गणित

अध्याय- 3: आव्यूह

1. प्रस्तावना (Introduction)

इस अध्याय में हम आव्यूहों के बारे में अध्ययन करेंगे। ये विज्ञान व यन्त्र शास्त्र के अध्ययन के लिए प्रमुख औजार है। आधुनिक गणित में भी इनका महत्वपूर्ण स्थान है। ब्रिटिश गणितज्ञ आर्थर केले ने सर्वप्रथम आव्यूह की अवधारणा प्रस्तुत की बाद में, महान् भौतिकशास्त्री हाइजनबर्ग ने अपने प्रसिद्ध क्वाण्टम सिद्धान्त (Quantum theory) की व्याख्या करने के लिये आव्यूहों का औजारों के रूप में प्रयोग किया और तब, संसार ने आव्यूहों के प्रयोग की आवश्यकता को समझा। इनका प्रारम्भ सूचनाओं को एकत्रित करने के साधन के रूप में हुआ। आज इनकी उपयोगिता गणित में ही नहीं, अपित. अन्य विषयों जैसे-भौतिक शास्त्र, रसायन शास्त्र, शिक्षा शास्त्र, मनोविज्ञान, रेखीय कार्य-योजना, प्रायिकता सिद्धान्त, ग्राफ सिद्धान्त, सांख्यिकी तथा जनसंख्या गतिकी इत्यादि में भी व्यापक रूप से निहित है।

अदिश राशियाँ (Scalars)

वे राशियाँ जो योग, व्यवकलन, गुणन एवं विभाजन के बीजगणितीय नियमों का पालन करती हैं, अदिश राशियाँ कहलाती हैं। ये राशियाँ वास्तविक भी हो सकती हैं तथा सम्मिश्र भी।

उदाहरण के लिए : 2, 3, 31, 2+3i, 13, 3cosx, 7sinx इत्यादि।

पंक्ति (Row)

क्षैतिज रेखा को पंक्ति कहते हैं।

स्तम्भ (Column)

ऊर्ध्वाधर रेखा को स्तम्भ कहते हैं।

रचना (Array)

राशियों का वह समूह जो कुछ पंक्तियों व कुछ स्तम्भों में व्यवस्थित है, रचना (Array) का निर्माण करता है।

आव्यूह (Matrix)

आव्यूह, अदिश राशियों से निर्मित एक आयताकार रचना है। यह आयताकार रचना लघु कोष्ठक (Parentheses) ( ), दोहरे दंड (Double bars) 1.43 || अथवा दीर्घ कोष्ठक (Square brackets) [ ] के अन्दर बन्द होती है। यहाँ हम दीर्घ कोष्ठक [ ] का प्रयोग करेंगे।

एक mxn आव्यूह की परिभाषा (Definition of a m × n Matrix)

mn राशियों का वह समूह, जो क्रमबद्ध m पंक्तियों तथा n स्तम्भों से निर्मित एक आयताकार रचना के रूप में व्यवस्थित रहता है। mxn आव्यूह कहलाता है। इसे 'm byn' आव्यूह बोलकर पढ़ा जाता है। mxn इस आव्यूह का क्रम (Order) कहलाता है तथा आव्यूह के आकार (Size) को निर्धारित करता है।

एक m xn आव्यूह का मानक रूप निम्न है

$$A=[a_{ij}]=(a_{ij})=\|a_{ij}\|=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

जहाँ i=1,2,3,....,m,j=1,2,3,....,n.

अवयव (Elements) - a_{11}, a_{12}.........., a_{mn} को आव्यूह A के अवयव कहते हैं। यहाँ a_{ij} अवयव i वे पंक्ति और j वें स्तम्भ के सन्धि (Junction) पर स्थित होता है।

एक mxn आव्यूह की विशेषताएँ (Charac teristics of a mxn Matrix)

(1) इसमें m पंक्तियाँ होती हैं।

(2) इसमें n स्तम्भ होते हैं।

(3) प्रत्येक पंक्ति में n क्रमबद्ध राशियाँ होती हैं।

(4) प्रत्येक स्तम्भ में m क्रमबद्ध राशियाँ होती हैं।

(5) इसमें कुल mm राशियां होती हैं।

संकेतन (Notation)

आव्यूहों को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों (Capital letters) से सूचित किया जाता है। जैसे- A,B,C,D, P,O,R,S, ... इत्यादि।

अवयव या तत्व या प्रविष्टियाँ (Constituents - or Elements or Entries)

राशियाँ a_{11}, a_{12}..........a_{ij}.......आव्यूह के अवयव या तत्व या प्रविष्टियाँ कहलाती हैं। ये द्वि-अनुलग्नक संकेतन (Double suffix notation) में लिखी जाती हैं।

व्यापक अवयव (General Element)

आव्यूह का व्यापक अवयव संकेत a; के द्वारा निरूपित किया जाता है। इसमें प्रथम अनुलग्नका है तथा द्वितीय अनुलग्नक) है। इसका अभिप्राय यह है कि वह अवयव है जो वीं पंक्ति तथा jवें स्तम्भ में स्थित है। यह आव्यूह का (i.j) वाँ अवयव कहलाता

व्यापक अवयव के रूप में आव्यूह का निरूपण

(Representation of a Matrix in the form of its General Element)

$A = [a_{ij}]_{mxn}$ आव्यूह A का इसके व्यापक अवयव के रूप में निरूपण है। स्पष्टतः यहाँ

i1,2,3,...., m

तथा j=1,2,3,....,n

नोट - m x n क्रम के एक आव्यूह A को कभी-कभी $A_{m\times n}$ के रूप में लिखा जाता है।

आव्यूहों के प्रकार (Types of Matrices)

