गणित

अध्याय-4: सारणिक

सारणिक (Determinants)

सारणिक (Determinant) एक विशिष्ट प्रकार का बीजीय व्यंजक है (वस्तुत: बहुपद) जिसमें प्रयुक्त की गई राशियों अथवा अवयवों की संख्या (पूर्ण) वर्ग रहती है। इन राशियों को प्राय: एक वर्गाकार विन्यास में लिखकर उसे अगल-बगल दो ऊर्ध्वाधर सीधी रेखाएँ खींच दी जाती है, n अवयवों वाले सारणिक को nवें क्रम (nth order) का सारणिक कहते हैं।

निम्न एक चर वाले रैखिक समीकरण निकाय

$$a_1x+b_1=0$$

$$a_2x+b_2=0$$

पर विचार करें।

यदि $a_1\neq 0, a_2\neq 0$, तब

समी. (1) से,

$$a_1x+b_1=0$$

$\Rightarrow \quad a_1x=-b$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{-b_1}{a_1}$

समी. (2) से,

$$a_2x+b_2=0$$

$\Rightarrow \quad a_2x=-b_2$

$\Rightarrow \quad x=-\dfrac{b_2}{a_2}$

समी. (3) और (4) से,

$$\frac{-b_1}{a_1}=\frac{-b_2}{a_2}$$

$\Rightarrow \quad -a_2b_1=-a_1b_2$

$\Rightarrow, \quad a_1b_2-a_2b_1=0 \qquad ...(5)$

सुविधा के लिए समी. (5) को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं-

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

जहाँ $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \quad \ldots(6)$$

समी. (6) के बायीं ओर जैसा निरूपण, सारणिक कहलाता है, जिसका एक निश्चित संख्यात्मक मान होता है, जो समी. (6) के दायीं ओर के पदों को हल करने पर प्राप्त होगा।

सारणिक में प्रयुक्त a_1, a_2, b_1, b_2, सारणिक के अवयव कहलाते हैं। इसी प्रकार निम्न दो चरों वाले रैखिक समीकरण निकाय

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

पर विचार करें और x, y का विलोपन किया जाये तो

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 = 0 \quad \ldots(7)$$

सुविधा के लिए समी. (7) को निम्नानुसार भी लिख सकते हैं-

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

जहाँ $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \quad \ldots(8)$$

समी. (8) के बायीं ओर को सारणिक कहते हैं।

अर्थात् $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ एक सारणिक है।

जिसका निश्चित मान समी. (8) के दाँयी ओर के पदों को हल करने पर प्राप्त होगा।

सारणिक में प्रयुक्त a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 तथा c_1, c_2, c_3 सारणिक के अवयव कहलाते हैं।

पंक्ति (Rows)- किसी सारणिक में बाँयी ओर से दायीं ओर के क्षैतिज अवयव पंक्ति का निर्माण करते हैं। सारणिक के ऊपर से नीचे की ओर विभिन्न पंक्तियों को R_1, R_2, R_3,............ से प्रदर्शित करते हैं।

उक्त सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ में

प्रथम पंक्ति R के अवयव a_1, a_2 हैं।

द्वितीय पंक्ति R, के अवयव, b_1, b_2 हैं।

स्तम्भ (Columns)- किसी सारणिक में ऊपर से नीचे ऊर्ध्वाधर अवयव स्तम्भ का निर्माण करते हैं। सारणिक के बायीं ओर से दायीं ओर विभिन्न स्तम्भों को C1, C2, C3,........ से प्रदर्शित करते हैं।

उक्त सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ में

प्रथम स्तम्भ C_1 के अवयव a_1, b_1 हैं।

द्वितीय स्तम्भ C, के अवयव a_2, b_2 हैं।

कोटि (Order)-n पंक्तियों और n स्तम्भों वाले सारणिक को n वें कोटि का सारणिक कहते हैं। n^{th} कोटि का सारणिक निम्न है-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1j}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2j}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & u_{n2}\cdots\cdots & a_{nj}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

उक्त में दर्शाये गये सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ द्वितीय कोटि (Order) का सारणिक है।

सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ तृतीय कोटि (Order) का सारणिक है।

ध्यान दें- "सभी सारणिक में पंक्तियों व स्तम्भों की संख्या सदैव समान होती है।"

संकेतन (Notation)— सामान्यतः किसी सारणिक को संकेत Δ अथवा D द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

मुख्य विकर्ण के अवयव (Constituents of principal or leading diagonal)— किसी सारणिक में बाँयी हाथ वाले कोने से प्रारम्भ करके विकर्ण के अनुदिश लिये गए अवयव मुख्य विकर्ण के अवयव कहलाते हैं।

(i) ऊपर दर्शाये गये सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ में a_1, b_2 मुख्य विकर्ण के अवयव हैं।

(ii) सारणिक $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ में a_1, b_2, c_3 मुख्य विकर्ण के अवयव हैं।

(iii) इसी प्रकार ऊपर दर्शाये गये n^{th} कोटि के सारणिक में $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_{nm}$ मुख्य विकर्ण के अवयव हैं।

द्वितीय कोटि के सारणिक का प्रसार (Expansion of Determinant of Second Order)

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ द्वितीय कोटि के सारणिक हैं।

जैसा कि हम ऊपर देख चुके हैं कि इसका मान $a_1b_2 - a_2b_1$ होता है।

जहाँ a_1, b_2 मुख्य विकर्ण के अवयव हैं।

$$\begin{vmatrix} a_1 & ②\, a_2 \\ b_1 & b_2 \\ & ① \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (-\text{ve}) \\ (+\text{ve}) \end{matrix}$$

∴ द्वितीय कोटि के सारणिक का मान

= मुख्य विकर्ण के अवयवों का गुणनफल - शेष अवयवों का गुणनफल

= धन चिन्ह वाले तीर के अवयवों का गुणनफल-ऋण चिन्ह वाले तीर के अवयवों का गुणनफल.

ध्यान दें- द्वितीय कोटि के सारणिक का प्रसार

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}.$$

उदाहरण. सारणिक $\begin{vmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(जहाँ $i = \sqrt{-1}$)

हल : $\begin{vmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{vmatrix} = i^2 - 1(-1)$

$= -1 + 1 = 0.$

उदाहरण. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & \omega \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(जहाँ ω इकाई का एक सम्मिश्र घनमूल है)

हल : $\begin{vmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & \omega \end{vmatrix} = \omega - (-\omega).\omega$

$= \omega + \omega^2 = -1, \ (\because 1 + \omega + \omega^2 = 0,$

$\omega + \omega^2 = -1)$

उदाहरण. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

$$\Delta = 1 \times 1 - \log_b a \times \log_a b$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = 1 - 1 = 0, \ [\because \log_b a \times \log_a b = 1]$$

उदाहरण. सिद्ध कीजिए कि—

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}$

$$= (a+ib)(a-ib) - (c+id)(id-c)$$

$$= a^2 - i^2b^2 - (i^2d^2 - c^2),$$

$$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= a^2 + b^2 - (-d^2 - c^2), \ [\because i^2 = -1]$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

यही सिद्ध करना था।

तृतीय कोटि का सारणिक (Determinant of Third Order)

निम्न युगपत समीकरण पर विचार कीजिए-

$$a_1x+b_1y+c_1z=0 \quad ..(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0 \quad ...(2)$$

तथा $$a_3x+b_3y+c_3z=0 \quad ...(3)$$

समी. (2) व (3) से वज्रगुणन विधि द्वारा,

$$a_2x+b_2y+c_2z=0$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=0$$

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{y}{a_3c_2-a_2c_3}=\frac{z}{a_2b_3-a_3b_2}=k$$

(माना)

$\therefore$ $$x=k(b_2c_3-b_3c_2)$$

$$y=k(a_3c_2-a_2c_3)$$

तथा $$z=k(a_2b_3-a_3b_2)$$

जहाँ $k\neq 0$ [क्योंकि यदि $k=0$ तब $x=0, y=0,$ $z=0$]

x, y, z के इन मानों को समी. (1) में रखने पर,

$$ka_1(b_2c_3-b_3c_2)+kb_1(a_3c_2-a_2c_3)+kc_1(a_2b_3-a_3b_2)=0$$

$$\Rightarrow a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(a_3c_2-a_2c_3)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0$$

$$\Rightarrow a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0$$

$$\Rightarrow a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\ a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

इस समीकरण को निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

इस प्रकार,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2)$$

$$-b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ जैसे निरूपण को हम तृतीय क्रम (Order) का सारणिक कहते हैं। इस प्रकार स्पष्ट है कि सारणिक विशेष सूक्ष्म रूप से लिखा गया एक विशेष प्रकार का व्यंजक है।

उप-सारणिक और सहखण्ड (Minors and Co factors)

उप-सारणिक (Minor)- किसी अवयव का उप-सारणिक दिये हुए सारणिक से उस अवयव वाली पंक्ति व स्तम्भ को छोड़ देने पर प्राप्त सारणिक होता है।

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

कोई सारणिक है। तब,

अवयव a_{11} का उप-सारणिक

$$M_{11} = a_{22} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

अवयव a_{12} का उप-सारणिक

$$M_{12} = a_{21} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

अवयव a_{21} का उप-सारणिक

$$M_{21} = a_{12} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

अवयव a_{22} का उप-सारणिक

$$M_{22} = a_{11} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

कोई सारणिक है। तब,

a_{11} का उप-सारणिक $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

अवयव a_{12} का उप-सारणिक $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

अवयव a_{13} का उप-सारणिक $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

सहखण्ड (Cofactors)- यदि कोई अवयव a_{ij} i वीं पंक्ति और j वें स्तम्भ में स्थित है तब a_{ij} का सहखण्ड $A_{ij} = (-1)^{i+j}$ a_{ij} का उप-सारणिक होता है। इस प्रकार,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

अतः $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

स्पष्ट है

$A_{11} = M_{11}, A_{12} = -M_{12}, A_{13} = M_{13}$

$A_{21} = -M_{21}, A_{22} = M_{22}, A_{23} = -M_{23}$

$A_{31} = M_{31}, A_{32} = -M_{32}, A_{33} = M_{33}.$

द्वितीय कोटि के सारणिक का उप-सारणिक और सहखण्ड के रूप में प्रसार (Expansion of aDeterminant of Second Order in Terms of Minors and Cofactors)

माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ के उप-सारणिक क्रमशः $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ हैं तथा $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ के सहखण्ड क्रमशः $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ हैं।

$\because \; M_{11} = a_{22}, M_{12} = a_{21}, M_{21} = a_{12}, M_{22} = a_{11}$

$\therefore \; A_{11} = a_{22}, A_{12} = -a_{21}, A_{21} = -a_{12}, A_{22} = a_{11}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

(R_1 के सापेक्ष विस्तार करने पर)

$\Rightarrow \quad \Delta = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}$

$\Rightarrow \quad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$

इसी प्रकार, $\Delta = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22}$

$\Rightarrow \quad \Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22}.$

तृतीय कोटि के सारणिक का उप-सारणिक और सहखण्ड के रूप में प्रसार (Expansion of a Determinants of Third Order in Terms of Minors and Cofactors)

माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

स्पष्ट है कि सारणिक का मान पहली पंक्ति के अवयवों और उसके संगत सहखण्डों के गुणनफलों के योग के बराबर होता है। यह तथ्य प्रत्येक पंक्ति व स्तम्भ के लिए सत्य है।

इसी प्रकार प्रथम स्तम्भ के अवयवों के अनुसार सारणिक का प्रसार निम्नानुसार होगी-

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

इस प्रकार, अन्य पंक्तियों व स्तम्भों के लिए भी विस्तार निम्न रूप में सम्भव है—

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \qquad \text{(द्वितीय पंक्ति)}$$

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}, \qquad \text{(तृतीय पंक्ति)}$$

उदाहरण. यदि $A=\begin{vmatrix}5 & 3 & 8\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ हो, तो a_{23} के उप-सारणिक का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :

$$A=\begin{vmatrix}5 & 3 & 8\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

a_{23} का उपसारणिक $M_{23}=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad M_{23}=5\times2-1\times3$$

$$\Rightarrow \qquad M_{23}=10-3=7.$$

उदाहरण. यदि $A=\begin{vmatrix}5 & 3 & 8\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ हो, तो a_{32} का उप-सारणिक ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :

$$A=\begin{vmatrix}5 & 3 & 8\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

a_{32} का उपसारणिक $M_{32}=\begin{vmatrix}5 & 8\\ 2 & 1\end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad M_{32}=5\times1-8\times2=5-16$$

$$\Rightarrow \qquad M_{32}=-11.$$

उदाहरण. यदि $A=\begin{vmatrix}2 & -3 & 5\\ 6 & 0 & 4\\ 1 & 5 & -7\end{vmatrix}$ हो, तो $a_{32}A_{32}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$

$= -(8-30)$

$\Rightarrow \quad A_{32} = -(-22) = 22$

$a_{32} = 5$

$\therefore \; a_{32} \cdot A_{32} = 5 \times 22 = 110.$

उदाहरण. सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ में अवयवों के 3, 3, –1 सहखण्ड ज्ञात कीजिए तथा इनकी सहायता से सारणिक का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

अवयव 3 का सहखण्ड $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$

$= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - (1)(-2)$

$= 2 + 2 = 4$

अवयव 3 का सहखण्ड $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}$

$= -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-3-4) = 7$

अवयव – 1 का सहखण्ड $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$

$= \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$

हम जानते हैं कि $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

$= 3 \times 4 + 3 \times 7 + (-1) \times (-2)$

$= 12 + 21 + 2 = 35.$

सारणिकों के प्रगुण (Properties of Determinants)

- यदि किसी सारणिक की किसी पंक्ति या किसी स्तम्भ के सभी अवयव शून्य हों, तो उस सारणिक का मान शून्य होता है।

उदाहरण : $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 9 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$

$= 0.$

- यदि किसी सारणिक की पंक्तियों को स्तम्भों में तथा स्तम्भों को पंक्तियों में परस्पर बदल दिया जाय तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।

मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **तब,**

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) \quad ...(1)$$

अब मान लीजिए कि पंक्तियों को स्तम्भों में तथा स्तम्भों को पंक्तियों में परस्पर बदल देने पर प्राप्त सारणिक Δ' है। तब,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta' = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) \quad ...(2)$$

समी. (1) व (2) से स्पष्ट है कि $\Delta' = \Delta.$

नोट: चूंकि किसी सारणिक की पंक्तियों तथा स्तम्भों का परस्पर परिवर्तन सारणिक के मान को परिवर्तित नहीं करता है, अतः जो गुण हम किसी सारणिक की पंक्तियों के लिए सिद्ध करेंगे, वही गुण सारणिक के स्तम्भों के लिए भी सत्य होंगे।

- यदि किसी सारणिक की किन्हीं दो संलग्न पंक्तियों या स्तम्भों को परस्पर बदल दिया जाय तो सारणिक के मान का केवल चिन्ह बदल जाता है।

मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ तब,

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) \quad ...(1)$$

अब मान लीजिए कि प्रथम पंक्ति को द्वितीय पंक्ति में तथा द्वितीय पंक्ति को प्रथम पंक्ति में बदल देने पर प्राप्त सारणिक Δ है। तब,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_2(b_1c_3 - b_3c_1) - b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + c_2(a_1b_3 - a_3b_1)$$

$$= -\{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)\} \quad ...(2)$$

समी. (1) व (2) से स्पष्ट है कि $\Delta' = -\Delta$.

