = \pi - h$ रखने पर)

$$\lim_{h \to 0}[\pi^2 - 2\pi h + h^2 - \sin h + 5] \quad [\because \sin(\pi - h) = \sin h]$$

$$= \pi^2 + 5$$

$$R.H.S. = \lim_{x \to \pi^+}[x^2 - \sin x + 5],$$

$$= \lim_{h \to 0}[(\pi + h)^2 - \sin(\pi + h) + 5]$$ ($x = \pi + h$ रखने पर)

$$= \lim_{h \to 0}[\pi^2 + 2\pi h + h^2 + \sin h + 5] = \pi + 5 \quad [\because \sin(\pi + h) = -\sin h]$$

$= \pi^2 + 5$

R.H.S. $= \lim_{x \to \pi^+} [x^2 - \sin x + 5]$,

$= \lim_{h \to 0} [(\pi + h)^2 - \sin(\pi + h) + 5]$ ($x = \pi + h$ रखने पर)

$= \lim_{h \to 0} [\pi^2 + 2\pi h + h^2 + \sin h + 5] = \pi + 5$ [$\because \sin(\pi + h) = -\sin h$]

$f(\pi) = \pi^2 + 5$

$\because \lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = f(\pi)$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. = $f(\pi)$

अतः $x = \pi$ पर f संतत है।

प्रश्न 21. निम्नलिखित फलन के सांतत्य पर विचार कीजिए:

i. f(x) = sin x + cos x
ii. f(x) = sin x – cos x
iii. f(x) = sin x. cos x

उत्तर-

i.

$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x\right)$ [$\sqrt{2}$ से गुणा तथा भाग करने पर]

$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$x = c \in R$ पर,

L.H.S. $= \lim_{x \to c^-} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$x = c - h$ रखने पर,

$$\text{L.H.S.} = \lim_{h\to 0} \sqrt{2}\sin\left((c-h)+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right)$$

इसी प्रकार, $\text{R.H.S.} = \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^+} \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$= \lim_{h\to 0} \sqrt{2}\sin\left(c+h+\frac{\pi}{4}\right)$ [x = (c + h) रखने पर]

$$= \sqrt{2}\sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(c) = \sqrt{2}\sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = (c)$$

$$\therefore \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

अतः $x = c \in \mathbb{R}$ पर f संतत है।

ii.

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

अब $x = c$, L.H.S.

$$= \lim_{x\to c^-} \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(c - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{R.H.S.} = \lim_{x \to c^+} \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(c - \frac{\pi}{4}\right) = f(c)$$

$\therefore$ प्रत्येक बिन्दु $x \in R$ पर फलन f संतत है।

iii.

माना $f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)$ (2 से गुणा तथा भाग करने पर)

$= \frac{1}{2}\sin 2x$

$x = c \in R$ पर, $\text{L.H.S.} = \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}\sin 2(c - h) = \frac{1}{2}\sin 2c$ [x = (c - h) रखने पर]

$\text{R.H.S.} = \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}\sin 2(c + h) = \frac{1}{2}\sin 2c$ [x = (c + h) रखने पर]

$f(c) = \frac{1}{2}\sin 2x$

$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} = f(c)$

अतः $x = c \in R$ पर f संतत है।

प्रश्न 22. cosine, cosecant, secant और cotangent फलनों के सातत्य पर विचार कीजिए।

उत्तर-

a. माना $f(x) = \cos x$

$$x = c \in R, \lim_{x \to c} \cos x = \cos c = f(c)$$

अतः $x = c \in R$ पर f संतत है।

b. माना $f(x) = \text{cosec}\, x$

$x = n\pi$, पर f परिभाषित नहीं है।

$x = c \in R - \{n\pi\}, n \in Z, f(x) = \operatorname{cosec} x$

$\lim\limits_{x \to c} f(c) = \lim\limits_{x \to c} \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} c = f(c)$

अतः $x = c \in R - [n\pi], n \in Z$ पर f संतत है।

c. माना $y = \sec x$

$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ पर f परिभाषित नहीं है। जबकि $n \in Z$

$x = \frac{\pi}{2}$ पर, $L.H.S. = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sec x = \lim\limits_{h \to 0} \sec\left(\frac{\pi}{2} - h\right)$

$= \lim\limits_{h \to 0} \operatorname{cosec} h = \infty$

$R.H.S. = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \sec x = \lim\limits_{h \to} \sec\left(\frac{\pi}{2} + h\right)$

$= -\lim\limits_{h \to 0} \operatorname{cosec} h = -\infty$

$\because R.H.S. \neq L.H.S.$

अतः $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ पर f संतत नहीं है।

$x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \lim\limits_{x \to c} \sec x = \sec c = f(c)$

अतः $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ पर संतत है।

d. माना $f(x) = \cot x$

$x = n\pi$ पर, f परिभाषित नहीं है जबकि $n \in Z$

$\therefore x = n\pi$ पर, f संतत नहीं है।

$x = c \in R - \{n\pi\}, n \in Z$ पर,

$f(x) = \cos x$

$\therefore \lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} \cot x = \cot c = f(c)$

अतः $x = c \in R - \{n\pi\}, n \in Z$ पर f संतत है।

प्रश्न 23. f के सभी असांतत्यता के बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{if } x < 0 \\ x + 1, \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

उत्तर-

दिया है- $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{if } x < 0 \\ x + 1, \text{if } x \geq 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, जब $x < 0$

$$\text{L.H.S.} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0 - h) = \lim_{h \to 0} \left[\left(\frac{\sin(-h)}{(-h)}\right)\right] = 1$$

$$\text{R.H.S.} = \lim_{x \to 0^+} = \lim_{h \to 0} f(h) = \lim_{h \to 0} (h + 1) = 1$$

तथा $f(0) = 0 + 1 = 1$

$\therefore x = 0 \quad \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} = f(0)$

अतः $x = 0$ पर f संतत है।

$x = c_1 < 0$ पर, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \to c_1} f(x) = \lim_{x \to c_1} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin c}{c} = f(c)$$

$\Rightarrow x = c_1 < 0$ पर f संतत है।

$x = c_2 > 0$ पर, $f(x) = x + 1$

$$\lim_{x \to c_2} f(x) = \lim_{x \to c_2} (x + 1) = c_2 + 1 = f(c)_2$$

$\therefore x = c_2 > 0$ पर f संतत है।

अतः स्पष्ट है कि f किसी भी बिन्दु पर असंतत नहीं है।

प्रश्न 24. निर्धारित कीजिए कि फलन f

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, \text{ if } x \neq 0 \\ 0, \quad\quad\quad \text{if } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित एक संतत फलन है।

उत्तर-

$x = 0$ पर, $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, जब $x \neq 0$

वाम पक्ष सीमा $\text{L.H.S.} = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

$$= \lim_{h \to 0} f(0 - h)$$

$$= -\lim_{h \to 0} h^2 \left(\sin\frac{1}{h}\right)$$

$$= 0 \left[\because h \to 0, -1 < \sin\frac{1}{h} < 1\right]$$

जैसे ही $h \to 0, h^2 \sin\frac{1}{h} \to 0$

$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, जब $x > 0$

दक्षिण पक्ष सीमा $\text{R.H.S.} = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(0 + h)$

$$= \lim_{h \to 0} (0 + h)^2 \sin\left(\frac{1}{0+h}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(h^2 \sin\frac{1}{h}\right) = 0 \left[\because h \to 0, -1 < \sin\frac{1}{h} < 1\right]$$

$$f(0) = 0$$

$$\therefore \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} = f(0)$$

$\therefore$ x = 0 पर f संतत है।

प्रश्न 25. f के सांतत्य की जाँच कीजिए, जहाँ f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x & \text{if } x \neq 0 \\ -1, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x & \text{if } x \neq 0 \\ -1, & \text{if } x = 0 \end{cases}$

$f(x) = \sin x - \cos x$, जब $x \neq 0$

$\therefore$ x = 0 पर, $\text{L.H.S.} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h) = \lim_{h \to 0} f(-h)$

$= \lim_{h \to 0} [\sin(-h) - \cos(-h)]$

$= \lim_{h \to 0} [-\sin h - \cos h] = (0-1) = -1$

$\text{R.H.S.} = \lim_{x \to 0^+} = \lim_{h \to 0} f(0+h) = \lim_{h \to 0} f(h)$

$= \lim_{h \to 0} [\sin h - \cos h] = -1$

$\because$ x = 0 पर, $\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} = f(0)$

$\therefore$ x = 0 पर फलन f संतत है।

$x = c \neq 0$ पर, $f(x) = \sin x - \cos x$

$\lim_{x \to c} (\sin x - \cos x) = \sin c - \cos c = f(c)$

$\therefore$ x = c ≠ 0 पर फलन f संतत है।

अतः x ∈ R, सभी बिन्दुओं पर फलन f संतत है।

प्रश्न में k के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि प्रदत्त फलन निर्दिष्ट बिंदु पर संतत हो:

प्रश्न 26.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{k\cos x}{\pi-2x}, \text{if } x\neq\frac{\pi}{2}\\ 3, \quad\quad \text{if } x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$ द्वारा परिभाषित फलन $x=\frac{\pi}{2}$ पर

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x)=\begin{cases}\frac{k\cos x}{\pi-2x}, \text{if } x\neq\frac{\pi}{2}\\ 3, \quad\quad \text{if } x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$x=\frac{\pi}{2}$ पर, $\text{L.H.S.}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-h\right)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{k\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{k\sin h}{\pi-\pi+2h}=\lim_{h\to 0}\frac{k}{2}\frac{\sin h}{h}=\frac{k}{2}\left(\because \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1\right)$$

$$\text{R.H.S.}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\pi}{2}+h\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{k\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{-k\sin h}{-2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{k}{2}\frac{\sin h}{h}=\frac{k}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$$

फलन f संतत $x=\frac{\pi}{2}$ होगा यदि

$$\text{L.H.S.}=\text{R.H.S.}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{k}{2}=3\Rightarrow k=6$$

प्रश्न 27.

$f(x)\begin{cases} kx^2, \text{if } x \le 2 \\ 3, \quad \text{if} x > 2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन x = 2 पर

उत्तर-

दिया है- $f(x) = \begin{cases} kx^2, \text{if } x \le 2 \\ 3, \quad \text{if} x > 2 \end{cases}$

x = 2 पर, $\text{L.H.S.} = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (kx^2) = 4k$

$\text{R.H.S.} = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$

$f(2) = k.4 = 54k$

फलन f संतत होगा यदि x = 2 पर,

$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} = f(2)$

$\therefore 4k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$

प्रश्न 28.

$f(x) = \begin{cases} kx + 1, \text{if } x \le \pi \\ \cos x, \quad \text{if } x > \pi \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \pi$ पर

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x) = \begin{cases} kx + 1, \text{if } x \le \pi \\ \cos x, \quad \text{if } x > \pi \end{cases}$

$f(x) = kx + 1,$ जब $x \le \pi$

$\therefore x = \pi$ पर, $\text{L.H.S.} = \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} (kx + 1)$

$= k\pi + 1$

$\Rightarrow f(\pi) = k\pi + 1$

$\text{R.H.S.} = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} \cos x = \cos \pi = -1$

$x = \pi$ रखने पर फलन f संतत होगा यदि

$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} = f(\pi)$

अतः $k\pi + 1 = -1 \Rightarrow k\pi = -2$

$\therefore k = -\frac{2}{\pi}$

प्रश्न 29.