(1) पंक्ति आव्यूह (Row matrix)-वह आव्यूह जिसमें केवल एक पंक्ति होती है, पंक्ति आव्यूह कहलाता है।

उदाहरणार्थ-[2 5-78 12]]ns एक पंक्ति आव्यूह है।

(2) स्तम्भ आव्यूह (Column matrix)-वह आव्यूह जिसमें केवल एक स्तम्भ होता है, स्तम्भ आव्यूह कहलाता है।

उदाहरणार्थ

उदाहरणार्थ— $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$

एक स्तम्भ आव्यूह है।

(3) शून्य आव्यूह (Zero or Null matrix)-वह आव्यूह जिसका प्रत्येक अवयव शून्य हो, शून्य आव्यूह कहलाता है। mxn क्रम के शून्य आव्यूह को $O_{m \times n}$ से निरूपित करते हैं।

$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2X3 क्रम की शून्य आव्यूह है।

$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3X3 क्रम की शून्य आव्यूह है।

एक शून्य आव्यूह है।

(4) वर्ग आव्यूह (Square matrix)- वह आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तम्भों की संख्या के बराबर होती है, वर्ग आव्यूह कहलाता है।

यदि m = n तो आव्यूह को nxn क्रम की या n क्रम का वर्ग आव्यूह कहते हैं।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} n \times n$$

क्रम की वर्ग आव्यूह है।

(5) मुख्य विकर्ण (Principal diagonal)-प्रत्येक वर्ग आव्यूह में दो विकर्ण होते हैं। इनमें बाँये हाथ के ऊपरी सिरे (Left hand upper corner) से दाँये हाथ के निचले सिरे (Right hand lower corner) तक खींचे गये विकर्ण को मुख्य विकर्ण कहते हैं।

उदाहरणार्थ— $\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ मुख्य विकर्ण

केवल वर्ग आव्यूह के ही विकर्ण होते हैं। मुख्य विकर्ण के अनुदिश स्थित अवयवों को मुख्य विकर्ण अवयव (Principal diagonal elements) कहते हैं। यहाँ a, b, c मुख्य विकर्ण अवयव है।

(6) विकर्ण आव्यूह (Diagonal matrix)-वह वर्ग आव्यूह में जिसमें मुख्य विकर्ण अवयवों को छोड़कर सभी अवयव शून्य हों, विकर्ण आव्यूह कहलाता है।

उदाहरणार्थ— $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

विकर्ण आव्यूह है। इन्हें diag [3,5], diag [3,4,5] के रूप में लिखते हैं।

(7) अदिश आव्यूह (Scalar matrix)- वह विकर्ण आव्यूह जिसके सभी मुख्य विकर्ण अवयव समान हों तथा शेष सभी अवयव शून्य हो अदिश आव्यूह कहलाता है।

उदाहरणार्थ— $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$

एक अदिश आव्यूह हैं।

(8) इकाई या तत्समक आव्यूह (Unit or Identity matrix)- वह अदिश आव्यूह जिसका प्रत्येक मुख्य विकर्ण अवयव 1 है, इकाई आव्यूह कहलाता है। क्रम n × n के इकाई आव्यूह को I_n से निरूपित करते हैं।

उदाहरण- $I_1 = [1]$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & I_n \end{bmatrix}$$

(9) क्षैतिज आव्यूह (Horizontal matrix)- वह आव्यूह जिसमें स्तम्भों की संख्या, पंक्तियों की संख्या से अधिक हो, क्षैतिज आव्यूह कहलाता है।

उदाहरण— $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ एक क्षैतिज आव्यूह है।

(10) ऊर्ध्वाधर आव्यूह (Vertical matrix)- वह आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या, स्तम्भों की संख्या से अधिक हो, ऊर्ध्वाधर आव्यूह कहलाता है।

उदाहरण— $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ एक ऊर्ध्वाधर आव्यूह है।

(11) त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular matrix)- यदि किसी वर्ग आव्यूह के मुख्य विकर्ण के नीचे अथवा ऊपर के सभी अवयव शून्य हों तो उस आव्यूह को त्रिभुजीय आव्यूह कहते हैं।

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

A - मुख्य विकर्ण के नीचे के अवयव शून्य है। इसे 'अपर त्रिभुजीय आव्यूह' (Upper Triangular Matrix) कहते हैं।

B - मुख्य विकर्ण के ऊपर के अवयव शून्य है। इसे लोअर त्रिभुजीय आव्यूह (Lower Triangular Matrix) कहते हैं।

(i) उपरि-त्रिभुजीय आव्यूह (Upper triangular matrix)- यदि वर्ग आव्यूह के मुख्य विकर्ण के नीचे की ओर के सभी अवयव शून्य हों तो वह उपरि-त्रिभुजीय आव्यूह कहलाता है। वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ एक उपरि-त्रिभुजीय आव्यूह होगा यदि सभी $i>j$ के लिए $a_{ij}= 0$.

उदाहरण— $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

एक उपरि-त्रिभुजीय आव्यूह है।

(ii) निचला त्रिभुजीय आव्यूह (Lower triangular matrix)- यदि किसी वर्ग आव्यूह के मुख्य विकर्ण के ऊपर की ओर के सभी अवयव शून्य हों तो उसे निचला त्रिभुजीय आव्यूह कहते हैं। वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ एक निचला-त्रिभुजीय आव्यूह होगा यदि सभी $i<j$ के लिए $a_{ij}= 0$.

