गणित

अध्याय-4: गणितीय आगमन का सिद्धांत

प्रस्तावना (Introduction)

आगमन शब्द का अर्थ विशिष्ट स्थितियों या तथ्यों से व्यापकीरण करने से है।

गणितीय आगमन सिद्दांत एक ऐसा साधन है जिसका प्रयोग विविध प्रकार के गणितीय कथनों को सिद्द करने के लिए किया जा सकता है | धन पूर्णांको से सम्बंधित इस प्रकार के प्रत्येक कथन को P(n)मान लेते है, जिसकी सत्यता n=1 के लिए जांची जाती है | इसके बाद किसी धन पूर्णांक K के लिए P(k) की सत्यता को मानकर P(k+1) की सत्यता सिद्द करते है |

आगमित समुच्चय (Induction Set) :-

एक समुच्चय S आगमित समुच्चय कहलाता है यदि $1 \in S$ और $(n+1) \in S$ जबकि $n \in S$ चूँकि N, R का सबसे छोटा उप - समुच्चय है जो की आगमित समुच्चय है , इससे यह ज़ात होता है कि R का कोई उप - समुच्चय जो आगमित समुच्चय हो , N को अवश्य रखेगा |

गणितीय आगमन के सिद्दांत का कथन : -

इस सिद्दांत के अनुसार कोई कथन P(n) , n के सभी धनात्मक पूर्णांको अर्थात पूर्णांक मानों के लिए सत्य है , यदि --

(1) कथन n=1 के लिए सत्य हो, अर्थात P(1) सत्य है तथा

(2)कथन n=k के लिए सत्य हो , तो यह n=k+1 के लिए भी सत्य होगा , अर्थात P(k) सत्य है , तो P(k+1)भी सत्य होगा |

इस सिद्दांत के कथन से ही स्पष्ट होता है की यह विशिष्ट कथन से व्यापक कथन की ओर अग्रसर होने की विधि है | अत: हम यह कह सकते है की यह प्राकृत संख्याओ से सम्बंधित व्यापक परिणामों या प्रमयों को स्थापित करने का एक विशेष प्रक्रम है |

गणितीय आगमन (Mathematical Induction)

बीजगणित, त्रिकोणमिती या गणित की अन्य शाखाओं में कुछ ऐसे परिमाण या कथन होते हैं जिन्हें एक धन पूर्णांक n के पदों में व्यक्त किया जाता है। ऐसे कथनों को सिद्ध करने के लिए विशिष्ट तकनीक पर आधारित समुचित सिद्धांत है जो गणितीय आगमन के सिद्धांत कहलाते हैं। इस विधि से बीजगणित के तथा गणित की अन्य शाखाओं के कुछ महत्वपूर्ण सूत्रों एवं प्रमेयों को सरलता से सिद्ध कर सकते हैं।

मान लीजिए कि हम प्राकृत संख्याओं 1,2,3,4,.........,n के योग के लिए सूत्र प्राप्त करना चाहते हैं अर्थात् एक सूत्र n = 2 के लिए 1 + 2 का मान देता है, n = 3 के लिए 1 + 2 + 3 का मान देता है, n = 4 के लिए 1 + 2 + 3 + 4 का मान देता है।

अब हम मान लेते हैं कि प्रथम n प्राकृत संख्याओं का सूत्र-

$$1 + 2 + 3 \ldots . . + n = \frac{n(1+2)}{2}$$

सत्य है।

हम निश्चित ही n के इच्छानुसार चाहे गए धन पूर्णांक मानों के लिए कथन को सत्यापित कर सकते हैं परन्तु n के सभी मानों के लिए इस प्रक्रिया से सूत्र को सत्यापित नहीं कर सकते हैं इसके लिए यह आवश्यक है कि एक बार किसी धन पूर्णांक के लिए सूत्र के सिद्ध हो जाने के बाद आगामी धन पूर्णांकों के लिए सूत्र निरंतर अपने आप सिद्ध हो जाये। गणितीय आगमन विधि द्वारा इस प्रकार की क्रिया श्रृंखला को समझा जा सकता है।

गणितीय आगमन के मूल सिद्धांत (Basic Principles of Mathematical Induction)

यदि कोई कथन P(n) प्राकृतिक संख्या n के लिए कहा गया है तो यह कथन सभी प्राकृतिक संख्याओं के लिए सत्य होगा,

यदि

(i) P(1) सत्य है, अर्थात् दिया हुआ कथन n = 1 के लिए सत्य है।

(ii) P(m) सत्य है, तो P(m + 1) सत्य है, अर्थात् यदि दिया हुआ कथन n = m के लिए सत्य मान लिया जाये तो यह कथन n = m + 1 के लिए भी सत्य है।

इसे कभी-कभी आगमन का चरण कहा जाता है। इस आगमन के चरण में n = m के लिए कथन सत्य है की अभिधारणा आगमन परिकल्पना कहलाती है।

अब हम निम्न उदाहरण पर विचार करते हैं

$1 = 1^2 = 1$

$4 = 2^2 = 1 + 3$

$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$

$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$

इस उदाहरण में हम देखते हैं कि दो विषम प्राकृत संख्याओं का योग द्वितीय प्राकृत संख्या (2) का वर्ग है तथा प्रथम तीन विषम प्राकृत संख्याओं का योग तृतीय प्राकृत संख्या (3) का वर्ग है।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

