गणित

अध्याय-5: सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण

समिश्र संख्या

समिश्र संख्या की परिभाषा (Complex number definition in hindi):-

वो सभी संख्याएँ जो की वास्तविक और काल्पनिक संख्याओं के मिलने से बनी होती है उन्हें समिश्र संख्या (Complex Number) कहते हैं।

समिश्र संख्याओं को a + ib के रूप में लिखा जाता है।

(i) प्राकृतिक संख्याएँ,

N= 1,2,3,4,5,......

(ii) पूर्णांक संख्याएँ,

I=.......-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,......

(iii) परिमेय संख्याएँ,

Q=............$-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots \ldots \ldots.$

(iv) अभाज्य संख्याएँ,

P=2,3,5,7, 11, 13,...........

ये सभी संख्याएँ ऐसी हैं कि इनका वर्ग सदैव धनात्मक ही होता है।

अब, माना कि

$x^2 + a^2 = 0$

$x^2 = -a^2$

$x^2 = -1 \times a^2$

$X = \pm\sqrt(-1a)$

समी. (1) से स्पष्ट है कि कोई ऐसी संख्या है जिसका वर्ग ऋणात्मक है।

गणितज्ञ यूलर (Euler) ने $\sqrt{-1}$ को ग्रीक अक्षर iota के i से निरूपित कर समी.

(2) को इस प्रकार स्पष्ट किया

$$x = \pm\, ai$$

चूंकि प्रचलित संख्या पद्धति में इनका उल्लेख नहीं है, इसलिये इन्हें काल्पनिक संख्या (Imaginary number) नाम दिया गया, अर्थात् ऐसी संख्या जिसका वर्ग ऋणात्मक हो अथवा जिसका एक गुणक (Multiple) $\sqrt{-1}$ = i हो, काल्पनिक संख्या कहलाती है।

सम्मिश्र संख्या (Complex Number)

a $\pm\, i$b के रूप वाली किसी संख्या को सम्मिश्र संख्या कहते हैं, जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं। इस प्रकार सम्मिश्र संख्याएँ वास्तविक और अधिकल्पित संख्याओं के योग अथवा अन्तर से व्यक्त होती हैं।

सम्मिश्र संख्या a+ib में को सम्मिश्र संख्या का वास्तविक भाग (Real part) तथा b को सम्मिश्र संख्या का अधिकल्पित भाग (Imaginary part) कहते हैं। सम्मिश्र.संख्या को 2 से प्रकट किया जाता है। इस प्रकार $|z = a + ib]$ एक सम्मिश्र संख्या है।

यदि a + ib में b = 0 हो तो यह सम्मिश्र संख्या एक शुद्ध वास्तविक संख्या (Purely real number) हो जाती है और यदि a=0 हो, तो यह एक शुद्ध अधिकल्पित संख्या (Purely imaginary number) हो जाती है।

क्रमित युग्म (Ordered Pair)

किसी सम्मिश्र संख्या z=a+ib को वास्तविक संख्याओं a और b के क्रमित युग्म (a, b) के रूप में भी परिभाषित किया जाता है। इस प्रकार,

यदि z=a+ib, तो इसका क्रमित युग्म (a,b) है।

z=-a+ib, तो इसका क्रमित युग्म (-a, b) है।

z=a-ib, तो इसका क्रमित युग्म (a,-b) है।

तथा z =-a-ib, तो इसका क्रमित युग्म (-a,-b) है।

सम्मिन संख्याओं के गुण (Properties of Complex Numbers)

प्रमेव 1. शून्य सम्मिश्र संख्या के वास्तविक और अधिकल्पिते भाग अलग-अलग शून्य होते हैं। अर्थात् यदि

a+ib = 0 हो, तो a=0 और b = 0

सत्यापन: a+ib=0

$$a = -ib$$

$$a^2 = (-ib)^2$$

$$a^2 = i^2b^2 = -b^2,$$

$$a^2 + b^2 = 0$$

चूंकि a तथा । वास्तविक संख्याएँ हैं, अतएव उनके वर्गों का योग तब तक शून्य नहीं हो सकता जब तक कि उनमें से प्रत्येक शून्य के बराबर न हो।

अतः a=0 तथा b = 0.

प्रमेय 2. दो समान सम्मिश्र संख्याओं के वास्तविक और अधिकल्पित भागआपस में अलग-अलगसमान होते हैं। अर्थात्।

यदि $a + ib = c + id$ हो, तो $a = c, b = d$ होता है।

सत्यापन: a+ib =c+id

$$a - c + i(b - d) = 0$$

$a - c = 0, b - d = 0,$ ……….[प्रमेय 1 से]

$a = c, b = d.$

संयुग्मी सम्मिश्र संख्याएँ (Conjugate Complex Numbers)

यदि किसी सम्मिश्र संख्या के काल्पनिक भाग को विपरीत चिन्ह से प्रदर्शित करें तो वह दी गयी सम्मिश्र संख्या की संयुग्मी सम्मिश्र संख्या कहलाती है।

अर्थात् z = a+ib की संयुग्मी सम्मिश्र संख्या a-ib है।

सम्मिश्र संख्या z की संयुग्मी संख्या को z से सूचित किया जाता है। इस प्रकार, यदि z=a+ib हो, तो z =a-ib.

अब हम निम्नलिखित परिणामों को सिद्ध करेंगे:

1. किसी सम्मिश्र संख्या की संयुग्मी की संयुग्मी वही सम्मिश्र संख्या होती है, अर्थात्

$(Z) = z.$

2. किसी सम्मिश्र संख्या और उसकी संयुग्मी का योग एवं गुणनफल वास्तविक संख्याएँ होती हैं, अर्थात्

$z + z \in R, zz \in R.$

3. दो सम्मिश्र संख्याओं के योग (अथवा अन्तर) की संयुग्मी संख्या उन्हीं संख्याओं के संयुग्मी के योग (अथवा अन्तर) के बराबर होती है, अर्थात्

$$z^1 + z^2 = z^1 + z^2$$

4.दो सम्मिश्र संख्याओं के गुणनफल(अथवा भागफल) की संयुग्मी संख्या उन्हीं संख्याओं के संयुग्मी के गुणनफल (अथवा भागफल) के बराबर होती है, अर्थात्

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \text{ और } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

उपपत्ति : माना कि $z = x + iy, z_1 = x_1 + iy_1$ और $z_2 = x_2 + iy_2$ तब,

$$\bar{z} = x - iy, \overline{z_1} = x_1 - iy_1 \text{ और } \overline{z_2} = x_2 - iy_2.$$

1. $\because$ $z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

अतः $\overline{(\bar{z})} = \overline{(x - iy)} = x + iy = z$

अर्थात् $\overline{(\bar{z})} = z.$

2. $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy)$

$= 2x$, (एक वास्तविक संख्या)

पुनः $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2$

$= x^2 + y^2$, (एक वास्तविक संख्या)

3.
$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} \\
&= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\
&= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\
&= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\
&= \overline{(x_1 + iy_1)} + \overline{(x_2 + iy_2)}
\end{aligned}$$

अतः $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$

अर्थात् दो सम्मिश्र संख्याओं के योग की संयुग्मी सम्मिश्र संख्या उन्हीं संख्याओं के संयुग्मी के योग के बराबर होती है।

पुनः
$$\begin{aligned}
\overline{z_1 - z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)} \\
&= \overline{(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)} \\
&= (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2) \\
&= (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) \\
&= \overline{(x_1 + iy_1)} - \overline{(x_2 + iy_2)}
\end{aligned}$$

अतः $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

किसी भी शुद्ध वास्तविक अथवा शुद्ध अधिकल्पित संख्या को एक सम्मिश्र संख्या के रूप में लिखा जा सकता है

जैसे- $a = a + i.0$

$ib = 0 + i.b$

$\therefore\ ib = bi$

अतः सम्मिश्र संख्या a+ib को a+bi भी लिख सकते हैं।

दो सम्मिश्र संख्याओं का योग (Addition of Two Complex Numbers)