उदाहरण— $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

एक निचला-त्रिभुजीय आव्यूह है।

(12) एकल अवयव आव्यूह (Singleelement matrix)- उस आव्यूह को जिसमें केवल एक अवयव होता है एकल अवयव आव्यूह कहते हैं। आव्यूह [b] एक एकल अवयव आव्यूह है।

दो आव्यूहों की समानता (Equality of Two Matrices)-

दो आव्यूह समान कहलाते हैं, यदि

उनके क्रम समान हों तथा

उनके संगत अवयव समान हों। उदाहरण-आव्यूह A=[14]

उदाहरण—आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}_{2\times2}$

तथा $B = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 \end{bmatrix}_{2\times2}$

नोट- यदि दो आव्यूह A और B समान हों, तो हम लिखते हैं

A = B.

आव्यूहों का योग (Addition of Matrices)

दो आव्यूह जोड़ने के योग्य (Conformable for addition) कहलाते हैं, यदि उनके क्रम समान हों।

यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ **तथा** $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ **तब,**

$$C = A + B$$
$$= [(a_{ij} + b_{ij})]_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n}$$

जहाँ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$

इस प्रकार स्पष्ट है कि दो समान क्रम के आव्यूहों को जोड़ने के लिए उनके संगत अवयवों (समान स्थिति वाले अवयवों) को जोड़ देते हैं।

उदाहरण 1. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & -4 & 4\\ 1 & 5 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -7\\ 4 & 0 & 3\end{bmatrix}$, तो $A+B$ ज्ञात कीजिये।

हल : दिया है :

$$A=\begin{bmatrix}2 & -4 & 4\\ 1 & 5 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -7\\ 4 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad A+B=\begin{bmatrix}2+1 & -4+3 & 4-7\\ 1+4 & 5+0 & 2+3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -1 & -3\\ 5 & 5 & 5\end{bmatrix}.$$

आव्यूह योग के गुणधर्म (Properties of Matrices Addition)

(1) क्रमविनिमेय नियम (Commutative law)- यदि A तथा B दो mxnक्रम के आव्यूह हों,

तब A + B = DB + A,

प्रमाण (Proof)- माना $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

तब,

$A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}$

$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

[आव्यूहों के योग की परिभाषा से]

$= [b_{ij} + a_{ij}]_{m\times n}$

[संख्याओं के योग के क्रमविनिमेय नियम से]

$= [b_{ij}]_{m\times n} + [a_{ij}]_{m\times n}$

[आव्यूहों के योग की परिभाषा से]

$= B+A.$

(2) साहचर्य नियम (Associativelaw)- यदि A, B तथा C तीन $m\times n$ क्रम के आव्यूह हों,

तब

$(A + B) + C = A + (B+C)$

प्रमाण (Proof)- माना $A= [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

तथा $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ तब,

$(A+B)+C = \{[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}\} + [c_{ij}]_{m\times n}$

$= [(a_{ij} + b_{ij})]_{m\times n} + [c_{ij}]_{m\times n}$

[आव्यूहों के योग की परिभाषा से]

$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m\times n}$

[आव्यूहों के योग की परिभाषा से]

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m\times n}$

[संख्याओं के योग के साहचर्य नियम से]

$= (A+B)+C = A+(B+C)$.

आव्यूहों के अदिशगुणनफल के गुणधर्म (Properties of Scalar Multiplication of Matrices)

(1) यदि कोई स्वेच्छ अदिश है, तब

$K(A+B)=kA+kB$.

अर्थात् अदिश गुणन आव्यूह योग पर वितरण नियम का पालन करता है।

प्रमाण (Proof)- माना $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B= [b_{ij}]_{m\times n}$

तब, $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

$$\therefore \quad k(A+B)=k[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

$$=[ka_{ij}+kb_{ij}]_{m\times n}$$

$$=[ka_{ij}]_{m\times n}+[kb_{ij}]_{m\times n}$$

$$=kA+kB.$$

(2) यदि k_1 व k_2 कोई दो स्वेच्छ अदिश हैं, तब $(k_1+k_2)A = k_1A$.

प्रमाण (Proof)- माना $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

तब, $(k_1+k_2)\, A = (k_1+k_2)[a_{ij}]_{m\times n}$

$= [k_1a_{ij}]_{m\times n} + [k_2a_{ij}]_{m\times n}$

$= k1[a_{ij}]_{m\times n} + k_2\, [a_{ij}]_{m\times n}$

$= k_1A+k_2A.$

उदाहरण 1. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$ में

(a) कितनी पंक्तियाँ हैं ?

(b) कितने स्तम्भ हैं ?

(c) इसकी कोटि क्या है ?

(d) इसमें कुल कितने अवयव हैं ?

उत्तर-(a)3, (b) 4,(c) 3x4,(d) 12.

उदाहरण 2 यदि आव्यूह $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ और आव्यूह

$C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो $B-C$ ज्ञात कीजिए।

हल : $B-C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 3-4 & -1-1 & 2-2 \\ 4-0 & 2-3 & 5-2 \\ 2-1 & 0+2 & 3-3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

उदाहरण 3. आव्यूह x का मान ज़ात कीजिए यदि A + 2B + x = 0, जहाँ

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

हल : दिया है : $A + 2B + X = 0$

$$\Rightarrow \quad X = -A - 2B$$

$$= -\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+2 & 1-2 \\ -3-0 & -5-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}.$$

परिवर्त आव्यूह (Transpose Matrix)

यदि किसी आव्यूह की पंक्तियों को स्तम्भों में तथा स्तम्भों को पंक्तियों में परिवर्तित कर दिया जाय तो इस प्रकार प्राप्त आव्यूह को दिये हुए आव्यूह का परिवर्त (Transpose) आव्यूह कहते हैं तथा इसे A' अथवाA^T से निरूपित करते हैं।