नोट:

- किसी सारणिक की पंक्तियों तथा स्तम्भों का विषम बार परिवर्तन करने पर प्राप्त सारणिक के मान का चिन्ह बदल जाता है, लेकिन सम बार परिवर्तन करने पर प्राप्त सारणिक का चिन्ह नहीं बदलता है।
- यदि किसी सारणिक Δ में कोई पंक्ति या स्तम्भ n समान्तर पंक्तियों या स्तम्भों के ऊपर (Pass) होकर निकाली - जाय तो प्राप्त सारणिक।

$$\Delta' = (-1)^n \Delta.$$

- यदि किसी सारणिक की किन्हीं दो संलग्न पंक्तियों या स्तम्भों को परस्पर बदल दिया जाय तो सारणिक के मान का केवल चिन्ह बदल जाता है।

मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

यहाँ Δ में प्रथम व द्वितीय पंक्तियाँ सर्वसम हैं। माना प्रथम व द्वितीय पंक्तियों को परस्पर परिवर्तित करने पर सारणिक Δ है। तब,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\Delta$$

परन्तु $\Delta' = -\Delta,$ [प्रगुण (3) से]

$\therefore \quad \Delta = -\Delta \Rightarrow 2\Delta = 0$

$\Rightarrow \quad \Delta = 0.$

ध्यान दें- इस प्रकार में स्पष्ट किये गये सारणिकों के प्रगुण

प्रगुण (1) $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

या $\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

प्रगुण (2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

प्रगुण (3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

या $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

नोट: किसी सारणिक के दो पंक्ति या स्तम्भ को परस्पर बदल दें, तो सारणिक का मान पूर्व मान का ऋणात्मक हो जाता है।

प्रगुण (4) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

या $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

प्रगुण (5) $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

जहाँ $k \neq 0$

प्रगुण (6) $\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

प्रगुण (7) यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 \pm \lambda a_2 & b_1 \pm \lambda b_2 & c_1 \pm \lambda c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

[संक्रिया $R_1 \to R_1 \pm \lambda R_2$ से]

$$\Rightarrow \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 \pm \mu b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm \mu b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm \mu b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

[संक्रिया $C_1 \to C_1 \pm \mu C_2$ से]

प्रगुण (8) (i) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$

[R_3 के सापेक्ष विस्तार करने पर]

(ii) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = -b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

प्रगुण (9) यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

[संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2$ से]

$$\Delta = \Delta'$$

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 - b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

[संक्रिया $C_1 \to C_1 - C_2$ से]

$\therefore \qquad \Delta = \Delta' = \Delta''$

नोट: इसी प्रकार, सारणिक के किसी भी पंक्ति या स्तम्भ के कम से कम दो अवयव शून्य (0) हो, तो उस पंक्ति या स्तम्भ के सापेक्ष सारणिक का विस्तार किया जा सकता है।

समीकरणहल करना (To Solve the Equation)

उदाहरण. निम्न सारणिक को हल कीजिए—

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0.$$

हल : $$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x+9 & 3 & 5 \\ x+9 & x+2 & 5 \\ x+9 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0,$$

[संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से]

$$\Rightarrow \quad (x+9)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & x+2 & 5 \\ 1 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+9)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0,$$

[संक्रियाओं $R_2 \to R_2 - R_1$ और $R_3 \to R_3 - R_1$ से]

$$\Rightarrow \quad (x+9)\times 1\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+9)(x-1)^2 = 0$$

$$\therefore \quad x+9 = 0 \text{ या } (x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -9 \text{ या } x = 1, 1.$$

उदाहरण. समीकरण हल कीजिए—

$$\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0.$$

हल :
$$\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3x-2 & 3 & 3 \\ 3x-2 & 3x-8 & 3 \\ 3x-2 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0,$$

[संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से]

$$\Rightarrow \quad (3x-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3x-8 & 3 \\ 1 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (3x-2)\begin{vmatrix} 0 & -3x+11 & 0 \\ 0 & 3x-11 & -3x+11 \\ 1 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0,$$

[संक्रियाओं $R_1 \to R_1 - R_2$ तथा $R_2 \to R_2 - R_3$ से]

$$\Rightarrow \quad (3x-2)(3x-11)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (3x-2)(3x-11)[1.(1-0)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (3x-2)(3x-11) = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{2}{3}, \frac{11}{3}.$$

उदाहरण. समीकरण $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$ को हल कीजिए।

हल :
$$\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3a-x & a-x & a-x \\ 3a-x & a+x & a-x \\ 3a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0,$$

[संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से]

$$\Rightarrow \quad (3a-x)\begin{vmatrix} 1 & a-x & a-x \\ 1 & a+x & a-x \\ 1 & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (3a-x)\begin{vmatrix} 0 & -2x & 0 \\ 0 & 2x & -2x \\ a & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0,$$

[संक्रियाओं $R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3$ से]

$$\Rightarrow \quad (3a-x).1.(4x^2 - 0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3a - x = 0, 4x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 3a, 0.$$

उदाहरण. समीकरण $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$ को

हल : दिया गया समीकरण है :

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1+x+1+1 & 1+1+x+1 & 1+1+1+x \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0,$$

[संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से]

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0,$$

[R_1 से $(x+3)$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$$\Rightarrow (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ 1 & 1+x-1 & 1-1 \\ 1 & 1-1 & 1+x-1 \end{vmatrix} = 0,$$

[संक्रिया $C_2 \to C_2 - C_1$ और $C_3 \to C_3 - C_1$ से]

$$\Rightarrow (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x+3).1\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = 0,$$

[R_1 के सापेक्ष विस्तार करने पर]

$$\Rightarrow (x+3)(x^2-0) = 0$$

अत: x के अभीष्ट मान $-3, 0, 0$ हैं।

सरणिको के अनुप्रयोग (Application of Determinants)

एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना (Find the Area of a Triangle)-

यदि त्रिभुज के शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2) व (x_3, y_3) हो तो

त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

सरणिक के रूप में दर्शाने पर,

त्रिभुज का क्षेत्रफल Δ

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

उपप्रमेय- यदि तीन बिन्दु $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ समरेख हैं तो ΔABC का क्षेत्रफल शून्य होगा।

अतः $$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

जो अभीष्ट शर्त है कि बिन्दु A, B तथा C समरेख हैं।

उदाहरण. यदि बिन्दु (a,0), (0, b) तथा (p, q) संरेख हैं, तो सारणिकों की सहायता से सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{p}{a}+\frac{q}{b}=1.$$

हल: दिये गये तीन बिन्दु (a, 0), (0, b) और (p, q) सरेख हैं।

∴ इनसे बने त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ p & q & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ -p & b-q & 0 \\ p & q & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

[संक्रियाओं $R_1 \to R_1 - R_2$ और $R_2 \to R_2 - R_3$ से]

$$\Rightarrow \quad 1.\begin{vmatrix} a & -b \\ -p & b-q \end{vmatrix} = 0,$$

[R_1 के सापेक्ष विस्तार करने पर]

$$\Rightarrow \quad a(b-q) - bp = 0$$

$$\Rightarrow \quad ab - aq - bp = 0$$

$$\Rightarrow \quad ab = aq + bp$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{aq}{ab} + \frac{bp}{ab}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{a} + \frac{q}{b} = 1.$$ यही सिद्ध करना था।

सहखण्डज आव्यूह (Adjoint of a Matrix)

मानलो $A = [a_{ij}]$ क्रम $n \times n$ का एक वर्ग आव्यूह है। मानलो A_{ij}, सारणिक $|A|$ में अवयव a_{ij} का सहखण्ड है। तब, आव्यूह $[A_{ij}]$, आव्यूह A का सहखण्डज सारणिक कहलाता है। आव्यूह $[A_{ij}]$ के परिवर्त आव्यूह अर्थात् $[A_{ij}]$ को आव्यूह A का सहखण्डज (Adjoint) कहते हैं। इस प्रकार

यदि $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

तब $$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

तब Adjoint $A = \text{Adj } A = [A_{ij}]'$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n_1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

सहखण्डज ज्ञात करने की विधि (Determination of Adjoint)

प्रथम पद: दिए हुए वर्ग आव्यूह में प्रत्येक अवयव को उसके सहखण्ड से विस्थापित कर दीजिए।

द्वितीय पद: इस प्रकार प्राप्त आव्यूह का परिवर्त आव्यूह ज्ञात कीजिए जो अभीष्ट सहखण्डज होता है।

प्रमेय

यदि A एक वर्ग आव्यूह है तो सिद्ध कीजिए कि

A (Adj A) = (Adj A).A = |A|

जहाँ इकाई आव्यूह है जिसका क्रम वही है जो A का है।

प्रमाण (Proof) : माना, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$

तब, $\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$.

गुणनफल A.(Adj A) का (i, j)th अवयव

= A की ith पंक्ति तथा Adj A की jth स्तम्भ के संगत अवयवों के गुणनफलों का योग

$$= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots\ldots + a_{in}A_{jn}$$

$$= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ |A|, & i = j \end{cases}$$

अत: गुणनफल में प्रत्येक अग्रग विकर्ण का अवयव |A| है तथा इसके अतिरिक्त प्रत्येक अवयव शून्य है।

अत: $A.(\text{Adj}\,A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

= |AI, जहाँ / क्रम n × n का इकाई आव्यूह है। इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$(\text{Adj } A).A = |A| I,$$

अत: $A.(\text{Adj } A) = (\text{Adj} A).A = |A| I.$

अव्युत्क्रमणीय आव्यूह या विचित्र आव्यूह (Singular Matrix)

एक वर्ग आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय या विचित्र कहलाता है। यदि |A| = 0.

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ हो, तो

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 2 \times \frac{3}{2} - 3 \times 1$$

$$= 3 - 3 = 0$$

अत: A एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

व्युत्क्रमणीय आव्यूह या साधारणआव्यूह (Nonsingular Matrix or Regular Matrix)

एक वर्ग आव्यूह A व्युत्क्रमणीय या साधारण आव्यूह कहलाता है यदि

$|A| \neq 0.$

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3$$

$$= 4 - 6 = -2 \neq 0$$

अत: A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

सहखण्डज आव्यूह के गुण (Properties of Adjoint Matrix)

(i) यदि कोई वर्ग आव्यूह हो, तो

$$\boxed{A.(\text{Adj} A) = (\text{Adj } A).A = |A|.I}$$

जहाँ I एक आव्यूह है जिसका क्रम A के क्रम के समान है।

(ii) यदि कोई वर्ग आव्यूह हो, तो

$$\boxed{\text{Adj}\, A' = (\text{Adj}\, A)'}$$

(iii) सममित आव्यूह का सहखण्डज आव्यूह भी सममित होता है।

(iv) विकर्ण आव्यूह का सहखण्डज आव्यूह भी विकर्ण आव्यूह होता है।

(v) यदि A और B एक ही क्रम के वर्ग आव्यूह हों तो

$$\boxed{\text{Adj}(AB) = (\text{Adj}\, B)(\text{Adj}\, A).}$$

इस प्रकार ध्यान रहे-

(1) $A\cdot(\text{Adj}A) = (\text{Adj}A).A = |A|.I$

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

(3) $\text{Adj}(A.B) = (\text{Adj}B).(\text{Adj}A)$

(4) $|KA|_{n\times n} = K^n.|A|$

(5) आव्यूह A वर्गआव्यूह (Square matrix) है। यदि यह आव्यूह

(a) लाम्बिक आव्यूह (Orthogonal matrix) हो, तो

$A'A = AA' = I$, [जहाँ A' या A^T परिवर्त आव्यूह है।]

या $A^T A = AA^T = I$

(b) प्रतिकेन्द्रज आव्यूह (Involutory matrix) हो, तो $A^2 = I_c$

(c) सममित आव्यूह (Symmetric matrix) हो, तो A' = +A या $A^T = +A$

(d) विषम सममित आव्यूह (Skew-symmetric matrix) हो, तो A' = -A या $A^T = -A$

(e) समसम आव्यूह (Idempotent matrix) हो, तो $A^2 = A$

(f) शून्यसम आव्यूह (Nilpotent matrix) हो, तो

$A^m = 0$, [यहाँ वर्ग आव्यूह A घात m का शून्य- सम आव्यूह कहलाता है।

यदि $A^2 = 0$, यहां वर्ग आव्यूह A घात 2 का शून्य सम आव्यूह कहलाता है।

(g) अव्युत्क्रमणीय आव्यूह (Singular matrix) या विचित्र आव्यूह हो, तो

|A| = 0

(h) व्युत्क्रमणीय आव्यूह या साधारण आव्यूह (Non-singular or Regular matrix)

|A| $\neq$ 0 हो, तो

(i) (यदि A और B दो समान क्रम के वर्ग आव्यूह हो, तो det. AB = detA. det B जहाँ det A = |A|.