$1 + 3 + 5 + 7 + ...+ 2n - 1 = n^2$

यहाँ स्पष्ट है कि प्रथम विषम प्राकृत संख्याओं का योगफल n का वर्ग है। अतः हम मानते हैं कि

$P(n) : 1 + 3 + 5 + 7 +.........+ 2n -1 = n$

अब हम सिद्ध करेंगे कि P(n),n के सभी मानों के लिए सत्य है।

गणितीय आगमन के सिद्धान्त के प्रथम चरण में P(1) को सत्य सिद्ध करते हैं। इस चरण को मूल चरण कहते हैं।

स्पष्ट है- दाँया पक्ष = 1

बाँया पक्ष = $1^2 = 1$

अर्थात् P(1) सत्य है।

अगला चरण आगमन चरण कहलाता है।

अब हम मानते हैं कि P(k) सत्य है जहाँ k प्राकृत संख्या है और हमें P(k + 1) की सत्यता सिद्ध करने की आवश्यकता है क्योंकि P(k) सत्य है।

$P(R) : 1 + 3 + 5+.........+2k - 1 = k2$

P(k + 1) पर विचार करते हैं।

$P(k + 1) : 1 + 3 + 5 +........+2k - 1 + 20k + 1) - 1$

$= k^2 + 2k +1$

$= (k + 1)^2$

स्पष्ट है कि P(k + 1) सत्य है और अब आगमनिक उपपत्ति पूर्ण हुई।

अतः सभी n प्राकृत संख्याओं के लिए P(n) सत्य है।

कार्यविधि (Working Rule)

चरण 1. दिये गये कथन को P(n) से व्यक्त करते हैं।

चरण 2. सिद्ध करते हैं कि दिया गया कथन n = 1 के लिए सत्य है अर्थात् P(1) सत्य है।

चरण 3. मान लीजिए कि कथन n = k के लिए सत्य है। अर्थात् P(k) सत्य है।

चरण 4. चरण 3 की सहायता से सिद्ध करते हैं कि P(k + 1) सत्य है।

P(k + 1) सत्य सिद्ध हो जाने पर P(n),n के सभी मानों के लिए सिद्ध हो जाता है। कार्यविधि नीचे दिए गए उदाहरणों से और स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 1. गणितीय आगमन सिद्धांत से सिद्ध कीजिए कि n के सभी धन पूर्णांक मानों के लिए

$$\mathbf{1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

हल : n = 1 के लिए कथन का

बायाँ पक्ष =1 और

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

अतः n = 1 के लिए दिया हुआ कथन सत्य है।

मान लीजिए कि दिया हुआ कथन n = m के लिए सत्य है।

$$1+2+3+\ldots\ldots+m+(m+1)=\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)$$

$$=(m+1)\left(\frac{m}{2}+1\right)$$

$$=\frac{\overline{(m+1)}\,\overline{(m+1+1)}}{2}$$

∴ दिया हुआ कथन n = m + 1 के लिए भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत से दिया हुआ कथन n के सभी धन पूर्णांक मानों के लिए सत्य है। यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 2. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए किn के सभी धन पूर्णांक मानों के लिए 2 + 5 + 8 + 11 +.....+(3n - 1) = $\frac{1}{2}\mathbf{n}(3\mathbf{n}+1)$

हल : यदि n = 1 के लिए दिये हुए कथन का

बायाँ पक्ष = 2

और दायाँ पक्ष $\frac{1}{2}\times(3\times1+1)=2$

अतः दिया हुआ कथन n = 1 के लिए सत्य है। माना कि n = m ∈ N के लिए दिया हुआ कथन सत्य है

अर्थात् 2 + 5 + 8 + 11 +......+(3m - 1)

$$=\frac{1}{2}m(3m+1)$$

दोनों पक्षों में (3m + 2) जोड़ने पर,

2 + 5 + 8 + 11 +......+(3m - 1) + (3m + 2)

$$=\frac{1}{2}m(3m+1)+(3m+2)$$

$$=\frac{1}{2}m(3m^2+m+1)+(3m+2)$$

$$=\frac{1}{2}m(3m^2+m+6m+4)$$

$$=\frac{1}{2}m(3m^2+3m+4m+4)$$

$$=\frac{1}{2}[3m(m+1)+4(m+1)$$

$$= \frac{1}{2}[(m+1)(3m+4)]$$

$$= \frac{1}{2}[(m+1)(3m+3+1)]$$

$$= \frac{1}{2}[\overline{(m+1)}\{3\overline{(m+1)}+1\}]$$

अर्थात् यदि दिया हुआ कथन n = m के लिए सत्य है तो वह n = m + 1 के लिए भी सत्य है।

किन्तु दिया हुआ कथन n = m के लिए सत्य माना गया है, अत: गणितीय आगमन सिद्धान्त से दिया हुआ कथन n के सभी धन पूर्णांक मानों के लिए सत्य है।

उदाहरण 3. गणितीय आगमन सिद्धांत से सिद्ध कीजिए कि n के सभी धन पूर्णांक मानों के लिए $1 + 3 + 3^2 + \ldots\ldots + 3^{n-1} = \frac{3^m - 1}{2}$