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$

तो $A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$

तथा यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

तो $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

विशेष 1. यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

तो $A' = [a_{ji}]_{n\times m}$, जहाँ $a'_{ji} = a_{ij}$

अर्थात् A' का $(j, i)^{th}$ अवयव, A के $(i, j)^{th}$ अवयव के बराबर है।

विशेष 2. यदि A की कोटि $m \times n$ है, तो A' की कोटि $n \times m$ होगी।

विशेष 3. पंक्ति आव्यूह का परिवर्त (transpose) स्तम्भ आव्यूह होता है।

विशेष 4. स्तम्भ आव्यूह का परिवर्त (transpose) पंक्ति आव्यूह होता है।

नोट : 1. किसी आव्यूह के परिवर्त (transpose) का परिवर्त वह आव्यूह स्वयं होता है, अर्थात्

$$(A')' = A.$$

2. यदि आव्यूह A तथा B के क्रम समान हैं तो

$$(A + B)' = A' + B'.$$

3. यदि दो आव्यूहों A तथा B के क्रम क्रमश: $(m \times n)$ तथा $(n \times p)$ हों तो $(AB)' = B'A'$.

4. किसी आव्यूह A तथा किसी अदिश k के लिए,

$$(kA)' = kA'.$$

एक वर्ग आव्यूह A सममित कहलाता है यदि A = A.

एक सममित आव्यूह में मुख्य विकर्ण से समान दूरी पर स्थित अवयव बराबर होते हैं अर्थात् यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, सममित है तो $a_{ij} = a_{ji}$

उदाहरण : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ सममित आव्यूह है, क्योंकि

A' या $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

इसी प्रकार, $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\3&7&4\end{bmatrix}$ सममित आव्यूह है, क्योंकि

$$A' \text{ या } A^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\3&7&4\end{bmatrix}$$

एक सममित आव्यूह की समस्त धनात्मक पूर्णांक घातें सममित आव्यूह होती हैं।

विषम सममित आव्यूह (Skew-symmetric Matrix)

एक वर्ग आव्यूह A विषम सममित आव्यूह कहलाता है। यदि A'=-A. नोट: 1. एक विषम सममित आव्यूह में मुख्य विकर्ण से समान दूरी __ पर स्थित अवयव बराबर तथा विपरीत चिन्हों के होते हैं

अर्थात् यदि

A= [ajlmx, विषम सममित है तो ay=-ay2. एक विषम सममित आव्यूह में अग्रग विकर्ण का प्रत्येक

अवयव शून्य होता है। :: परिभाषा से, a =-a, या 2a = 0 .:: a = 0. 3. यदि एक वर्ग आव्यूह होतो (A+A') सममित आव्यूह __ तथा (A-A') विषम सममित आव्यूह होता है।

समशम आव्यूह (Idempotent Matris)

एक वर्ग आव्यूह A समशम आव्यूह कहलाता है यदि.A2 = A.

उदाहरण : $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ समशम आव्यूह है,

क्योंकि $A^2=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad A^2=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}=A.$

प्रतिकेन्द्रज आव्यूह (Involutory Matris)

एक वर्ग आव्यूह A प्रतिकेन्द्रज कहलाता है यदि A = I.

उदाहरण : $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ प्रतिकेन्द्रज आव्यूह है, क्योंकि

$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I.$

शून्यसम आव्यूह (Nilpotent Matrix)

एक वर्ग आव्यूह m घात का शून्यसम कहलाता है यदि | A^m =0.

उदाहरण : $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ घात 2 का शून्यसम आव्यूह है,

क्योंकि $A^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad A^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O.$

लाम्बिक आव्यूह (Orthogonal Matrix)

एक वर्ग आव्यूह A लाम्बिक कहलाता है यदि AA' = A'A=I.

उदाहरण : $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ लाम्बिक आव्यूह है।

क्योंकि $A' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

अत: $AA' = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad A'A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$

प्रमेय 1. वास्तविक अवयवों वाले किसी वर्ग आव्यूह के लिए A+A'एक सममित आव्यूह तथा A-A'एक विषम सममित आव्यूह होते हैं उपपत्ति-माना x = A+A'

X' =(A+A') X' = A +(A')' [∵ (A+B) = A +B'] x' = A+A . [∵ (A) = A] X' = A+A'

[∵ A+B = B+ A]

x'=x इसलिए X = A+A' एक सममित आव्यूह है। माना y= A-A

y' =(A-A) y= A'-(A')' [∵ (A-B) = A' - B'] y' = A-A

[∵ (A') = A] y=-(A-A')

y=-y इसलिए y= A-A' एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रमेय 2. किसी वर्ग आव्यूह को एक सममित तथा एक . विषम सममित आव्यूहों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उपपत्ति-मान लीजिए कि A एक वर्ग आव्यूह है

$$A = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} + \frac{A'}{2} - \frac{A'}{2}$$

$$A = \frac{A + A'}{2} + \frac{A - A'}{2}$$

प्रमेय 1 से A+ A एक सममित आव्यूह तथा A-A' एक विषम सममित आव्यूह है। इसलिए $\frac{A+A'}{2}$ सममित आव्यूह तथा $\frac{A+A'}{2}$ विषम सममित आव्यूह होगा। अत: किसी वर्ग आव्यूह को एक सममित तथा एक विषम सममित आव्यूहों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण यदि आव्यह $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ x & -3 & 0 \end{bmatrix}$ विषम सममित आव्यूह है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ x & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ x & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A'=\begin{bmatrix} 0 & -1 & x \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

दिया है- आव्यूह विषम सममित है।

$$\therefore \quad A=-A'$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ x & -3 & 0 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 0 & -1 & x \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ x & -3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -x \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

समान आव्यूह की परिभाषा से, x=2.

उदाहरण यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix} 0 & 2b & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3a & 3 & -1 \end{bmatrix}$ सममित

आव्यूह है, तो a और B के मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $A=\begin{bmatrix} 0 & 2b & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3a & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$A'=\begin{bmatrix} 0 & 2b & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3a & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$A'=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3a \\ 2b & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

दिया है- आव्यूह सममित है।

$\therefore \quad A = A'$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2b & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3a & 3 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3a \\ 2b & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

समान आव्यूह की परिभाषा से, .