उदाहरण. यदि $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ और $A.(\text{Adj}\,A)=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ तब k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

तथा $A\cdot(\text{Adj}\,A)=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

$$|A|\cdot I=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{\cos^2\theta-(-\sin^2\theta)\}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\cos^2\theta+\sin^2\theta)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad k=1.$$

उदाहरण. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}$ तो

सिद्ध कीजिए—

det AB = det A. det B जहाँ det $A = |A|$

हल : दिया है $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times1+2\times2 & 1\times1+2\times3\\3\times1+4\times2 & 3\times1+4\times3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+4 & 1+6\\3+8 & 3+12\end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad AB=\begin{bmatrix}5 & 7\\11 & 15\end{bmatrix} \qquad ...(1)$$

$$AB=\begin{vmatrix}5 & 7\\11 & 15\end{vmatrix}$$

$$=5\times15-11\times7$$

$$=75-77$$

$$\therefore \text{ det } AB=-2 \qquad ...(2)$$

$$\text{det } A=\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}$$

$$\text{det } A=\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}$$

$$=4-6$$

$$\Rightarrow \quad \text{det } A=-2 \qquad ...(3)$$

$$\Rightarrow \quad \text{det } B=\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=3-2$$

$$\Rightarrow \quad \text{det } B=1. \qquad ...(4)$$

समी. (3) और (4) से,

det A. det $B = -2\times1=-2$ ...(5)

समी. (2) एवं (5) से,

det AB = det A. det B. यही सिद्ध करना था।

उदाहरण. सिद्ध कीजिए कि $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 0 \\ -6 & 4 & -8 \end{bmatrix}$ एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

हल : माना $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 0 \\ -6 & 4 & -8 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} 5 & 3+5\times2 & 13 \\ 1 & -2+1\times2 & 0 \\ -6 & 4-6\times2 & -8 \end{vmatrix},$$

[संक्रिया $C_2 \to C_2 + 2C_1$]

$$= \begin{vmatrix} 5 & 13 & 13 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & -8 & -8 \end{vmatrix}$$

$= 0,$

[दो स्तम्भ C_2 और C_3 समान हैं इसलिए सारणिक का मान शून्य होगा]

चूँकि $|A| = 0$

अतः A एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

यही सिद्ध करना था।

प्रतिलोम आव्यूह (Inverse matrix) अथवा व्युत्क्रम आव्यूह की समानता (Reciprocal matrix)

यदि A और B दोnxn क्रम के वर्ग आव्यूह हैं तथा AB = BA = I_n

तो हम कहते हैं कि B, A का व्युत्क्रम (Inverse or Reciprocal) है तथा A, B का व्युत्क्रम (Inverse) है।

हम उपर्युक्त तथ्यों को निम्न प्रकार लिखते हैं:

$$B = A^{-1} \ (A \text{ व्युत्क्रम})$$
$$A = B^{-1} \ (B \text{ व्युत्क्रम})$$

उदाहरण : माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

तथा $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

तब, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

इसी प्रकार, $BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2+3 & -4+4 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2} & 3-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

अत: $AB = BA = I_2$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ तथा

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

प्रमेय:

सिद्ध कीजिए कि A का व्युत्क्रम (Inverse) $\frac{\text{Adj A}}{|\text{A}|}$ है यदि A व्युत्क्रमणीय (Non-singular) आव्यूह है

प्रमाण (Proof): हम जानते हैं कि

A.(Adj A) = (Adj A).A = |A|I ...(1)

जहाँ I इकाई आव्यूह है, जिसका क्रम के क्रम A के बराबर है।

∴ A व्युत्क्रमणीय (Non-singular) है,

$\therefore |\text{A}| \neq 0$

अतः |A| से समी. (1) को भाग देने पर,

$$A\left(\frac{\text{Adj } A}{|A|}\right)=\left(\frac{\text{Adj } A}{|A|}\right)A=I \qquad ...(2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A^{-1}=\frac{\text{Adj } A}{|A|}}.$$ **यही सिद्ध करना था।**

नोट: केवल वर्ग आव्यूह के लिए ही व्युत्क्रम (Inverse) परिभाषित

प्रमेय

सिद्ध कीजिए कि $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

प्रमाण (Proof): हम जानते है कि,

$$|A||A^{-1}|=|AA^{-1}|=|I|=1$$

$$\therefore \quad |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}.$$

नोट: एक आव्यूह जिसका व्युत्क्रम (Inverse) ज्ञात किया जा सकता है, व्युत्क्रमणीय (Invertible) आव्यूह कहलाता है|

प्रमेय

सिद्ध कीजिए कि एक आव्यूह का व्युत्क्रम (Inverse) अद्वितीय होता है

प्रमाण (Proof): यदि सम्भव हो तो माना कि एक ही आव्यूह A के दो व्युत्क्रम (Inverse) B तथा C है तब व्युत्क्रम की परिभाषा से

AB = BA = I ...(1)

तथा AC = CA = I ...(2)

समी. (1) व (2) से,

C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.

अतः A का व्युत्क्रम अद्वितीय है|

प्रमेय

एक वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम (Inverse) तभी अस्तित्व (exist) रखता है जबकि $|A| \neq 0$ अर्थात् एक वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम तभी अस्तित्व रखता है जबकि, A व्युत्क्रमणीय (Non-singular) है I

प्रमाण (Proof): माना A का व्युत्क्रम (Inverse) B है I तब,

$$AB = I$$

अर्थात् $|AB| = |I|$

$\Rightarrow$ $|A||B| = I$

अत: $|A| \neq 0$

माना विलोमत: $|A| \neq 0$

पुन: माना $B = \dfrac{\text{Adj } A}{|A|}$

तब $AB = \dfrac{A}{|A|}.(\text{Adj } A) = \dfrac{|A|.I}{|A|} = I$

अत B, A का व्युत्क्रम है।

अत: प्रमेय सिद्ध हो गई है।

प्रमेय

व्युत्क्रम (Inverse) का उत्क्रमण नियम (Reversal law),

यदि A और B दो व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं, तो $(AB)^{-1} = (B^{-1}A^{-1})$

प्रमाण (Proof) :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$
$$= (AI)A^{-1}$$
$$= AA^{-1}$$
$$= I \quad \text{...(1)}$$

इसी प्रकार, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$
$$= B^{-1}(I)B$$
$$= B^{-1}B$$
$$= I \quad \text{...(2)}$$

अतः $\quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

प्रमेय

यदि A व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स (Non singular matrix) है, तो

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A.}$$

प्रमाण (Proof) :

$$(A^{-1})A = I = AA^{-1}$$

$\therefore \quad (A^{-1})^{-1} = A.$

प्रमेय

आव्यूह के परिवर्त (Transpose) का व्युत्क्रम (Inverse) आव्यूह A के व्युत्क्रम के परिवर्त के बराबर होता है अर्थात्

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

प्रमाण (Proof) :

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

$$\therefore \quad (AA^{-1})' = I' = (A^{-1}A)'$$

$$\therefore \quad (A^{-1})'A' = I = A'(A^{-1})'$$

उदाहरण 3. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ हो,

तो $(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$A.B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.6+2.8 & 3.7+2.9 \\ 7.6+5.8 & 7.7+5.9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 34 & 39 \\ 82 & 94 \end{bmatrix}$$

माना $P = \begin{bmatrix} 34 & 39 \\ 82 & 94 \end{bmatrix}$

$P = AB$ के सहखण्डज।

$$C_{11} = (-1)^2 94 = 94$$

$$C_{12} = (-1)^3 82 = -82$$

$$C_{21} = (-1)^3 39 = -39$$

$$C_{22} = (-1)^4 34 = 34$$

$$\text{Adj}\, P = \begin{bmatrix} 94 & -39 \\ -82 & 34 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 34 & 39 \\ 82 & 94 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 34 & 5 \\ 82 & 12 \end{vmatrix}, \qquad [\text{संक्रिया } C_2 \to C_2 - C_1]$$

$$= 34 \times 12 - 82 \times 5 = 408 - 410$$

$$= -2 \neq 0,$$

अत: $P = AB$ का प्रतिलोम का अस्तित्व है।

$$\therefore (AB)^{-1} = \frac{\text{Adj } AB}{|AB|}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 94 & -39 \\ -82 & 34 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -47 & \frac{+39}{2} \\ +41 & -17 \end{bmatrix}.$$

संगतता का सिद्धान्त (Criterion of Consistency)

हम संगत और असंगत समीकरणों को पहले ही परिभाषित कर चुके हैं। यहाँ हम रैखिक समीकरणों के निकाय AX = B, जहाँ, A एक वर्ग आव्यूह है, की संगतता और असंगतता हेतु निम्न सिद्धान्त का प्रतिपादन करते हैं-

(i) यदि $|A| \neq 0$, तो निकाय संगत है और उसका एक अद्वितीय हल है।

(ii) यदि |A| = 0, तथा (adj A) B = 0, तब निकाय संगत है और उसके अनन्त हल हैं।

(iii) यदि |A| = 0, तथा (adj A) $B \neq 0$, तब निकाय असंगत है और उसका कोई हल नहीं है।

रैखिक समीकरणों का समरूप निकाय (Homogeneous system of linear equations)-

रैखिक समीकरणों का समरूप निकाय AX = 0 प्रकार का होता है। निम्न निकाय पर ध्यान दें-

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

इस निकाय को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं—

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

या, $$AX = 0$$

यदि A व्युत्क्रमणीय हो, तो उपर्युक्त समीकरण में A^{-1} का पूर्व-गुणन करने पर-

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}.0$$
$$\Rightarrow \quad (A^{-1}AX) = 0$$
$$\Rightarrow \quad IX = 0$$
$$\Rightarrow \quad X = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

स्पष्ट है कि, $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ दिये गये समरूप निकाय को संतुष्ट करते हैं। परिणामस्वरूप, यदि A व्युत्क्रमणीय है, समी. AX = 0 का एक अद्वितीय हल $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ होगा।

अब हम, समरूप समीकरणों हेतु संगतता का निर्धारण करेंगे। निकाय AX = 0 हेतु-

(i) यदि $|A| \neq 0$, निकाय का एक अद्वितीय हल होगा।

(ii) यदि $|A| = 0$, निकाय के अनंत हल होंगे।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 4.1 (पृष्ठ संख्या 118-119)

सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए-

प्रश्न 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$$

उत्तर-

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1) - 4(-5)$$

$$= -2 + 20 = 18$$

प्रश्न 2. सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए-

i.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ii.

$$\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$$

उत्तर-

i.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \cos\theta \times \cos\theta - \sin\theta(-\sin\theta)$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

ii.

$$\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x^2 - x + 1)(x + 1) - (x + 1)(x - 1)$$

$$= (x + 1)\left[x^2 - x + 1 - x + 1\right]$$

$$= (x + 1)(x^2 - 2x + 2)$$

$$= x^3 - 2x^2 + 2x + x^2 - 2x + 2$$

$$= x^3 - x^2 + 2$$

प्रश्न 3. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

तो दिखाइए कि |2A| = 4|A|

उत्तर-

$$|A| = 1 \times 2 - 4 \times 2 = -6$$

पुनः $2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $= |2A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$

$$= 2 \times 4 - 8 \times 4$$

$$= 8 - 32 = -24$$

$= 4 \times (-6) = 4|A|$ = दायाँ पक्ष

प्रश्न 4. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

हो तो दिखाइए कि |3A| = 27|A|

उत्तर-

$$|A| = 1(1 \times 4 - 0 \times 2) - 0 + 0 = 4$$

पुनः $3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $= |3A| = 3(3 \times 12 - 0 \times 6) - 0 + 0$

$$= 108$$

$$= 27 \times 4$$

$= 27|A|$ = दायाँ पक्ष

प्रश्न 5. निम्नलिखित सारणिकों के मान ज्ञात कीजिए-

i $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

ii $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

iii $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

iv $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

उत्तर-

i.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

द्वितीय पंक्ति के सापेक्ष प्रसार करने पर,

$$\Delta = -0 + 0 - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)[3 \times (-5) - (3)(-1)]$$

$$= [-15 + 3] = -12$$

ii.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति के सापेक्ष प्रसार करने पर,

$$\Delta = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3[1 \times 1 - 3(-2)] + 4[1 \times 1 - 2 \times (-2)] + 5[1 \times 3 - 2 \times 1]$$

$$= 3(7) + 4(5) + 5 \times (1)$$

$$= 21 + 20 + 5$$

$$= 46$$

iii.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति के सापेक्ष प्रसार करने पर,

$$\Delta = 0 - 1\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)[-1 \times 0 - 2(-2)(-3)] + 2[(-1) \times 3 - 2(-2) \times 0]$$

$$= (-1)[0 - 6] + 2[-3]$$

$$= 6 - 6$$

$$= 46$$

iv.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

द्वितीय पंक्ति के सापेक्ष प्रसार करने पर,

$$\Delta = -(0)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2[2 \times 0 - 3 \times (-2)] + 3[2 \times (-5) - 3 \times (-1)]$$

$$= 12 + 3(-10 + 3)$$

$$= 12 + 3 \times (-7)$$

$$= 12 - 21$$

$$= -9$$

प्रश्न 6. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

तो |A| ज़ात कीजिए।

उत्तर-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

प्रथम पंक्ति के सापेक्ष प्रसार करने पर,

$$|A| = (1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}(-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}(-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= [1 \times (-9) - 4 \times (-3)] - (1)[2 \times (-9) - 5 \times (-3)]$$
$$+ (-2)[2 \times 4 - 5 \times 1]$$

$$= 1(-9 + 12) - 1(-18 + 15) - 2(8 - 5)$$

$$= 1(3) - 1(-3) - 2(3)$$

$$= 3 + 3 - 6$$

$$= 6 - 6$$

$$= 0$$

प्रश्न 7. x के मान ज्ञात कीजिए, यदि-

i.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$$

ii.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$$

उत्तर-

i.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2 \times 1 - 5 \times 4 = 2x \times x - 6 \times 4$$

$$\Rightarrow 2 - 20 = 2x^2 - 24$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 6$$

$$\Rightarrow x^2 = 3$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

ii.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2 \times 5 - 3 \times 4 = x \times 5 - 3 \times 2x$$

$$\Rightarrow 10 - 12 = 5x - 6x$$

$$\Rightarrow -2 = -x$$

$$\Rightarrow x = 2$$

प्रश्न 8. यदि

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$$

हो तो x बराबर है-

a. 6

b. ± 6

c. -6

d. 0

उत्तर-

b. ± 6

हल:

दिया है,

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$$

दोनों ओर सारणिक का विस्तार करने पर,

$$\Rightarrow x \times x - 2 \times 18 = 6 \times 6 - 2 \times 18$$

$$\Rightarrow x^2 - 36 = 36 - 36$$

$$\Rightarrow x^2 - 36 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

प्रश्नावली 4.2 (पृष्ठ संख्या 129-131)

बिना प्रसरण किए और सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए-

प्रश्न 1.

$$\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर- माना बायाँ पक्ष = Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+a & a & x+a \\ y+b & b & y+b \\ z+c & c & z+c \end{vmatrix} = 0$$ = दायाँ पक्ष ($C_1 \to C_1 + C_2$)

∵ यहाँ दो स्तम्भ ($C_1 = C_3$) बराबर है। इति सिद्धम्।

प्रश्न 2.