$f(x) = \begin{cases} kx + 1, \text{if } x \leq 5 \\ 3x - 5, \text{if } x > 5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन x = 5 पर

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x) = \begin{cases} kx + 1, \text{if } x \leq 5 \\ 3x - 5, \text{if } x > 5 \end{cases}$

$\because f(x) = kx + 1,$ जब $x \leq 5$

$\therefore x = 5$ पर, $\text{L.H.S.} = \lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (kx + 1) = 5k + 1$

$f(5) = k.5 + 1 = 5k + 1$

f(x) = 3x - 5, जब x > 5

$\text{R.H.S.} = \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (3x - 5)$

$= 15 - 5 = 10$

x = 5 पर, फलन f संतत होगा यदि

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} = f(5)$$

अर्थात $5k + 1 = 10 \Rightarrow 5k = 10 - 1$

$$\Rightarrow 5k = 9$$

$$\therefore K = \frac{9}{5}$$

प्रश्न 30. a तथा b के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{if } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{if } 2 < x < 10 \\ 21, & \text{if } x \geq 10 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन हो।

उत्तर-

ज्ञात है, $f(x) = \begin{cases} 5, & \text{if } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{if } 2 < x < 10 \\ 21, & \text{if } x \geq 10 \end{cases}$

$f(x) = 5,$ जब $x \leq 2$

$x = 2$ और $\text{L.H.S} = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5$

$$\text{R.H.S} = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (a + b) = 2a + b$$

[∵ जब x >2, f(x) = ax + b]

तथा f(2) = 5

x = 2 पर फलन f संतत होगी यदि

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S} = f(2)$$

$$\therefore 2a + b = 5 \ldots (1)$$

x = 10 पर,

$$\text{L.H.S} = \lim_{x\to10^-} f(x) = \lim_{x\to10^-} (ax+b) = 10a+b$$

($\because$ जब x > 10, f(x) = ax + b)

$\because$ f(x = 21),

$$\therefore \text{R.H.S} = \lim_{x\to10^+} f(x) = \lim_{x\to10^+} (21) = 21$$

$$(\because f(x) = 21 \text{ जब } x \geq 0)$$

तथा $\because$ f(10) = 21

x = 10 पर फलन f संतत होगी यदि

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S} = f(10)$$

$$\Rightarrow 10a + b = 21 \ldots (2)$$

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर

$$8a = 21 - 5 = 16$$

$$\therefore a = \frac{16}{8} = 2$$

समीकरण (1) से $2 \times 2 \times b = 5$

$$\therefore b = 5 - 4 = 1$$

अतः f एक संतत फलन होगी यदि $a = 2, b = 1$

प्रश्न 31. दर्शाइए कि f(x) = cos x^2 द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x) = \cos x^2$

$x = c \in R$ पर, $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \cos x^2 = \cos c^2$

$$f(c) = \cos c^2$$

अतः $f(x) = \cos x^2$ एक संतत फलन है।

प्रश्न 32. दर्शाइए कि f(x) = |cos x| द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

उत्तर-

ज्ञात है- $f(x) = \left|\cos x\right|$

माना $x = c \in R$ पर,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \left|\cos x\right| = \left|\cos c\right|$$

$$f(c) = \left|\cos c\right|$$

अतः $x = c \in R$ पर f एक संतते फलन है।

प्रश्न 33. जाँचिए कि क्या sin |x| एक संतत फलन है।

उत्तर-

माना $f(x) = \sin|x|$ $x = c \in R$ पर

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \left(\sin|x|\right) = \sin|c|$$

$$f(c) = \sin|c|$$

अतः $x = c \in R$ पर f एक संतते फलन है।

प्रश्न 34. f(x) = |x| - |x + 1| द्वारा परिभाषित फलन f के सभी असातत्यता के बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए।

उत्तर- ज्ञात है f(x) = |x| - |x + 1|

f(x) = -x -[-(x + 1)] जब x < – 1]

= -x + x + 1 = 1

f(x) = -x - (x + 1), [जब –1 ≤ x < 0]

= -x - x - 1

= -2x - 1

f(x) = x - (x + 1), जब x ≥ 0

= x - x - 1 = -1

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x < -1 \\ -2x - 1, & \text{if } -1 \leq x < 0 \\ -1, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

f(x) = 1 जब x < -1

$$\therefore x = -1 \text{ पर } L.H.S = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

$$f(x) = -2x - 1 \text{ जब } x \geq -1$$

$$\therefore R.H.S = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-2x - 1) = [-2(-1) - 1] = 1$$

$$f(-1) = -2(-1) - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\because x = -1 \text{ पर } L.H.S = R.H.S = f(-1)$$

अत: x = -1 पर f संतत है।

x = 0 पर , f(x) = -2x - 1 जब x < 0

$$\therefore L.H.S = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-2x - 1) = -1$$

$$f(x) = -1 \text{ जब } x \geq 0$$

$$\therefore\ R.H.S = \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$$

$$f(0) = -1$$

$$\because L.H.S = R.H.S = f(0)$$

अतः x = 0 पर फलन f संतत है।

$x = c_1 < -1$ पर, $f(x) = 1$

$$\lim_{x \to c_1} f(x) = 1 = f(c)$$

अतः फलन f संतत है।

$x = c_2$, $-1 < c_2 < 0$, $f(x) = -2x - 1$

$$\lim_{x \to c_2} f(x) = \lim_{x \to c_2} (-2x - 1) = -2c - 1 = f(c)_2$$

अतः फलन f संतत है।

$$x = c_3 \geq 0, \text{ पर } f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to c_3} f(x) = -1 = f(c_3)$$

∴ फलन f संतत है।

इस प्रकार स्पष्ट है कि किसी भी बिन्दु पर फलन f असंतत नहीं है।

प्रश्नावली 5.2 (पृष्ठ संख्या 181)

प्रश्न में x के सापेक्ष निम्नलिखित फलन का अवकलन कीजिए।

प्रश्न 1. $\sin (x^2 + 5)$

उत्तर- माना $y = \sin(x^2 + 5)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(x^2+5)$$

$$= \cos(x^2+5)\frac{d}{dx}(x^2+5)$$

$$= \cos(x^2+5)(2x+0)$$

$$= 2x\cos(x^2+5)$$

प्रश्न 2. cos(sinx)

उत्तर- माना y = cos(sinx)

माना sinx = t

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$\therefore y = \cos t$ से,

दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}(\cos t)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \frac{dt}{dx} = \sin t.\cos x$$

$$= -\sin t\cos x = -\sin(\sin x)\cos x$$

प्रश्न 3. sin(ax + b)

उत्तर- माना y = sin(ax + b)

ax + b = t रखने पर, y = sint

दोनों पक्षों का है के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dt} = \sin t \text{ या } \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\because t = ax + b$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(ax + b) = a$$

$$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t.\, a$$

$$= a \cos t = a \cos(ax + b)$$

प्रश्न 4. $\sec\left(\tan(\sqrt{x})\right)$

उत्तर- माना $y = \sec\left(\tan(\sqrt{x})\right)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}[\sec(\tan\sqrt{x})]$$

$$= \sec(\tan\sqrt{x}) \tan(\tan\sqrt{x}) \frac{d}{dx}(\tan\sqrt{x})$$

$$= \sec(\tan\sqrt{x}) \tan(\tan\sqrt{x}) \sec^2\sqrt{x} \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \sec(\tan\sqrt{x}) \tan(\tan\sqrt{x})(\sec^2\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sec(\tan\sqrt{x}) \tan(\tan\sqrt{x})(\sec^2\sqrt{x})$$

प्रश्न 5.

$$\frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+b)}$$

उत्तर-

$$\text{माना } y = \frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+b)} \ldots (1)$$

समी. (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+b)}\right]$$

$$\text{या } \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(cx+d)\frac{d}{dx}\sin(ax+b) - \sin(ax+b)\frac{d}{dx}\cos(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$= \frac{\cos(cx+d)\cos(ax+b)\frac{d}{dx}(ax+b) - \sin(ax+b)\{-\sin(cx+d)\}\frac{d}{dx}(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$= \frac{\cos(cx+d)\cos(ax+b)(a) + \sin(ax+b)\sin(cx+d)(c)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$= \frac{a\cos(cx+d)\cos(ax+d)}{\cos^2(cx+d)} + \frac{c\sin(ax+d)\sin(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$= a\cos(ax+b)\sec(cx+d) + c\sin(ax+d)\tan(cx+d)\sec(cx+d)$$

प्रश्न 6. $\cos x^3 . \sin^2(x^5)$

उत्तर- माना $y = \cos x^3 . \sin^2 x^5$

समी. (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\cos x^3 . \sin^2 x^5]$$

$$= \cos x^3 \frac{d}{dx}\sin^2(x^5) \sin^2 x^5 \frac{d}{dx}\cos x^3$$

$$= \cos x^3 2 \sin x^5 \frac{d}{dx}\sin x^5 + \sin^2 x^5(-\sin x^3)\frac{x}{dx}x^3$$

$$= 2\cos x^3 \sin x^5 . \cos x^5 \frac{d}{dx}x^5 + \sin^2 x^5(-\sin x^3)3x^2$$

$$= 2\cos x^3 \sin x^5 \cos x^5(5x^4) - 3\sin^2 x^5 \sin x^3 . x^2$$

$$= -3x^2 \sin x^3 \sin^2 x^5 + 10x^4 \cos x^5 \sin x^5 \cos x^3$$

प्रश्न 7.

$$2\sqrt{\cos(x^2)}$$

उत्तर-

माना $2\sqrt{\cot(x^2)}$

या $y = 2(\cot x^2)^{\frac{1}{2}} \ldots (1)$

समी. (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}(\cot x^2)^{\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{1}{2}(\cot x^2)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\cot x^2$$

$$= (\cot x^2)^{-\frac{1}{2}}(-\operatorname{cosec}^2 x^2)\frac{d}{dx}x^2$$

$$= (\cot x^2)^{-\frac{1}{2}}(-\operatorname{cosec}^2 x^2).2x$$

$$= -\frac{2x}{\sqrt{\cot x^2}}\operatorname{cosec}^2 x^2$$

प्रश्न 8. $\cos(\sqrt{x})$

उत्तर-

माना $y = \cos(\sqrt{x}) \ldots (1)$

समी० (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos\sqrt{x}$$

$$= -\sin\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x} = -\sin\sqrt{x}\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\sin\sqrt{x} \times \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = -\sin\sqrt{x} \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$$

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि फलन f(x) = |x − 1|, x ∈ R, x = 1 पर अवकलित नहीं है।

उत्तर-

दिया है- $f(x) = |x-1| x \in R$

या $f(x) = \begin{cases} x-1, \text{if } x \geq 1 \\ 1-x, \text{if } x < 1 \end{cases}$

x = 1 पर, $\text{R.H.D.} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{[(1+h)-1]-(1-1)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

$$\text{L.H.D.} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-(1-h)-(1-1)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{-h} = -1$$

$$\text{R.H.D.} \neq \text{L.H.D.}$$

अत: x = 1 पर f अवकलनीय नहीं है।

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए कि महत्तम पूर्णांक फलन f(x) = [x], 0 < x < 3, x = 1 तथा x = 2 पर अवकलित नहीं है।

उत्तर- ज्ञात है, f(x) = [x]

i. x = 1 पर,

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[1+h]-[1]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[1-h]-[1]}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-1}{-h} = \text{परिभाषित नहीं है।}$$

$$\therefore Rf'(1) \neq Ff'(1)$$

∴ x = 1 पर f अवकलनीय नहीं है।

ii. x = 2 पर,

$$Rf'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[2+h]-[2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2-2}{h} = 0$$

$$Lf'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1-2}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{-h} = \text{परिभाषित नहीं है।}$$

$$\therefore R.H.D. \neq L.H.D.$$

अतः x = 2 पर f अवकलनीय नहीं है।

प्रश्नावली 5.3 (पृष्ठ संख्या 185)

निम्नलिखित प्रश्नों में $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. 2x + 3y = sinx

उत्तर- ज्ञात है, 2x + 3y = sinx

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow 2\frac{d}{dx}(x) + 3\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\sin x$$

$$\Rightarrow 2 \times 1 + 3\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\Rightarrow 3\frac{dy}{dx} = \cos x - 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - 2}{3}$$

प्रश्न 2. 2x + 3y = siny

उत्तर- दिया है- 2x + 3y = siny

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow 2\frac{d}{dx}(x) + 3\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin y$$

$$\Rightarrow 2 \times 1 + 3\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 2 = \cos y\frac{dy}{dx} - 3\frac{dy}{dx} \text{ या } 2 = \frac{dy}{dx}(\cos y - 3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\cos y - 3}$$

प्रश्न 3. $ax + by^2 = \cos y$

उत्तर- ज्ञात है- $ax + by^2 = \cos y$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$a\frac{d}{dx}(x) + b\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\cos y$$

$$\Rightarrow a.1 + b.2y\frac{dy}{dx} = -\sin y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow a + 2by\frac{dy}{dx} + \sin y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow a + \frac{dy}{dx}(2by + \sin y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2by + \sin y) = -a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-a}{(2by+\sin y)}$$

प्रश्न 4. $xy + y^2 = \tan x + y$

उत्तर- दिया है- $xy + y^2 = \tan x + y$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}(y)^2 = \frac{d}{dx}\tan x + \frac{d}{dx}(y)$$

$$\Rightarrow \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \sec^2 x - y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x + 2y - 1) = \sec^2 x - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$$

प्रश्न 5. $x^2 + xy + y^2 = 100$

उत्तर- दिया है- $x^2 + xy + y^2 = 100$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \left\{x\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(x)\right\} + \frac{d}{dx}(y^2) = 100\frac{d}{dx}(1)$$

$$\Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y \times 1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x + 2y) = -(2x + y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{(2x + y)}{(x + 2y)}$$