$2b = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$3a = -2 \Rightarrow a = \frac{-2}{3}$

उदाहरण आव्यूह $A=\begin{bmatrix} 0 & x & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ y & -1 & 0 \end{bmatrix}$ विषम

सममित आव्यूह है, तोx और y के मान ज्ञात कीजिए।

हल : $A=\begin{bmatrix} 0 & x & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ y & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A'=\begin{bmatrix} 0 & x & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ y & -1 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$A'=\begin{bmatrix} 0 & -2 & y \\ x & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}'$$

दिया है- आव्यूह विषम सममित है।

$\therefore \qquad A=-A'$

$$\begin{bmatrix} 0 & x & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ y & -1 & 0 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 0 & -2 & y \\ x & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & x & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ y & -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -y \\ -x & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

समान आव्यूह की परिभाषा से,

x = 2, y = 4.

उदाहरण 5. यदि $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

A-A' विषम सममित आव्यूह होगा जहाँ A',A का परिवर्त आव्यूह है।

हल : दिया है— $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A - A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad A - A' = \begin{bmatrix} 2-2 & 3-4 \\ 4-3 & 5-5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad A - A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{...(1)}$

$\Rightarrow \quad (A - A')' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad (A - A')' = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad (A - A')' = -(A - A'),$ [समी. (1) से]

∴ A-A' विषम सममित आव्यूह होगा।

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्धकीजिए कि A+A'सममित आव्यूह होगा जहाँ A; A का परिवर्त आव्यूह है।

हल : दिया है— $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}'$$

$$\Rightarrow \quad A' = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A + A' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A + A' = \begin{bmatrix} 4+4 & 1+5 \\ 5+1 & 8+8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A + A' = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

$$(A + A')' = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ (A+ A) = A+A', [समी. (1) से]

$\therefore$ A + A' सममित आव्यूह होगा। यही सिद्ध करना था।

व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Invertible Matrices)

यदि A, R क्रम का एक वर्ग आव्यूह है तब आव्यूह B यदि उसका अस्तित्व इस प्रकार है कि

AB = BA =I तब आव्यूह B आव्यूह A का प्रतिलोम अथवा व्युत्क्रम कहलाता है तथा इसे A^{-1} से दर्शाते हैं। चूँकि A के प्रतिलोम आव्यूह का अस्तित्व है। अत: A व्युत्क्रमणीय कहलाता है।

उदाहरणार्थ—माना $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}4-3 & -6+6\\ 2-2 & -3+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

इसी प्रकार,

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

अत: B आव्यूह A का व्युत्क्रम है, दूसरे शब्दों में $B = A^{-1}$ तथा A आव्यूह B का व्युत्क्रम है अर्थात् $A = B^{-1}$

व्युत्क्रम आव्यूह की अद्वितीयता (Uniqueness of Inverse Matrix)

प्रमेय 1. किसी वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह यदि उसका अस्तित्व है तो अद्वितीय होता है।

उपपत्ति-मान लीजिए A कोटि m का एक वर्ग आव्यूह है। माना A के दो व्युत्क्रम आव्यूह B तथा C हैं। अब हम दिखाएंगे कि . B=C

आव्यूह A का व्युत्क्रम B है

$\therefore AB = BA = I \quad ...(1)$

आव्यूह A का व्युत्क्रम C है

$AC = CA = 1 \quad ...(2)$

अब $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$

प्रमेय 2. यदि A तथा B समान कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो तो

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

उपपत्ति- $(AB)(AB)^{-1} = I,$

[व्युत्क्रमणीय आव्यूह की परिभाषा से]

$A^{-1}(AB)(AB)^{-1} = A^{-1}I$

$(A^{-1}A)B(AB)^{-1} = A^{-1}$, $[A^{-1}I = A^{-1}]$

$IB(AB)^{-1} = A^{-1}$

$B(AB)^{-1} = A^{-1}$

$B^{-1}.B(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$I(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

आव्यूह का प्रारंभिक रूपांतरण (Elementary Transformation of a Matrix)

आव्यूह पर निम्न छः संक्रियायें, जिनमें से तीन पंक्तियों से तथा तीन स्तंभों से सम्बन्धित हैं, प्रारंभिक रूपांतरण कहलाती हैं-

(i) किन्ही दो पंक्तियों (या दो स्तंभों) की परस्पर अदला-बदली।

(ii) किसी भी पंक्ति (अथवा स्तंभ) के अवयवों को किसी अशून्य अदिश राशि से गुणा करना।

(iii) किसी पंक्ति (अथवा स्तंभ) के अवयवों से किसी अन्य पंक्ति (अथवा स्तंभ) के संगत अवयवों को जिन्हें किसी अदिश से गुणा किया गया है, योग करना।

प्रारंभिक रूपांतरण में प्रयुक्त संकेत

(i) i वीं तथा j वीं पंक्तियों की अदला-बदली $R_i \leftrightarrow R_j$ से प्रदर्शित की जाती है।

(ii) i वीं पंक्ति के प्रत्येक अवयव से k का गुणा, जहाँ $k \neq 0, R_i \to kR_i$ से प्रदर्शित किया जाता है।

(iii) i वीं पंक्ति के अवयवों में j वीं पंक्ति के संगत अवयवों का k गुना जोड़ना, $R_i \to R_i + kR_j$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

इसी प्रकार संगत स्तंभ-रूपांतरण $C_i \leftrightarrow C_j, C_i \rightarrow kC_i$ तथा $C_i \rightarrow C_i + kC_j$ द्वारा प्रदर्शित होते हैं।