दो सम्मिश्र संख्याओं का योग एक ऐसी सम्मिश्र संख्या है जिसके वास्तविक व अधिकल्पित भाग क्रमशः दी हुई सम्मिश्र संख्याओं के वास्तविक व अधिकल्पित भागों के योग के बराबर होते हैं।

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad z_1 = a + ib \\ \underline{+z_2 = c + id} \\ z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d) \end{array}}$$

यदि $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id$ हो, तो

$$z_1 + z_2 = (a+ib) + (c+id)$$
$$= (a+c) + i(b+d)$$

पुनः यदि $z_1 = (a, b)$ तथा $z_2 = (c, d)$ हो, तो

$$z_1 + z_2 = (a+c, b+d).$$

दो सम्मिश्र संख्याओं का व्यवकलन (Subtraction of Two Complex Numbers)

$$\begin{array}{l} z_1 = a + ib \\ z_2 = c + id \\ - \quad - \quad - \\ \hline z_1 - z_2 = (a-c) + i(b-d) \end{array}$$

यदि $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id$ हो, तो

$$z_1 - z_2 = (a+ib) - (c+id)$$
$$= (a-c) + i(b-d).$$

पुनः यदि $z_1 = (a,b)$ तथा $z_2 = (c,d)$ हो, तो

$$z_1 - z_2 = (a-c, b-d).$$

दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल (Product of Two Complex Numbers)

यदि $z_1 = a+ib$ तथा $z_2 = c+id$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं,

तब उनका गुणनफल

$$z_1 z_2 = (a+ib)(c+id)$$
$$= ac + iad + ibc + i^2 bd$$
$$= ac + iad + ibc - bd, \qquad [\because i^2 = -1]$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc).$$

पुनः यदि $z_1 = (a,b)$ तथा $z_2 = (c,d)$ हो, तो उनका गुणनफल

$z_1 z_2 = (ac-bd, ad + bc)$.

दो सम्मिश्र संख्याओं का भागफल (Quotient of Two Complex Numbers)

यदि $z_1 = a+ib$ तथा $z_2 = c+id$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तब उनका भागफल

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{c+id}$$

$$=\frac{a+ib}{c+id}\cdot\frac{c-id}{c-id},$$

[अंश व हर में $c-id$ से गुणा करने पर]

$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

पुनः यदि $z_1=(a,b)$ तथा $z_2=(c,d)$ हो, तो उनका भागफल

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

सम्मिश्रसंख्याओं के योग के गुणधर्म (Properties of Addition of Complex Numbers)

(i) संवरक नियम (Closure Law) : यदि z_1और z_2, कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो $z_1 + z_2$ भी एक सम्मिश्र संख्या होगी।

सत्यापन : माना कि z_1 =a+ib और z_2 = c+id दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब,

z_1+z_2 = (a+ib)+(c+id)

=(a+c)+i(b+d).

जो स्पष्टतः एक सम्मिश्र संख्या है।

(ii) क्रमविनिमेय नियम (Commutative Law): यदि z_1 और z_2 कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हों, तो $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ अर्थात् दो सम्मिश्र संख्याओं का योग उनके जोड़ने के क्रम पर निर्भर नहीं करता है।

सत्यापनः माना कि z_1= (a,b) तथा z_2 =(c,a) दोसम्मिश्र सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब,

$z_1 + z_2 = (a,b)+(c,d)$

$=(a+c,b+d)$, [योग के नियम से]

$=(c+a,d+b)$, [a,b,cd वास्तविकसंख्याएँ हैं अतः उनका योग क्रमविनिमेय है]

$=(c,d)+(a,b)$, [योग के नियम से]

अतः $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

सम्मिश्र संख्याओं के गुणनफल के गुणधर्म (Properties of Product of Complex Numbers)

(i) संवरक नियम (Closure Law) : यदि z_1 और z_2 कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं तो उनका गुणनफल z_1z_2 भी एक सम्मिश्र संख्या होता है।

सत्यापन : माना कि 21 = (a,b) और 22 = (c,d) दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं । तब, $z_1z_2=(a,b)(c,d)$

$=(ac-bd,ad+bc)$, (परिभाषा से] जो एक सम्मिश्र संख्या है। अतः $z_1\ z_2$ गुणा के सापेक्ष संवरक है।

(ii) क्रमविनिमेय नियम (Commutative Law) : यदि z_1 और z_2 कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो $z_1\ z_2 = z_2z_1$ अर्थात् दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल उनके क्रम पर निर्भर नहीं करता है।

सत्यापन : माना कि $z_1 =(a,b)$ तथा $z_2 =(c,d)$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब,

$z_1\ z_2 = (ac-bd,\ ad + bc)$, [परिभाषा से)

$=(ca-db,da+cb)$,

[वास्तविक संख्याओं के गुणनफल के क्रमविनिमेय नियम से]

$=(c,d)(a,b)$, (परिभाषा से]

$= z_1z_2$.

मापांक (Modulus or Absolute Value)- किसी सम्मिश्र संख्या 7 के वास्तविक एवं अधिकल्पित भागों के वर्गों के योग के धनात्मक वर्गमूल को उसका मापांक कहते हैं। इसे | z | से प्रकट करते हैं। इस प्रकार,

यदि $z = x + iy$ हो, तो

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

पुनः $\bar{z} = x - iy$

$\therefore$ $|\bar{z}| = |x - iy|$

$$= \sqrt{(x)^2 + (-y)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

अतः $|z| = |\bar{z}|$

अर्थात् किसी सम्मिश्र संख्या और उसकी संयुग्मी सम्मिश्र संख्या के मापांक बराबर होते हैं।

महत्वपूर्ण तथ्य (Important Facts)

(i) $(\bar{z})$ =z

(ii) z+$\bar{z}$ =(a+ib)+(a-ib)

=2a=2 वास्तविक भाग।

(iii) z-$\bar{z}$ =(a+ib)-(a-ib)

=2ib = 2 अधिकल्पित भाग।

(iv) z.$\bar{z}$ = (a+ib)(a-ib)

= a^2+b^2 (शुद्ध वास्तविक संख्या)।

ध्यान दें- ....

(a) $\frac{1}{i}=-i$ (b) $\frac{1+i}{1-i}=i$

(c) $\frac{1-i}{1+i}=-i$

उदाहरण 1. i^{57} का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $i^{57}=(i^4)^{14}\times i$

$=(1)^{14}\times i,$ $[\because i^4=1]$

$=i.$

उदाहरण 2. i^{-35} का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $i^{-35}=\frac{1}{i^{35}}$

$=\frac{1}{(i^4)^8\times i^3}$

$=\frac{i^4}{(1)^8\times i^3},$

$=i.$

उदाहरण 3. i^{-39} का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $i^{-39} = \frac{1}{i^{39}}$

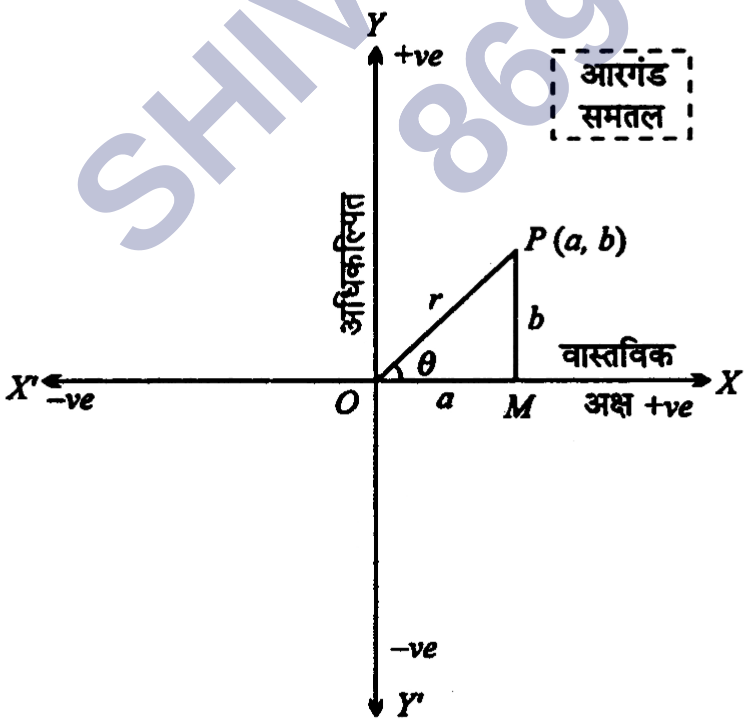
$$= \frac{1}{(i^4)^9 \times i^3}$$

$$= \frac{i^4}{(1)^9 \times i^3},$$

$$= i.$$

सम्मिश्र संख्या का ज्यामितीय निरूपण (आर्गन चित्र)(Geometrical Representation of a Complex Number)