प्रश्न 6. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$

उत्तर- दिया है $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \left\{x^2\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(x^2)\right\} + \left[x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2 + \frac{d}{dx}(x)\right]$$
$$+ \frac{dx}{dx}(y^3) = 81\frac{d}{dx}(1)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y \times 2x + x.2y\frac{dy}{dx} + y^2 \times 1 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow x^2\frac{dy}{dx} + 2xy\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = -3x^2 - 2xy - y^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x^2 + 2xy + 3y^2) = -(3x^2 + 2xy + y^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{(3x^2+2xy+y^2)}{(x^2+2xy+3y^3)}$$

प्रश्न 7. $\sin^2 y + \cos xy = k$

उत्तर- दिया है- $\sin^2 y + \cos xy = k$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}\sin^2 y + \frac{d}{dx}\cos xy = k\frac{d}{dx}(1)$$

$$\Rightarrow 2\sin y\cos y\frac{dy}{dx} + (-\sin xy)\frac{d}{dx}(xy) = k \times 0$$

$$\Rightarrow 2\sin y\cos y\frac{dy}{dx} - \sin xy\left[x\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(x)\right] = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin y\cos y\frac{dy}{dx} - x\sin xy\frac{dy}{dx} - y\sin xy = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2y\frac{dy}{dx} - x\sin xy\frac{dy}{dx} = y\sin xy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(\sin 2y - x\sin xy) = y\sin xy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y\sin xy}{\sin 2y - x\sin xy}$$

प्रश्न 8. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

उत्तर- दिया है- $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}\sin^2 x + \frac{d}{dx}\cos^2 y = \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sin x)^2 + \frac{d}{dx}(\cos y)^2 = \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow 2\sin x\frac{d}{dx}(\sin x) + 2\cos y\frac{d}{dx}(\cos y) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x.\cos x + 2\cos y(-\sin y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos x - 2\sin y\cos y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x - \sin 2y\frac{dy}{dx} = 0 \text{ या } \sin 2y\frac{dy}{dx} = \sin 2x$$

अतः $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y}$

प्रश्न 9.

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

उत्तर-

दिया है- $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

माना $x = \tan\theta$ पर तब $\theta = \tan^{-1}x$

$$\Rightarrow y = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) \text{ या } y = \sin^{-1}\sin 2\theta$$

या $y = 2\theta = 2\tan^{-1}x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\tan^{-1}x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

प्रश्न 10.

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

उत्तर-

दिया है- $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$

$$\Rightarrow \tan y = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \ldots (i)$$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$$

$$\therefore \tan y = \frac{3\tan\frac{y}{3} - \tan^3\frac{y}{3}}{1-3\tan^2\frac{y}{3}} \ldots (ii)$$

समीकरणों (1) और (2) की तुलना करते हुए,

$$x = \tan\frac{y}{3}$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\tan\frac{y}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 1 = \sec^2\frac{y}{3} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 1 = \sec^2\frac{y}{3} \cdot \frac{1}{3}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sec^2\frac{y}{3}} = \frac{3}{1+\tan^2\frac{y}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{1+x^2}$$

प्रश्न 11.

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$$

उत्तर-

दिया है- $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\cos y = \frac{d}{dx}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$$

$$\Rightarrow -\sin y\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{1-\cos^2 y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{1-\left\{\frac{1-x^2}{1+x^2}\right\}^2}\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{(1-x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1+x^4+2x^2-1-x^4+2x^2}{(1+x^2)^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

प्रश्न 12.

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$$

उत्तर-

दिया है- $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$$

$$\cos y.\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\sin^2 y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{(1-x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1+x^4+2x^2-1-x^4+2x^2}{(1+x^2)^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{(1+x^2)2x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{1+x^2}$$

प्रश्न 13.

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$$

उत्तर-

दिया है- $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

माना $x = \tan\theta, \ \therefore \theta = \tan^{-1} x$

$\Rightarrow y = \cos^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \cos^{-1}(\sin 2\theta)$

$\therefore y = \cos^{-1}\cos\left[\frac{\pi}{2} - 2\theta\right] = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

या $y = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1} x$ [$\theta = \tan^{-1} x$ रखने पर]

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{d}{dx} = \frac{\pi}{2}\frac{d}{dx}(1) - 2\frac{d}{dx}\tan^{-1} x$ या $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$

प्रश्न 14.

$$y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

उत्तर-

माना $y = \sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$

$x = \sin\theta$ प्रतिस्थापित करने पर,

$y = \sin^{-1}[2\sin\theta\sqrt{(1-\sin^2\theta)}] = \sin^{-1}[2\sin\theta\cos\theta]$

$= \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\sin^{-1} x \ [\because \theta = \sin^{-1} x]$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin^{-1x}) = \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)}}$

प्रश्न 15.

$$y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

उत्तर-

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$x = \tan\theta$ रखने पर,

$$y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2\cos^2\theta-1}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right)$$

$$y = \sec^{-1}(\sec 2\theta) = 2\theta, y = 2\cos^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$$

प्रश्नावली 5.4 (पृष्ठ संख्या 190)

निम्नलिखित का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए-

प्रश्न 1. $\frac{e^x}{\sin x}$

उत्तर- माना $\frac{e^x}{\sin x}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x\frac{d}{dx}e^x - e^x\frac{d}{dx}\sin x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x\, e^x - e^x.\cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$$

प्रश्न 2. $e^{\sin-1x}$

उत्तर- माना $e^{\sin-1x}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{\sin^{-1} x} = e^{\sin^{-1} x} \frac{d}{dx} \sin^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

प्रश्न 3. e^{x^3}

उत्तर- माना- e^{x^3}

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{x^3} = e^{x^3} \frac{d}{dx} x^3$$

$$\therefore = e^{x^3} .3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

प्रश्न 4. $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$

उत्तर- माना- $\sin(\tan^{-1} e^{x})$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin(\tan^{-1} e^{-x}) = \cos(\tan^{-1} e^{-x}) \frac{d}{dx} \tan^{-1} e^{-x}$$

$$= \cos(\tan^{-1} e^{-x}) \frac{1}{1+(e^{-x})^2} \frac{d}{dx} (e^{-x})$$

$$= \cos(\tan^{-1} e^{-x}) \frac{1}{1+e^{-2x}} (e^{-x}) \frac{d}{dx} (-x)$$

$$= \cos(\tan^{-1} e^{-x}) \frac{1}{1+e^{-2x}} (-1) = -\frac{e^{-x} \cos(\tan^{-1} e^{-x})}{1+e^{-2x}}$$

प्रश्न 5. $\log(\cos e^{x})$

उत्तर- माना- $\log(\cos e^{x})$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log(\cos e^x) = \frac{1}{\cos e^x}\frac{d}{dx}(\cos e^x)$$
$$= \frac{1}{\cos e^x}(-\sin e^x)\frac{d}{dx}e^x = -\frac{\sin e^x}{\cos e^x}\cdot e^x = -e^x \tan e^x$$

प्रश्न 6. $ex + e^{x^2} + \ldots + e^{x^5}$

उत्तर- माना- $ex + e^{x^2} + \ldots + e^{x^5}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(e^{x^2}) + \frac{d}{dx}(e^{x^3}) + \frac{d}{dx}(e^{x^4}) + \frac{d}{dx}(e^{x^5})$$
$$= e^x + e^{x^2}\frac{d}{dx}(x^2) + e^{x^3}\frac{d}{dx}(x^3) + e^{x^4}\frac{d}{dx}(x^4) + e^{x^5}\frac{d}{dx}(x^5)$$
$$= e^x + e^{x^2}.2x + e^{x^3}.3x^2 + e^{x^4}.4x^3 + e^{x^5}.5x^4$$
$$= e^x + 2xe^{x^2} + 3x^2e^{x^3} + 4x^3e^{x^4} + 5x^4e^{x^5}$$
$$= e^x(1 + 2xe^x + 3x^2e^{x^2} + 4x^3e^{x^3} + 5x^4e^{x^4})$$

प्रश्न 7. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}, x > 0$

उत्तर- माना- $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}, x > 0$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}}$$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} e^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}, x > 0$$

प्रश्न 8. log(log x),x > 1

उत्तर- माना- log(log x),x > 1

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log(\log x) = \frac{1}{\log x}\frac{d}{dx}\log x$$

$$= \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\log x}, x > 1$$

प्रश्न 9. $\frac{\cos x}{\log x}, x > 0$

उत्तर- माना- $\frac{\cos x}{\log x}, x > 0$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x \frac{d}{dx}\cos x - \cos x \frac{d}{dx}\log x}{(\log x)^2}$$

$$= \frac{\log x.(-\sin x) - \cos x \times \frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x \log x - \frac{\cos x}{x}}{(\log x)^2}$$

$$= \frac{-(x\sin x\log x + \cos x)}{x(\log x)^2}, x > 0$$

प्रश्न 10. cos(log x + e^x)

उत्तर- माना- $\cos(\log x + e^x)$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos(\log x + e^x) = -\sin(\log x + e^x)\left[\frac{d}{dx}\log x + \frac{d}{dx}e^x\right]$$

$$= -\sin(\log x + e^x)\left[\frac{1}{x} + e^x\right] = -\sin(\log x + e^x)\left(\frac{1+xe^x}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{x}(1 + xe^x)\sin(\log x + e^x)$$

प्रश्नावली 5.5 (पृष्ठ संख्या 194-195)

प्रश्न में प्रदत्त फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए-

प्रश्न 1. cos x. cos 2x. cos 3x

उत्तर-

माना- $\cos x.\cos 2x.\cos 3x \ldots (1)$

दोनों पक्षों को लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log(\cos x.\cos 2x.\cos 3x)$$

$$= \log\cos x + \log\cos 2x + \log\cos 3x$$

$$[\because \log m.n = \log m + \log n]$$

दोनों पक्षों में x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log\cos x + \frac{d}{dx}\log\cos 2x + \frac{d}{dx}\log\cos 3x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}\cos x + \frac{1}{\cos 2x}\frac{d}{dx}\cos 2x + \frac{1}{\cos 3x}\frac{d}{dx}\cos 3x$$

$$= \frac{1}{\cos x}(-\sin x) + \frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)\frac{d}{dx}(2x)$$
$$+ \frac{1}{\cos 3x}(-\sin 3x)\frac{d}{dx}(3x)$$
$$= -\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin 2}{\cos 2}(2) - \frac{\sin 3x}{\cos 3x}(3)$$
$$= -\tan x - 2\tan 2x - 3\tan 3x$$
$$= -(\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x)$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = -y(\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x)$$

समीकरण (1) से y का मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x.\cos 2x.\cos 3x[\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x]$$

प्रश्न 2.

$$\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$$

उत्तर-

माना $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}} \ldots (1)$

या $y = \left[\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}\right]^{\frac{1}{2}}$

दोनों पक्षों को लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \frac{1}{2}\log\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)} \quad [\because \log m^n = n\log m]$$

या $\log y = \frac{1}{2}\log(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}\log(x-3)(x-4)(x-5) \left[\because \log\frac{m}{n} = \log m - \log n\right]$

$$= \frac{1}{2}[\log(x-1) + \log(x-2)] - \frac{1}{2}[\log(x-3) + \log(x-4) + \log(x-5)]$$
$[\because \log m.n = \log m + \log n]$

दोनों पक्षों में x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\log(x-1)+\frac{d}{x}\log(x-2)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\log(x-3)+\frac{d}{dx}\log(x-4)+\frac{d}{dx}\log(x-5)\right]$$

$$=\frac{1}{2}y\left[\frac{1}{x-1}\frac{d}{dx}(x-1)+\frac{1}{x-2}\frac{d}{dx}(x-2)\right]$$

$$-\frac{1}{2}y\left[\frac{1}{x-3}\frac{d}{dx}(x-3)+\frac{1}{x-4}\frac{d}{dx}(x-4)+\frac{1}{x-5}\frac{d}{dx}(x-5)\right]$$

$$=\frac{1}{2}y\left[\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x-2}\right]-\frac{1}{2}y\left[\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}\right]$$

$$=\frac{1}{2}y\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}\right]$$

समीकरण (1) से y का मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}\right]$$

प्रश्न 3. $(\log x)^{\cos x}$

उत्तर-

माना $y=(\log x)^{\cos x}$

दोनों पक्षों को लघुगणक लेने पर,

$$\log y=\log(\log x)^{\cos x}=\cos x\log(\log x),\ [\because \log m^n=n\log m]$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \frac{d}{dx}\log(\log x) + \log(\log x)\frac{d}{dx}\cos x$$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{\log x}\frac{d}{dx}(\log x) + \log(\log x)(-\sin x)$$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} - \sin x \log(\log x)$$

$$= -\sin x \log(\log x) + \frac{\cos x}{x \log x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[-\sin x \log(\log x) + \frac{\cos x}{x \log x}\right]$$

$$= (\log x)^{\cos x}\left[-\sin x \log(\log x) + \frac{\cos x}{x \log x}\right]$$