हल: n = 1 के लिए कथन का बायाँ पक्ष = 1

और दायाँ पक्ष $= \frac{3^1 - 1}{2} = \frac{1}{2} = 1$

अत: n = 1 के लिए दिया हुआ कथन सत्य है। माना कि n = m के लिए दिया हुआ कथन सत्य है तब

$1 + 3 + 3^2 + \ldots 3m - 1 = \frac{3^m - 1}{2}$

दोनों पक्षों में 3" जोड़ने पर,

$1 + 3 + 3 + \ldots 3^{m-1} + 3m = \frac{3^m - 1}{2} + 3^m$

$$= \frac{3^m - 1}{2} + 3^m$$

$$= \frac{3 \times 3^{m} - 1}{2}$$

$$= \frac{3^{\overline{m+1}} - 1}{2}$$

अतः दिया हुआ कथन $n = m + 1$ के लिए भी सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत से दिया हुआ कथन n के सभी धन पूर्णांक मानों के लिए सत्य है।

उदाहरण 4. गणितीय आगमन सिद्धांत से सिद्ध कीजिए कि के सभी धन पूर्णांक मानों के लिए $7^{2n} + 16n - 1$,64 से विभाज्य है।

हल : माना कि P(n) = 72n + 16n - 1

तब $P(1) = 7^{2.1} + 16.1 - 1$

$= 49 + 16 - 1 = 64$

जो 64 से विभाज्य है।

अतः P(1) सत्य है।

अब मान लिया कि $n = T \in N$ के लिए,

$P(r) = 7^{2r} + 16r - 1$

जो 64 से विभाज्य है। तब,

$P(r + 1) = 7^{2(r+1)} + 16(r + 1) - 1$

$= 7^2.7^{2r} + 16r + 16 - 1$

$= 7^2(7^{2r} + 16r - 1) - 7^2.16r$

$+ 7^2 + 16r + 15$

$= 7^2 P(r) - 16r(7^2 - 1) + 49 + 15$

$= 7^2 P(r) - 16r.48 + 64$

$=7^2 P(r) - 64(12r - 1)$

जो स्पष्टतः 64 से विभाज्य है। इस प्रकार, $n = r + 1$

के लिए कथन $P(r + 1)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धान्त से दिया हुआ कथन n के

सभी धन पूर्णाक मानों के लिए सत्य है।

उदाहरण 5. यदि n कोई विषम धन पूर्णांक है, तो सिद्ध कीजिए कि $n(n^2 - 1)$,24 से विभाज्य है।

हल : माना कि $P(n) = n(n^2 - 1)$. तब,

$P(1) = 1(1^2 - 1) = 0$, जो 24 से विभाज्य है।

∴ कथन $n = 1$ के लिए सत्य है।

माना कि n के विषम धन पूर्णांक मान $2m + 1$, जहाँ m कोई . धन पूर्णांक है, के लिए

$P(2m + 1) = (2m + 1)[(2m + 1)^2$

24 से विभाज्य है। तब,

$P[2(m + 1) + 1] = [2(m + 1) + 1][\{2(m + 1) + 1\}^2 -1]$

$= P(2m + 3) = (2m + 3)[(2m + 3)^2 -1]$

$= (2m + 3)(4m^2 + 12m + 8)$

$= (2m + 1)(4m^2 + 12m + 8)$

$+8m^2 + 24m + 16$

$= (2m + 1)[(2m + 1)^2 - 1 + 8m + 8]$

$+8m^2 + 24m + 16$

$= (2m + 1)[(2m + 1)^2 -1]$

$+24m^2 + 48m + 24$

$= P(2m + 1) + 24(m^2 + 2m + 1)$

जो स्पष्टतः 24 से विभाज्य है, क्योंकि $P(2m + 1)$, 24 से

विभाज्य माना गया है। इस प्रकार, $n = 2m + 1$ के लिए कथन

$P(2m + 3)$ सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत से n के किसी विषम धन

पूर्णांक मान के लिए दिया हुआ कथन सत्य है।

उदाहरण 6. समस्त प्राकृतिक संख्याओं के लिए सिद्ध कीजिए कि $2^n > n$.

हल : $n = 1$ रखने पर $2^1 > 1$.

असमिका $n = 1$ के लिए सत्य है।

माना कि $2^n > m$ __ ...(1)

परन्तु प्रत्येक धन पूर्णांक m के लिए $2^n > 1$ ...(2)

समी. (1) और (2) को जोड़ने पर,

$2^m + 2^m > m + 1$

$\Rightarrow \quad 2^m(1 + 1) > m + 1$

$\Rightarrow \quad 2m.2 > m + 1$

$\Rightarrow \quad 2m+1 > m + 1$

अतः असमिका $n = m + 1$ के लिए सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत से असमिका $2^n > n$ प्रत्येक प्राकृतिक संख्या के लिए सत्य है।

उदाहरण 7. सभी $n \in N$ के लिए गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि $3^{2n+2} - 8n - 9$ संख्या 8 से भाज्य है।

हल : माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n) : 3^{2n+2} - 8n - 9$ संख्या 8 से भाज्य है।

चरण I. $n = 1$ के लिए,

$P(1) : 3^{2x1+2} - 8 \times 1 - 9$

$= 3^4 - 8 - 9 = 81 - 17 = 64 = 8 \times 8$

जो कि संख्या 8 से भाज्य है।

चरण II. माना n = k + 1 के लिए यह सत्य है।

अर्थात् $3^{2k+2} - 8k - 9 = 8\lambda$.