कागज के समतल में दो परस्पर लम्बवत् रेखायें XOX तथा YOY खींचा जो एक-दूसरे को बिन्दु पर काटती हैं।O कोमूलबिन्दु (Origin) कहते हैं। क्षैतिज रेखा XOX वास्तविक अक्ष (Real axis) कहलाती है तथा YOY, अधिकल्पित अक्ष (Imaginary axis) कहलाती है। यह समतल सम्मिश्र (Complex plane) या आरगंड समतल (Argand plane) कहलाता है। दिशाएँ Ox तथा OY धनात्मक होती हैं तथा दिशाएँ Ox' एवं OY ऋणात्मक होती हैं।



अब किसी सम्मिश्र संख्या a+ib को इस समतल पर निरूपित करने के लिए O से वास्तविक अक्ष पर a इकाई दूरी तथा फिर अधिकल्पित अक्ष के समान्तर 6 इकाई दूरी (a तथा b के चिन्हों को ध्यान में रखते हुए) नापकर बिन्दु P(a,b) को अंकित कर लेते हैं। यही क्रिया किसी भी बिन्दु को निरूपित करने के लिए प्रयुक्त की जा सकती है। इस चित्र को आरगंड चित्र (Argand diagram) कहते हैं।

इस प्रकार बिन्दु P(a,b), सम्मिश्र संख्या a+ib को निरूपित करता है। अब O से P को मिलाओ। दूरी OP, सम्मिश्र संख्या a+ib का मापांक कहलाती है। इसे r से प्रकट करते हैं।

R = OP

$=\sqrt{OM^2+MP^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2}$

मापांक r= la+ibl.

टिप्पणी : वामवर्त दिशा में नापे जाने पर ∅ धनात्मक तथा दक्षिणावर्त दिशा में नापे जाने पर ∅ ऋणात्मक लिया जाता है।

अब, $\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{b}{a}$

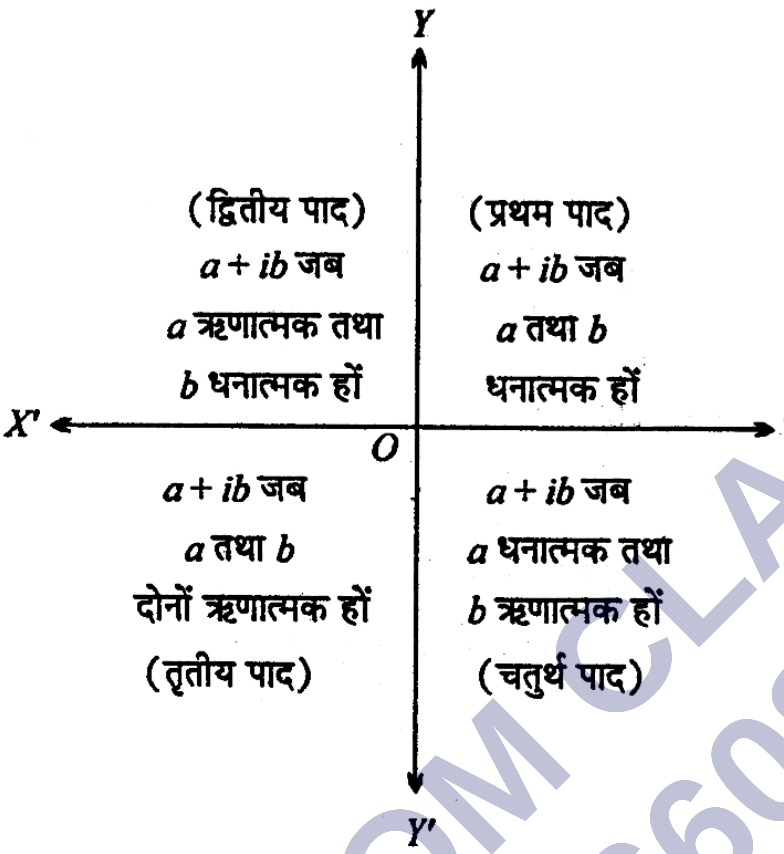
∴ **कोणांक** $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

अतः एक सम्मिश्र संख्या z = a+ib का मापांक r तथा कोणांक ∅ इस प्रकार हैं : .

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

विशेष : सम्मिश्र संख्या a+ib को निरूपित करने वाले बिन्दु की पादीय स्थिति, a तथा b के चिन्हों पर निर्भर करती हैं। पादीय स्थिति आसन्न चित्र में प्रस्तुत है।



सम्मिश्र संख्याओं का ध्रुवीय प्रदर्शन (Polar Representation of Complex Numbers)

किसी भी सम्मिश्र संख्या a+ib को r(cosØ+isinØ) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जहाँ सम्मिश्र संख्या का मापांक तथा Ø, सम्मिश्र संख्या का कोणांक है।

a=rcosØ

b=rsinØ

a+ib =rcosØ+irsinØ

=r(cosØ+isinØ)

यहाँ r(cosØ+isinØ), सम्मिश्र संख्या a+ib का ध्रुवीय रूप या त्रिकोणमितीय रूप कहलाता है। इसे मापांक-कोणांक रूप (Modulus amplitude form) भी कहते हैं। (r, Ø) बिन्दु P के ध्रुवीय निर्देशांक (Polar coordinates) कहलाते हैं। समी. (1) व (2) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$a^2+b^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2$$

$$\Rightarrow \qquad r=\sqrt{a^2+b^2}$$

समी. (2) में समी. (1) का भाग देने पर,

$$\tan\theta=\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

उदाहरण 1. Z=1+i का मापांक और कोणांक ज़ात कीजिए।

हल : माना 1+i=rcosØ+ir sinØ

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

rcosØ =1

rsin Ø = 1

समी. (1) और (2) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2\cos^2\theta=1$$
$$r^2\sin^2\theta=1$$
$$\overline{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2}$$

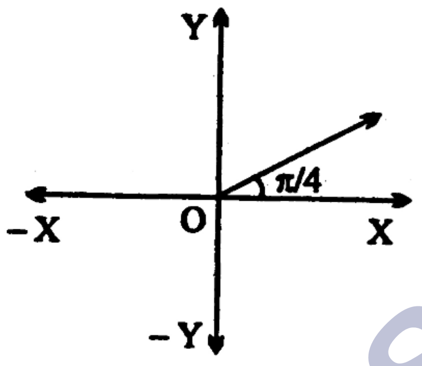
$\Rightarrow \quad r^2=2$

मापांक $|z|=r=\sqrt{2}$

$$\sqrt{2}\cos\theta=1$$

$\Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{2}\sin\theta=1$$



उदाहरण 2. 1-i का मापांक एवं कोणांकज्ञात कीजिए।

हल : माना z=1-I =rcosØ+irsinØ

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

rcosØ =1 ......(1)

rsinØ =-1 ......(2)

समी. (1) और (2) का वर्ग करके जोड़ने पर,

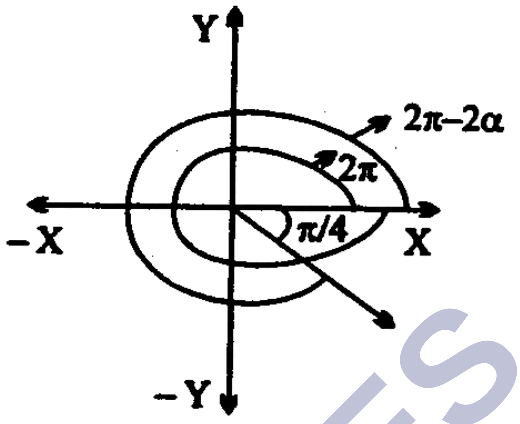
$$r^2\cos^2\theta=1$$
$$r^2\sin^2\theta=1$$
$$\underline{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2}$$
$$r^2=2$$
$$r=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\cos\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2}\sin\theta = -1$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$