प्रश्न 4. $x^x - 2^{\sin x}$

उत्तर-

माना- $y = x^x - 2^{\sin x}$

पुनः माना $u = x^x, v = 2^{\sin x}$

$y = u - v$

$u = x^x$

से दोनों पक्षों को लघुगणक लेने पर, $\log u = \log x^x = x \log x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}\log x + \log x \frac{d}{dx}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \log x \times (1)$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = u(1 + \log x) = x^x(1 + \log x) \ldots (2)$$

अब, $v = 2^{\sin x}$ से

$$\frac{dv}{dx} = 2^{\sin x} \log 2 \frac{d}{dx} \sin x$$

$$= 2^{\sin x} \log 2 \cos x \ldots (3)$$

समीकरण (1) से, $y = u - v \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

समीकरण (2) से $\frac{du}{dx}$ तथा (3) से $\frac{dv}{dx}$ के मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \log x) - 2^{\sin x} \cos x(\log 2)$$

प्रश्न 5. $(x + 3)^2 . (x + 4)^3 . (x + 5)^4$

उत्तर-

माना- $y = (x + 3)^2 . (x + 4)^3 . (x + 5)^4$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log[(x + 3)^2 . (x + 4)^3 . (x + 5)^4]$$

$$= \log(x + 3)^2 + \log(x + 4)^3 + \log(x + 5)^4 \; [\because \log mn = \log m + \log n]$$

$$= 2 \log(x + 3) + 3 \log(x + 4) + 4 \log(x + 5) \; [\because \log m^n = n \log m]$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2 \frac{d}{dx} \log(x + 3) + 3 \frac{d}{dx} \log(x + 4) + 4 \frac{d}{dx} \log(x + 5)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2 . \frac{1}{(x+3)} \frac{d}{dx}(x + 3) + 3 \times \frac{1}{x+4} \frac{d}{dx}(x + 4)$$

$$+4\times\frac{1}{x+5}\frac{d}{dx}(x+5)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2(1+0)}{x+3}+\frac{3(1+0)}{x+4}+\frac{4(1+0)}{x+5}$$

या $\frac{dy}{dx}=y\left[\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x+4}+\frac{4}{x+5}\right]$

$$=y\left[\frac{2(x+4)(x+5)+3(x+3)(x+5)+4(x+3)(x+4)}{(x+3)(x+4)(x+5)}\right]$$

$$=(x+3)^2(x+4)^3(x+5)^4$$
$$\times\left[\frac{2(x^2+9x+20)+3(x^2+8x+15)+4(x^2+7x+12)}{(x+3)(x+4)(x+5)}\right]$$

$$=(x+3)(x+4)^2(x+5)^3[9x^2+70x+133]$$

प्रश्न 6.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^x+x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

उत्तर-

माना- $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x+x^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}$

पुनः माना- $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x=u \text{ and } x^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}=v$

y = u + v $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\ \ldots(i)$

अब $u=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \log u=\log\left(x+\frac{1}{x}\right)^x=x\log\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx}=x.\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\frac{d}{dx}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\log\left(x+\frac{1}{x}\right).1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx}=x.\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\log\left(x+\frac{1}{x}\right).1$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=u\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}+\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$

माना- $y = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}$

पुनः माना- $y = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x = u \text{ and } x^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} = v$

y = u + v $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \ldots (i)$

अब $u = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \log u = \log\left(x+\frac{1}{x}\right)^x = x\log\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\frac{d}{dx}\left(x+\frac{1}{x}\right) + \log\left(x+\frac{1}{x}\right).1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\left(x+\frac{1}{x}\right) + \log\left(x+\frac{1}{x}\right).1$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u\left[\frac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] \ldots (ii)$$

पुनः $v = x^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \log v = \log x^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\log x$

$$\Rightarrow \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \left(x+\frac{1}{x}\right).\frac{1}{x} + \log x.\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = v\left[\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\log x\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = x^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\left[\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\log x\right] \ldots (iii)$$

प्रश्न 7. $(\log x)^x + x^{\log x}$

उत्तर-

माना $y = (\log x)^x + x^{\log x}$

पुनः माना $y = u + v$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \ldots (1)$$

अब, $u = (\log x)^x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log v = \log(\log)^x = x \log(\log x) \; [\because \log m^n = n \log m]$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}\log(\log x) + \log(\log x)\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x \cdot \frac{1}{\log x}\frac{d}{dx}(\log x) + \log(\log x) \times 1$$

$$= x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} + \log(\log x) = \frac{1}{\log x} + \log(\log x)$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = u\left[\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right]$$

$$= (\log x)^x\left[\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right] \ldots (1)$$

तथा $v = x^{\log x}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log v = \log x^{\log x} = \log x \log x = (\log x)^2$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(\log x)^2 = 2\log x\frac{d}{dx}\log x = \frac{2\log x}{x}$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = v\left(\frac{2}{x}\log x\right) = \frac{2}{x}(x^{\log x}\log x)$$

समीकरण (1) से,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$= (\log x)^x\left[\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right] + \frac{2}{x}(x^{\log x}\log x)$$

$$= (\log x)^{x-1}[1 + \log x.\log(\log x)] + 2x^{\log x - 1}\log x$$

प्रश्न 8.

$$(\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$$

उत्तर-

माना $y = (\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$

पुनः माना $y = u + v$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \ldots (1)$$

$$\therefore u = (\sin x)^x$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log u = \log(\sin x)^x = x\log\sin x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}\log\sin x + \log\sin x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) + \log \sin x \times 1$$

$$= x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \log \sin x \times 1 = x\cot x + \log \sin x$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = u(x\cot x + \log \sin x)$$

$$= (\sin x)^x[\log \sin x + x\cot x] \ldots (2)$$

पुनः $v = \sin^{-1}\sqrt{x}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\sin^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{x}{dx}x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \ldots (3)$$

समीकरण (2) तथा (3) से $\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1) में मान रखने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^x[\log \sin x + x\cot x] + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

प्रश्न 9. $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

उत्तर-

माना $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

पुनः माना $y = u + v$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \ldots (1)$$

अब, $u = x^{\sin x}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log u = \log x^{\sin x} = \sin x \log x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \sin x \frac{d}{dx}\log x + \log x \frac{d}{dx}\sin x$$

$$= \sin x \cdot \frac{1}{x} + \log x . \cos x = \cos x \log x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = u\left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right) \ldots (2)$$

तथा $v = (\sin x)^{\cos x}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log v = \log(\sin x)^{\cos x} = \cos x \log \sin x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \cos x \frac{d}{dx}\log \sin x + \log \sin x \frac{d}{dx}\cos x$$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\sin x + \log \sin x . (-\sin x)$$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x - \sin x \log \sin x$$

$$= -\sin x \log \sin x + \cot x . \cos x$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = v[-\sin x \log \sin x + \cot x \cos x]$$

$$= (\sin x)^{\cos x}[-\sin x \log \sin x + \cot x \cos x] \ldots (3)$$

समीकरण (2) तथा (3) से $\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ के मान समीकरण (1) में मान रखने पर,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right) + (\sin x)^{\cos x}\left[-\sin x \log \sin x + \cot x \cos x\right]$$

प्रश्न 10.

$$x^{x \cos x} + \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

उत्तर-

माना $y = x^{x \cos x} + \frac{x^2+1}{x^2-1}$

पुनः माना $y = u + v$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \ldots (1)$$

अब, $u = x^{x \cos x}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log u = \log x^{x \cos x} = x \cos x \log x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x \cos x \frac{d}{dx} \log x + \log x \frac{d}{dx} x \cos x$$

$$= x \cos x \cdot \frac{1}{x} + \log x\left[x \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$= \cos x + \log x[x(-\sin x) + \cos x]$$

$$= \cos x + x(-\sin x).\log x + \cos x.\log x$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = u[\cos x - x\sin x \log x + \cos x]$$

$$= x^{x\cos x}[\cos x \log x - x\sin x \log x + \cos x] \ldots (2)$$

पुनः $v = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2+1)-(x^2+1)\frac{d}{dx}(x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{(x^2-1)(2x)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x[x^2-1-x^2-1]}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \ldots (3)$$

समीकरण (2) तथा (3) से $\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ के मान समीकरण (1) में मान रखने पर,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$= x^{x\cos x}[\cos x \log x - x\sin x \log x + \cos x] - \frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

प्रश्न 11.

$$(x\cos x)^x + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}$$

उत्तर-

माना $y = (x\cos x)^x + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\ldots(1)$$

अब, $u=(x\cos x)^{x}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log u=\log(x\cos x)^{x}=x\log(x\cos x)$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=x\frac{d}{dx}\log(x\cos x)+\log(x\cos x)\frac{d}{dx}(x)$$
$$=x\cdot\frac{1}{x\cos x}\frac{d}{dx}(x\cos x)+\log(x\cos x)\times 1$$
$$=\frac{1}{\cos x}\left[x\frac{d}{dx}\cos x+\cos x\frac{d}{dx}(x)\right]+\log(x\cos x)$$
$$=\frac{1}{\cos x}[x(-\sin x)+\cos x\times(1)]+\log(x\cos x)\ [\because \log_e mn=\log_e m+\log_e n]$$
$$=-x\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}+\log x+\log\cos x$$
$$=-x\tan x+1+\log x+\log\cos x$$
$$\therefore\frac{du}{dx}=u[1-x\tan x+\log x+\log\cos x]$$
$$=(x\cos x)^{x}[1-x\tan x+\log x+\log\cos x]\ldots(2)$$

तथा $v=(x\sin x)^{\frac{1}{x}}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log v=\log(x\sin x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log(x\sin x)$$
$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\log(x\sin x)+\log(x\sin x)\frac{d}{dx}\frac{1}{x}$$
$$=\frac{1}{x}\frac{1}{x\sin x}\cdot\frac{d}{dx}(x\sin x)+\log(x\sin x)(-1)x^{-2}$$

$$= \frac{1}{x^2 \sin x}\left[x\frac{d}{dx}\sin x + \sin x\frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$+ (\log x + \log \sin x)(-1)x^{-2}$$

$$= \frac{1}{x^2 \sin x}[x\cos x + \sin x] - \frac{1}{x^2}\log x - \frac{1}{x^2}\log \sin x$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\cot x - \frac{1}{x^2}(\log x + \log \sin x)$$

$$= \frac{1}{x^2}[1 + x\cot x - \log(x\sin x)]$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = v \cdot \frac{1}{x^2}[1 + x\cot x - \log(x\sin x)]$$

$$= \frac{(x\sin x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}[1 + x\cot x - \log(x\sin x)] \ldots (3)$$

समीकरण (2) से $\frac{du}{dx}$ तथा (3) से $\frac{dv}{dx}$ का मान रखने पर,

$$= (x\cos x)^x[\log(x\cos x) - x\tan x + 1]$$

$$+ \frac{(x\sin x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}[1 + x\cot x - \log(x\sin x)]$$

प्रश्न में प्रदत्त फलनों के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 12.

$$x^y + y^x = 1$$

उत्तर- दिया है, $\because x^y + y^x = 1$

माना $u = x^y$, $v = y^x$ $\because u + v = 1$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}y\log x = y\frac{d}{dx}\log x + \log x\frac{d}{dx}(y)$$

$$= y\cdot\frac{1}{x} + \log x\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = u\left[\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right] = x^y\left[\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right]\ldots(2)$$

अब, $v = y^x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log v = \log y^x = x\log y$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(x\log y) = x\frac{d}{dx}\log y + \log y\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\cdot\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\times 1 = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = v\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] = y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right]\ldots(3)$$

समीकरण (2) तथा (3) से $\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1) में मान रखने पर,

$$x^y\left[(\log x)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\right] + y^x\left[\log y + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

$$\left(x^y\log x + \frac{xy^x}{y}\right)\frac{dy}{dx} + x^y\cdot\frac{y}{x} + y^x\log y = 0$$

$$(x^y\log x + x\,y^{x-1})\frac{dy}{dx} + yx^{y-1} + y^x\log y = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{yx^{x-1} + y^x\log y}{x^y\log x + xy^{x-1}}$$