चरण III. n = k + 1 के लिए, $3^{2(k+1)+2} - 8(k + 1) - 9$

32(k+1)+2-8(k+1)-9

$= 3^{2k+2+2} - 8k - 8 - 9$

$= 3^{2k+2+2} - 8k - 17$

$= 9 \times 3^{2k+2} - 8k - 17$

$= 9 \times 3^{2k+2} - 9 \times 8k + 9 \times 8k - 9 \times 9$

$+ 9 \times 9 - 8k - 17$

$= 9(3^{2k+2} - 8k - 9) + 72k + 81 - 8k - 17$

$= 9 \times 8\lambda + 64k + 64$

$= 9 \times 8\lambda + 8(8k + 8)$

$= 8(9\lambda + 8k + 8)$

जो कि संख्या 8 से भाज्य है।

इसलिए, कथन P(k + 1) सत्य है जब कभी P(K) सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए P(n) सत्य है।

उदाहरण 8. $(41)^n - (14)^n$ संख्या 27 का एक गुणनखण्ड है।

हल : माना कि दिया हुआ कथन p(n) है।

P(n) : $(41)^n - (14)^n$ n = 1 के लिए

$P(1) = (41)^1 - (14)^1 = 27$

जो कि 27 का एक गुणनखण्ड है

जो कि सत्य है।

माना कि यह n = k के लिए सत्य है।

तब $(41)^k - (14)^k = 27m$

n = k + 1 के लिए

$(41)^{k+1} - (14)^{k+1} = (41)^k .41 - (14)^k .14$

$= (41)^k .41 - 41.(14)^k + 41.(14)^k - (14)^k .14$

$= 41[(41)^k - (14)^k] + (14)^k [41 - 14]$

$= 41 \times 27m + (14)^k] \times 27$

$= 27[41 \times m + (14)^k]$

जो कि 27 का गुणज है।

यदि दिया गया कथन n = k के लिए सत्य हो तो वह n = k + 1 के लिए भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन के सिद्धांत से दिया गया कथन n के सभी धन पूर्णांक मानों के लिए सत्य है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 4.1 (पृष्ठ संख्या 102-104)

प्रश्न 1 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$1 + 3 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{(3^n - 1)}{2}$$

उत्तर-

माना दिया हुआ कथन P(n) है।

$$\therefore P(n) 1 + 3 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{(3^n - 1)}{2}$$

$n = 1$ रखने पर

$\therefore$ बायाँ पक्ष $p(n) = 1$

दायाँ पक्ष $= \frac{3^1-1}{2}$

$= \frac{2}{2} = 1$

$\therefore\ n = 1$ के लिये P(n) सत्य है।

मान लीजिए $n = k$ के लिये कथन सत्य है।

$\therefore P(k) 1 + 3 + 3^3 + \ldots + 3^{k\text{-}1} = \frac{3^k-1}{2}$

3^k को दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^k = \frac{3^k-1}{2} + 3^k$

दायाँ पक्ष $= \frac{3^k-1+2.3^k}{2}$

$= \frac{3.3^k-1}{2}$

$= \frac{3^{k+1}-1}{2}$

$= \frac{3^{k+1}-1}{2}$

$\therefore 1 + 3 + 3^3 + \ldots + 3^k = \frac{3^{k+1}-1}{2}$

यह कथन n = k + 1 के लिये सत्य है।

⇒ जब भी P(K) सत्य होगा P(k + 1)भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n) उन सभी n के मान के लिये सत्य है जो $n \in N$ है।

प्रश्न 2 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots. + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

उत्तर-

माना $P(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n(n+1)}{2}^2$

यदि $n = 1$, बायाँ पक्ष $= 1^3 = 1$

दायाँ पक्ष $= \frac{1^2(1+1)^2}{4}$

$= \frac{4}{4} = 1$

$\therefore n = 1$ के लिये P(n) सत्य है।

मान लीजिए कथन $n = k$ के लिये सत्य है।

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k^2(k+1)}{4}\right)^2$$

दोनों ओर $(k+1)^3$ जोड़ने पर,

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3$$

$$= \left(\frac{k^2(k+1)}{4}\right)^2 + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2\left[\frac{k^2}{4} + (k+1)\right]$$

$$= (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + (k+1) \right]$$

$$= (k+1)^2 = \left[\frac{k^2+4k+4}{4} \right]$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k+1)^3 \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k+1+1)}{4}^2$$

इससे सिद्ध हुआ की P(n) मान n = k के लिये सत्य है तो P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n), n के सभी मान के लिये सत्य होगा यदि n ∈ N

प्रश्न 3 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$1 + \frac{1}{(1+2)} + \frac{1}{(1+2+3)} + \ldots + \frac{1}{(1+2+3+\ldots n)} = \frac{2n}{(n+1)}$$