θ चतुर्थ चतुर्थांश में है।

$$\therefore \quad \theta = 2\pi - \alpha, \text{ जहाँ } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \arg z = \frac{7\pi}{4} \text{ या } \frac{-\pi}{4}.$$

त्रिभुजिय असमता (Triangle Inequality)

कथन : दो सम्मिश्र संख्याओं के योगफल का मापांक उनके मापांकों के योगफल से कम अथवा उसके बराबर होता है, अर्थात्

$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

जहाँ z_1+z_2 कोई दो सम्मिश्र संख्याएं हैं।

सत्यापन : माना कि

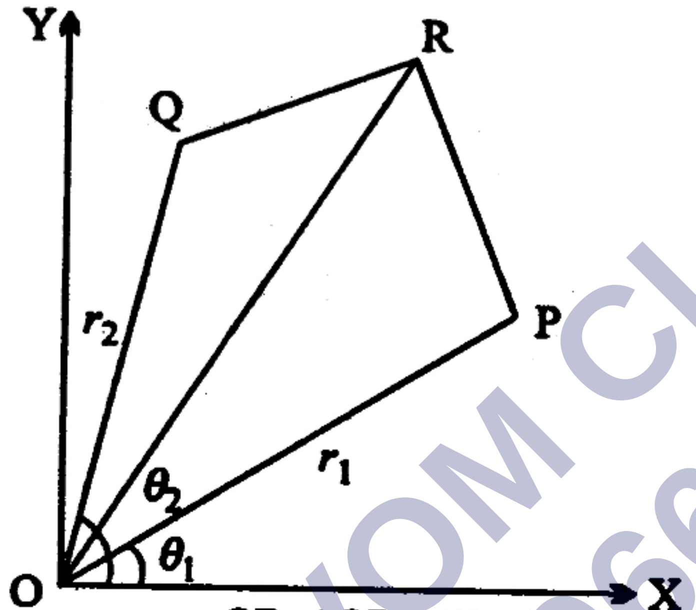
$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$|z_1| = r_1$ तथा $|z_2| = r_2$

$$z_1 + z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= (r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2)$$



$$OR \le OP + PR$$

$$\therefore |z_1 + z_2|$$

$$= \sqrt{(r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2)^2 + (r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2)^2}$$

$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\le \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2}, \qquad [\because \cos(\theta_1 - \theta_2) \le 1]$$

$$|z_1 + z_2| \le r_1 + r_2$$

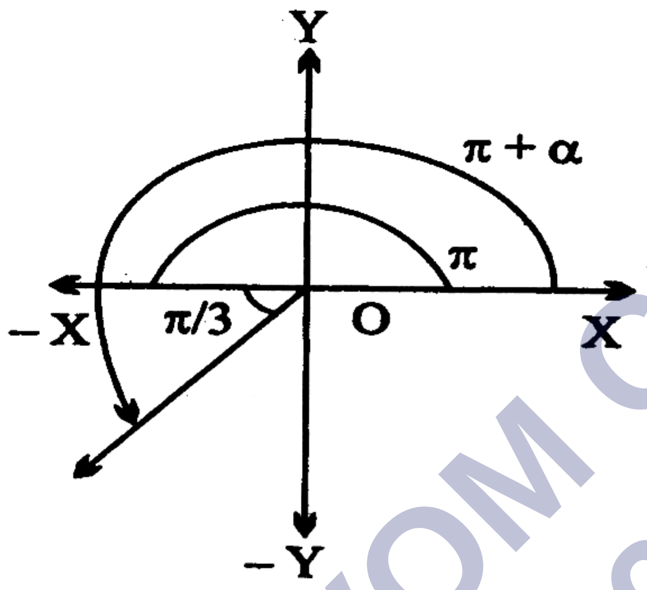
$$\boxed{|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|}$$

दो सम्मिश्र संख्याओं के गुणनफल का मापांक उनके मापांकों के गुणनफल के बराबर होता है

कथन : $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

सत्यापन : माना कि $z_1 = r_1(\cos\emptyset_1 + i\sin\emptyset_1)$

तथा $z_2 = r_2(\cos\emptyset_2 + i\sin\emptyset_2)$



$\therefore \quad |z_1| = r_1$ तथा $|z_2| = r_2$.

अब $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$$\times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

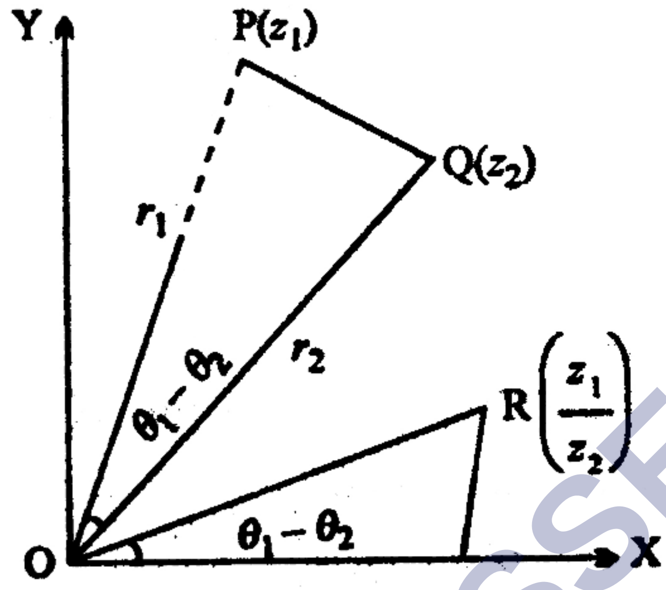
$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$\therefore |z_1 z_2| = r_1 r_2$

$$\boxed{|z_1 z_2| = |z_1||z_2|}$$

दो सम्मिश्र संख्याओं के भागफल का मापांक उनके मापांकों के भागफल के बराबर होता है

कथन : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}$



सत्यापन : माना कि $z_1 = r_1 (\cos\emptyset_1 + i\sin\emptyset_1)$

तथा $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$\therefore$ $|z_1| = r_1$ और $|z_2| = r_2$

अब, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$

$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)^{-1}]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$\therefore$ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{r_1}{r_2}$

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$$

दो सम्मिश्र संख्याओं के भागफल का कोणांक उनके कोणांकों के अन्तर के बराबर होता है

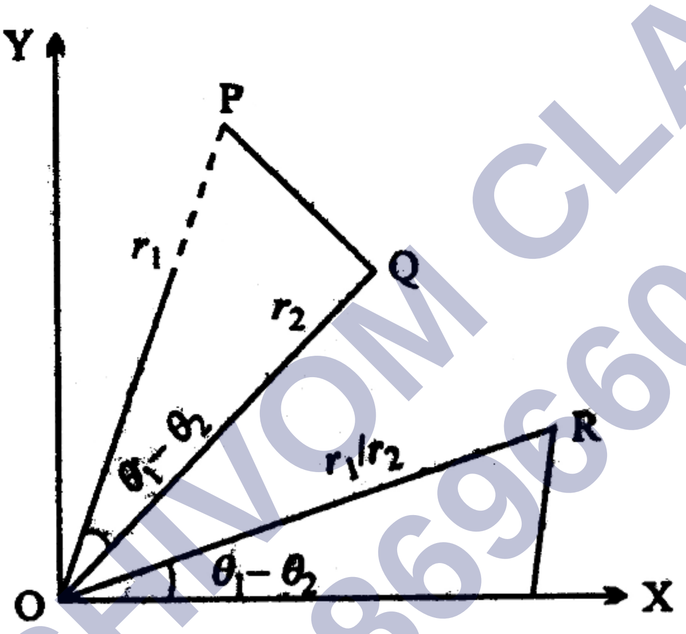
कथन : $$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

सत्यापन : माना कि $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

तथा $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$\therefore$ $\arg z_1 = \theta_1$ और $\arg z_2 = \theta_2$

$$\therefore \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}\right]$$



$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)^{-1}]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2$$