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-b & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर- माना बायाँ पक्ष = Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-b & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$ = दायाँ पक्ष ($C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$)

∵ यहाँ पहले स्तम्भ C_1 के सभी अवयव शून्य हैं। इति सिद्धम्।

प्रश्न 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर- माना बायाँ पक्ष = Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 63 \\ 3 & 8 & 72 \\ 5 & 9 & 81 \end{vmatrix} (C_3 \to C_3 - C_1)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 63 - 7 \times 9 \\ 3 & 8 & 72 - 8 \times 9 \\ 5 & 9 & 81 - 9 \times 9 \end{vmatrix} = (C_3 \to C_3 - 9C_2)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 5 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0 = \text{दायाँ पक्ष}$$

∵ यहाँ तीसरे स्तम्भ C_3 के सभी अवयव शून्य हैं। इति सिद्धम्।

प्रश्न 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर- माना बायाँ पक्ष = Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & bc & ab+bc+ca \\ 1 & ca & ab+bc+ca \\ 1 & ab & ab+bc+ca \end{vmatrix} (C_3 \to C_3 + C_2)$$

C_3 से ab + bc + ca उभयनिष्ठ लेने पर,

$$\Delta = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & bc & 1 \\ 1 & ca & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{vmatrix} = 0$$ = दायाँ पक्ष

∵ यहाँ प्रथम स्तम्भ तथा तृतीय स्तम्भ ($C_1 = C_3$) बराबर हैं। इति सिद्धम्।

प्रश्न 5.

$$\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$$

उत्तर- माना बायाँ पक्ष = Δ

$$= \begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c+c+a+a+b & q+r+r+p+p+q & y+z+z+x+x+y \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} \quad (R_1 \to R_3 + R_2 + R_1)$$

$$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(p+q+r) & 2(x+y+z) \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & p+q+r & x+y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & p+q+r & x+y+z \\ -b & -q & -y \\ -c & -r & -z \end{vmatrix} \quad (R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1)$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ -b & -q & -y \\ -c & -r & -z \end{vmatrix} \quad (R_1 \to R_3 + R_1 + R_2)$$

$$= 2(-)\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$$ = दायाँ पक्ष

R_2 और R_3 में से -1 उभयनिष्ठ लेने पर इति सिद्धम्।

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए-

प्रश्न 6.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर-

माना बायाँ पक्ष $= \Delta$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

प्रत्येक स्तम्भ से -1 उभयनिष्ठ लेने पर,

$$\Delta = (-1)^3\begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

पंक्तियों तथा स्तम्भों को परस्पर बदलने पर,

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -\Delta$$

$$\therefore 2\Delta = 0$$

$\Delta = 0$ = दायाँ पक्ष

प्रश्न 7.

$$\begin{vmatrix} -a^3 & ab & ac \\ bc & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} -a^3 & ab & ac \\ bc & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} -a & a & a \\ b & -b & b \\ c & c & -c \end{vmatrix}$ [C_1, C_2, C_3 से a, b, c उभयनिष्ठ लेने पर]

$= a^2b^2c^2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ [R_1, R_2, R_3 से a, b, c उभयनिष्ठ लेने पर]

$= a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ [$C_1 \to C_1 + C_2$ द्वारा]

$= a^2b^2c^2\{2(1+1)\}$ [C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$= 4a^2b^2c^2$ = दायाँ पक्ष

प्रश्न 8.

i.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

ii.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

उत्तर-

i.

$$\text{बायाँ पक्ष} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \text{ [}R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_3 \text{ द्वारा]}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \text{ [}R_1 \text{ से } a-b, R_2 \text{ से } b-c \text{ उभयनिष्ठ लेने पर]}$$

$$= (a-b)(b-c)\{1(b+c-a-b)\} \text{ [}C_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर]}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a) = \text{दायाँ पक्ष}$$

ii.

$$\text{बायाँ पक्ष} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix}$$ [$C_1 \rightarrow C_1$ - C_2, $C_2 \rightarrow C_2$ - C_3 द्वारा]

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$ [C_1 से a - b, C_2 से b - c उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (a-b)(b-c)\left\{1\left(b^2+bc+c^2\right)-\left(a^2+ab+b^2\right)\right\}$$ [R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$$= (a-b)(b-c)\{c^2-a^2+bc-ab\}$$

$$= (a-b)(b-c)\{(c-a)(c+a)+b(c-a)\}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)\{c+a+b\}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \text{ दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 9.

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$$

उत्तर-

$$\text{बायाँ पक्ष} = \begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$$ [$R_1 \rightarrow R_1$ - R_2, $R_2 \rightarrow R_3$ द्वारा]

$$= \begin{vmatrix} x-y & x^2-y^2 & yz-zx \\ y-z & y^2-z^2 & zx-xy \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-y & (x+y)(x-y) & z(y-x) \\ y-z & (y-z)(y+z) & x(z-y) \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} \quad (R_1 \to R_1 - R_2 \text{ तथा } R_2 \to R_2 - R_3)$$

$$= (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x+y & -z \\ 1 & y+z & -x \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} \quad [R_1 \text{ से } (x-y) \text{ और } R_2 \text{ से } (y-z) \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}]$$

$$= (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & x-z & -z+x \\ 1 & y+z & -x \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} \quad (R_1 \to R_1 - R_2)$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & y+z & -x \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} \quad [R_1 \text{ से } (z-x) \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}]$$

$$= (-1)(x-y)(y-z)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & x+y+z \\ z & z^2-xy \end{vmatrix} \quad (R_1 \text{ के संगत विस्तार करने पर})$$

$$= -(x-y)(y-z)(z-x)\left[(z^2-xy) - z(x+y+z)\right]$$

$$= -(x-y)(y-z)(z-x)\left[z^2 - xy - xz - zy - z^2\right]$$

$$= -(x-y)(y-z)(z-x)\left[-(xy+yz+zx)\right]$$

$$= -(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx) \text{ = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्।}$$

प्रश्न 10.

i.

$$\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$$

ii.

$$\begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$$

उत्तर-

i.

$$\text{बायाँ पक्ष} = \begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5x+4 & 5x+4 & 5x+4 \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (5x+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} \quad (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3)$$

$$= (5x+4)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-4 & 4-x & 2x \\ 0 & x-4 & x+4 \end{vmatrix} \quad (C_1 \to C_1 - C_2 \text{ तथा } C_2 \to C_2 - C_3 \text{ से})$$

$$= (5x+4)(x-4)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2x \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$$ [C_1 तथा C_2 से (x - 4) उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (5x+4)(x-4)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (5x+4)(x-4)^2[1+0]$$ (C_3 के संगत विस्तार करने पर)

$$= (5x+4)(x-4)^2$$

$$= (5x+4)(4-x)^2$$ = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्।

ii.

बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y+k & y & y \\ 3y+k & y+k & y \\ 3y+k & y & y+k \end{vmatrix}$

$$= (3y+k) \begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 1 & y+k & y \\ 1 & y & y+k \end{vmatrix}$$ ($C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3$)

[C1 से (3y + k) उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (3y+k) \begin{vmatrix} 0 & -k & 0 \\ 0 & k & -k \\ 1 & y & y+k \end{vmatrix}$$

[C1 से (3y + k) उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (3y+k)\begin{vmatrix} 0 & -k & 0 \\ 0 & k & -k \\ 1 & y & y+k \end{vmatrix}$$

$$= (3y+k)\begin{vmatrix} -k & 0 \\ k & -k \end{vmatrix}$$ ($R_1 \to R_1$ - R_2 तथा $R_2 \to R_2$ - R_3) (C_1 के संगत विस्तार करने पर)

$$= (3y+k)\left[k^2 - 0\right]$$

$= k^2(3y+k)$ = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्।

प्रश्न 11.

i.

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

ii.

$$\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$$

उत्तर-

i.

$$\text{बायाँ पक्ष} = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 \text{ से})$$

उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \quad (C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_1)$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -b-c-a & 0 \\ 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \quad R_1 \text{ के सापेक्ष विस्तार करने पर}$$

$$= (a+b+c)[(-b-c-a)(-c-a-b)-0]$$

$$= (a+b+c)(b+c+a)(c+a+b)$$

$$= (a+b+c)^3 \text{ दायाँ पक्ष इति सिद्धम्।}$$

ii.

$$\text{बायाँ पक्ष} = \begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2(x+y+2z) & x & y \\ 2(x+y+2z) & y+z+2x & y \\ 2(x+y+2z) & x & z+x+2y \end{vmatrix} \quad (C_1 \to C_1 + C_2 + C_3)$$

C_1 से $2(x + y + z)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= 2(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y+z+2x & y \\ 1 & x & z+x+2y \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y+z)\begin{vmatrix} 0 & -x-y-z & 0 \\ 0 & y+y+x & -x-y-z \\ 0 & x & z+x+2y \end{vmatrix} \quad (R_1 \to R_1 - R_2 \text{ तथा } R_2 \to R_2 - R_3 \text{ से})$$

$$= 2(x+y+z)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & x & z+x+2y \end{vmatrix}$$ [R_1 तथा R_2 में से (x + y + z) उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= 2(x+y+z)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$ (C_1 के संगत विस्तार करने पर)

$$= 2(x+y+z)^3[1-0]$$

$$= 2(x+y+z)^3$$ = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्।

प्रश्न 12.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & x & x^2 \\ 1+x+x^2 & 1 & x \\ 1+x+x^2 & x^2 & 1 \end{vmatrix}$ ($C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$)

$$= (1+x+x^2) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x^2 & 1 \end{vmatrix}$$ [C_1 में से ($1 + x + x^2$) उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (1+x+x^2) \begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-x \\ 0 & 1-x^2 & x-1 \\ 1 & x^2 & 1 \end{vmatrix}$$ ($R_1 \to R_1$ - R_2 तथा $R_2 \to R_2$ - R_3)

$$= (1+x+x^2)\begin{vmatrix} 0 & -(1-x) & -x(1-x) \\ 0 & (1-x)(1+x) & -(1-x) \\ 1 & x^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)^2(1+x+x^2)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -x \\ 0 & 1+x & -1 \\ 1 & x^2 & 1 \end{vmatrix}$$ [R_1 तथा R_2 में (1 - x) उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (1-x)^2(1+x+x^2)\begin{vmatrix} -1 & -x \\ 1+x & -1 \end{vmatrix}$$ [C_1 के संगत विस्तार करने पर]

$$= (1-x)^2(1+x+x^2)\left[(-1)(-1)-(-x)(1+x)\right]$$

$$= (1-x)^2(1+x+x^2)\left[1+x+x^2\right]$$

$$= (1-x)^2(1+x+x^2)^2$$

$$= \left[(1-x)(1+x+x^2)\right]^2$$

$$= (1-x^3)^2$$ = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्।

प्रश्न 13.

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b+b(1-a^2-b^2) \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} \quad (R_1 \to R_1 + bR_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -b(1+a^2+b^2) \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

R_1 से $(1 + a_2 + b_2)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= (1+a^2+b^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & a(1+a^2+b^2) \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} \quad (R_2 \to R_2 - aR_3)$$

$$= (1+a^2+b^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} \quad [R_2 \text{ से } (1 + a_2 + b_2) \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}]$$

R_1 के संगत विस्तार करने पर,

$$= (1+a^2+b^2)^2 [1(1-a^2-b^2+2a^2) - b(0-2b)]$$

$$= (1+a^2+b^2)^2 [1+a^2-b^2+2b^2]$$

$$= (1+a^2+b^2)^2 (1+a^2+b^2)$$

$$= (1+a^2+b^2)^3$$ = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्।

प्रश्न 14.