उत्तर-

माना $P(n) 1 + \frac{1}{(1+2)} + \frac{1}{(1+2+3)} + \ldots + \frac{1}{(1+2+3+\ldots n)} = \frac{2n}{(n+1)}$.

n = 1 के लिए बायाँ पक्ष = 1

दायाँ पक्ष = बायाँ पक्ष

∴ P(n) n = 1 के लिए सत्य है

मान लिया n = k के लिए कथन सत्य है।

$$\therefore P(k) = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{(1+2+3+\ldots k)} = \frac{2k}{(k+1)}.$$

दोनों पक्षों में $\frac{1}{1+2+3+\ldots+k+(k+1)}$ जोड़ने पर,

$$= 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+k} + \frac{1}{(1+2+3+\ldots+k+(k+1)}$$

$$= \frac{2k}{(k+1)} + \frac{1}{(1+2+3+\ldots+k+(k+1)}$$

दायाँ पक्ष $= \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$ $\left[\because 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$

$$= \frac{2k}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2k(k+2)+2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2[k^2+2k+1]}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2(k-1)}{(k+2)}$$

$$= \frac{2(k-1)}{k+1+1}$$

इससे सिद्ध हुआ की P(n), n = k + 1 के सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n), n ∈ N, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 4 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

उत्तर-

माना लीजिये $P(n) = 1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

यदि n = 1 बायाँ पक्ष = 1.2.3 = 6

दायाँ पक्ष $= \frac{1.2.3.4}{4} = 6$

∴ n = 1 के लिए P(n) सत्य है

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

दोनों पक्षों में $(k+1)(k+2)(k+3)$ जोड़ने पर,

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= (k+1)(k+2)(k+3)\left[\frac{k}{4} + 1\right]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)(\overline{k+1}+1)(\overline{k+1}+2)(\overline{k+1}+3)}{4}$$

इससे सिद्ध हुआ की P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n), $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 5 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots + n.3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}.$$

उत्तर-

माना लीजिये $P(n): 1.3+2.3^2+3.3^3+\ldots+n.3^n=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}.$

यदि n = 1 P(n) का बायाँ पक्ष = 1.3 = 3

दायाँ पक्ष $=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}=\frac{1.9+3}{4}=\frac{12}{4}=3$

∴ P(n), n = 1 के लिए सत्य है

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$1.3+2.3^2+3.3^3+\ldots+k3^k=\frac{(2k-1)3^{k+1}+3}{4}$$

$(k+1)$ वाँ पद = $(k+1).3^{k+1}$

$(k+1).3^{k+1}$ को दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$=(1.3+2.3^2+3.3^3+\ldots+k.3^k)+(k+1)3^{k+1}$$

$$=\frac{(2k-1)3^{k+1}+3}{4}+(k+1)3^{k+1}$$

दायाँ पक्ष $=\frac{(2k-1)3^{k+1}+3}{4}+(k+1).3^{k+1}$

$$=\frac{(2k-1)3^{k+1}+3+4(k+1)3^{k+1}}{4}$$

$$=\frac{(2k-1+4k+4).3^{k+1}+3}{4}$$

$$=\frac{(6k+3.3^{k+1}+3)}{4}=\frac{3(2k+1).3^{k+1}+3}{4}$$

$$=\frac{[2(k+)-1].3^{k+1+1}+3}{4}$$

इससे सिद्ध हुआ की P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n), n ∈ N, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 6 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n.(n+1) = \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$$

उत्तर-

माना लीजिये $P(n) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n.(n+1) = \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$

यदि n = 1 P(n) का बायाँ पक्ष = 1.2 = 3

दायाँ पक्ष $= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1.2.3}{3} = 2$

∴ P(n), n = 1 के लिए सत्य है

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + k.(k+1) = \left[\frac{k(k+1)(k+2)}{3}\right]$$

$(k + 1)$ वाँ पद = $(k + 1)(k + 2)$

दोनों पक्षों में $(k + 1)(k + 2)$ जोड़ने पर,

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + k.(k+1) + (k+1).(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k + 1)(k + 2) = (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(\overline{k+1}+1)(\overline{k+1}+2)}{3}$$

इससे सिद्ध हुआ की P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n), n ∈ N, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 7 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$$

उत्तर-

माना लीजिये $P(n) = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$

यदि n = 1 P(n) का बायाँ पक्ष = 1.3 = 3

दायाँ पक्ष $= \frac{n(4n^2)+6n-1}{3}$

$$= \frac{1.(4.1^2+6.1-1)}{3}$$

$$= \frac{4+6-1}{3} \frac{9}{3} = 3$$

∴ P(n), n = 1 के लिए सत्य है

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$= 1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2k-1)(2k+1) = \frac{k(4k^2+6k-1)}{3}$$

$(k+1)$ वाँ पद = $[2(k+1) - 1][2(k+1) + 1]$,

$= (2k+1)(2k+3)$ को दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$= 1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2k-1) + (2k+1)(2k+1)(2k+3)$$

$$= \frac{k(4k^2+6k-1)}{3} + (2k+1)(2k+3)$$

$$= \frac{4k^3+6k^2-k+3(2k+1)(2k+3)}{3}$$

$$= \frac{4k^3+6k^2-k+3(4k^2+8k+3)}{3}$$

$$= \frac{4k^3+18k^2+23k+9}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(4k^2+14k+9)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[4(k+1)^2+6(k+1)-1]}{3}$$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n), n ∈ N, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 8 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + n.2^n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