प्रश्न 13. $y^x = x^y$

उत्तर-

दिया है, $y^x = x^y$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर, $\log y^x = \log x^y$

$$x \log y = y \log x$$

दोनों पक्षों में x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$x \frac{d}{dx} \log y + \log y \frac{d}{dx}(x) = y \frac{d}{dx} \log x + \log x \frac{d}{dx} y$$

$$x \times \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + \log y \times 1 = y \times \frac{1}{x} + \log x \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y = \frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} - \log x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \log y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{y} - \log x\right) = \frac{y}{x} - \log y$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x^2 - xy \log x) = y^2 - xy \log y$ xy से गुणा करने पर,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy \log y}{x^2 - xy \log x}$$

प्रश्न 14.

$$(\cos x)^y = (\cos y)^x$$

उत्तर-

दिया है, $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$\log(\cos x)^y = \log(\cos y)^x$ या $y \log \cos x = x \log \cos y$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$= y\frac{d}{dx}\log\cos x + \log\cos x\frac{d}{dx}(y)$$

$$= x\frac{d}{dx}\cos y + \log\cos y\frac{d}{dx}(x)$$

$$= y.\ \frac{1}{\cos x}\ \frac{d}{dx}\cos x + \log\cos x\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= x\cdot\ \frac{1}{\cos y}\ \frac{d}{dx}\cos y + \log\cos y\times 1$$

$$= y\cdot\ \frac{1}{\cos x}(-\sin x) + \log\cos x\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= x\frac{1}{\cos y}(-\sin y)\frac{dy}{dx} + \log\cos y$$

या $-y\tan x + \log\cos x\frac{dy}{dx}$

$$= -x\tan y\frac{dy}{dx} + \log\cos y$$

या $\log\cos x\frac{dy}{dx} + x\tan y\frac{dy}{dx}$

$$= \log\cos y + y\tan x$$

या $\frac{dy}{dx}(\log\cos x + x\tan y) = \log\cos y + y\tan x$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{\log\cos y + y\tan x}{\log\cos x + x\tan y}$$

प्रश्न 15. $xy\ =\ e^{(x-y)}$

उत्तर- दिया है, $xy\ =\ e^{(x-y)}$

दोनों पक्षों को लघुगणक लेने पर,

$$\log(xy) = \log e^{(x-y)}$$

या $\log x + \log y = (x - y)\log_e e\ [\because \log xy = \log x + \log y]$

या $\log x + \log y = x - y\ [\because \log_e e = 1]$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}\log x + \frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y)$$

या $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$

या $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x}$

या $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} + 1\right) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

या $\left(\frac{1+y}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{x} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1+y)}$

प्रश्न 16. $f(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$ द्वारा प्रदत्त फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए और इस प्रकार $f'(1)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है, $f(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log f(x) = \log[(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)]$$

या $\log f(x) = \log(1 + x) + \log(1 + x^2)\ [\because \log mn = \log m + \log n]$
$+ \log(1 + x^4) + \log(1 + x^8)$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1+x}\frac{d}{dx}(1+x) + \frac{1}{1+x^2}\frac{d}{dx}(1+x^2)$$
$$+ \frac{1}{1+x^4}\frac{d}{dx}(1+x^4) + \frac{1}{1+x^8}\frac{d}{dx}(1+x^8)$$

या $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}$

या $f'x = f(x)\left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}\right]$

$$= (1+x)(1+x^2) + (1+x^4)(1+x^8)$$
$$\left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}\right]$$

x = 1 रखने पर,

$$f'(1) = (1+1).(1+1).(1+1).(1+1)$$
$$\times\left[\frac{1}{1+1} + \frac{2}{1+1} + \frac{4}{1+1} + \frac{8}{1+1}\right]$$
$$= 2\times2\times2\times2\times\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{4}{2}+\frac{8}{2}\right]$$
$$= \frac{2\times2\times2\times2}{2}[1+2+4+8] = 8\times15 = 20$$

प्रश्न 17. $(x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$ का अवकलन निम्नलिखित प्रकार से कीजिए:

i. गुणनफल नियम का प्रयोग करके।
ii. गुणनफल के विस्तारण द्वारा एक एकल बहुपद प्राप्त करके।
iii. लघुगणकीय अवकलन द्वारा।

यह भी सत्यापित कीजिए कि इस प्रकार प्राप्त तीनों उत्तर समान हैं।

उत्तर-

i. गुणनफल नियम के प्रयोग द्वारा

माना $y = (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - 5x + 8)\frac{d}{dx}(x^3 + 7x + 9)$$
$$+ (x^3 + 7x + 9)\frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 8)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - 5x + 8)(3x^2 + 7) + (x^3 + 7x + 9)(2x - 5)$$

$$= 3x^2(x^2 - 5x + 8) + 7(x^2 - 5x + 8)$$
$$+ 2x(x^3 + 7x + 9) - 5(x^3 + 7x + 9)$$

$$= 3x^4 - 15x^3 + 24x^2 + 7x^2 - 35x + 56$$
$$+ 2x^4 + 14x^2 + 18x - 5x^3 - 35x - 45$$

$$= 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11 \ldots (1)$$

ii. गुणनफल के विस्तारण द्वारा हल

$y = (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$

$= x^2(x^3 + 7x + 9) - 5x(x^3 + 7x + 9) + 8(x^3 + 7x + 9)$

$= x^5 + 7x^3 + 9x^2 - 5x^4 - 35x^2 - 45x + 8x^3 + 56x + 72$

$= x^5 - 5x^4 + 15x^3 - 26x^2 + 11x + 72$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11 \ldots (2)$$

iii. लघुगणकीय अवकलन द्वारा हल

माना $y = (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log(x^2 - 5x + 8) + \log(x^3 + 7x + 9)\ [\because \log(mn) = \log m + \log n]$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^2-5x+8)}\frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 8)$$

$$+ \frac{1}{x^3+7x+9}\frac{d}{dx}(x^3 + 7x + 9)$$

$$= \frac{2x-5}{x^2-5x+8} + \frac{3x^2+7}{x^3+7x+9}$$

$$= \frac{(2x-5)(x^3+7x+9)+(3x^2+7)(x^2-5x+8)}{(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2x(x^3+7x+9)-5(x^3+7x+9)+3x^2(x^2-5x+8)+7(x^2-5x+8)}{(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)}\right]$$

$$= (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$$

$$\left[\frac{2x^4+14x^2+18x-5x^3-35x-45+3x^4-15x^3+24x^2+7x^2-35x+56}{(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)}\right]$$

$$= 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11 \ldots (3)$$

समीकरण (1), (2) और (3) से स्पष्ट है कि $\frac{dy}{dx}$ के मान समान है।

प्रश्न 18. यदि u, v तथा w, x के फलन हैं तो दो विधियों अर्थात् प्रथम गुणनफल नियम की पुनरावृत्ति द्वारा, द्वितीय-लघुगणकीय अवकलन द्वारा दर्शाइए कि

$$\frac{d}{dx}(u.v.w) = \frac{du}{dx}v.w + u.\frac{dv}{dx}.w + u.v\frac{dw}{dx}$$

उत्तर- माना y = u.v.w = u.(v.w)

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = vw\frac{d}{dx}u + u\frac{d}{dx}(vw)$$

$$= vw\frac{du}{dx} + u\left[v\frac{d}{dx}w + w\frac{d}{dx}v\right]$$

$$= \frac{du}{dx}vw + uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx}$$

माना y = uvw

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log u + \log v + \log w$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} = \frac{u'vw+uv'w+uvw'}{uvw}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{u'vw+uv'w+uvw'}{y} \quad [\because y = uvw]$$

$$\frac{dy}{dx} = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$= \frac{du}{dx}.v.w + u.w\frac{dv}{dx} + u.v\frac{dw}{dx}$$

प्रश्नावली 5.6 (पृष्ठ संख्या 197)

यदि प्रश्न संख्या 1 से 10 तक में तथाy के लिए समीकरणों द्वारा, एक-दूसरे से प्राचलिक रूप में सम्बन्धित हों तो प्राचलों का विलोपन किए बिना $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1. $x = 2at^2$, $y = at^4$

उत्तर- दिया है, $x = 2at^2$ तथा $y = at^4$

दोनों पक्षों के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt}=2a\frac{d}{dt}(t^2)=4at \text{ तथा } \frac{dy}{dt}=a\frac{d}{dt}t^4=4at^3$$

अतः $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4at^3}{4at}=t^2$

प्रश्न 2. $x = a\cos\theta, y = b\cos\theta$

उत्तर- दिया है, $x = a\cos\theta$ तथा $y = b\cos\theta$

दोनों पक्षों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta \text{ तथा } \frac{dy}{d\theta}=-b\sin\theta$$

अतः $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-b\sin\theta}{-a\sin\theta}=\frac{b}{a}$

प्रश्न 3. $x=\sin t, y=\cos 2t$

उत्तर- दिया है, $x=\sin t$ तथा $y=\cos 2t$

दोनों पक्षों के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt}=\cos t$$

तथा $\frac{dy}{dt}=-\sin 2t\frac{d}{dt}(2t)=-2\sin 2t=-4\sin t\cos t$

अतः $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-4\sin t\cos t}{\cos t}=-4\sin t$

प्रश्न 4. $x = 4t, y=\frac{4}{t}$

उत्तर- दिया है, $x = 4t$, तथा $y=\frac{4}{t}$

दोनों पक्षों का है के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dx}{dt} = 4$ तथा $\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{t^2}$

अतः $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-4}{t^2}}{4} = -\frac{1}{t^2}$

प्रश्न 5.

$$x = \cos\theta - \cos 2\theta, y = \sin\theta - \sin 2\theta$$

उत्तर-

दिया है, $x = \cos\theta - \cos 2\theta$ तथा $y = \sin\theta - \sin 2\theta$

$x = \cos\theta - \cos 2\theta$

दोनों पक्षों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta - (\sin 2\theta)\frac{d}{d\theta}(2\theta) = -\sin\theta + 2\sin 2\theta$

तथा $y = \sin\theta - \sin 2\theta$

$\therefore \frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - \cos 2\theta \frac{d}{d\theta}(2\theta) = \cos\theta - 2\cos 2\theta$

अतः $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos\theta - 2\cos 2\theta}{-\sin\theta + 2\sin 2\theta} = \frac{\cos\theta - 2\cos 2\theta}{-(\sin\theta - 2\sin 2\theta)}$

प्रश्न 6.

$$x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$$

उत्तर-

$\frac{dx}{d\theta} = a[1 - \cos\theta]$ तथा $\frac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\cot\frac{\theta}{2}$

प्रश्न 7.

$$x=\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, y=\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

उत्तर-

दिया है- $x=\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$ तथा $y=\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{\cos 2t}\frac{d}{dt}\sin^3 t-\sin^3 t\frac{d}{dt}(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{\cos 2t})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\cos 2t}.3\sin^2 t\frac{d}{dr}\sin t-\sin^3 t\cdot\frac{1}{2}(\cos 2t)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}(\cos 2t)}{\cos 2t}$$

$$=\frac{(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}.3\sin^2 t\cos t-\sin^3 t\cdot\frac{1}{2(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}}\cdot(-2\sin 2t)}{\cos 2t}$$

$$=\frac{3\sin^2 t\cos t(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}+\frac{\sin^3 t\sin 2t}{(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}}}{\cos 2t}$$

$$=\frac{3\sin^2 t\cos t\cos 2t+\sin^3 t\sin 2t}{(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}.(\cos 2t)}$$

$$=\frac{\sin^2 t(3\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t)}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\sin^2 t[2\cos t\cos 2t+(\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t)]}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sin^2 t[2\cos t\cos 2t+\cos(2t-t)]}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sin^2 t[2\cos t\cos 2t+\cos t]}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin^2 t\cos t(2\cos 2t+1)}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

तथा $\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{\cos 2t}\,\frac{d}{dt}\cos^3 t-\cos^3 t\,\frac{d}{dx}(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{\cos 2t})^2}$

$$= \frac{(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}\,3\cos^2 t(-\sin t)-\cos^3 t\,\frac{1}{2}(\cos 2t)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin 2t)}{\cos 2t}$$

$$= \frac{-3\cos^2 t\sin t(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}+\frac{\cos^3 t.\sin 2t}{(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}}}{}$$

$$= \frac{-3\cos^2 t\sin t\cos 2t+\cos^3 t\sin 2t}{(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}.(\cos 2t)}$$

$$= \frac{\cos^2 t(-3\sin t\cos 2t+\cos t\sin 2t)}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\cos^2 t[-2\sin t\cos 2t+\sin 2t\cos t-\cos 2t\sin t]}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\cos^2 t[-2\sin t\cos 2t+\sin(2t-t)]}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\cos^2 t[-2\sin t\cos 2t+\sin t]}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos^2 t\sin t(1-2\cos 2t)}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos^2 t\sin t(1-2\cos 2t)}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}{\sin^2 t\cos t(1+2\cos 2t)}$$

$$= \frac{\cos^2 t\sin t(1-2\cos 2t)}{\sin^2 t\cos t(1+2\cos 2t)} = \frac{\cos t[1-2(2\cos^2 t-1)]}{\sin t[1+2(1-2\sin^2 t)]}$$

$$= \frac{\cos t(3-4\cos^2 t)}{\sin t(3-4\sin^2 t)} = -\frac{4\cos^3 t-3\cos t}{3\sin t-4\sin^3 t} = -\frac{\cos 3t}{\sin 3t} = -\cot 3t$$