उदाहरण 1. सिद्ध कीजिए कि सम्मिश्र संख्याओं -4+31, 2-31 और -1 से निरूपित होने वाले बिन्दु समरेखीय हैं।

हल : दी हुई सम्मिश्र संख्याएँ आरगंड समतल पर क्रमशः बिन्दुओं (-4,3),(2,-3) और (0,-1) को निरूपित करती हैं।

बिन्दुओं (-4,3) और (2,-3) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण है :

$$y-3=\frac{-3-3}{2+4}(x+4),$$

$$\left[\because y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\right]$$

$$y-3=-(x+4)$$

$$x+y+1=0$$

स्पष्टतः बिन्दु (0, -1) इस रेखा के समीकरण को सन्तुष्ट करता है। अतः बिन्दु (0,-1) इस रेखा पर स्थित है। फलतः दिए हुए तीनों बिन्दु समरेख हैं।

उदाहरण 2. सम्मिश्र संख्याओं z,z+iz,iz से निरूपित बिन्दुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि $z=x+iy=(x,y)$

तब $iz=i(x+iy)$

$$=-y+ix=(-y,x)$$

$\therefore$ $z+iz=(x+iy)+i(x+iy)$

$$=x+iy+ix-y, \qquad [\because i^2=-1]$$

$$=x-y+i(x+y)$$

$$=\{(x-y),(x+y)\}$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

$$=\frac{1}{2}[x\{(x-(x+y)\}-y(x+y-y)$$

$$+(x-y)(y-x)]$$

$$=\frac{1}{2}[x(-y)-xy-(x-y)^2]$$

$$=\frac{1}{2}\left(-xy-xy-x^2-y^2+2xy\right)$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}|z|^2$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 5.1 (पृष्ठ संख्या 112)

प्रश्न 1 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को a + id के रूप में व्यक्त कीजिये।

$$(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$$

उत्तर-

$$(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$$

$$=-5\times\frac{3}{5}\times i\times i$$

$$=-3i^2=3$$

प्रश्न 2 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को a + id के रूप में व्यक्त कीजिये।

$i^9 + i^{19}$

उत्तर-

$$i^9 + i^{19}$$

$$i^8 . i + i^{18} . i$$

$$= [i^2]^4 . i + [i^2]^9 i$$

$$= (-1)^4 i + (-1)^9 i = i - i = 0$$

प्रश्न 3 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को a + id के रूप में व्यक्त कीजिये।

i^{-39}

उत्तर-

$$i^{-39} = \frac{1}{i^{39}} = \frac{1}{i^{39} i} \frac{1}{(i^2)^{19} i}$$

$$= \frac{1}{(-1)^{19} i} = \frac{1}{-i} = -\frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = -\frac{i}{i^2} = -\frac{i}{-1}$$

$$= i$$

प्रश्न 4 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को a + id के रूप में व्यक्त कीजिये।

3(7 + i7) + i(7 + i7)

उत्तर- 3(7 + i7) + i(7 + i7)

$= 21 + 21i + 7i + 7i^2$

= 21 + 28i + 7(-1) [∵ i^2 = -1]

= 21 - 7 + 28i

= 14 + 28i

प्रश्न 5 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को a + id के रूप में व्यक्त कीजिये।

(1 - i) - (-1 + i6)

उत्तर- (1 - i) - (-1 + i6)

= (1 - i) + (1 - 6i)

= 1 - i + 1 - 6i

= 2 - 7i

प्रश्न 6 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को a + id के रूप में व्यक्त कीजिये।

$$\left(\frac{1}{5}+\mathrm{i}\frac{2}{5}\right)-\left(4+\mathrm{i}\frac{5}{2}\right)$$

उत्तर-

$$\left(\frac{1}{5}+\mathrm{i}\frac{2}{5}\right)-\left(4+\mathrm{i}\frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}-4-\frac{5}{2}\mathrm{i}$$

$$=\left(-4+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{2}\right)\mathrm{i}$$

$$=-\frac{19}{5}+\frac{4-25}{10}\mathrm{i}$$

$$=-\frac{19}{5}-\frac{21}{10}\mathrm{i}$$

प्रश्न 7 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को a + id के रूप में व्यक्त कीजिये।

$$\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+i\frac{1}{3}\right)\right]-\left(-\frac{4}{3}+i\right)$$

उत्तर-

$$\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+i\frac{1}{3}\right)\right]-\left(-\frac{4}{3}+i\right)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{7}{3}i+4+\frac{1}{3}i+\frac{4}{3}-i$$

$$=\left(\frac{1}{3}+4+\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{3}=-1\right)i$$

$$=\frac{17}{3}+\frac{5}{3}i$$

प्रश्न 8 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को a + id के रूप में व्यक्त कीजिये।

$(1 - i)^4$

उत्तर- $(1 - i)^4 = [(1 - i)^2]^2$

$= [1 - 2i + i^2]^2$

$= [1 - 2i - 1]^2$

$= (-2i)^2$

$= -2i \times -2i$

$= 4i^2 = 4(-1) = -4$

प्रश्न 9 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को a + id के रूप में व्यक्त कीजिये।

$$\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3$$

उत्तर-

$$\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\left(\frac{1}{3}\right)^2(3i)+3\left(\frac{1}{3}\right)(3i)^2+(3i)^3$$

$$=\frac{1}{27}+9\times\frac{1}{9}i+9(-1)+27i^2.i$$

$$=\frac{1}{27}+i-9-27i$$

$$=\left(\frac{1}{27}-9\right)+(1-27)i$$

$$=-\frac{242}{27}-26i$$

प्रश्न 10 सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक को a + id के रूप में व्यक्त कीजिये।

$$\left(-2-\frac{1}{3}i\right)^3$$

उत्तर-

$$\left(-2-\frac{1}{3}i\right)^3$$

$$=(-1)^3\left(2+\frac{1}{3}i\right)=-\left(2+\frac{1}{3}i\right)^3$$

$$=-\left[2^3+3.2^2\left(\frac{1}{3}i\right)+3.2\left(\frac{1}{3}i\right)^2+\left(\frac{1}{3}i\right)^3\right]$$

$$= -\left[8 + 3.4 \times \frac{1}{3}i + 6\frac{i^2}{9} + \frac{1}{27}i^3\right)\right]$$

$$= -\left[8 + 4i - \frac{2}{3} + \frac{1}{27}i^3 i\right]$$

$$= -\left[\frac{22}{3} + \left(4 - \frac{1}{27}\right)i\right]$$

$$= \left[-\frac{22}{3} - \frac{107}{27}i\right]$$

$$= -\frac{22}{3} - \frac{107}{27}i$$

प्रश्न 11 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

4 - 3i

उत्तर-

4 - 3i का गुणात्मक प्रतिलोम $= \frac{1}{4-3i}$

$$= \frac{1}{4-3i} \times \frac{4+3i}{4+3i}$$

$$= \frac{4+3i}{16-9i^2} = \frac{4+3i}{16+9}$$

$$= \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$$

प्रश्न 12 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

$\sqrt{5} + 3i$

उत्तर-

$\sqrt{5} + 3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम

$$= \frac{1}{\sqrt{5}+3i} = \frac{1}{\sqrt{5}+3i} \times \frac{\sqrt{5}-3i}{\sqrt{5}-3i}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-3i}{5-9i^2} = \frac{\sqrt{5}-3i}{5+9}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{14} - \frac{3}{15}i$$

प्रश्न 13 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

- i

उत्तर-

-i का गुणात्मक प्रतिलोम

$$= \frac{1}{i} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} - \frac{i}{i^2} = -\frac{i}{-1} = i$$

प्रश्न 14 निम्नलिखित व्यंजक को a + ia के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\frac{(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)-(\sqrt{3}-i\sqrt{2})}$$

उत्तर-

$$\frac{(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)-(\sqrt{3}-i\sqrt{2})}$$

$$\frac{9-i^2.5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i-\sqrt{3}+\sqrt{2}i} = \frac{9+5}{2\sqrt{2}i}$$

$$= \frac{14}{2\sqrt{2}i} = \frac{7}{\sqrt{2}i} \times \frac{i}{i} = \frac{7i}{\sqrt{2}i^2}$$

$$= -\frac{7i}{\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{2}i$$

प्रश्नावली 5.2 (पृष्ठ संख्या 116)