उत्तर-

माना लीजिये $P(n) = 1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + n.2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$

यदि n = 1 का बायाँ पक्ष = 1.2 = 3

दायाँ पक्ष $= (n-1)2^{n+1} + 2. = 0 + 2 = 2$

∴ P(n), n = 1 के लिए सत्य है

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$\therefore 1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + k.2^k = (k-1)2^{k+1} + 2$$

$$= (k-1)2^{k+1} + 2 + (k+1)2^{k+1}$$

$$= (k - 1 + k + 1)2^{k+1} + 2$$

$$= 2k2^{k+1} + 2$$

$$= k.2^{k+2} + 2$$

$$= (\overline{k+1} - 1)2^{\overline{k+1}+1} + 2$$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n), n ∈ N, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 9 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

उत्तर-

माना $P(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

यदि n = 1 का बायाँ पक्ष $= \frac{1}{2}$

दायाँ पक्ष $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

∴ P(n), n = 1 के लिए सत्य है

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots. + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

$(k + 1)$ वाँ पद $= \frac{1}{2^{k+1}}$ दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots. + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^k}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2^k}\,\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n), n ∈ N, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 10 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{(6n+4)}$$

उत्तर-

माना $P(n) = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{(6n+4)}$

यदि n = 1

बायाँ पक्ष $= \frac{1}{2.5} = \frac{1}{10}$

दायाँ पक्ष $= \frac{n}{(6n+4)} = \frac{1}{6+4} = \frac{1}{10}$

∴ P(n), n = 1 के लिए सत्य है

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \ldots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{k}{6k+4}$$

$(k + 1)$ वाँ पद $= \frac{k}{[3(k+1)-1][3(k+1)+2]} = \frac{k}{(3k+2)(3k+5)}$ दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \ldots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} + \frac{k}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{k}{(6k+4)} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{k(3k+5)+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{3k^2+5k+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{(3k+2)(k+1)}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{k+1}{6k+10}$$

$$= \frac{k+1}{6(k+1)+4}$$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n), n ∈ N, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 11 सभी n∈N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

उत्तर-

माना $P(n) = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

यदि n = 1

बायाँ पक्ष $= \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{6}$

दायाँ पक्ष $= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{6}$$

$\therefore$ P(n), n = 1 के लिए सत्य है

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$$

$(k + 1)$ वाँ पद $= \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \left[\frac{k(k+3)}{4} + \frac{1}{k+3}\right]$$

$$= \frac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{k(k^2+6k+9)+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(k^2+5k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(k+4)(k+1)}{4(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(\overline{k+1}+3)}{4(\overline{k+1}+1)(\overline{k+1}+2)}$$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n), n ∈ N, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 12 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

उत्तर-

मान लीजिए $P(n) = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

n = 1 के लिये बायाँ पक्ष = a

दायाँ पक्ष $= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = a$

P(n), n = 1 के लिए सत्य है।

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$\therefore a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$(k + 1)$ वॉं पद $= ar^k$ दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k+1} = \frac{a(1 - r^k)}{1 - r} + ar^k$$

$$= a\left[\frac{1 - r^k}{1 - r} + r^k\right]$$

$$= a\left[\frac{1 - r^k + r^k - r^{k+1}}{1 - r}\right]$$

$$= \frac{a(1 - r^{k+1})}{1 - r}$$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n) n ∈ N, के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 13 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{(2n+1)}{n^2}\right)=(n+1)^2$$

उत्तर-

मान लीजिए $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{(2n+1)}{n^2}\right)=(n+1)^2$

n = 1 के लिये बायाँ पक्ष $=1+\frac{3}{1}=1+3=4$

दायाँ पक्ष $=(n+1)^2=(1+1)^2=2^2=4$

P(n), n = 1 के लिए सत्य है।

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$\therefore\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right)=(k+1)^2$$

$(k+1)$ वॉं पद $\left[1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right]$ दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right)\left[1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right]$$

$$=(k+1)^2\left[1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right]$$

$$=(k+1)^2\left[\frac{(k+1)^2+2k+3}{(k+1)^2}\right]$$

$$=(k^2+2k+1+2k+3)$$

$$=k^2+4k+4=(k+2)^2=(\overline{k+1}+1)^2$$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n) n ∈ N, के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 14 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=(n+1)$$

उत्तर-

मान लीजिए $P(n):\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$

n = 1 के लिये बायाँ पक्ष $=1+\frac{1}{1}=2$

दायाँ पक्ष $=n+1=1+1=2$

P(n), n = 1 के लिए सत्य है।

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$\therefore\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)=k+1$$

$(k+1)$ वाँ गुणनखंड $1+\frac{1}{k+1}$ से दोनों पक्षों में गुणा करने पर,

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=(k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=(k+1)\left(\frac{k+1+1}{k+1}\right)$$

$$=k+2=\overline{k+1}+1$$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n) n ∈ N, के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 15 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