प्रश्न 8.

$$x = a\left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right) y = a \sin t$$

उत्तर-

$$x = a(\cos t + \log \tan \tfrac{t}{2}), y = a \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = a\left[-\sin t + \frac{1}{\tan \frac{t}{2}} \frac{d}{dt} \tan \frac{t}{2}\right]$$

$$= a\left[-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right] \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = a \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{a \cos t}{a \frac{\cos^2 t}{\sin t}} = \tan t$$

प्रश्न 9.

$$x = a \sec \theta, y = b \tan \theta$$

उत्तर-

दिया है- $x = a \sec \theta$ तथा $y = b \tan \theta$

दोनों पक्षों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta} = a \sec \theta \tan \theta \text{ तथा } \frac{dy}{d\theta} = b \sec^2 \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{b \sec^2 \theta}{a \sec \theta \tan \theta} = \frac{b \sec \theta}{a \tan \theta} = \frac{b}{a} \sec \theta \cot \theta$$

$$= \frac{b}{a} \times \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{b}{a} \times \frac{1}{\sin \theta} = \frac{b}{a} \operatorname{cosec}\theta$$

प्रश्न 10.

$$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta), y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

उत्तर-

$$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta), y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a[-\sin\theta + \theta.\cos\theta + \sin\theta] = a\theta\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\theta\sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

प्रश्न 11.

यदि $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}, y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

उत्तर-

यदि है- $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$ तथा $y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$

दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(a^{\sin^{-1}t})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a^{\sin^{-1}t})^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dt}(a^{\sin^{-1}t})$$

$$= \frac{1}{2}(a^{\sin^{-1}t})^{-\frac{1}{2}}a^{\sin^{-1}t}\log_e a\frac{d}{dt}\sin^{-1}t$$

प्रश्नावली 5.7 (पृष्ठ संख्या 199-200)

प्रश्न में दिए फलन के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1. $x^2 + 3x + 2$

उत्तर- माना $y = x^2 + 3x + 2$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

दोनों पक्षों का पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(2x+3)=2$$

प्रश्न 2. x^{20}

उत्तर- माना $y = x^{20}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}x^{20}=20x^{20-1}=20x^{19}$$

दोनों पक्षों का पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=20\frac{d}{dx}x^{19}=20\times 19x^{19-1}=380x^{18}$$

प्रश्न 3. x. cos x

उत्तर- माना y = x cos x

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{d}{dx}\cos x+\cos x\frac{dy}{dx}(x)$$

$$=x(-\sin x)+\cos x\times 1=-x\sin x+\cos x$$

दोनों पक्षों का पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left[x\frac{d}{dx}\sin x+\sin x\frac{d}{dx}(x)\right]+\frac{d}{dx}\cos x$$

$$=-[x\cos x+\sin x\times 1]+[-\sin x]$$

$$=-x\cos x-\sin x-\sin x=-2\sin x-x\cos x$$

प्रश्न 4. log x

उत्तर-

माना $y = \log x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

प्रश्न 5. $x^3 \log x$

उत्तर- $x^3 \log x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \frac{d}{dx} \log x + \log x \frac{d}{dx} x^3 = x^3 \cdot \frac{1}{x} + \log x.3x^2$$

$$= x^2 + 3x^2 \log x$$

दोनों पक्षों का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} x^2 + 3\left[x^2 \frac{d}{dx} \log x + \log x \frac{d}{dx} x^2\right]$$

$$= 2x + 3\left[x^2 \cdot \frac{1}{x} + \log x.2x\right]$$

$$= 2x + 3x + 6x \log x$$

$$= 5x + 6x \log x$$

$$= x(5 + 6 \log x)$$

प्रश्न 6. $e^x \sin 5x$

उत्तर-

माना $y = e^x \sin 5x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = e^x \frac{d}{dx} \sin 5x + \sin 5x \frac{d}{dx} e^x$$

$$= e^x \cos 5x \frac{d}{dx}(5x) + \sin 5x.\, e^x$$

$$= 5e^x \cos 5x + e^x \sin 5x = e^x(\sin 5x + 5\cos 5x)$$

दोनों पक्षों का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x \frac{d}{dx}(\sin 5x + 5\cos 5x) + (\sin 5x + 5\cos 5x)\frac{d}{dx} e^x$$

$$= e^x\left[\cos 5x \frac{d}{dx}(5x) + 5(-\sin 5x)\frac{d}{dx}(5x)\right]$$

$$+ (\sin 5x + 5\cos 5x)e^x$$

$$= e^x(5\cos 5x - 25\sin 5x) + (\sin 5x + 5\cos 5x)e^x$$

$$= e^x[5\cos 5x - 25\sin 5x + \sin 5x + 5\cos 5x]$$

$$= e^x[-24\sin 5x + 10\cos 5x]$$

$$= 2e^x[5\cos 5x - 12\sin 5x]$$

प्रश्न 7.

$e^{6x} \cos 3x$

उत्तर-

माना $y = e^{6x} \cos 3x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = e^{6x}\frac{d}{dx}\cos 3x + \cos 3x\frac{d}{dx}e^{6x}$$

$$= e^{6x}(-\sin 3x)\frac{d}{dx}(3x) + \cos 3x.\, e^{6x}\frac{d}{dx}(6x)$$

$$= -3e^{6x}\sin 3x + 6e^{6x}\cos 3x$$

$$= e^{6x}(6\cos 3x - 3\sin 3x)$$

दोनों पक्षों का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{6x}\frac{d}{dx}(6\cos 3x - 3\sin 3x)$$

$$+ (6\cos 3x - 3\sin 3x)\frac{d}{dx}e^{6x}$$

$$= e^{6x}\left[6(-\sin 3x)\frac{d}{dx}(3x) - 3\cos 3x\frac{d}{dx}(3x)\right]$$

$$+ [6\cos 3x - 3\sin 3x]e^{6x}\frac{d}{dx}(6x)$$

$$= e^{6x}[-6\sin 3x.3 - 3\cos 3x.3] + [6\cos 3x - 3\sin 3x] \times e^{6x}.6$$

$$= e^{6x}[-18\sin 3x - 9\cos 3x] + e^{6x}[36\cos 3x - 18\sin 3x]$$

$$= e^{6x}[-18\sin 3x - 9\cos 3x + 36\cos 3x - 18\sin 3x]$$

$$= e^{6x}[-36\sin 3x + 27\cos 3x]$$

$$= 9e^{6x}[3\cos 3x - 4\sin 3x]$$

प्रश्न 8. $\tan^{-1} x$

उत्तर-

माना $y = \tan^{-1} x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{(1+x^2)}$$

दोनों पक्षों का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(1+x^2)^{-1} = -1.(1+x^2)^{-1-1}\frac{d}{dx}(1+x^2)$$

$$= -(1+x^2)^{-2}(2x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

प्रश्न 9.

$$\log(\log x)$$

उत्तर-

माना $y = \log(\log x)$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log(\log x) = \frac{1}{\log x}\cdot\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{\log x}\times\frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\log x} = (x\log x)^{-1}$$

दोनों पक्षों का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(x\log x)^{-1} = -1(x\log x)^{-1-1}\frac{d}{dx}(x\log x)$$

$$= -(x\log x)^{-2}\left[x\cdot\frac{d}{dx}\log x + \log x\frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$= -(x\log x)^{-2}\left[x\cdot\frac{1}{x} + \log x\times 1\right]$$

$$= -(x\log x)^{-2}[1+\log x] = \frac{-(1+\log x)}{x^2(\log x)^2}$$

प्रश्न 10. $\sin(\log x)$

उत्तर-

माना $y = \sin(\log x)$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(\log x) = \cos(\log x)\frac{d}{dx}\log x$$

$$= \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x}$$

दोनों पक्षों का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x\frac{d}{dx}\cos(\log x) - \cos(\log x)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x\{-\sin(\log x)\}\frac{d}{dx}\cos(\log x) - \cos(\log x) \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{-x\sin(\log x) \times \frac{1}{x} - \cos(\log x)}{x^2}$$

$$= \frac{-\sin(\log x) - \cos(\log x)}{x^2} = \frac{-[\sin(\log x) + \cos(\log x)]}{x^2}$$

प्रश्न 11. यदि $y = 5\cos x - 3\sin x$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

उत्तर- दिया है- $y = 5\cos x - 3\sin x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 5\frac{d}{dx}\cos x - 3\frac{d}{dx}\sin x$$

$$= 5(-\sin x) - 3\cos x = -5\sin x - 3\cos x$$

दोनों पक्षों का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -5\frac{d}{dx}\sin x - 3\frac{d}{dx}\cos x$$

$$= -5\cos x - 3(-\sin x) = 3\sin x - 5\cos x$$

अतः $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 3\sin x - 5\cos x + 5\cos x - 3\sin x$ (y का मान रखने पर)

$$= 0$$

प्रश्न 12. यदि $y = \cos^{-1} x$ है तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ को केवल y के पदों में ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है- $y = \cos^{-1} x$

= x = cos y

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\cos y$$

या $1 = -\sin y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\operatorname{cosec} y$

दोनों पक्षों का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} y = -(-\operatorname{cosec} y \cot y)\frac{dy}{dx}$$

$= \operatorname{cosec} y \cot y(-\operatorname{cosec} y)$ $\left[\frac{dy}{dx} \text{ का मान रखने पर}\right]$

$$= -\operatorname{cosec}^2 y \cot y$$

प्रश्न 13. यदि $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ है तो दर्शाइए कि $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

उत्तर-

दिया है- $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x) \ldots (1)$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}\cos(\log x) + 4\frac{d}{dx}\sin(\log x)$$

$$= 3[-\sin(\log x)]\frac{d}{dx}(\log x) + 4\cos(\log x)\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$= -3\sin(\log x) \times \frac{1}{x} + 4\cos(\log x) \times \frac{1}{x}$$

दोनों पक्षों में x से गुणा करने पर,

$$x\frac{dy}{dx} = -3\sin(\log x) + 4\cos(\log x)$$

दोनों पक्षों का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$x\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dx}(x) = -3\cos(\log x)\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$-4\sin(\log x)\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 1.\frac{dy}{dx} = -3\cos(\log x)\frac{1}{x} - 4\sin(\log x).\frac{1}{x}$$

दोनों पक्षों में x से गुणा करने पर,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = -[3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)] = -y \text{ समीकरण (1) से,}$$

$$\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

या $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

प्रश्न 14. यदि $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$

उत्तर-

दिया है, $y = Ae^{mx} + Be^{nx} \ldots (1)$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = A\frac{d}{dx}e^{mx} + B\frac{d}{dx}e^{nx} = Ae^{mn}\frac{d}{dx}(mx) + Be^{nx}\frac{d}{dx}(nx)$$
$$= A.me^{mx} + B.ne^{nx} \ldots (2)$$

दोनों पक्षों का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Am\frac{d}{dx}e^{mx} + Bn\frac{d}{dx}e^{nx}$$
$$= Am^2e^{mx} + Bn^2e^{nx} \ldots (3)$$

बायाँ पक्ष $= \frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mn\,y$

$$= Am^2e^{mx} + Bn^2e^{nx} - (m+n) \times (Ame^{mx} + Bne^{nx})$$
$$+ mn(Ae^{mx} + Be^{nx})$$

[समीकरण (1) से y का, समीकरण (2) से $\frac{dy}{dx}$ का तथा समीकरण (3) से $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान रखने पर]

$$= Ae^{mx}[m^2 - m(m+n) + mn] + Be^{nx}[n^2 - n(m+n) + mn]$$
$$= Ae^{mx}[m^2 - m^2 - mn + mn] + Be^{nx}[n^2 - mn - n^2 + mn]$$
$$= Ae^{mx} \times 0 + Be^{nx} \times 0 = 0 = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 15. यदि $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$ है।