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$$

उत्तर-

$$\text{बायाँ पक्ष} = \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a(a^2+1) & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & b(b^2+1) & bc^2 \\ a^2c & b^2c & c(c^2+1) \end{vmatrix}$$ C_1, C_2, C_3 को क्रमशः a, b, c से गुणा करने पर

$$= \frac{1}{abc}\cdot abc\begin{vmatrix} a^2+1 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2+1 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$ R_1, R_2, R_3 से क्रमशः a, b, c उभयनिष्ठ लेने पर

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & b^2 & c^2 \\ 1+a^2+b^2+c^2 & b^2+1 & c^2 \\ 1+a^2+b^2+c^2 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$ $C_1 \rightarrow C_1 + (C_2 + C_3)$

$$= (1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ 1 & b^2+1 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$ C_1 से $(1 + a_2 + b_2 + c_2)$

$$= (1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ $R_2 \rightarrow R_2 - R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1$

$$= (1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$ C_1 के सापेक्ष प्रसार करने पर

$$= (1+a^2+b^2+c^2) \times 1 = 1+a^2+b^2+c^2$$ दायाँ पक्ष इति सिद्धम्।

प्रश्न 15. सही उत्तर चुनिए।

यदि A एक 3 × 3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो |kA| का मान होगा-

a. k|A|

b. k^2|A|

c. K^3|A|

d. 3k|A|

उत्तर-

c. K^3|A|

हल:

|kA| को |A| के पद में व्यक्त करने पर,

$$\text{माना } A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$kA = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix}$$

$$|KA| = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix}$$

प्रत्येक पंक्ति में से k उभयनिष्ठ लेने पर,

$$|KA| = k^3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k^3|A|$$

प्रश्न 16. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही है?

a. सारणिक एक वर्ग आव्यूह है।
b. सारणिक एक आव्यूह से सम्बद्ध एक संख्या है।
c. सारणिक एक वर्ग आव्यूह से सम्बद्ध एक संख्या है।
d. इनमें से कोई नहीं।

उत्तर-

c. सारणिक एक वर्ग आव्यूह से सम्बद्ध एक संख्या है।

हल:

हम जानते हैं कि प्रत्येक n क्रम के वर्ग आव्यूह A = $[a_{ij}]$ जहाँ a_{ij} = A का (ij) वा अवयव है, को किसी व्यंजक या संख्या के साथ संबद्ध किया जा सकता है जिसे सारणिक कहते हैं।

प्रश्नावली 4.3 (पृष्ठ संख्या 133)

प्रश्न 1. दिए गए शीर्ष बिन्दुओं वाले त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए-

i. (1, 0), (6, 0), 4, 3)
ii. (2, 7), (1, 1), (10, 8)
iii. (-2, -3), (3, 2), (-1, -8)

उत्तर-

i. शीर्ष बिन्दुओं (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) से होकर जाने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल,

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

अतः अभीष्ट त्रिभुज का क्षेत्रफल,

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$ C_2 के सापेक्ष प्रसार करने पर

$$= -\frac{3}{2} \times [1-6] = \frac{15}{2}$$ मात्रक

ii. शीर्ष बिन्दुओं (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) से होकर जाने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल,

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

अतः अभीष्ट त्रिभुज का क्षेत्रफल,

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$ $R_1 \to R_1 - R_2,\ R_3 \to R_3 - R_2$

$$= \frac{1}{2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$$ C_3 के सापेक्ष प्रसार करने पर

$$= -\frac{1}{2}[1 \times 7 - 54] = \frac{47}{2}$$ मात्रक

iii. शीर्ष बिन्दुओं (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) से होकर जाने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल,

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

अतः अभीष्ट त्रिभुज का क्षेत्रफल,

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[-2(2+8)-(-3)(3+1)+1(-24+2)]$$

$$= \frac{1}{2}[(-20+12-22)]$$

$$= \frac{1}{2} \times [-30]$$

$= 15$ मात्रक

प्रश्न 2. दर्शाइए कि बिन्दु A(a, b + c), B(b, c + a) और C(c, a + b) संरेख हैं।

उत्तर- ज्ञात है, त्रिभुज के शीर्ष A(a, b + c), B(b, c + a) और C(c, a + b)

$$\therefore \Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

जहाँ, $x_1 = a$, $y_1 = b + c$, $x_2 = b$, $y_2 = c + a$, $x_3 = c$, $y_3 = a + b$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} \quad (C_1 \to C_1 + C_2)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a+b+c+ & b+c & 1 \\ a+b+c & c+a & 1 \\ a+b+c & a+b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c) \times 0 \because C_1 \text{ तथा } C_3 \text{ समान है।}$$

$\therefore \Delta$ का क्षेत्रफल = 0

अतः बिंदु A, B, C संरेख है।

प्रश्न 3. प्रत्येक में k का मान ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुजों का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है। जहाँ शीर्ष बिन्दु निम्नलिखित हैं।

i. (k, 0), 4, 0), (0, 2)
ii. (-2, 0), (0, 4), (0, k)

उत्तर-

i.

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \pm 4 \text{ या } \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \pm 8$$

$$= (-2)\begin{vmatrix} k & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \pm 8 \ C_2 \text{ के सापेक्ष प्रसार करने पर}$$

$$= k - 4 = \pm 4$$

$$k = 0, 8$$

ii.

त्रिभुज का वह क्षेत्र जिसके शीर्ष (-2, 0), (0, 4), (0, k) हैं।

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \times (-2)(4 - k)$$

$$= k - 4 = \pm 4$$

+ चिन्ह लेने पर,

$$k - 4 = 4$$

$$\therefore k = 8$$

- चिन्ह लेने पर,

$$k - 4 = -4$$

$$\therefore k = 0$$

प्रश्न 4.

i. सारणिकों का प्रयोग करके (1, 2) और (3, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

ii. सारणिकों का प्रयोग करके (3, 1) और (9, 3) को मिलाने वाली रेखा को समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

i. माना कोई बिन्दु (x, y) है।

इसलिए त्रिभुज के शीर्ष (x, y), (1, 2), (3, 6) होंगे।

$$\therefore\ \Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$x_1 = x,\ y_1 = y,\ x_2 = 1,\ y_2 = 2 + a,\ x_3 = 3,\ y_3 = 6$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[x(2-6) - y(1-3) + 1(6-6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x \times (-4) - y(-2) + 1 \times 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-4x + 2y\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times 2(-2x + y)$$

$$= -2x + y$$

चुंकि बिंदु सरेख है।

इसलिए Δ का क्षेत्रफल शून्य होगा।

$$0 = -2x + y$$

$$2x - y = 0$$

यही अभीष्ट समीकरण है।

ii. माना बिन्दुओं A(3, 1) और B(9, 3) को मिलाने वाली रेखा पर बिन्दु P(x, y) है। तब बिन्दु A, P और B संरेख हैं।

∴ क्षेत्रफल (ΔAPB) = 0

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[x(1-3) - y(3-9) + 1(9-9)\right] = 0$$

$$\Rightarrow -2x + 6y = 0$$

$$\Rightarrow -x + 3y = 0$$

$$\Rightarrow x - 3y = 0$$

प्रश्न 5. यदि शीर्ष (2, -6), (5, 4) और (k, 4) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान है।

i. 12
ii. -2
iii. -12, -2
iv. 12, -2

उत्तर-

iv. 12, -2

हल:

दिया है, त्रिभुज के शीर्ष (2, -6), (5, 4) तथा (k, 4)

$$\therefore \Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

जहाँ $x_1 = 2$, $y_1 = -6$, $x_2 = 5$, $y_2 = 4$, $x_3 = k$, $y_3 = 4$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ k & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

ज्ञात है, त्रिभुज $= \pm 35$

$\therefore \quad \pm 35 = \frac{1}{2}\left[2(4-4) + 6(5-k) + 1(20-4k)\right]$

$\Rightarrow \quad \pm 35 = \frac{1}{2}\left[2 \times 0 + 6(5-k) + 1(20-4k)\right]$

$\Rightarrow \quad \pm 70 = 6(5-k) + 20 - 4k$

$\Rightarrow \quad \pm 70 = 30 - 6k + 20 - 4k$

$\Rightarrow \quad \pm 70 = 50 - 10k$

$\Rightarrow \quad \pm 7 = 5 - k$

धनात्मक चिह्न लेने पर,

$\Rightarrow \quad 7 = 5 - k$

$\Rightarrow \quad k = 5 - 7 = -2$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर,

$\Rightarrow \quad -7 = 5 - k$

$\Rightarrow \quad k = -7 - 5 = 12$

प्रश्नावली 4.4 (पृष्ठ संख्या 136-137)

निम्न सारणिकों के अवयवों के उपसारणिक एवं सहखण्ड लिखिए।

प्रश्न 1.

i.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

ii.

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

उत्तर-

i. उपसारणिक $M_{11} = 3$, $M_{12} = 0$, $M_{21} = -4$, $M_{22} = 2$

तथा सहखण्ड $A_{11} = 3$, $A_{12} = 0$, $A_{21} = -(-4) = 4$, $A_{22} = 2$

ii. उपसारणिक $M_{11} = d$, $M_{12} = b$, $M_{21} = c$, $M_{22} = a$

तथा सहखण्ड $A_{11} = d$, $A_{12} = -b$, $A_{21} = -c$, $A_{22} = a$

प्रश्न 2.

i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ii.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

उत्तर-

i. उपसारणिक,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

तथा सहखण्ड,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \times 0 = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1 \times 0 = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 1 \times 1 = 1$$

उपसारणिक,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - 1(-1) = 11$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 0 = 6$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 0 = 3$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \times 2 - 1 \times 4 = -4$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 0 = 2$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 0 = 1$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \times (-1) - 5 \times 4 = -20$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 4 = 13$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5$$

तथा सहगुनखण्ड या सहखण्ड

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \times 11 = 11$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \times 6 = -6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1 \times 3 = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1) \times (-4) = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\ M_{22} = 1 \times 2 = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (1) \times 1 = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{1+1}\ M_{31} = 1 \times (-20) = -20$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\ M_{32} = (-1)(-13) = 13$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 1 \times 5 = 5$$

प्रश्न 3. दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखण्डों का प्रयोग करके

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

का मान ज़ात कीजिए।

उत्तर- दूसरी पंक्ति के सहखण्ड इस प्रकार होंगे,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)[3 \times 3 - 2 \times 8] = 7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1[5 \times 3 - 1 \times 8] = 7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)[5 \times 2 - 3 \times 1] = -7$$

$$\therefore\ \Delta = a_{21} \times A_{21} + a_{22} \times A_{22} + a_{23} \times A_{23}$$

$$\Delta = 2 \times 7 + 0 \times 7 + 1 \times (-7)$$

$$\Delta = 2 \times 7 + 0 \times 7 + 1 \times (-7)$$

$$\Delta = 14 - 7 = 7$$

प्रश्न 4. तीसरे स्तम्भ के अवयवों के सहखण्डों का प्रयोग करके

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- तीसरे स्तम्भ के सहखण्ड इस प्रकार होंगे,

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix} = (1) \times (z-y) = (z-y)$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = (-1)(z-x) = -(x-z)$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = (1)(y-x) = (y-x)$$

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$
$$= yz(z-y) + zx(x-z) + xy(y-x)$$
$$= yz^2 - y^2z + zx^2 - z^2x + xy^2 - x^2y$$
$$= zx^2 - x^2y + xy^2 - z^2x + yz^2 - y^2z$$
$$= x^2(z-y) + x(y-z) + yz(z-y)$$
$$= (z-y)\left[x^2 - x(y+z) + yz\right]$$
$$= (z-y)\left[x^2 - xy - xz + yz\right]$$
$$= (z-y)\left[x(x-y) - z(x-y)\right]$$
$$= (z-y)(x-y)(x-z)$$
$$= (x-y)(y-z)(z-x)$$

प्रश्न 5. यदि

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

और a_{ij} का सहखण्ड A_{ij} हो तो Δ का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है-

a. $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$

b. $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$

c. $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$

d. $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

उत्तर-

d. $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

हल:

Δ = किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के अवयवों तथा उनके संगत महखण्डों के गुणन का योग

C_1 स्तम्भ के अवयव (a_{11}, a_{21}, a_{31}) इनके सहखण्ड A_{11}, A_{21}, A_{31}

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

प्रश्नावली 4.5 (पृष्ठ संख्या 142-144)

प्रत्येक आव्यूह का सहखण्डज (adjoint) ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

दिया गया है $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

माना Cij के सहखण्ड को aij से,

$$C_{11} = (-1)^{1+1}(4) = 4$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}(3) = -3$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}(2) = -1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}(1) = -1$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$\text{माना } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A के अवयव के सहगुणखण्ड निम्नलिखित है-

$$\therefore A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^2[3 - 0] = 1 \times 3 = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^3[2 + 10] = -1 \times 12 = -12$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^4[0 + 6] = 1 \times 6 = 6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^3[-1-0] = -1 \times (-1) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^4[1+4] = 1 \times 5 = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^5[0-2] = (-1) \times (-2) = 2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^4[-5-6] = 1 \times (-11) = -11$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^5[5-4] = -1 \times 1 = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^6[3+2] = 1 \times 5 = 5$$

अतः सहगुणखण्डो का आव्यूह $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ -11 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore$ A का सहखण्डज $A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ -11 & -1 & 5 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

सत्यापित कीजिए कि A(adj A) = (adj A) × A = |A| × I है।

प्रश्न 3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$\because A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ के सहगुणखण्ड से बना आव्यूह

$$C = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{adj } A = C' = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12+12 & -6+6 \\ 24-24 & 12-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

तथा $|A| = -12 + 12 = 0$

$$\therefore |A| = 0 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(\text{adj } A) = |A| I \ldots (i)$$

इसी प्रकार दिखा सकते है, $(\text{adj } A) = |A| I \ldots (ii)$

$\therefore$ (i) व (ii) से $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A$

प्रश्न 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

माना $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= 0 + (9 + 2) + 2 \times 0 = 11$

|A| के अवयवों के सहगुणनखण्ड,

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$A_{12} = (-1)(9 + 2) = -11$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{21} = (-1)^{2+1} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

$A_{21} = (-1)(-3) = 3$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$A_{22} = 3 - 2 = 1$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$A_{23} = -1(1) = -1$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

$A_{31} = (1)(2-0) = 2$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

$A_{32} = (-1)(-2-6) = 8$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$

$A_{33} = 0 + 3 = 3$

$\therefore |A|$ के सहगुणनखण्डों से बना आव्यूह $C = \begin{bmatrix} 0 & -11 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore \text{ adj } A = C' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ A\,(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+11+0 & 3-1-2 & 2-8+6 \\ 0+0+0 & 9+0+2 & 6+0-6 \\ 0+0+0 & 3+0-3 & 2+0+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} = 11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 11I$$

$= |A| \ldots (i)$

इसी प्रकार दिखा सकते है, $(\text{adj } A)A = |A|I \ldots (ii)$

$\therefore$ (i) व (ii) से, $A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A$

दिए गए प्रत्येक आव्यूहों के व्युत्क्रम (जिनका अस्तित्व हो) ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$\text{माना } A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 6 + 8 = 14 \neq 0$$

अतः आव्यूह A का व्युत्क्रम जिनका अस्तित्व में है।

$$\therefore A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \times 3 = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 \times (-2) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 2$$

$$\text{A के सहगुणनखण्डों के अवयवों से बना आव्यूह} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj} \times A}{|A|} = \frac{1}{14} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{2}{14} \\ -\frac{4}{14} & \frac{2}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

प्रश्न 6.