उत्तर-

मान लीजिए $P(n): 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

n = 1 के लिये बायाँ पक्ष $= 1^1 = 1$

दायाँ पक्ष $= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} = \frac{1.1.3}{3} = 1$

P(n), n = 1 के लिए सत्य है।

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$\therefore 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

$(k+1)$ वाँ पक्ष $(2k+1)^2$ से दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2$$

$$= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$= (2k+1)\left[\frac{k(2k-1)}{3} + (2k+1)\right]$$

$$= (2k+1)\left[\frac{k(2k-1)+3(2k+1)}{3}\right]$$

$$= \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)\left[2(\overline{k+1})-1\right]\left[2(\overline{k+1})+1\right]}{3}$$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n) n ∈ N, के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 16 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{(3n+1)}$$

उत्तर-

मान लीजिए $P(n): \frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{(3n+1)}$

n = 1 के लिये बायाँ पक्ष $= \frac{1}{1.4} = \frac{1}{4}$

दायाँ पक्ष $= \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

P(n), n = 1 के लिए सत्य है।

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$\therefore \frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{(3k+1)}$$

$(k+1)$ वाँ पक्ष $\frac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]} = \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ से दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{3(k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{1}{3k+1}\left[k + \frac{1}{(3k+4)}\right]$$

$$= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}$$

$$= \frac{k+1}{3(k+1)+1}$$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n) n ∈ N, के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 17 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{3(2n+3)}$$

उत्तर-

मान लीजिए $P(n): \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{3(2n+3)}$

n = 1 के लिये बायाँ पक्ष $= \frac{1}{3.5} = \frac{1}{15}$

दायाँ पक्ष $= \frac{n}{3(2n+3)} = \frac{1}{3.5} = \frac{1}{15}$

P(n), n = 1 के लिए सत्य है।

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$\therefore \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{3(2k+3)}$$

$(k+1)$ वॉं पक्ष $\frac{1}{[2(k+1)+1][2(k+1)+3]} = \frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$ से दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{k}{3(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{1}{(2k+3)}\left[\frac{k(2k+5)+3}{3(2k+5)}\right]$$

$$= \frac{2k^2+5k+3}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{(k+1)(2k+3)}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{k+1}{3(2k+5)}$$

$$= \frac{k+1}{3[2(k+1)+3]}$$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n) n ∈ N, के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 18 सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

उत्तर-

मान लीजिए $P(n): 1 + 2 + 3 + \ldots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$

n = 1 के लिये बायाँ पक्ष = 1

दायाँ पक्ष $= \frac{1}{8}(2n+1)^2$

$$= \frac{1}{8} \times 3^2 = \frac{9}{8}$$

$$1 < \frac{9}{8}$$

P(n), n = 1 के लिए सत्य है।

मान लिया P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$\therefore 1 + 2 + 3 + \ldots + k < \frac{1}{8}(2k + 1)^2$$

$(k + 1)$ वाँ पक्ष $= k + 1$ से दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

बायाँ पक्ष = $1 + 2 + 3 \ldots + k + (k + 1)$

$$\frac{1}{8}(2k + 1)^2 + (k+1) = \frac{1}{8}(2k + 1)^2 + 8(k+1)$$

$$= \frac{1}{8}[4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8]$$

$$= \frac{1}{8}[4k^2 + 12k + 9]$$

$$= \frac{1}{8}[4k^2 + 12k + 9]$$

$$\frac{1}{8}[2k+3]^2 = \frac{1}{8}[2k+1+1]^2$$

$$\therefore 1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) < \frac{1}{8}[2(k + 1) + 1]^2$$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n) n ∈ N, के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 19 n(n + 1)(n + 5), संख्या 3 का एक गुणज है।

उत्तर- मान लीजिये P(n) : n(n + 1)(n + 5), संख्या 3 का गुणज है

n = 1 के लिए n(n + 1)(n + 5) = 1.2.6 = 12 जो 3 का गुणज है

P(n), n = 1 के लिए सत्य है।

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

k(k + 1)(k + 5) = 3m

या $k^3 + 6k^2 + 5k = 3m$

k के स्थान पर k + 1 रखने पर

$(k+1)^3 + 6(k + 1)^2 + 5(k + 1)$

$= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 6(k^2 + 2k + 1) + 5k + 5$

$= k^3 + 9k^2 + 20k + 12$

$= (k^3 + 6k^2 + 5k) + (3k^2 + 15k + 12)$

$= 3m + 3(k^2 + 5k + 4)$

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n) n ∈ N, के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 20

$10^{2n-1} + 1$ संख्या 11 से भाज्य है।

उत्तर-

माना P(n) : $10^{2n-1}+1$ संख्या 11 से विभाजित होती है।

n = 1, के लिए सत्य है

मान लीजिए P(n), n = k के लिये सत्य है।

$\therefore 10^{2n-1}+1$ संख्या 11 से विभाजित होती है।

या $10^{2n-1}+1$ संख्या 11 से विभाजित होती है।

k को k + 1, से बदलने पर

$$10^{2(k+1)-1} + = 10^{2k+1}+1$$

$$= 10^2.10^{2k-1}+1$$

$$= 10^2(10^{2k-1}+1)-100+1$$

$$= 100.11m-99$$

$$= 11(100m-9)$$

इससे सिद्ध हुआ की $10^{2n-1}+1$ भी 11 से विभाजित होता है।

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n) $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 21 $x^{2n} - y^{2n}$, (x + y) से भाज्य है।