प्रश्न 1 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।

$z = -1 - i\sqrt{3}$

उत्तर-

मान लीजिए $z = -1 - i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$

अर्थात $r\,\cos\theta = -1, r\,\sin\theta = -\sqrt{3}$

वर्ग करके जोड़ने पर, $r^2 = 1 + 3 = 4$ या $r = 2$

z का मापांक = 2

$\cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3}$

और $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3}$

यहाँ पर $\sin\theta$ व् $\cos\theta$ दोनों ऋणात्मक है

$\because$ θ तीसरे चतुर्थांश में है।

$\therefore 0 = \pi\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ या $\theta = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ कोणांक $= \frac{-2\pi}{3}$ और मापांक = 2

प्रश्न 2 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।

$z = -\sqrt{3} + i$

उत्तर-

मान लीजिए $z = -\sqrt{3} + i = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$

$\Rightarrow r\,\cos\theta = -\sqrt{3}\,r\,\sin\theta = 1$

वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 3 + 1 = 4$$

$\therefore r^2 = 4$ या $r = 4$

$$\frac{r\ \sin\theta}{r\ \cos\theta} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\because \sin\theta$ धनात्मक और $\cos\theta$ ऋणात्मक है।

$\therefore \theta$ दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \mathrm{tam}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\tan\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

अतः कोणांक $= \frac{5\pi}{6}$ मापांक = 2

प्रश्न 3 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए।

1 - i

उत्तर-

मान लीजिए $z = 1 - i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore r\ \cos\theta = 1$ तथा $r\ \sin\ \theta = -1$

वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^\theta = 1 + 1 = 2$$

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^\theta) = 2$$

$r^2 = 2$ या $r = \sqrt{2}$

अब $\cos\theta$ धनात्मक है और $\sin\theta$ ऋणात्मक है।

$\therefore \theta$ चौथे चतुर्थांश में है।

$$\tan\theta = \frac{-1}{1} = -1 = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

अतः z का ध्रुवीय रूप $= \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

प्रश्न 4 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए।

-1 + i

उत्तर-

माना लीजिए $z = -1 + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow r\cos\theta = -1$ और $r\sin\theta = 1$

इनका वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1$$

$$r^2(\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) = 1$$

$r^2 = 2$ या $r = \sqrt{2}$

यहाँ $\cos\theta$ ऋणात्मक तथा $\sin\theta$ धनात्मक है।

$\Rightarrow \theta$ दूसरे चतुर्थांश में है।

$$\frac{r \sin\theta}{r \operatorname{cod}\theta} = \tan\theta = -1$$

$$= \tan\left(\pi\frac{\pi}{4} = \tan\frac{3\pi}{4}\right)$$

अतः z का ध्रुवीय रूप $= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right)$

प्रश्न 5 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए।

-1 - i

उत्तर-

माना लीजिए $z = -1 - i = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

$\therefore r \cos\theta = -1, r \sin\theta = -1$

इनका वर्ग करके जोड़ने पर,

$$\therefore r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1 + 1 = 2$$

$$r^2(\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) = 2$$

$r^2 = 2$ या $r = \sqrt{2}$

यहाँ $\cos\theta$ ऋणात्मक तथा $\sin\theta$ धनात्मक है।

$\therefore$ θ तीसरे चतुर्थांश में है।

$$\frac{\mathrm{r}\sin\theta}{\mathrm{r}\operatorname{cod}\theta} = \tan\theta = \frac{-1}{-1} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{5\pi}{4} = \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \theta = \frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$$

अतः z का ध्रुवीय रूप $= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{-3\pi}{4}\right)$$

प्रश्न 6 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए।

-3

उत्तर-

माना लीजिए $\mathrm{z} = -3 = \mathrm{r}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$

$$\mathrm{r}\cos\theta = -3, \mathrm{r}\sin\theta = 0$$

इनका वर्ग करके जोड़ने पर,

$$\therefore \mathrm{r}^2\cos^2\theta + \mathrm{r}^2\sin^2\theta = 9$$

$\mathrm{r}^2(\cos^2\theta + \mathrm{r}^2\sin^2\theta) = \mathrm{r}62 = 9$ या $\mathrm{r} = 3$

$\frac{\mathrm{r}\sin\theta}{\mathrm{r}\operatorname{cod}\theta} = \frac{0}{-3} = 0$ परन्तु $\mathrm{r}\cos\theta$ ऋणात्मक है।

$$\therefore \theta = \pi$$

$\therefore$ अतः z का ध्रुवीय रूप $= 3(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$

प्रश्न 7 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए।

$\sqrt{3} + i$

उत्तर-

माना लीजिए $z = -\sqrt{3} + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r\cos\theta = \sqrt{3}, r\sin\theta = 1$

वर्ग करके जोड़ने पर,

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 3 + 1 = 4$

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4$

$r^2 = 4$ या $r = 2$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ और $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\sin\theta$ और $\cos\theta$ दोनों ही धनात्मक है।

$\therefore\ \theta$ पहले चतुर्थाश में है।

$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ या $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

अतः z का ध्रुवीय रूप $= 2\left(\cos\theta\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

प्रश्न 8 सम्मिश्र संख्याओ में प्रत्येक को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए।

i

उत्तर-

माना लीजिए $z = i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow r\cos\theta = 0$ और $r\sin\theta = 1$

वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 0 + 1$$

$$r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1$$

$r^2 = 1$ या $r = 1$

$$\cos\theta = 0, \sin\theta = 1$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ अतः z का ध्रुवीय रूप $= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

प्रश्नावली 5.3 (पृष्ठ संख्या 117)

प्रश्न 1 निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए।

$x^2 + 3 = 0$

उत्तर-

$$x^2 + 3 = 0$$

या $x^2 + -3$

या $x = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\,i$

प्रश्न 2 निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए।

$2x^2 + x + 1 = 0$

उत्तर- दिया है, $2x^2 + x + 1 = 0$

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ को तुलना करने पर,

$a = 2, b = 1, c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.2.1}}{2.2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{7}\, i}{4}$$

प्रश्न 3 निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए।

$x^2 + 3x + 9 = 0$

उत्तर- दिया गए समीकरण $x^2 + 3x + 9 = 0$ को $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$a = 1, b = 3, c = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4.1.9}}{2.1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}\, i}{2}$$

प्रश्न 4 निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए।

$-x^2 + x - 2 = 0$

उत्तर- दिया गया है, $-x^2 + x - 2 = 0$

-1 से दोनों पक्षों में गुना करने पर

$x^2 - x + 2 = 0$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 1, b = -1, c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{7}\, i}{2}$$

प्रश्न 5 निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए।

$x^2 + 3x + 5 = 0$

उत्तर- दिया गया है, $x^2 + 3x + 5 = 0$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 1, b = 3, c = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4.1.5}}{2.1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{11}\, i}{2}$$

प्रश्न 6 निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए।

$x^2 - x + 2 = 0$

उत्तर- दिया गया है, $x^2 - x + 2 = 0$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 1, b = -1, c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{7}\, i}{2}$$

प्रश्न 7 निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए।

$\sqrt{2x^2} + x + \sqrt{2} = 0$

उत्तर-

दिया गया है, $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.\sqrt{2}.\sqrt{2}}}{2.\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7i}}{2\sqrt{2}}$$

प्रश्न 8 निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए।

$\sqrt{3x^2} - \sqrt{2x} + 3\sqrt{3} = 0$

उत्तर-

दिया है-

$$\sqrt{3x^2} - \sqrt{2x} + 3\sqrt{3} = 0$$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = \sqrt{3}, b = -\sqrt{2}, c = 3\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4\sqrt{3.3}\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 36}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-34}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{34}i}{2\sqrt{3}}$$