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 + 15 = 13 \neq 0$$

इसलिए, A एक विलक्षण मैट्रिक्स है, और इसलिए यह उलटा है। बता दें कि C_{ij} कोफ़ेक्टर है A_{ij} का। फिर, A के तत्वों के कोफ़ेक्टर्स द्वारा दिया जाता है।

$$\therefore \text{ adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{-1}{13} \end{bmatrix}$$

प्रश्न 7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$\text{माना } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1[10 - 0] - 2[0 - 0]$$

$$= 1 \times 10 = 10 \neq 0$$

अतः आव्यूह A का व्युत्क्रम अस्तित्व में है।

$$\therefore\ A_{11} = (-1)^{1+1} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{2}[10 - 0] = 1 \times 0 = 10$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{3}[0 - 0] = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{4}[0 - 0] = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{3}[10 - 0] = -1 \times 10 = -10$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{4}[5 - 0] = 1 \times 5 = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{5}[0 - 0] = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{4}[8 - 6] = 1 \times 2 = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{5}[4 - 0] = -1 \times 4 = -4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{6}[2 - 0] = 1 \times 2 = 2$$

अतः आव्यूह A के सहगुणनखण्डो के अवयवों से बना आव्यूह $= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \text{ adj A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj A}) = \frac{1}{10} = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{10}{10} & -\frac{10}{10} & \frac{2}{10} \\ 0 & \frac{5}{10} & -\frac{4}{10} \\ 0 & 0 & \frac{2}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

प्रश्न 8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$\text{माना } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1[-3-0] - 0 + 0$$

$$= 1 \times (-3) = -3 \neq 0$$

अतः आव्यूह A का व्युत्क्रम अस्तित्व में है।

$$\therefore A_{11} = (-1)^{1+1} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^2[-3-0] = 1 \times (-3) = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^3[-3-0] = -1 \times (-3) = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^4[6-15] = 1 \times (-9) = -9$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^3[0-0] = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^4[-1-0] = 1 \times (-1) = -1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^5[2-0] = -1 \times 2 = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^4[0-0] = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^5[0-0] = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^6[3-0] = 1 \times 3 = 3$$

अतः आव्यूह A के सहगुणनखण्डो के अवयवों से बना आव्यूह $= \begin{bmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore \text{ adj } A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{-3} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 3 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 9.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

यहाँ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

इसलिए $|A| = 2(-1-0) - 1(4-0) + 3(8-7) = -3 \neq 0$

A^{-1} का अस्तित्व है।

$A_{11} = -1, A_{12} = -4$

$A_{21} = 5, A_{22} = 23$

$A_{31} = 3, A_{32} = 12$

$A_{31} = 3, A_{32} = 12$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 10.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

यहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

इसलिए $\therefore \ |A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$|A| = 1[8-6] + 1[0+9] + 2[0-6]$

$|A| = 1 \times 2 + 1 \times 9 + 2 \times (-6)$

$|A| = 2 + 9 - 12 = -1 \neq 0$

अतः आव्यूह A का व्युत्क्रम अस्तित्व में है।

$\therefore \ A_{11} = (-1)^{1+1} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

$A_{11} = (-1)^2[8-6] = 1 \times 2 = 2$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$A_{12} = (-1)^3[0+9] = -1 \times 9 = -9$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

$A_{13} = (-1)^4[0-6] = 1 \times (-6) = -6$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

$A_{21} = (-1)^3[-4+4] = -1 \times 0 = 0$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^4[4-6] = 1\times(-2) = -2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\3 & -2\end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^5[-2+3] = -1\times 1 = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\2 & -3\end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^4[3-4] = 1\times(-1) = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & -3\end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^5[-3-0] = -1\times(-3) = 3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} = \begin{vmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^6[2-0] = 1\times 2 = 2$$

अतः A के सहगुणनखण्डो के अवयवों से बना आव्यूह $= \begin{bmatrix}2 & -9 & -6\\0 & -2 & -1\\-1 & 3 & 2\end{bmatrix}$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix}2 & -9 & -6\\0 & -2 & -1\\-1 & 3 & 2\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\-9 & -2 & 3\\-6 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A)$$

$$= \frac{-1}{1}\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\-9 & -2 & 3\\-6 & -1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\9 & 2 & -3\\6 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

प्रश्न 11.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\0 & \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$\text{यहाँ } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\text{तब } |A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 1\left[\cos\alpha(-\cos\alpha) - \sin\alpha(\sin\alpha)\right]$$

$$= -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = -1$$

$\because |A| \neq 0 \therefore A^{-1}$ ज्ञात किया जा सकता है।

A के तत्वों के सहगुणनखण्ड क्रमशः

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = +(-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = -1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 0 & -\cos\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = 0$$

$$A_{21} = 0$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = (-\cos\alpha) = -\cos\alpha$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix} = -\sin\alpha$$

$$A_{31} = 0$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix} = -\sin\alpha$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha$$

$\therefore$ A के सहगुणनखण्डो से बना आव्यूह $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

adj A = C का परिवर्त $= C' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \frac{1}{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

प्रश्न 12. यदि

$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

है तो सत्यापित कीजिए कि

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

उत्तर-

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 15 - 14 = 1 \neq 0$$

$\therefore A^{-1}$ ज्ञात किया जा सकता है।

पुनः $|B| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$

$$|B| = 54 - 56 = -2 \neq 0$$

$\therefore B^{-1}$ भी ज्ञात किया जा सकता है।

A के सहगुणनखण्डो का आव्यूह $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore\ \text{adj } A = C' = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore\ A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{1} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

B के सहगुणनखण्डो का आव्यूह $C_1 = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$

$\therefore\ \text{adj } B = C_1' = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$

$\therefore\ B^{-1} = \frac{\text{adj } B}{|B|} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 4 \\ \frac{7}{2} & -3 \end{bmatrix}$

$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 4 \\ \frac{7}{2} & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -\frac{45}{2} - 8 & \frac{63}{2} + 12 \\ \frac{35}{2} + 6 & -\frac{49}{2} - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix}$

तथा $AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 18+49 & 24+63 \\ 12+35 & 16+45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix}$

$|AB = (67 \times 61 - 47 \times 87) = 4087 - 4089 = -2 \neq 0$

$\therefore\ (AB)^{-1}$ ज्ञात किया जा सकता है।

आव्यूह AB के सहगुणनखण्डो के अवयवों से बना आव्यूह $C_2 = \begin{bmatrix} 61 & -47 \\ -87 & 67 \end{bmatrix}$

$\text{adj } (AB) = C_2' = \begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ (AB)^{-1} = \frac{\text{adj}\,(AB)}{|AB|} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ स्पष्ट है कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

प्रश्न 13. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

है तो दर्शाइए कि $A^2 - 5A + 7I = O$ है इसकी सहायक से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

ज्ञात है $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times3+1\times(-1) & 3\times1+1\times2 \\ -1\times3+2\times(-1) & -1\times1+2\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 5A + 7I = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

अतः $A^2 - 5A + 7I = 0$

दोनों पक्षों में A^{-1} से गुणा करने पर,

$$A^{-1}A^2 - 5A^{-1}A + 7A^{-1}I = OA^{-1}\ (\because\ IA = A)$$

$$IA - 5I + 7A^{-1} = 0$$

$$7A^{-1} = 5I - A$$

$$= 5\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5-3 & 0-1\\0+1 & 5-2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}$$

प्रश्न 14. आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$$

के लिए a और b ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए ताकि $A^2 + aA + bI = 0$ है।

उत्तर- प्रश्नानुसार,

$$A^2 + aA + bI = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix} + a\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}9+2 & 6+2\\3+1 & 2+1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3a & 2a\\a & a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b & 0\\0 & b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}11 & 8\\4 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3a+b & 2a\\a & a+b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}11+3a+b & 8+2a\\4+a & 3+a+b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$$4 + a = 0$$

$$\Rightarrow a = -4$$

तथा $3 + a + b = 0$

$$\Rightarrow b = -3 - a = -3 + 4 = 1$$

$$\therefore a = -4, b = 1$$

प्रश्न 15. आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

के लिए दर्शाइए कि $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = 0$ है।

उत्तर-

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1+2 & 1+2-1 & 1-3+3 \\ 1+2-6 & 1+4+3 & 1-6-9 \\ 2-1+6 & 2-2-3 & 2+3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^3 = A^2 \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+2+2 & 4+4-1 & 4-6+3 \\ -3+8-28 & -3+16+14 & -3-24-42 \\ 7-3+28 & 7-6-14 & 7+9+42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ -23 & 27 & -69 \\ 32 & -13 & 58 \end{bmatrix}$$

अब $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ -23 & 27 & -69 \\ 32 & -13 & 58 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ -23 & 27 & -69 \\ 32 & -13 & 58 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 12 & 6 \\ -18 & 48 & -84 \\ 42 & -18 & 84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & -15 \\ 10 & -5 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-24+5+11 & 7-12+5+0 & 1-6+5+0 \\ -23+18+5+0 & 27-48+10+11 & -69+84-15+0 \\ 32-42+10+0 & -13+18-5+0 & 58-84+15+11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

पुनः प्रश्नानुसार, $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = 0$

$$A^2 \cdot A - 6A \cdot A + 5A = -11I$$

$$A^2 \cdot (AA^{-1}) - 6A(AA^{-1}) + 5(AA^{-1}) = -11I \cdot A^{-1}$$

(A^{-1} से दोनों और गुणा करने पर)

$$A^2I - 6AI + 5I = -11A^{-1}$$

$$A^2 - 6A + 5I = -11A^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -11A^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-6+5 & 2-6+0 & 1-6+0 \\ -3-6+0 & 8-12+5 & -14+18+0 \\ 7-12+0 & -3+6+0 & 14-18+5 \end{bmatrix} = 11A^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = -11A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 16. आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

तो सत्यापित कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0$ है तथा इसकी सहायक से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

अब, $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0$$

$$\Rightarrow 4I = A^3 - 6A^2 + 9A$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \tfrac{1}{4}A^2 - \tfrac{6}{4}A + \tfrac{9}{4}I$$

$$= \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - \tfrac{6}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \tfrac{9}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{4} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 17. यदि A, 3 × 3 कोटि का आव्यूह है तो |adj A| का मान है-

a. |A|

b. $|A|^2$

c. $|A|^3$

d. 3|A|

उत्तर-

b. $|A|^2$

हल:

चूँकि हम जानते हैं कि |adj A| = $|A|^{n-1}$ यहाँ n = 3

$\therefore |\text{adj } A| = |A|^2$

प्रश्न 18. यदि A कोटि 2 को व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो $\det(A^{-1})$ बराबर है-

a. $\det(A)$

b. $\frac{1}{\det(A)}$

c. 1

d. 0

उत्तर-

b. $\frac{1}{\det(A)}$

हल:

$\because A$ व्युत्क्रमणीय आव्यूह है,

$\Rightarrow |A| \neq 0$

$\therefore AA^{-1} = I$

$|AA^{-1}| = |I| = 1$

$\Rightarrow |A||A^{-1}| = 1$

$\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$\Rightarrow \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$

प्रश्नावली 4.6 (पृष्ठ संख्या 148)

दी गई समीकरण निकायों का संगत अथवा असंगत के रूप में वर्गीकरण कीजिए।

प्रश्न 1. x + 2y = 2

2x + 3y = 3

उत्तर-

माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

तब दिया गया समीकरण निकाय इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अब $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$|A| = 3 - 4 = -1 \neq 0$$

$\therefore$ दिया गया समीकरण निकाय संगत है।

प्रश्न 2. 2x - y = 5

x + y = 4

उत्तर- 2x - y = 5

x + y = 4

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AX = B$$

अब $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow |A| = 2 + 1$

$\Rightarrow |A| = 3 \neq 0$

प्रश्न 3. x + 3y = 5

2x + 6y = 8

उत्तर-

माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

तब दिया गया समीकरण निकाय इस प्रकार लिखा जा सकता है, $= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

अब $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$

$|A| = 1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$

|A| के अवयवों के सहगुणनखण्ड क्रमशः

$A_{11} = 6, A_{12} = -2, A_{21} = -3, A_{22} = 1$

$\therefore \text{ adj } A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (\text{adj } A)B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (\text{adj } A)B = \begin{bmatrix} 30 - 24 \\ -10 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \neq 0$

अतः $|A| = 0$ और $(\text{adj } A)B \neq 0$

अतः दिया गया समीकरण निकाय असंगत है।

प्रश्न 4. x + y + z = 1

2x + 3y + 2z = 2

ax + ay + 2az = 4

उत्तर-

$$\text{माना } A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ a & a & 2a\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } |A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ a & a & 2a\end{vmatrix}$$

$$|A| = 1\times(3\times 2a - a\times 2) - 1\times(2\times 2a - a\times 2) + 1\times(2\times a - a\times 3)$$

$$|A| = 4a - 2a - a = a \neq 0$$

अतः दिया गया समीकरण निकाय असंगत है।

प्रश्न 5. 3x - y - 2z = 2

2y - z = -1

3x - 5y = 3

उत्तर-

$$\text{माना } A=\begin{bmatrix}3 & -1 & -2\\ 0 & 2 & -1\\ 3 & -5 & 0\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } |A|=\begin{vmatrix}3 & -1 & -2\\ 0 & 2 & -1\\ 3 & -5 & 0\end{vmatrix}$$

$$|A| = 3[2\times 0 + 5\times(-1)] + 1(0+3) - 2(0-6)$$

$$|A| = -15 + 3 + 12 = 0$$

|A| के अवयवों के सहगुणनखण्ड,

$$A_{11} = \begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & -5\end{vmatrix} = -6$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-15+3) = 12$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$\therefore$ $|A|$ के सहगुणनखण्ड का का आव्यूह $C = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -6 \\ 10 & 6 & 12 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$$\therefore \text{adj}\,(A) = C' = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ -6 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

अतः $(\text{adj } A)B = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ -6 & 12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -10-10+15 \\ -6-6+9 \\ -12-12+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \neq 0$$