उत्तर-

प्रश्नानुसार, $y = 5e^{7x} + 6e^{-7x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5e^{7x} + 6e^{-7x})$$

$$= 5\frac{d}{dx}e^{7x} + 6\frac{d}{dx}e^{-7x} = 5e^{7x}\frac{d}{dx}(7x) + 6e^{-7x}\frac{d}{dx}(-7x)$$

$$= 5e^{7x}.7 + 6e^{-7x}.(-7) = 35e^{7x} - 42e^{-7x}$$

पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 35\frac{d}{dx}e^{7x} - 42\frac{d}{dx}e^{-7x} = 35.e^{7x}.7 - 42e^{-7x}(-7)$$

$$= 245e^{7x} + 294e^{-7x} = 49(5e^{7x} + 6e^{-7x}) = 49y$$

प्रश्न 16. यदि $e^y(x + 1)$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ है।

उत्तर- दिया है, $e^y(x + 1) = 1$ ...(1)

या $(x + 1)e^y = 1$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$1.e^y + (x + 1)e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow e^y + 1.\frac{dy}{dx} = 0$$ [समीकरण (1) से $e^y(x + 1)$ का मान रखने पर]

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -e^y$$

दोनों पक्षों का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^y\frac{dy}{dx} \left(-e^y = \frac{dy}{dx} \text{ रखने पर}\right)$$

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

अतः $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

प्रश्न 17. यदि $y = (\tan^{-1} x)^2$ है तो दर्शाइए कि $(x^2 + 1)^2 y_2 + 2x(x^2 + 1) y_1 = 2$ है।

उत्तर- दिया है, $y = (\tan^{-1} x)^2$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)^2 = 2\tan^{-1} x \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{2\tan^{-1} x}{1+x^2}$

दोनों पक्षों में (1 + x2) से गुणा करने पर, $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 2\tan^{-1} x$

दोनों पक्षों का पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x)\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

दोनों पक्षों में $(1 + x^2)$ से गुणा करने पर,

$$(1 + x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)^2 y_2 + 2x(x^2 + 1)y_1 = 2$$

प्रश्नावली 5.8 (पृष्ठ संख्या 202)

प्रश्न 1. फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8, x \in [-4, 2]$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

उत्तर- दिया गया फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8, x \in [-4, 2]$

फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8$, अंतराल [-4, 2] में संतत तथा अंतराल (-4, 2) में अवकलनीय है।

तथा $f(-4) = 16 - 8 - 8 = 0$

$f(2) = 4 + 4 - 8 = 0$

$\Rightarrow f(-4) = f(2)$

अत: रोले के प्रमेय की सभी शर्ते सन्तुष्ट हैं तब रोले के प्रमेय के अनुसार एक बिन्दु CE(-4, 2),

जहाँ $f'(c) = 0$

$\Rightarrow f'(c) = 0$

$\Rightarrow 2c + 2 = 0$ ($\because f'(x) = 2x + 2$)

$\Rightarrow c = -1$

इसलिए $c = -1$ पर $f'(c) = 0$ और $c = -1 \in (-4, 2)$

प्रश्न 2. जाँच कीजिए कि क्या रोले का प्रमेय निम्नलिखित फलनों में से किन-किन पर लागू होता है। इन उदाहरणों से क्या आप रोले के प्रमेय के विलोम के बारे में कुछ कह सकते हैं?

i. $f(x) = |x|$ के लिए $x \in [5, 9]$
ii. $f(x) = |x|$ के लिए $x \in [-2, 2]$
iii. $f(x) = x^2 - 1$ के लिए $x \in [1, 2]$

उत्तर-

i. $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [5, 9]$

$f(x) = [x]$, बिन्दु $x = 6, 7, 8$ पर न तो संतत है और न ही अवकलनीय है।

अतः रोले प्रमेय लागू नहीं है।

ii. $f(x) = [x]$, $x \in [-2, 2]$

$f(x) = [x]$, बिन्दु $x = -1, 0, 1$ पर न तो संतत है और न ही अवकलनीय है।

अतः रोले प्रमेय लागू नहीं है।

iii. $f(x) = (x^2 - 1), x \in [1, 2]$ के लिए

$f(1) = 1 - 1 = 0$ $f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$f(1) \neq f(2)$

यद्धपि f[1, 2] में संतत है तथा फलन (1, 2) अवकलनीय भी है परन्तु $f(1) \neq f(2)$.

अतः रोले प्रमेय लागू नहीं है।

प्रश्न 3. यदि f: [-5, 5] → R एक संतत फलन है और यदि f' (x) किसी भी बिन्दु पर शून्य नहीं होता है तो सिद्ध कीजिए कि $f(-5) \neq f(5)$.

उत्तर- यहाँ f : [-5, 5] →R

f संतत है तथा अवकलनीय है परन्तु $f'(x) \neq 0$

अन्तराल (-5, 5) में रोले प्रमेय के लिए आवश्यक है-

यदि

i. [a, b] में f संतत है।
ii. (a, b) में f अवकलित होता है।
iii. $f(a) = f(b)$

तब $f'(c) = 0, c \in (a, b)$

यहाँ $f'(c) \neq 0 \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

अतः $f(-5) \neq f(5)$

प्रश्न 4. माध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए, यदि अंतराल [a, b] में $f(x) = x^2 - 4x - 3$, जहाँ a = 1 और b = 4 है।

उत्तर- दिया है, (x) = x^2 - 4x - 3, [1, 4] अंतराल के लिए f एक बहुपदीय व्यंजन है। यह 1, 4 में संतत तथा (1, 4) में अवकलनीय दोनों है।

$$f(a) = f(1) = (1)^2 - 4 \times 1 - 3$$
$$= 1 - 4 - 3 = -6$$
$$f(b) = f(4) = (4)^2 - 4 \times 4 - 3$$
$$= 16 - 16 - 3 = -3$$
$$f'(x) = 2x - 4$$
$$f'(x) = 2c - 4$$
$$\because\ f'c = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\Rightarrow 2c - 4 = \frac{-3-(-16)}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$$
$$\therefore\ 2c = 4 + 1 \Rightarrow 2c = 5$$
$$\Rightarrow c = \frac{5}{2} \in (1, 4)$$

अतः माध्यमान प्रमेय सत्यापित होती है।

प्रश्न 5. माध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए, यदि अन्तराल [a, b] में f(x) = $x^3 - 5x^2 - 3x$, जहाँ a = 1 और b = 3 है। f '(c) = 0 के लिए c ≠ (1,3) को ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है, f(x) = $x^3 - 5x^2 - 3x$ [1, 3] में f संतत है और (1, 3) में अवकलनीय है क्योकि यह बहुपदीय है।

$$f(a) = f(1) = (1)^3 - 5(1)^2 - 3 \times 1$$
$$= 1 - 5 - 3$$
$$= 1 - 8 = -7$$

$f(b) = f(3) = (3)^3 - 5(3)^2 - 3 \times 3$

$= 27 - 45 - 9 = -27$

$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$

$f'(c) = 3c^2 - 10c - 3$

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow \; 3c^2 - 10c - 3 = \frac{-27-(-7)}{3-1}$

$= -\frac{20}{2} = -10$

$\Rightarrow \; 3c^2 - 10c - 3 + 10 = 0$

$\Rightarrow \; 3c^2 - 10c + 7 = 0$

$\Rightarrow \; (c-1)(3c-7) = 0$

$\therefore \; c \neq 1, c = \frac{7}{3} \in (1,3)$

अतः दिया हुआ फलन दिए गए अंतराल में माध्यमान प्रमेय को सत्यापित करता है।

यदि $f'(c) = 0$

तब $3c^2 - 10c - 3 = 0$

$\Rightarrow (3c - 1)(c - 3) = 0$

$\Rightarrow c = \frac{1}{3}, 3$

$\Rightarrow c \in (1, 3)$

प्रश्न 6. निम्नलिखित दिए गए फलन के लिए माध्यमान प्रमेय की अनुपयोगिता की जाँच कीजिए।

i. $f(x)=[x], x \in [5, 9]$.

ii. $f(x) \subset [x], x \in [-2, 2]$

iii. $f(x) = x^2 - 1, x \in [1, 2]$

उत्तर-

i. $f(x)=[x], x \in [5, 9]$.

अन्तराल (5, 9) में $f(x) = [x]$ बिन्दु $x = 6, 7, 8$ पर न तो संतत है और न ही अवकलनीय है।

अतः माध्यमान प्रमेय लागू नहीं है।

ii. $f(x) \subset [x], x \in [-2, 2]$

अन्तराल [-2, 2] में | बिन्दु $x= -1, 0, 1$ पर न तो संतत है और न ही अवकलनीय है।

अतः माध्यमान प्रमेय लागू नहीं है।.

iii. $f(x) = x^2 - 1, x \in [1, 2]$

एक बहुदीय है। यह अन्तराल [1, 2] में संतत है तथा (1, 2) में अवकलनीय है।

$f(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$f'(x) = 2x$

$f'(c) = 2c$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow \ 2c = \frac{3-0}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

चूँकि $c = \frac{3}{2} \in (1, 2)$

अतः माध्यमान प्रमेय लागु होती है।

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 207-208)

प्रश्न में प्रदत्त फलन का, x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

प्रश्न 1. $(3x^2 - 9x + 5)^9$

उत्तर-

माना $y = (3x^2 - 9x + 5)^9$ इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = 9(3x^2 - 9x - 5)^8 . \frac{d}{dx}(3x^2 - 9x + 5)$$

$$= 9(3x^2 - 9x + 5)^8 . (6x - 9)$$

$$= 27(3x^2 - 9x + 5)^8 . (2x - 3)$$

प्रश्न 2. $\sin^3 x + \cos^6 x$

उत्तर- माना $y = \sin^3 x + \cos^6 x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 3\sin^2 x . \frac{d}{dx}\sin x + 6\cos^5 x . \frac{d}{dx}\cos x$$

$$= 3\sin^2 x . \cos x + 6\cos^5 x . (-\sin x)$$

$$= \sin x \cos x(\sin x - 2\cos^4 x)$$

प्रश्न 3. $(5x)^{3\cos 2x}$

उत्तर-

माना $y = (5x)^{3\cos 2x}$, दोनों ओर log लेने पर

$$\log y = \log(5x)^{3\cos 2x} = 3\cos 2x.\log 5x$$

इसलिए,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 3\cos 2x.\frac{d}{dx}\log 5x.\frac{d}{dx}3\cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[3\cos 2x \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5 + \log 5x.3(-\sin 2x).2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3(5x)^{3\cos 2x}\left[\frac{\cos 2x - 2\sin 2x \log 5x}{x}\right]$$

प्रश्न 4.

$$\sin^{-1}(x\sqrt{x}), 0 \leq x \leq 1.$$

उत्तर-

माना $y = \sin^{-1}(x\sqrt{x})$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \cdot \left[x\frac{d}{dx}\sqrt{x} + \sqrt{x}.\frac{d}{dx}x\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \cdot \left[x\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}.1\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \cdot \left[\frac{x+2x}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$= \frac{3x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x^3}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x^3}}$$

प्रश्न 5.

$$\frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}, -2 < x < 2.$$

उत्तर-

माना $y = \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}$ इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x+7}\frac{d}{dx}\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\left(\sqrt{2x+7}\right)^2}$$

$$= \frac{\left[\cos^{-1}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x+7}}.2\right]-\sqrt{2x+7}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}, \frac{x}{2}}{2x+7}$$

$$= \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+7}}+\sqrt{2x+7}\frac{1}{\sqrt{4-(x)^2}}}{2x+7}$$

$$= \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}.\sqrt{4-x^2}+2x+7}{(2x+7)\sqrt{2x+7}\sqrt{4-x^2}}$$

प्रश्न 6.

$$\cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right], 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

उत्तर-

माना $y = \cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}\right]$, इसलिए,

$$y = \cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}+\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}{\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}-\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}\right]$$

$$= \cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}\right]$$

$$= \cot^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \cot^{-1}\left[\frac{2\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right] = \cot^{-1}\left[\cot\frac{x}{2}\right] = \frac{x}{2}$$

प्रश्न 7.

$$(\log x)^{\log x}, x > 1$$

उत्तर-

माना $y = (\log x)^{\log x}$, दोनों ओर $\log$ लेने पर

$$\log y = \log(\log x)^{\log x} = \log x.\log(\log x)$$

इसलिए,

$$\frac{1}{dy}\frac{dy}{dx} = \log x.\frac{d}{dx}\log(\log x) + \log(\log x).\frac{d}{dx}\log x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\log x.\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x} + \log(\log x)\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\log x)^{\log x}\left[\frac{1+\log(\log x)}{x}\right]$$