प्रश्न 9 निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए।

$$x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

उत्तर-

दिया गया है, $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

दोनों पक्षों में $\sqrt{2}$ में गुना करने पर,

$$\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}, c = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4.\sqrt{2}.1}}{2.\sqrt{2}}$$

$$\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\sqrt{1 - 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}\, i\right)}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2}-1\, i}{2}$$

प्रश्न 10 निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए।

$x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

उत्तर-

दिया है, $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

दोनों पक्षों में $\sqrt{2}$ में गुना करने पर,

$$\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\sqrt{2}.\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{7}\, i}{2\sqrt{2}}$$

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 120-121)

प्रश्न 1

$\left[i^{18}+\left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^{3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\left[i^{18}+\left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^{3}$$

$$=\left[(i^{2})^{9}+\frac{1}{(i^{2})^{12}i}\right]^{3}$$

$$=\left[(-1)^{9}+\frac{1}{(-1)^{12}i}\right]^{3}$$

$$=\left[-1+\frac{1}{i}\times\frac{i}{i}\right]^{3}$$

$$=[-1-i]^{3}=-(1+i)^{3}$$

अब $(a+b)^{3}=[a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}]$

$$=-(1+3i+3i^{2}+i^{3})$$

$$=-(1+3i-3+i^{2}.i)$$

$$=-(-2+3i-i)$$

$$=-(2+2i)=2-2i$$

प्रश्न 2 किन्ही दो सम्मिश्र संख्याओ z_1 और z_2 के लिए सिद्ध कीजिए-

$Re\ (z_1 z_2) = Re z_1\ Re z_2 - Im z_1\ Im z_2$

उत्तर- मान लीजिए $z_1 = a + id,\ z_2 = c + id$

$z_1 z_2 = (a + ib)(c + id)$

$= ac + adi + bci + i^2 bd$

$= (ac - bd) + (ad + bc)\ i$

$Re\ (z_1 z_2)$ का वास्तविक भाग $= ac - bd$

$= Re z_1\ Re z_2 - Im z_1\ Im z_2$

यहाँ पर $Re z_1$ का वास्तविक भाग $= a$ इसी प्रकार $Re z_2 = c$

$Im z_1 = z_1$ का काल्पनिक भाग $= b$

इसी प्रकर $Im z_2 = d$

प्रश्न 3

$\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ को मानक रूप में परिवर्तित कीजिए।

उत्तर-

$$\left(\frac{1}{1-4i}\ \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$$

$$\left(\frac{1+4i}{(1+4i)(1-4i)}-\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)\left[\frac{3-4i}{5+i}\times\frac{5-i}{5-i}\right]$$

$$=\left(\frac{1+4i}{1+16}-\frac{2(1-i)}{1+1}\right)\left[\frac{15+4i^2-3i-20i}{25+1}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{17}-1+\left(\frac{4}{17}+1\right)i\right)\left[\frac{11}{26}=\frac{23}{26}i\right]$$

$$=\left[-\frac{16}{17}+\frac{21}{17}i\right]\left[\frac{11}{26}-\frac{23}{26}i\right]$$

$$\left[-\frac{16}{17}\times\frac{11}{26}-\frac{21}{17}\times\frac{23}{26}i^2+\frac{16}{17}\times\frac{23}{26}i+\frac{21}{17}\times\frac{11}{26}i\right]$$

$$=\left[-\frac{176}{442}+\frac{483}{442}+\left(\frac{368}{442}+\frac{231}{442}\right)i\right]$$

$$=\frac{307}{442}+\frac{599}{442}i$$

प्रश्न 4

यदि $x-i\,y=\sqrt{\frac{a-id}{c-id}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $(x^2+y2^2)=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

उत्तर-

$$x-i\,y=\sqrt{\frac{a-id}{c-id}}$$

i के स्थान पर -i लिखने पर $x-i\,y=\sqrt{\frac{a-id}{c-id}}$

समी (1) और (2) का गुणा करने पर

$$(x-iy)(x+iy)=\sqrt{\frac{a-id}{c-id}}\times\sqrt{\frac{a+id}{c+id}}$$

$$x^2 - i^2y^2 = \sqrt{\frac{a^2-i^2b^2}{c^2-i^2d^2}}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(x^2+y^2)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$$

प्रश्न 5 निम्नलिखित को ध्रुवीय रूप में परिवर्तन कीजिए।

(i) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$

(ii) $\frac{1+3i}{2-2i}$

उत्तर-

(i)

माना $z = \frac{1+7i}{(2-i^2)} = \frac{1+7i}{4-4i+i^2} = \frac{1+7i}{4-4i-1}$

$$\frac{1+7i}{3-4i} = \frac{1+7i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i}$$

$$= \frac{3+28i^2+4i+21i}{9-16i^2}$$

$$= \frac{3-28+25i}{25}$$

$$= -1+i$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\therefore r\cos\theta = -1, r\sin\theta = 1$$

वर्ग करके जोड़ने पर $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1 + 1$

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2$ या $r^2 = 2$ या $r = \sqrt{2}$

$\cos\theta =$ ऋणात्मक $\sin\theta =$ धनात्मक

$\therefore \theta$ दूसरे चतुर्थांश में है।

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta = \frac{1}{-1} = -1 = -\tan\frac{\pi}{4}$$

अतः $\tan\theta = \tan\left(\pi\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{3\pi}{4}$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$$

अतः r का ध्रुवीय रूप $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right)$ है।

(ii)

मान लिया $z = \frac{1+3i}{1-2i} = \frac{1+3i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i}$

$$= \frac{1+6i^2+2i+3i}{1-4i^2}$$

$$\frac{1-6+5i}{1+4} = \frac{15}{5} + \frac{5}{5}i$$

$$= -1 + i$$

भाग (i) के अनुसार $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

अतः $\frac{1+3i}{1-2i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

प्रश्न 6 दिए गए समीकरण को हल कीजिए।

$3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

उत्तर-

$3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$ को 3 से गुना करने पर,

$9x^2 - 12x + 20 = 0$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

a = 9, b = -12, c = 20

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4.9.20}}{2 \times 9}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 720}}{18}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{-576}}{18} = \frac{12 \pm 24i}{18}$$

$$= \frac{2 \pm 4i}{3} = \frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}i$$

प्रश्न 7 दिए गए समीकरण को हल कीजिए।

$x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

उत्तर-

$x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$ को 2 से गुना करने पर,

$2x^2 - 4x + 3 = 0$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$a = 2, b = -4, c = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.2.3}}{2.3}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{4}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}i}{18}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

प्रश्न 8 दिए गए समीकरण को हल कीजिए।

$27x^2 - 10x + 1 = 0$

उत्तर- दिए गए समीकरण $27x^2 - 10x + 1 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$a = 27, b = -10, c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{100 - 4.27.1}}{2.27}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 108}}{54}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{-8}}{54} = \frac{10 \pm 2\sqrt{2}i}{54}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{2}i}{27} = \frac{5}{27} \pm \frac{\sqrt{2}}{27}i$$

प्रश्न 9 दिए गए समीकरण को हल कीजिए।

$21x^2 - 28x + 10 = 0$

उत्तर- $21x^2 - 28x + 10 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

a = 21, b = -28, c = 10

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4.21.10}}{2.21}$$

$$= \frac{28 \pm \sqrt{784 - 840}}{42} = \frac{28 \pm \sqrt{-56}}{21}$$

$$= \frac{28 \pm 2\sqrt{14i}}{42} = \frac{14 \pm 14i}{21}$$

$$= \frac{14}{21} = \frac{\sqrt{14}}{21} i$$

$$\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{21} i$$

प्रश्न 10

यदि $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i \left| \frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i} \right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right| = \frac{(2-i)+(1+i)+1}{(2-i)-(1+i)+i}$$

$$= \frac{4}{1-i} = \frac{4}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{4(1+i)}{1-i^2}$$

$$= \frac{4(1+i)}{2} = 2 + 2\,i$$

$$\therefore \left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right| = |2 + 2i|$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

प्रश्न 11

यदि $a = id = \frac{(x+i^2)}{2x^2+1}$ सिद्ध कीजिए की $a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$