प्रारंभिक पंक्ति रूपांतरण द्वारा, किसी आव्यूहका व्युत्क्रम ज्ञात करना (To Find the Inverse of a Matrix, by Elementary Row Transformation)

माना, A क्रम n का एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। तब लिखा जा सकता है, कि

$$A = IA$$

माना, प्रारंभिक पंक्ति रूपांतरणों का एक क्रम A को I के वाम पक्ष में स्थानांतरित कर देता है तथा वही रूपांतरण I को एक आव्यूह B के दक्षिण पक्ष में स्थानांतरित कर देता है. तब.

$$I = BA$$

$$\therefore \quad IA^{-1} = (BA)A^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = B(AA^{-1})$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = BI$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = B.$$

उदाहरण प्रारंभिक पंक्ति रूपांतरण के उपयोग द्वारा

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

हल: A = AI के प्रयोग से,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A,$$

[संक्रिया $R_1 \leftrightarrow R_2$ से]

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1+1 & 1+2 & 2+3 \\ 3-1\times3 & 1-2\times3 & 1-3\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+0 & 0+1 & 0+0 \\ 0-0\times3 & 0-1\times3 & 1-0\times3 \end{bmatrix} A,$$

[संक्रिया $R_2 \to R_2 + R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - 3R_1$ से]

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{0}{3} & \frac{3}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{0}{3} \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A,$$

[संक्रिया $R_2 \to \frac{1}{3}R_2$ से]

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-0\times2 & 2-1\times2 & 3-\frac{2\times5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0+0\times5 & -5+1\times5 & -8+\frac{5\times5}{3} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0-\frac{2}{3} & 1-\frac{2}{3} & 0-0\times 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0+\frac{5}{3} & -3+\frac{5}{3} & 1+0\times 5 \end{bmatrix}A,$$

[संक्रिया $R_1 \to R_1 - 2R_2$ तथा $R_3 \to R_3 + 5R_1$ से]

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0\times 3 & 0\times 3 & \frac{3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{3}\times 3 & -\frac{4}{3}\times 3 & 1\times 3 \end{bmatrix} A,$$

[संक्रिया $R_3 \to 3\times R_3$ से]

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+\frac{0}{3} & 0+\frac{0}{3} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} \\ 0-0\times\frac{5}{3} & 1-0\times\frac{5}{3} & \frac{5}{3}-\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{3}+\frac{5}{3} & \frac{1}{3}-\frac{4}{3} & 0+\frac{3}{3} \\ \frac{1}{3}-\frac{5\times5}{3} & \frac{1}{3}+\frac{4\times5}{3} & 0-\frac{3\times5}{3} \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} A,$$

[संक्रिया $R_1 \to R_1 + \frac{1}{3}R_3$ तथा $R_2 \to R_2 - \frac{5}{3}R_3$ से]

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -8 & 7 & -5 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} A$$

अत: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -8 & 7 & -5 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$

उदाहरण

किसी विधानसभा चुनाव के दौरान एक राजनैतिक दल ने अपने उम्मीदवार के प्रचार हेतु एक जनसंपर्क फर्म को ठेके पर अनुबंधित किया। प्रचार हेतु तीन विधियों द्वारा संपर्क स्थापित करना निश्चित हुआ।ये हैं-टेलीफोन द्वारा, घर-घर जाकर तथा पर्चा वितरण द्वारा। प्रत्येक संपर्क का शुल्क (पैसों में) नीचे आव्यूह A में व्यक्त है-

प्रति संपर्क मूल्य

$$A = \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{टेलीफोन द्वारा} \\ \text{घर जाकर} \\ \text{पर्चा द्वारा} \end{matrix}$$

x तथा y दो शहरों में प्रत्येक प्रकार के संपर्कों की संख्या आव्यूह

$$B = \begin{bmatrix} \text{टेलीफोन} & \text{घर जाकर} & \text{पर्चा द्वारा} \\ 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \to X \text{ में व्यक्त है।} \\ \to Y \end{matrix}$$

x तथा y शहरों में राजनैतिक दल द्वारा व्यय की गई कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

हल : $BA = \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad BA = \begin{bmatrix} 1000 \times 40 + 500 \times 100 + 5000 \times 50 \\ 3000 \times 40 + 1000 \times 100 + 10000 \times 50 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad BA = \begin{bmatrix} 340000 \\ 720000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

अतः दल द्वारा दोनों शहरों में व्यय की गई कुल धन राशि क्रमशः 3,40,000 पैसे व 7,20,000 पैसे अर्थात् 3,400 रु. तथा 7,200 रु. है।

उदाहरण

प्रारंभिक पंक्ति रूपांतरण के उपयोग द्वारा

13 31 आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

हल: A = AI के प्रयोग से,

$$\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&3&3\\1-1&4-3&3-3\\1-1&3-3&4-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0-1&1-0&0-0\\0-1&0-0&1-0\end{bmatrix}A,$$

[संक्रिया $R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से]

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1-0\times3&3-1\times3&3-0\times3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+3\times1&0-1\times3&0-0\times3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}A,$$

[संक्रिया $R_1 \to R_1 - 3R_2$, से]

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-3&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1-0\times3&0-0\times3&3-1\times3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+1\times3&-3-0\times3&0-1\times3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}A,$$

[संक्रिया $R_1 \to R_1 - 3R_3$, से]

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

अतः $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\because AA^{-1} = I.]$$

उदाहरण

प्रारंभिक संक्रियाओं का प्रयोग करके आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिये।

हल : हम जानते हैं कि

$A = AI$, जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

संक्रिया $R_1 \to R_1 - R_2$, से,

$$\begin{bmatrix} 6-5 & 5-4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0 & 0-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

संक्रिया $R_2 \to R_2 - 5 \times R_1$ से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5-1\times5 & 4-1\times5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0-1\times5 & 1+1\times5 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} A$$

संक्रिया $R_2 \to R_2 (-1)$ से,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} A$$

संक्रिया $R_1 \to R_1 - R_2$ से,

$$\begin{bmatrix} 1-0 & 1-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-5 & -1+6 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} A$$

$AA^{-1} = I$ से,

अत: $$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 3.1 (पृष्ठ संख्या 70-71)

प्रश्न 1.

आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$ के लिए ज्ञात कीजिए:

i. आव्यूह की कोटि
ii. अवयवों की संख्या
iii. अवयव a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23}

उत्तर-

i. चूँकि

iii. अवयव $a_{13} = 19$, $a_{21} = 35$, $a_{33} = -5$, $a_{24} = 12$, $a_{23} = \frac{5}{2}$

प्रश्न 2. यदि किसी आव्यूह में 24 अवयव हैं तो इसकी सम्भव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 13 अवयव हों, तो कोटियाँ क्या होंगी?

उत्तर- 24 अवयव वाले आव्यूह की सम्भव कोटियाँ होंगी।

1×24, 2×12, 3×8, 4×6, 6×4, 8×3, 12×2, 24×1

13 अवयव वाले आव्यूह की सम्भव कोटियाँ होंगी।

1×13, 13×1

प्रश्न 3. यदि किसी आव्यूह में 18 अवयव हैं तो इसकी सम्भव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 5 अवयव हों तो क्या होगा?

उत्तर- 18 अवयव वाले आव्यूह की सम्भव कोटियाँ होंगी।

1 × 18, 2 × 9, 3 × 6, 6 × 3, 9 × 2, 18 × 1

5 अवयव वाले आव्यूह की सम्भव कोटियाँ होंगी 1 × 5, 5 × 1

प्रश्न 4. एक 2 × 2 आव्यूह A = [aij] की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से दिए गए हैं।

i. $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$

ii. $a_{ij} = \frac{i}{j}$

iii. $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

उत्तर-

i. एक 2 × 2 क्रम का आव्यूह होगा।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{(1+1)^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2$$

$$a_{12} = \frac{(1+2)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$a_{21} = \frac{(2+1)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$a_{22} = \frac{(2+2)^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट आव्यूह } \begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$$

ii. एक 2 × 2 क्रम का आव्यूह होगा।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{1}{1} = 1,\ a_{12} = \frac{1}{2},\ a_{21} = \frac{2}{1} = 2,\ a_{22} = \frac{2}{2} = 1$$

$\therefore$ अभीष्ट आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

iii. एक 2 × 2 क्रम का आव्यूह होगा।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\because\ a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$$

$$\therefore\ a_{11} = \frac{(1+2\times1)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$a_{12} = \frac{(1+2\times2)^2}{2} = \frac{25}{2}$$

$$a_{21} = \frac{(2+2\times1)^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$a_{22} = \frac{(2+2\times2)^2}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$\therefore$ अभीष्ट आव्यूह $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

प्रश्न 5. एक 3 × 4 आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त होते हैं-

i. $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i+j|$

ii. $a_{ij} = 2i - j$

उत्तर-

i. 3 × 4 क्रम का आव्यूह होगा।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$\because\ a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$

$\therefore\ a_{11} = \frac{1}{2}|-3 \times 1 + 1| = 1,\ a_{12} = \frac{1}{2}|-3 \times 1 + 2| = \frac{1}{2}$

$a_{13} = \frac{1}{2}|-3 \times 1 + 3| = 0,\ a_{14} = \frac{1}{2}|-3 \times 1 + 4| = \frac{1}{2}$

$a_{21} = \frac{1}{2}|-3 \times 2 + 1| = \frac{5}{2},\ a_{22} = \frac{1}{2}|-3 \times 2 + 2| = 2$

$a_{23} = \frac{1}{2}|-3 \times 2 + 3| = \frac{3}{2},\ a_{24} = \frac{1}{2}|-3 \times 2 + 4| = 1$

$a_{31} = \frac{1}{2}|-3 \times 3 + 1| = 4,\ a_{32} = \frac{1}{2}|-3 \times 3 + 2| = \frac{7}{2}$

$a_{33} = \frac{1}{2}|-3 \times 3 + 3| = 3,\ a_{34} = \frac{1}{2}|-3 \times 3 + 4| = \frac{5}{2}$

$\therefore$ अभीष्ट आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

ii. 3 × 4 क्रम का आव्यूह होगा।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$\because\ a_{ij} = 2i - j,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, 4$

$\therefore\ a_{11} = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$

$a_{21} = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$a_{31} = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

$a_{12} = 2 \times 1 - 2 = 2 - 2 = 0$

$a_{22} = 2 \times 2 - 2 = 4 - 2 = 2$

$a_{32} = 2 \times 3 - 2 = 6 - 2 = 4$

$a_{13} = 2 \times 1 - 3 = 2 - 3 = -1$

$a_{23} = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$

$a_{33} = 2 \times 3 - 3 = 6 - 3 = 3$

$a_{14} = 2 \times 1 - 4 = 2 - 4 = -2$

$a_{24} = 2 \times 2 - 4 = 4 - 4 = 0$

$a_{34} = 2 \times 3 - 4 = 6 - 4 = 2$

$\therefore$ अभीष्ट आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न 6. निम्नलिखित समीकरणों से x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए-

i.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ii.

$$\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

iii.

$$\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

i. प्रत्येक खण्ड में दिये गए दोनों आव्यूह समान हैं।

दोनों आव्यूहों के संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$x = 1, y = 4, z = 3$

ii. दोनों आव्यूहों के संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$x + y = 6$ ...(1)