प्रश्न 8. $\cos(a\cos x + b\sin x)$, किन्ही अचर a तथा b के लिए

उत्तर-

माना $y = \cos(a\cos x + b\sin x)$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(a\cos x + b\sin x)\cdot\frac{d}{dx}(a\cos x + b\sin x)$$

$$= -\sin(a\cos x + b\sin x)(-a\sin x + b\cos x)$$

$$= \sin(a\cos x + b\sin x)(a\sin x - b\cos x)$$

प्रश्न 9.

$$(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)},\ \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

उत्तर-

माना $y = (\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}$, दोनों और $\log$ लेने पर

$$\log y = \log(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}$$

$$= (\sin x - \cos x).\log(\sin x - \cos x)$$

इसलिए,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x - \cos x)\cdot\frac{d}{dx}\log(\sin x - \cos x)$$

$$+\log(\sin x - \cos x).\frac{d}{dx}(\sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[(\sin x - \cos x)\cdot\frac{(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)}\right.$$

$$\left.+\log(\sin x - \cos x)(\cos x + \sin c)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}$$

$$(\cos x + \sin x)[1 + \log(\cos x - \sin x)]$$

प्रश्न 10. $x^x + x^a + a^x + a^a$, किसी नियत $a > 0$ तथा $x > 0$ के लिए

उत्तर-

माना $u = x^x$ तथा $y = u + x^a + a^x + a^a$ इसलिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{d}{dx}x^a + \frac{d}{dx}a^x + \frac{d}{dx}a^a$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + ax^{a-1} + a^x \log a + 0 \quad \ldots (1)$$

यहाँ, $u = x^x$, दोनों ओर $\log$ लेने पर

$$\log u = \log x^x = x. \log x$$

इसलिए,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx}\log x + \log x \cdot \frac{d}{dx}x$$

$$x. \frac{1}{x} + \log x.1$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u(1 + \log x)$$

$$= x^x(1 + \log x)$$

समीकरण (1) में $\frac{du}{dx}$ का मन रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \log x) + ax^{a-1} + a^x \log a$$

प्रश्न 11.

$$x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2}, x > 3 \text{ के लिए}$$

उत्तर-

माना $u = x^{x^2-3}$ तथा $v = (x-3)^{x^2}$ इसलिए, $y = u + v$

दोनों और x के सापेक्ष अवलोकन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \ldots (1)$$

यहाँ, $u = x^{x^2-3}$, दोनों और $\log$ लेने पर
$\log u = (x^2 - 3) \log x$, इसलिए,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = (x^2-3).\frac{d}{dx}\log x + \log x.\frac{d}{dx}(x^2-3)$$

$$= (x^2-3).\frac{1}{x} + \log x.2x$$

$$\frac{du}{dx} = u\left[\frac{x^2-3+2x^2\log x}{x}\right]$$

$$\frac{du}{dx} = x^{x^2-3}\left[\frac{x^2-3+2x^2\log x}{x}\right]$$

$$= x^{x^2-4}(x^2-3+2x^2\log x)\ldots(2)$$

तथा, $v = (x-3)^{x^2}$, दोनों और log लेने पर $\log v = x^2\log(x-3)$, इसलिए,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x^2, \frac{d}{dx}\log(x-3) + \log(x-3).\frac{d}{dx}x^2$$

$$= x^2.\frac{1}{x-3} + \log(x-3).2x$$

$$= \frac{x^2}{x-3} + 2x.\log(x-3)$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{x^2}{x-3} + 2x.\log(x-3)\right]$$

$$= (x-3)^{x^2}\left[\frac{x^2}{x-3} + 2x.\log(x-3)\right]\ldots(3)$$

समीकरण (2) से $\frac{du}{dx}$ का समीकरण (3) से $\frac{dv}{dx}$ का समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^2-4}(x^2-3+2x^2\log x)$$
$$+ (x-3)^{x^2}\left[\frac{x^2}{x-3} + 2x.\log(x-3)\right]$$

प्रश्न 12. यदि y = 12(1 – cos t), x = 10(t – sin t), $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

यहाँ, $x = 10(t - \sin t), y = 12(1 - \cos t)$

इसलिए, $\frac{dx}{dt} = 10(1 - \cot t)$ तथा $\frac{dy}{dt} = 12(0 + \sin t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12 \sin t}{10(1-\cos t)}$$

$$= \frac{6\left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\right)}{5\left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)} = \frac{6}{5} \cot \frac{t}{2}$$

प्रश्न 13. यदि $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}, 0 < x < 1$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

यहाँ, $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1} x + \frac{d}{dx} \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} \frac{d}{dx} \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{d}{dx} (1 - x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

प्रश्न 14. यदि $-1 < x < 1$ के लिए $x\sqrt{1 + y} + y\sqrt{1 + x} = 0$ है तो सिद्ध कीजिए कि

उत्तर-

दिया है: $x\sqrt{1 + y} = y\sqrt{1 + x} = 0$

$$\Rightarrow x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$$

दोनों और वर्ग करने पर,

$$x^2(1+y) = y^2(1+x)$$
$$\Rightarrow x^2 + x^2y = y^2 + y^2x$$
$$\Rightarrow x^2 - y^2 + x^2y - y^2x = 0$$
$$\Rightarrow (x+y)(x-y) + xy(x-y) = 0$$
$$\Rightarrow (x-y)(x+y+xy) = 0$$
$$\Rightarrow (x+y+xy) = 0 \; [\because x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0]$$
$$\Rightarrow y(1+x) = -x$$
$$\Rightarrow y = -\frac{x}{1+x}$$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{(1+x)\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}(1+x)}{(1+x)^2}\right]$$

$$= -\frac{1+x-x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

प्रश्न 15. यदि किसी c > 0 के लिए $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$, a और b से स्वतंत्र एक स्थिर राशि है।

उत्तर- दिया है: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$, इसलिए,

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(x-a)^2+\frac{d}{dx}(y-b)^2=\frac{d}{dx}c^2$$

$$\Rightarrow 2(x-a)+2(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b}$$

पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y-b)\frac{d}{dx}(x-a)-(x-a)\frac{d}{dx}(y-b)}{(y-b)^2}$$

$$=-\frac{(y-b)1-(x-a)\frac{dy}{dx}}{(y-b)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y-b)1-(x-a)\left(-\frac{x-a}{y-b}\right)}{(y-b)^2}$$

$$=-\frac{(y-b)^2+(x-a)^2}{(y-b)^3}=-\frac{c^2}{(y-b)^3}$$

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$ में मान रखने पर

$$\frac{\left[1+\left(-\frac{x-a}{y-b}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{c^2}{(y-b^3)}}=\frac{\left[1+\frac{(x-a)^2}{(y-b)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{c^2}{(y-b)^3}}$$

$$=\frac{\left[\frac{(y-b)^2+(x-a)^2}{(y-b)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{c^2}{(y-b)^3}}=\frac{\left[\frac{c^2}{(y-b)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{c^2}{(y-b)^3}}$$

$$=\frac{\frac{c^3}{(y-b)^3}}{-\frac{c^2}{(y-b)^3}}=-\frac{c^3}{c^2}=-c,$$ जो a और b से स्वतंत्र एक स्थिर राशि है|

प्रश्न 16. यदि cos y = x cos(a + y), तथा cos a ≠ ±1, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

उत्तर-

दिया है: $\cos y = x\cos(a+y)$

$$\Rightarrow x = \frac{\cos y}{\cos(a+y)}, \text{ इसलिए,}$$

दोनों पक्षों का y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos(a+y)\frac{d}{dy} - \cos y\frac{d}{dy}\cos(a+y)}{\cos^2(a+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\cos(a+y)(-\sin y) - \cos y(-\sin(a+y))}{\cos^2(a+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-\sin y\cos(a+y) + \cos y\sin(a+y)}{\cos^2(a+y)}$$

$$= \frac{\sin(a+y-y)}{\cos^2(a+y)} = \frac{\sin a}{\cos^2(a+y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$$

प्रश्न 17. यदि $x = a(\cos t + t\sin t)$ और $y = a(\sin t - t\cos t)$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

यहाँ $x = a(\cos t + t\sin t)$,

$$y = a(\sin t - t\cos t)$$

इसलिए, $\frac{dx}{dt} = a[-\sin t + (t\cos t + \sin t)] = at\cos t$ तथा

$$\frac{dy}{dt} = a[(\cos t - (-t\sin t + \cos t))] = at\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{at \sin t}{at \cos t} = \tan t$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 t . \frac{dt}{dx} = \sec^2 t . \frac{1}{at \cos t} = \frac{\sec^3 t}{at}$$

प्रश्न 18. यदि f(x) = |x|³, तो प्रमाणित कीजिए कि f"(x) का अस्तित्व है और इसे ज्ञात भी कीजिए।

उत्तर- f(x) = |x|³ को पुनः व्यवस्थित करके लिखने पर

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{if } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

यदि $x \geq 0, f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x$

यदि $x < 0, f(x) = -x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f''(x) = -6x$

अतः, $f''(x)$ का अस्तित्व सभी वास्तविक संख्याओं है। इस प्रकार

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{if } x \geq 0 \\ -6x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

प्रश्न 19. गणितीय आगमन के सिद्धांत के प्रयोग द्वारा, सिद्ध कीजिए कि सभी धन पूर्णांक n के लिए

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ है।

उत्तर-

माना, $p(n) : \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$n = 1$ रखने पर, $LHS = \frac{d}{dx}(x^1) = 1$ तथा $RHS = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

अतः, $p(n), n = 1$ के लिए सत्य है।

माना, $p(k) : \frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$ सत्य है।

सिद्ध करना है कि $p(k+1) : \frac{d}{dx}(x^{k+1}) = (k+1)x^k$ भी सत्य होगा।

$$\text{LHS} = \frac{d}{dx}(x^{k+1}) = \frac{d}{dx}(x^k.x) = x^k\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}x^k$$

$$= x^k.1 + x.kx^{k-1} = (1+k)x^k = \text{RHS},$$

अतः, $p(n), n = k+1$ के भी सत्य है।

इस प्रकार, गणितीय आगमन के सिद्धांत के प्रयोग द्वारा, p(n) सभी धन पूर्णांक n के लिए सत्य है।

प्रश्न 20. $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ का प्रयोग करते हुए अवकलन द्वारा cosines के लिए योग सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है:

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B,$$

दोनों पक्षों कस x के सापेक्ष अवलकन करने पर

$$\frac{d}{dx}\sin(A+B) = \left(\sin A\frac{d}{dx}\cos B + \cos B\frac{d}{dx}\sin A\right)$$

$$+\left(\cos A\frac{d}{dx}\sin B + \sin B\frac{d}{dx}\cos a\right)$$

$$\Rightarrow \cos(A+B).\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}\right)$$

$$= \left(\sin A(-\sin B)\frac{dB}{dx} + \cos B\cos A\frac{dA}{dx}\right)$$

$$+\left(\cos A\cos B\frac{db}{dx} + \sin B(-\sin A)\frac{dA}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \cos(A+B).\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}\right)$$

$$= (\cos A \cos B - \sin A \sin B)\frac{dB}{dx}$$
$$+ (\cos A \cos B - \sin A \sin B)\frac{dA}{dx}$$

$$\Rightarrow \cos(A+B).\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}\right)$$

$$= (\cos A \cos B - \sin A \sin B)\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

प्रश्न 21. क्या एक ऐसे फलन का अस्तित्व है, जो प्रत्येक बिंदु पर संतत हो किन्तु केवल दो बिंदुओं पर अवकलनीय न हो? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर- फलन f(x) = |x - 1| + |x - 3| प्रत्येक बिंदु पर संतत है। किन्तु केवल दो बिन्दुओ x = 1 तथा x = 3 पर अवलनीय नहीं है।

प्रश्न 22.

यदि $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

उत्तर-

दिया है।: $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ \frac{dl}{dx} & \frac{dm}{dx} & \frac{dn}{dx} \\ a & b & c \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ \frac{da}{dx} & \frac{db}{dx} & \frac{dc}{dx} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix} + 0 + 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$= \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

प्रश्न 23.

यदि $y = e^{a \cos^{-1} x}, -1 \leq x \leq 1$, तो दर्शाइए कि $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$

उत्तर-

दिया है: $y = e^{a \cos^{-1} x}$, इसलिए,

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{a \cos^{-1} x} = e^{a \cos^{-1} x}\frac{d}{dx}a \cos^{-1} x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{a \cos^{-1} x} a. \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}$$

दोनों और वर्ग करने पर

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2y^2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2y^2$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष पुनः अवलकन करने पर,

$$(1-x^2).2\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2(1-x^2) = a^2 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[2(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(-2x)\right] = 2a^2y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 2\frac{dy}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx}\right] = 2a^2y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = a^2y$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$$