उत्तर-

$$a + id = \frac{(x+i)^2}{2x^2+1}$$

के स्थान पर -i रखने पर

$$a - id = \frac{(x-1)^2}{2x^2+1}$$

समी. (1) और (2) का गुना करने पर

$$(a + ib)(a - ib) = \frac{(x+i)^2}{(2x^2+1)^2} \times \frac{(x-i)^2}{2x^2+1}$$

$$a^2 - i^2b^2 = \frac{[(x+i)(x-i)]^2}{(2x^2+1)}^2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{(x^2 - i^2)^2}{(2x^2+1)^2}$$

$$a^2 + b^2 = \frac{(x^2 - 1)^2}{(2x^2+1)^2}$$

प्रश्न 12 माना $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + iz_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$ निम्न का मान निकालिए।

(i)

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1 z_2}{z_1}\right)$$

(ii)

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z_1 z_2}\right)$$

उत्तर-

(i)

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1 z_2}{z_1}\right)$$

$$\frac{(2-i)(-2+i)}{(2-i)} = \frac{-(2-i)(2-i)}{2+i}$$

$$= \frac{-(2-i)^2}{2+i} = \frac{-(4+i^2-4i)}{2+i}$$

$$= \frac{-(4-1-4i)}{2+i} = \frac{-(3-4i)}{2+i}$$

$$= \frac{-(3-4i)}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$$

$$= \frac{-6-4i^2+3i+8i}{4-2i} = \frac{-6+4+11i}{4+1}$$

$$= \frac{-2+11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$$

$$\therefore \text{Re}\left(\frac{z_1z_2}{z_1}\right) = -\frac{2}{5}$$

(ii)

$$\frac{1}{z_1z_2} = \frac{1}{(2-i)(2-i)} = \frac{1}{(2-i)(2+i)}$$

$$= \frac{1}{4-i^2} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Im}\left(\frac{1}{z_1z_2}\right) = 0$$

$$= \tan\frac{3\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

अतः मापांक $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ कोणांक $= \frac{3\pi}{4}$

प्रश्न 13 सम्मिश्र संख्या $\frac{1+2i}{1-3i}$ का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

माना $z = \frac{1+2i}{1-3i} = \frac{1+2i}{1-3i} \times \frac{1+3i}{1+3i}$

$$= \frac{1+6i^2+3i+2i}{1-9i^2}$$

$$= \frac{1-6+5i}{1+9}$$

$$= \frac{-5+5i}{10} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}=\mathrm{r}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \mathrm{r}\cos\theta=-\frac{1}{2}, \mathrm{r}\sin\theta=\frac{1}{2}$$

वर्ग करके जोड़ने पर,

$$\mathrm{r}^2\cos^2\theta+\mathrm{r}^2\sin^2\theta=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{r}^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\frac{1}{2}$$

या $\mathrm{r}^2=\frac{1}{2}$

या $\mathrm{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

अब $\cos\theta=-\mathrm{ve}, \sin\theta=+\mathrm{ve}$

$\Rightarrow \theta$ दूसरे चतुर्थांश में है।

$$\frac{\mathrm{r}\sin\theta}{\mathrm{r}\sin\theta}=\tan\theta=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$=-1=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\tan\frac{3\pi}{4}$$

$$\theta=\frac{3\pi}{4}$$

अतः मापांक $=\frac{1}{\sqrt{2}}$, कोणांक $=\frac{3\pi}{4}$

प्रश्न 14 यदि (x - iy)(3 + 5i), -6 - 24i की संयुग्मी है तो वास्तविक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए।

उत्तर- -6-241 =-6 + 24i

(x-iy) (3 + 5i) = (3x - 5yi + 5xi - 3yi)

=3x + 5y + (5x - 3y)i

समीकरण (1) और (2) से,

3x + 5y + (5x-3y)i =-6 + 24i

वास्तविक व काल्पनिक संख्याओं को समान लिखते हुए

3x + 5y = -6

5x - 3y = 24

समी. (3) को 3 से और समी. (4) को 5 से गुणा करने पर

9x + 15y = -18

25x - 15y = 120

समी. (5) और समी (6) को जोड़ने पर,

34x = 102 या x=10234=3x=10234=3

x का मान समी. (3) में रखने पर,

9+ 5y = - 6 या 5y = -15, या y=-3

अतः x = 3, y = -3.

प्रश्न 15 $\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}$$

$$\frac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

$$=\frac{(1+i^2+2i)-(1+i^2-2i)}{1-i^2}$$

$$\frac{(1-1+2i)-(1-1-2i)}{1+1}$$

$$=\frac{4i}{2}=2i$$

$$\therefore \frac{1+i}{1-i}-=\frac{1-i}{1+i}$$

$$=|2i|=\sqrt{4}=2$$

प्रश्न 16

यदि $(x+iy)^3=u+iy$ तो दर्शाइए की $\frac{u}{x}+\frac{v}{y}=4(x^4-y^2)$

उत्तर-

$$(x+i\,y)^3=u+iv$$

$$u+iv=x^3+3x^2.\,iy+3(iy)^2x+(iy)^3$$

$$=x^3+3x^3iy+3xy^2i^2+i^3y^3$$

$$=(x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3i)$$

$$\Rightarrow x^3 - 3xy^2 = u$$

$$x^2 = 3y^2 = \frac{u}{x}$$

$$3x^2y - y^3 = v$$

$$3x^2 - y^2 = \frac{v}{y}$$

समी. (1) और (2) को जोड़ने पर

$$4x^2 - 4y^2 = \frac{u}{x} + \frac{v}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{x} + \frac{v}{v} = 4(x^2 - y^2)$$

प्रश्न 17

यदि α और β भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ है जहाँ $|\beta| = 1$ तब $\left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$= \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \times \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{1 - \alpha\bar{\beta}}$$

$$\frac{\beta\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \alpha\bar{\alpha}}{1 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\alpha.\beta\bar{\beta}}$$

$$= \frac{\beta\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \alpha\bar{\alpha}}{1 - \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\alpha}.\beta\bar{\beta}}$$

$$= \frac{|\beta|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + |\alpha|^2}{1 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + |\alpha|^2.|\beta|^2}$$

दिया है: $|\beta| = 1$ हो तब

$$= \frac{1+|\alpha|^2 = \alpha\bar{\beta} - \alpha\bar{\beta}}{1+|\alpha|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}}$$

$$= 1$$

अतः $\left|\frac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|^2 = 1$

$$\left|\frac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right| = 1$$

प्रश्न 18 समीकरण $|1 - i|^x = 2^x$ के शून्येत्तर पूर्णांक मुलो की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$|1 - i|^x = \left(\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}\right)^x = (\sqrt{2}^x) = (2)^{\frac{x}{2}}$$

$$(1 - i) = 2^x$$

$$2^{\frac{x}{2}} = 2x$$

घातांको की तुलना से $\frac{x}{2} = x$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = x$ यह तब ही हो सकता है जब $x = 0$

$\Rightarrow$ इस समीकरण का 0 के अतरिक्त और कोई हल नहीं हो सकता।

प्रश्न 19 यदि $(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$ है

तो दर्शाइए कि $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$.

उत्तर- $(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$ ....(1)

i के स्थान पर -i रखने पर, (a - ib)(c - id)(e - if)(g - ih) = A - iB ....(2)

समी (1) और (2) को गुणा करने पर,

[(a + ib)(a - ib)] [(c + id)(c - id)] [(e + if)(e - if] [(g + ih)(g - ih)] = (A + iB)(A - iB)

$\Rightarrow (a^2 - i^2b^2)(c^2 - i^2d^2)(e^2 - i^2f^2)(g^2 - i^2h^2) = A^2 - i^2B^2$

$\Rightarrow (A^2 + B^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g_2 + h^2) = A^2 + B^2$

प्रश्न 20 यदि $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ तो m का न्यूनतम पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2}$$

$$= \frac{1+i^2+2i}{1+1}$$

$$= \frac{1-1+2i}{2} = \frac{2i}{2} = 1$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = i^m = (i^4)^{\frac{m}{4}} = 1$$

$$[\because i^4 (i^2)^2 = (-1)^2 = 1]$$

$\Rightarrow$ m संख्या 4 का गुणज है।

$\therefore$ m की काम से काम मूल्य = 4