$\because$ $|A| = 0$ और $(\text{adj } A)B \neq 0$

अतः समीकरण निकाय असंगत है।

प्रश्न 6. 5x - y + 4z = 5

2y + 3y + 5z = 2

5x - 2y + 6z = -1

उत्तर- 5x - y +4 z = 5

2x + 3y + 5z = 2

5x - 2y + 6z = -1

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B|A| = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= 5(18 + 10) + 1(12 + 25) + 4(-4 - 15)$$

$$= 140 - 13 - 76$$

$$= 51 \neq 0$$

समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

प्रश्न 7. 5x + 2y = 4

7x + 3y = 5

उत्तर- दिया हुआ समीकरण निकाय,

5x + 2y = 4

7x + 3y = 5

माना $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$AX = B$

$X = A^{-1}B$

आव्यूह A के अवयव के सहगुणनखण्ड निम्नलिखित है।

$A_{11} = 3, A_{12} = -7, A_{21} = -2, A_{22} = 5$

A के सहगुणनखण्डो के अवयवों से बना आव्यूह $= \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$

$|A| = 15 - 14 = 1 \neq 0$

$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A)$

$= \frac{1}{1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 - 10 \\ -28 + 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$x = 2$ तथा $y = -3$

प्रश्न 8. 2x - y = -2

3x + 4y = 3

उत्तर- दिया हुआ समीकरण निकाय,

2x - y = -2

3x + 4y = 3

समीकरण निकाय AX = B के रूप में लिखा जा सकता है अत: x = A^{-1}B

$$\text{जहाँ } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11 \neq 0$$

A के सहगुणनखण्डो के अवयवों से बना आव्यूह

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{11} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \frac{1}{11} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -8+3 \\ 6+6 \end{bmatrix} \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{11} \\ \frac{12}{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{11} \\ \frac{12}{11} \end{bmatrix}$$

$$x = -\frac{5}{11} \text{ तथा } y = \frac{12}{11}$$

प्रश्न 9. 4x - 3y = 3

3x - 5y = 7

उत्तर- दिया हुआ समीकरण निकाय,

4x - 3y = 3

3x - 5y = 7

समीकरण निकाय को AX = B के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -20 + 9 = -11 \neq 0$$

आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A-1 का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत है।

इसलिए,

$$A_{11} = -5, A_{12} = -3, A_{21} = 3, A_{22} = 4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -15+21 \\ -9+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{11} \\ -\frac{9}{11} \end{bmatrix}$$

$$x = -\frac{6}{11},\ y = -\frac{19}{11}$$

प्रश्न 10. 5x + 2y = 3

3x + 2y = 5

उत्तर- दिया हुआ समीकरण निकाय,

5x + 2y = 3

3x + 2y = 5

समीकरण निकाय को AX = B के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 10 - 6 = 4 \neq 0$$

आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत है।

इसलिए,

$$A_{11} = 2, A_{12} = -3, A_{21} = -2, A_{22} = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{4} \\ \frac{16}{4} \end{bmatrix}$$

$$x = -1,\ y = -4$$

प्रश्न 11. $2x + y + z = 1$

$x - 2y - 2z = \frac{3}{2}$

$3y - 5z = 9$

उत्तर- दिया हुआ समीकरण निकाय,

$2x + y + z = 1$

$x - 2y - 2z = \frac{3}{2}$

$3y - 5z = 9$

समीकरण निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है, अतः $X = A^{-1}B$

$$\text{जहाँ } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2[10+3] - 1[-5+0] + 1[3+0]$$

$$= 2 \times 13 - 1 \times (-5) + 1 \times 3$$

$$= 26 + 5 + 3 = 34 \neq 0$$

आव्यूह A के अवयवों के सहगुणनखण्ड निम्नलिखित है-

$$A_{11} = (-1)^{1+1} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^2 [10 + 3] = 1 \times 13 = 13$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^3 [-5 + 0] = -1 \times (-5) = 5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^4 [3 + 0] = 1 \times 3 = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^3 [-5 - 3] = -1 \times (-8) = 8$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} = (-1)^4 [-10 - 10] = 1 \times (-10) = -10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^5 [6 - 0] = -1 \times 6 = -6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^4 [-1 + 2] = 1 \times 1 = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^5 [-2 - 1] = -1 \times (-3) = 3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^6[-4-1] = 1 \times (-5) = -5$$

अतः सहगुणनखण्डो के अवयवों से बना आव्यूह $= \begin{bmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 8 & -10 & -6 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

$$\therefore \text{ adj } A = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 8 & -10 & -6 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 13+2+9 \\ 5-15+27 \\ 3-9-45 \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 34 \\ 17 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34}{34} \\ \frac{17}{34} \\ -\frac{51}{34} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$x = 1,\ y = \frac{1}{2}$ तथा $z = -\frac{3}{2}$

प्रश्न 12. $x - y + z = 4$

$2x + y - 3z = 0$

$x + y + z = 2$

उत्तर- दिया हुआ समीकरण निकाय,

x - y + z = 4

2z + y - 3z = 0

x + y + z = 2

समीकरण निकाय को AX = B के रूप में लिखा जा सकता है, अतः $X = A^{-1}B$

$$\text{जहाँ } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1[1+3] - (-1)[2+3] + 1[2-1]$$

$$= 1 \times 4 + 1 \times 5 + 1 \times 1$$

$$= 4 + 5 + 1 = 10 \neq 0$$

आव्यूह A के अवयवों के सहगुणनखण्ड निम्नलिखित है-

$$A_{11} = (-1)^{1+1} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^2 [1+3] = 1 \times 4 = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^3 [2+3] = -1 \times 5 = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{4}[2-1] = 1 \times 1 = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{3}[-1-1] = -1 \times (-2) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{4}[-1-1] = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{5}[1+1] = -1 \times 2 = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{4}[3-1] = 1 \times 2 = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{5}[-3-2] = -1 \times (-5) = 5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{6}[1+2] = 1 \times 3 = 3$$

अतः सहगुणनखण्डो के अवयवों से बना आव्यूह $= \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore \text{ adj A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{ X} = \text{A}^{-1}\text{B} = \frac{1}{10} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 16+0+4 \\ -20+10 \\ 4+6 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x = 2, \ y = -1$ तथा $z = 1$

प्रश्न 13. 2x + 3y + 3z = 5

x - 2y + z = -4

3x - y - 2z = 3

उत्तर- दिया गई समीकरण निकाय,

2x + 3y + 3z = 5

x - 2y + z = -4

3x - y - 2z = 3

समीकरण निकाय को AX = B के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(4+1) - 3(-2-3) + 3(-1+6)$$
$$= 10 + 15 + 15 = 40 \neq 0$$

आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A-1 का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत है। इसलिए,

$$A_{11} = 5,\ A_{12} = 5,\ A_{13} = 5$$
$$A_{21} = 3,\ A_{22} = -13,\ A_{23} = 11$$
$$A_{31} = 9,\ A_{32} = 1\ A_{33} = -7$$
$$X = A^{-1}B$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 25-12+27 \\ 25+52+3 \\ 25-44-21 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$x = 1,\ y = 2, z = -1$$

प्रश्न 14. x - y + 2z = 7

3x + 4y - 5z = -5

2x - y + 3z = 12

उत्तर- दिया गई समीकरण निकाय,

x - y + 2z = 7

3x + 4y - 5z = -5

2x - y + 3z = 12

समीकरण निकाय को AX = B के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ,

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & -5\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \text{ और } B=\begin{bmatrix}7\\ -5\\ 12\end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(12-5)+1(9+10)+2(-3-8)$$

$$= 7+19-22 = 4 \neq 0$$

आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है। इसलिए, A^{-1} का अस्तित्व है।

अतः, दी गई समीकरण निकाय संगत है। इसलिए,

$$A_{11}=7,\ A_{12}=-19,\ A_{13}=-11$$

$$A_{21}=1,\ A_{22}=-1,\ A_{23}=-1$$

$$A_{31}=-3,\ A_{32}=11\ A_{33}=7$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj } A=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}7 & 1 & -3\\ -19 & -1 & 11\\ -11 & -1 & 7\end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}7 & 1 & -3\\ -19 & -1 & 11\\ -11 & -1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -5\\ 12\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}49-5-36\\ -133+5+132\\ -77+5+84\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4\\ 4\\ 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$$

$$x=1,\ y=1, z=3$$

प्रश्न 15. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

है तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। A^{-1} का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

2x – 3y + 5z = 11

3x + 2y – 4z = -5

x + y – 2z = -3

उत्तर-

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2[2 \times (-2) - 1 \times (-4)] - (-3)[3 \times (-2) - 1 \times (-4)]$$
$$+ 5[3 \times 1 - 1 \times 2]$$

$$= 2[-4 + 4] + 3[-6 + 4] + 5[3 - 2]$$

$$= 0 + 3 \times (-2) + 5 \times 1$$

$$= -6 + 5 = -1 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} ज्ञात किया जा सकता है।

|A| के अवयवों के सहगुणनखण्ड,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6+4) = 2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(6-5) = -1$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 5 = -9$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2+3) = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-8-15) = 23$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 = 13$$

$\therefore$ $|A|$ के अवयवों के सहगुणनखण्ड का आव्यूह $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -9 & -5 \\ 2 & 23 & 13 \end{bmatrix}$

$$\therefore \text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -9 & -5 \\ 2 & 23 & 13 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}$$

दिये गये समीकरण को AX = B के रूप में लिखने पर,

जहाँ, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, X \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore\ X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + -5 + 6 \\ -22 + 45 + 69 \\ -11 - 25 + 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

प्रश्न 16. 4 किग्रा प्याज, 3 किग्रा गेहूँ और 2 किग्रा चावल मूल्य ₹ 60 है 2 किग्रा प्याज, 4 किग्रा गेहूँ और 6 किग्रा चावल का मूल्य ₹ 90 है। 6 किग्रा प्याज, 2 किग्रा गेहूँ और 3 किग्रा चावल का मूल्य ₹ 70 है। आव्यूह द्वारा प्रत्येक का मूल्य प्रति किग्रा ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना प्याज का मूल्य ₹ प्रतिकिग्रा = x

गेहूं का मूल्य ₹ प्रतिकिग्रा = y

चावल को मूल्य ₹ प्रतिकिग्रा = z

तब दिये गये प्रतिबन्धों के अनुसार,

$4x + 3y + 2z = 60$

$2x + 4y + 6z = 90$

$6x + 2y + 3z = 70$

इस समीकरण निकाय को AX = B के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix}$$

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(12 - 12) - 3(2 \times 3 - 6 \times 6) + 2(2 \times 2 - 6 \times 6)$$

$$= 0 + 90 - 40 = 50 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} ज्ञात किया जा सकता है।

$$A_{11} = 0,\ A_{12} = 30,\ A_{13} = -20$$

$$A_{21} = -5,\ A_{22} = 0,\ A_{23} = 10$$

$$A_{31} = 10,\ A_{32} = -20,\ A_{33} = 10$$

$$\therefore \text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 30 & -20 \\ -5 & 0 & 10 \\ 10 & -20 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

अब, $AX = B$

$$X = A^{-1}B$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 - 450 + 700 \\ 1800 + 0 - 1400 \\ -1200 + 900 + 700 \end{bmatrix}$$

$x = 5,\ y = 8,\ z = 8$

अतः 1 किग्रा प्याज का मूल्य = ₹ 5

1 किग्रा गेहूं का मूल्य = ₹ 8

1 किग्रा चावल को मूल्य = ₹ 8

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 153-156)

प्रश्न 1. सिद्ध किजिए कि सरणिक

$$\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}, \theta \text{ से स्वतंत्र है।}$$

उत्तर-

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= x(-x^2 - 1) - \sin\theta(-x\sin\theta - \cos\theta) + \cos\theta(-\sin\theta + x\cos\theta)$$

$$= -x^3 - x + x\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta + x\cos^2\theta$$

$$= -x^3 - x + x(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= -x^3 - x + x = -x^3 \text{ जो } \theta \text{ से स्वतंत्र है।}$$

प्रश्न 2. सरणिक का प्रसरण किए बिना सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

उत्तर-

$$\text{दायाँ पक्ष} = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & abc \\ b^2 & b^3 & abc \\ c^2 & c^3 & abc \end{vmatrix} [R_1 \to aR_1, R_2 \to bR_2, R_3 \to cR_3]$$

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & b^3 & 1 \end{vmatrix} [C_3 \text{ से abc उभयनिष्ठ लेने पर}]$$

$$= (-1)^1\begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} [C_1 \leftrightarrow C_3]$$

$$= (1)^2\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & b^2 & c^3 \end{vmatrix} [C_2 \leftrightarrow C_3]$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & b^2 & c^3 \end{vmatrix} = \text{बायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 3.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix} \text{ का मान ज्ञात कीजिए।}$$

उत्तर-

$$\text{दिया है,} \begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= -\sin\alpha(-\sin\alpha\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos^2\beta) - 0(\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta$$

$$-\cos\alpha\sin\beta\sin\alpha\cos\beta)+\cos\alpha(\cos\alpha\cos^2\beta+\cos\alpha\sin^2\beta)$$

[C_3 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$$=\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+\cos^2\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)$$

$$=\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

प्रश्न 4. यदि a, b, c वास्तविक संख्याएँ हो और सारणिक

$$\Delta=\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}=0$$

हो तो दर्शाइए कि या तो a + b + c = 0 या a = b = c है।

उत्तर-

दिया है, $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(a+b+c) & 2(a+b+c) \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}=0$$ [$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ द्वारा]

$$\Rightarrow 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}=0$$ [R_1 से 2(a + b + c) उभयनिष्ठ लेने पर]

$$\Rightarrow 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c+a & b-c & b-a \\ a+b & c-a & c-b \end{vmatrix}=0$$ [$C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1$ द्वारा]

$$\Rightarrow 2(a+b+c)1\left[(b-c)(c-b)-(b-a)(c-a)\right]-0$$ [R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$$\Rightarrow 2(a+b+c)\left[bc-b^2-c^2+bc-(bc-ba-ac+a^2)\right]=0$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c)\left[bc-b^2-c^2+ad+ca-a^2\right]=0$$

$$\Rightarrow -(a+b+c)\left[2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\right]=0$$

$$\Rightarrow -(a+b+c)\left[(a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ca)\right]=0$$

$$\Rightarrow -(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$$

$\Rightarrow a+b+c=0$ या $(a-b)^2=0, (b-c)^2=0, (c-a)^2=0$

$\Rightarrow a+b+c=0$ या $a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\Rightarrow a+b+c=0$ या $a=b,\ b=c,\ c=a$