उत्तर-

माना P(n) : $x^{2n}-y^{2n}, (x+y)$ से विभाजित होता है।

n = 1, के लिए $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ जो x + y से विभाजित होता है।

P(n), n = 1 के लिये सत्य है।

मान लीजिए P(n), n = k के लिये सत्य है।

$\therefore x^{2k} - y^{2k}, x + y$ से विभक्त होता है।

या $x^{2k} - y^{2k} = m(x + y)$

या $x^{2k} = m(x + y) + y2k$

k के स्थान पर k + 1 रखने पर, सिद्ध करना है की $x^{2(x+1)} - y^{2(k+1)}, x + y$ से विभक्त होता है।

$= x^{2(k+1)} - y^{(2k+1)} = x^2 . x^{2k} - y^{2k+2}$

$= x^2 [m(m + y) + y^{2k}] - y^{2k+2}$

(1) से x^{2k} का मान रखने पर,

$= m(x + y)x^2 + x^2 . y^2 k - y^{2k+2}$

$= m(x + y)x^2 + x^2 y^2 k (x^2 - y^2)$

$= (x + y)[m^{x2} + y^{2k}(x - y)]$

इससे सिद्ध हुआ की $x^{2(x+1)} - y^{2(k+1)}, x + y$ भी से विभाजित होता है।

P(n), n = k + 1 के लिये भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n) $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 22 3^{2n+2} - 8n - 9, संख्या से भाज्य है।

उत्तर- मान लीजिए P(n) : 3^{2n+2} - 8n - 9 संख्या 8 से विभक्त होती है।

n = 1 के लिए,

$3^{n+2} - 8n - 9 = 3^{2+2} - 8.1 - 9$

$= 3^4 - 8 - 9$

$= 81 - 17 = 64$

जो 8 से विभाजित है।

P(n), n = 1 के लिए सत्य है।

मान लीजिए P(n). n = k के लिए सत्य है अर्थात

$3^{2k+2} - 8k - 9$, संख्या 8 से विभक्त होती है।

या $3^{2k+2} - 8k - 9 = 8m$

$\therefore 3^{2k+2} = 8m + 8k + 9$

k को k +1 से बदलने पर.

$3^{2(k+1)+2} - 8(k + 1) - 9 = 3^2.3^{2k+2} - 8(k + 1) - 9$

$= 9(8m + 8k +9) - 8k - 17$

$= 9(8m + 8k)+ 81 - 8k -17$

$= 72m + 64k + 64$

$= 8(9m + 8k + 8)$

यह भी 8 से विभक्त होता है।

n = k + 1 के लिए भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार Pn), $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 23 $3^{2n+2} - 8n - 9$, संख्या से भाज्य है।

उत्तर- मान लीजिए P(n) : 41" - 14", संख्या 27 का गुणज है।

n - 1 के लिए, $41^n - 14 = 41 - 14 = 27$

P(n), n = 1 के लिए सत्य है।

माना, (Pn), n = k के लिए सत्य है।

$\Rightarrow 41^{k+1} - 14^k = 27m$

$\Rightarrow 41^k - 27m + 14^k$

k के स्थान पर k + 1 रखने पर

$41^{k+1} - 14^{k+1} = 41.41^k - 14^{k+l}$

[$41^k = 27m + 14^k$ रखने से]

$= 41[27m + 14^k] - 14^{k+1}$

$= 27.41m + 41.\ 14^k - 14^{k+1}$

$= 27\ 41m + 14^k$

$= 27[41m + 14^k]$

जो कि 27 से विभक्त होता है।

$\Rightarrow$ P(n), n = k + 1 के लिए भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n), $n \in N$ n. के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 24 $(2n + 7) < (n + 3)^2$

उत्तर- मान लीजिए $P(n) = (2n + 7) < (n + 3)^2$

n = 1 के लिए बायाँ पक्ष = $2 \times 1 + 7 = 9$

दायाँ पक्ष = $(n + 3)^2$

$= (1 + 3)^2 - 4^2 - 16$

$9 < 16$

$\Rightarrow n = 1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

$\therefore 2k + 7 < (k + 3)^2$

या : $2(k + 1) + 7 < (k + 3)^2 + 2$ [दोनों पक्षों में 2 जोड़ने से]

$\Rightarrow 2(k + 1) + 7 < k^2 + 6k + 11$ ...(1)

k को k+1 रखने पर सिद्ध करना है।

$2(k + 1) + 7 < (k + 1 + 3)^2$

या $2k + 9 < (k + 4)^2$

समी. (1) में दाएँ पक्ष में 2k + 5 जोड़ने पर

$2(k + 1) + 7 < 2 + 6k + 11 + 2k + 5$

$< k^2 + 8k + 16$

$< (k+4)^2$

या $2k + 9 < (k + 4)^2$

$\Rightarrow$ P(n) n = k + 1 के लिए भी सत्य है।

अत : गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार P(n), $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है