इसलिए a + b + c = 0 या a = b = c

प्रश्न 5. यदि a ≠ 0 हो तो समीकरण

$$\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix}=0$$

को हल कीजिए।

उत्तर-

दिया है, $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3x+a & 3x+a & 3x+a \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix}=0$ [$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ द्वारा]

$$\Rightarrow (3x+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$$ [R_1 से 3(3x + a) उभयनिष्ठ लेने पर]

$$\Rightarrow (3x+a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & a & 0 \\ x & 0 & a \end{vmatrix} = 0$$ [$C_2 \rightarrow C_2 - C_1$, $C_3 \rightarrow C_3 - C_1$ द्वारा]

$$\Rightarrow (3x+a)1\left[a^2 - 0\right] = 0$$ [R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$$\Rightarrow a^2(3x+a) = 0$$

$$\Rightarrow (3x+a) = 0 \left[\because\ a \neq 0\right]$$

$$\Rightarrow x = -\frac{a}{3}$$

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

उत्तर-

दायाँ पक्ष = $$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a^2 & 0 & 2ac \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$ [$R_1 \rightarrow R_1 + R_2 - R_3$ द्वारा]

$$= abc\begin{vmatrix} 2a & 0 & 2a \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$ [C_1, C_2, C_3 से a, b, c उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= abc\begin{vmatrix} 2a & 0 & 0 \\ a+b & b & -b \\ b & b+c & c-b \end{vmatrix}$$ [$C_3 \rightarrow C_3$ - C_1 द्वारा]

$$= (abc)2a\left[b(c-b)-(-b)(b+c)\right]$$ [R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$$= 2a^2bc\left[bc-b^2+b^2+bc\right]$$

$$= 2a^2bc[2bc]$$

$$= 4a^2b^2c^2$$ = बायाँ पक्ष

प्रश्न 7. यदि

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

हो तो $(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

यहाँ, $$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

इसलिए, $$|B| = 1(3-0)-2(-1-0)+(-2)(2-0)$$

$$= 3+2-4 = 1 \neq 0$$

$$B_{11} = 3,\ B_{12} = 1,\ B_{13} = 2$$

$$B_{21} = 2,\ B_{22} = 1,\ B_{23} = 2$$

$$B_{31} = 6,\ B_{32} = 2,\ B_{33} = 5$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj } B = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-30+30 & -3+12-12 & 3-10+12 \\ 3-15+10 & -1+6-4 & 1-5+4 \\ 6-30+25 & -2+12-10 & 2-10+10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 8. मान लीजिए

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि-

उत्तर-

यहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, इसलिए

$$|A| = 1(15-1) + 2(-10-1) + 1(-2-3)$$

$$= -13 \neq 0$$

A^{-1} का अस्तित्व है।

$$A_{11} = 14,\ A_{12} = 11,\ A_{13} = -5$$

$$A_{21} = 11,\ A_{22} = 4,\ B_{23} = -3$$

$$A_{31} = -5,\ A_{32} = -3,\ A_{33} = -1$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \ldots (i)$$

माना, $B = \text{adj } A$, इसलिए $B = \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ इसलिए,

$$|B| = 14(-4-9) - 11(-11-15) - 5(-33+20)$$

$$= -182 + 286 + 65 = 169 \neq 0$$

B^{-1} का अस्तित्व है।

$$B_{11} = -13,\ B_{12} = 26,\ B_{13} = -13$$

$$B_{21} = 26,\ B_{22} = -39,\ B_{23} = -13$$

$$B_{31} = -13,\ B_{32} = -13,\ B_{33} = -65$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{169}\begin{bmatrix} -13 & 26 & -13 \\ 26 & -39 & -13 \\ -13 & -13 & -65 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(\text{adj } A)^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad \ldots(\text{ii})$$

माना, $C = A^{-1}$, इसलिए, $C = \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{11}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$ इसलिए

$C_{11} = -\frac{1}{13},\ C_{12} = \frac{2}{13},\ C_{13} = -\frac{1}{13}$

$C_{21} = \frac{2}{3},\ C_{22} = -\frac{3}{13},\ C_{23} = -\frac{1}{13}$

$C_{31} - \frac{1}{13},\ C_{32} = -\frac{1}{13}\ C_{33} = -\frac{5}{13}$

$$\text{adj } C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{21} & C_{22} & C_{32} \\ C_{31} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } C = \text{adj } (A)^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad \ldots(\text{iii})$$

समीकरण (ii) और (iii), से $(\text{adj A})^{-1} = \text{adj}\ (A)^{-1}$

ii. समीकरण (i) से,

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

माना, D = A^{-1}, इसलिए, $= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{11}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$ इसलिए,

$$|D| = \left(\frac{1}{13}\right)^3 [14(-4-9) - 11(-11-15) - 5(-33+20)]$$

$$= -\left(\frac{1}{13}\right)^3 [14(-4-9) - 11(-11-15) - 5(-33+20)]$$

$$= -\left(\frac{1}{13}\right)^3 (169) = -\frac{1}{13} \neq 0$$

D^{-1} का अस्तित्व है।

$$D_{11} = -\frac{1}{13},\ D_{12} = \frac{2}{3},\ D_{13} = -\frac{1}{13}$$

$$D_{21} = \frac{2}{13},\ D_{22} = -\frac{3}{13},\ D_{23} = -\frac{1}{13}$$

$$D_{31} = -\frac{1}{13},\ D_{32} = -\frac{1}{13},\ D_{33} = -\frac{5}{13}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{31} \\ D_{21} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{13}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = (A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} A$$

प्रश्न 9.

$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दिया है, $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & x \\ 2(x+y) & x & y \end{vmatrix}$ [$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ द्वारा]

$= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$ [C_1 से $2(x + y)$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$= 2(x+y)\begin{vmatrix} 0 & -x & y \\ 0 & y & x-y \\ 1 & y & y+k \end{vmatrix}$ [$R_1 \to R_1 - R_2$, $R_2 \to R_2 - R_3$ द्वारा]

$= 2(x+y)\{(-x)(x-y) - y \times y\}$ [C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$= 2(x+y)\left(-x^2 + xy - y^2\right)$

$$= -2(x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$= -2(x^3 + y^3)$$

प्रश्न 10.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दिया है, $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -y & 0 \\ 0 & y & -x \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$$ [$R_1 \to R_1 - R_2$, $R_2 \to R_2 - R_3$ द्वारा]

$$= \{(-y)(-x) - y \times 0\}$$ [C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$$= xy$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके प्रश्नो को सिद्ध कीजिए-

प्रश्न 11.

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma)$$

उत्तर-

$$\text{दायाँ पक्ष} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha+\beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \alpha+\beta+\gamma \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix}$$ [$C_3 \to C_1 + C_3$ द्वारा]

$$= \alpha+\beta+\gamma \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & \beta^2 & 1 \\ \gamma & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix} \left[C_3 \text{ से } \alpha+\beta+\gamma \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} \alpha-\beta & \alpha^2-\beta^2 & 0 \\ \beta-\gamma & \beta^2-\gamma^2 & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix}$$ [$R_1 \to R_1 - R_2$, $R_2 \to R_2 - R_3$ द्वारा]

$$= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma) \begin{vmatrix} 1 & \alpha+\beta & 0 \\ 1 & \beta+\gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix} \left[R_3 \text{ से } \alpha-\beta,\ R_2 \text{ से } \beta-\gamma \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}\right]$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\{(\beta+\gamma)-(\alpha-\beta)\}$$ [C_3 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$$= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) = \text{बायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 12.

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = (1+pxyz)(x-y)(y-z)(z-x)$$

उत्तर-

$$\text{दायाँ पक्ष} = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & px^3 \\ y & y^2 & py^3 \\ z & z^2 & pz^3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^1 \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$ [C_3 से p उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + pxyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$ [R_1 से x, R_2 से y, R_3 से z उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (1 + pxyz) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$ उभयनिष्ठ लेने पर

$$= (1 + pxyz) \begin{vmatrix} 0 & x-y & x^2 - y^2 \\ 0 & y-z & y^2 - z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$ [$R_1 \rightarrow R_1 - R_2$, $R_2 \rightarrow R_2 - R_3$ द्वारा]

$$= (1 + pxyz)(x - y)(y - z) \begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & y + z^2 \\ 1 & z & z \end{vmatrix}$$ [R_1 से x - y, R_2 से y - z उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (1 + pxyz)(x - y)(y - z)\{(y + z) - (x + y)\}$$ [C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$$= (1 + pxyz)(x - y)(y - z)(z - x)$$ = बायाँ पक्ष

प्रश्न 13.

$$\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

उत्तर-

$$\text{दायाँ पक्ष} = \begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & c+b & 3c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & -a+b & -a+c \\ a+b+c & 3b & -b+c \\ a+b+c & -c+b & 3c \end{vmatrix} \text{ [}C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 \text{ द्वारा]}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & -a+b & -a+c \\ 1 & 3b & -b+c \\ 1 & -c+b & 3c \end{vmatrix} \text{ [}C_1 \text{ से } a + b + c \text{ उभयनिष्ठ लेने पर]}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & -a-2b & -a+b \\ 0 & 2b+c & -b-2c \\ 1 & -c+b & 3c \end{vmatrix} \text{ [}R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3 \text{ द्वारा]}$$

$$= (a+b+c)\{(-a-2b)(-b-2c) - (2b+c)(-a+b)\} \text{ [}C_1 \text{ के अनुदिश प्रसरण करने पर]}$$

$$= (a+b+c)\left(ab + 2ac + 2b^2 + 4bc - (-2ab + 2b^2 - ac + bc)\right)$$

$$= (a+b+c)(3ab + 3bc + 3ca)$$

$$= 3(a+b+c)(ab + bc + ca) = \text{बायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 14.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix} = 1$$

उत्तर-

$$\text{दायाँ पक्ष} = \begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 0 & 1 & 2+p \\ 0 & 3 & 7+3p \end{vmatrix}$$ [$R_2 \to R_2$ - $2R_1$, $R_3 \to R_3$ - $3R_1$ द्वारा]

$= 1\{1(7+3p) - (3)(2+p)\}$ [C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

$= 7 + 3p - 6 - 3p = 1$ = बायाँ पक्ष

प्रश्न 15.

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

उत्तर-

दायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} [C_1 \to \cos\delta,\ C_2 - \sin\delta\, C_1]$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos(\alpha+\delta) & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos(\alpha+\delta) & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos(\alpha+\delta) & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} [\because c_2 = C_3]$$

$= 0$ = बायाँ पक्ष

प्रश्न 16. समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4$$

$$\frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1$$

$$\frac{6}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=2$$

उत्तर- दी गई समीकरण निकाय,

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4$$

$$\frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1$$

$$\frac{6}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=2$$

समीकरण निकाय को AX = B के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 10\\4 & -6 & 5\\6 & 9 & -20\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}\frac{1}{x}\\\frac{1}{y}\\\frac{1}{z}\end{bmatrix} \text{ और } B=\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$|A|=2(120-45)-3(-80-30)+10(36+36)$$

$$=150+330+720=1200\neq 0$$

आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है।

अतः, A^{-1} का अस्तित्व है। इसलिए,

$$A_{11}=75,\ A_{12}=110,\ A_{13}=72$$

$$A_{21}=150,\ A_{22}=-100,\ A_{23}=0$$

$$A_{31}=75,\ A_{32}=30,\ A_{33}=-24$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{1200}\begin{bmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & -100 & 30 \\ 72 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{1200}\begin{bmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & -100 & 30 \\ 72 & 0 & -24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{1200}\begin{bmatrix} 300+150+150 \\ 440-100+60 \\ 288+0-48 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{1200}\begin{bmatrix} 600 \\ 400 \\ 240 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \frac{1}{z} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow x = 2, y = 3, z = 5$$

प्रश्न 17. यदि a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हो तो सरणिक

$$\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$$ का मान होगा-

a. 0

b. 1

c. x

d. 2x

उत्तर-

a. 0

हल:

दिया है, $\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ 0 & 0 & 2(2b-a-c) \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$ $[R_2 \rightarrow 2R_1 - (R_1 + R_3)$ द्वारा$]$

$= \begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ 0 & 0 & 0 \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$ $\left[\because\right.$ a, b, c समांतर श्रेढ़ी में है, इसलिए $\left. 2b = a + c\right]$

$= 0 \left[\because R_2\right.$ के सभी अवयव शून्य है$\left.\right]$

प्रश्न 18. यदि x, y, z शून्येतर वास्तविक संख्याएँ हो तो आव्यूह

$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है-

a. $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

b. $xyz\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

c. $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$

d. $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर-

a. $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

हल:

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

$$|A| = x(yz - 0) - 0(0 - 0) + 0(0 - 0)$$

$$= xyz \neq 0$$

A^{-1} का अस्तित्व है। इसलिए,

$$A_{11} = yz,\ A_{12} = 0,\ A_{13} = 0$$

$$A_{21} = 0,\ A_{22} = xz,\ A_{23} = 0$$

$$A_{31} = 0,\ A_{32} = 0,\ A_{33} = xy$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} yz & 0 & 0 \\ 0 & xz & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$$

प्रश्न 19.

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, जहाँ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ हो तो-

a. $\det(A) = 0$

b. $\det(A) \in (2, \infty)$

c. $\det(A) \in (2, 4)$

d. $\det(A) \in [2, 4]$

उत्तर-

d. $\det(A) \in [2, 4]$

हल:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(1 + \sin^2\theta) - \sin\theta(-\sin\theta + \sin\theta) + 1(\sin^2\theta + 1)$$

$= 2(1 + \sin^2\theta)$ [C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर]

दिया है, $0 \le \theta \le 2\pi$

$\Rightarrow 0 \le \sin\theta \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \sin^2\theta \le 1$

$\Rightarrow 0 \le 1 + \sin^2\theta \le 2$

$\Rightarrow 2 \le 2(1 + \sin^2\theta) \le 4$

$\Rightarrow \det(A) \in [2, 4]$