$5 + z = 5$

$\Rightarrow z = 0$ ...(2)

$\Rightarrow xy = 8$ ...(3)

समी. (1) व (3) को हल करने पर, $x = 4, y = 2$ या $x = 2, y = 4$

$\therefore x = 4, y = 2, 3 = 0,$ या $x = 2, y = 4, z = 0$

iii. दोनों आव्यूहों के संगत अवयवों की तुलना करने पर,

x + y + 2 = 9 ...(1)

x + 2 = 5 ...(2)

y + 2 = 7 ...(3)

समी (2) और समी (3) को जोड़ने पर, (x + y + z) + z = 12

9 + z = 12

⇒ z = 3

समी (2) से, x + 3 = 5

⇒ x = 2

तथा समी (3) से, y + 3 = 7 = y = 4

अत: x = 2, y = 4, z = 3

प्रश्न 7. समीकरण

$$\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

से a, b, c तथा d के मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- आव्यूह युग्म समान हैं।

संगत अवयवों की तुलना करने पर,

2d + b = 4 ...(1)

a - 2b = -3 ...(2)

5c - d = 11 ...(3)

4c + 3d = 24 ...(4)

समी. (1) को 2 से गुणा करके (2) में जोड़ने पर,

$5a = 5$

$\Rightarrow a = 1$

a का मान समी. (1) में रखने पर,

$2 \times 1 + b = 4$

$\Rightarrow b = 4 - 2 = 2$

समी. (3) को 3 से गुणा करके (4) में जोड़ने पर,

$19c = 57$

$\Rightarrow c = 3$

c का मान समी. (3) में रखने पर,

$5 \times 3 - d = 11$

$\Rightarrow d = 15 - 11 = 4$

$\therefore a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

प्रश्न 8. $A = [a_{ij}]m \times n$ एक वर्ग आव्यूह है यदि-

a. $m < n$

b. $m > n$

c. $m = n$

d. इनमें से कोई नहीं।

उत्तर-

c. $m = n$

हल:

∵ वर्ग आव्यूह में पंक्तियों की संख्या स्तम्भों की संख्या के बराबर होती है।

∴ m = n

प्रश्न 9. x तथा y के प्रदत्त किन मानों के लिए आव्यूहों के निम्नलिखित युग्म समान हैं?

$$\begin{bmatrix} 3x+7, & 5 \\ y+1, & 2-3x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

a. $x = \frac{-1}{3}, \ y = 7$

b. ज्ञात करना संभव नहीं है।

c. $y = 7, \ x = \frac{-2}{3}$

d. $x = \frac{-1}{3}, \ y = \frac{-2}{3}$

उत्तर-

b. ज्ञात करना संभव नहीं है।

हल:

यदि आव्यूह युग्म समान है तब,

$$\begin{bmatrix} 3x+7, & 5 \\ y+1, & 2-3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$3x + 7 = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{7}{3}$

तथा $2 - 3x = 4$

$\Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

∵ x के दो मान प्राप्त होते है।

∴ x, y के मान ज़ात करना संभव नहीं है जिनके लिए आव्यूह युग्म समान है।

प्रश्न 10. 3 × 3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल कितनी संख्या होगी जिनकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है?

a. 27
b. 18
c. 81
d. 512

उत्तर-

d. 512

हल:

3 × 3 कोटि के आव्यूह में अवयवों की कुल संख्या = 9

यदि प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है, तो प्रत्येक अवयव के लिए क्रमचय = 2

इसलिए अवयवों के लिए कुल क्रमचय = 2^9 = 512

प्रश्नावली 3.2 (पृष्ठ संख्या 87-91)

प्रश्न 1. मान लीजिए कि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

तो निम्नलिखित ज़ात कीजिए-

i. A + B
ii. A – B

iii. 3A – C

iv. AB

v. BA

उत्तर-

i.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1 & 4+3 \\ 3-2 & 2+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

ii.

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-1 & 4-3 \\ 3-(-2) & 2-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

iii.

$$3A - C = 3\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 4 \\ 3 \times 3 & 3 \times 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 15 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-(-2) & 12-5 \\ 9-3 & 6-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

iv.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

∵ A में स्तंभों की संख्या = 2 = बी में पक्तियाँ की संख्या,

अतः गुणन सम्भव है।

$$\therefore\ AB = \begin{bmatrix} 2\times1+4\times(-2) & 2\times3+4\times5 \\ 3\times1+2\times(-2) & 3\times3+2\times5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-8 & 6+20 \\ 3-4 & 9+20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$$

v.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times2+3\times3 & 1\times4+3\times2 \\ -2\times2+5\times3 & -2\times4+5\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+9 & 4+6 \\ -4+15 & -8+10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 2. निम्नलिखित को परिकलित किजिए-

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

उत्तर-

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a+a & b+b \\ b+b & a+a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$$

(ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a^2+b^2+2ab & b^2+c^2+2bc \\ a^2+c^2-2ac & a^2+b^2-2ab \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+12 & 4+7 & -6+6 \\ 8+8 & 5+0 & 16+5 \\ 2+3 & 8+2 & 5+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos^2 x + \sin^2 x & \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin^2 x + \cos^2 x & \cos^2 x + \sin^2 x \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

प्रश्न 3. निदर्शित गुणनफल परिकलित कीजिए-

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर-

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2\times2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}_{2\times2}$

$$= \begin{bmatrix} a\times a + b\times b & a\times(-b) + b\times a \\ -b\times a + a\times b & -b\times(-b) + a\times a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ab \\ -ab + ab & b^2 + a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ -0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{1\times3}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times2 & 1\times3 & 1\times4 \\ 2\times2 & 2\times3 & 2\times4 \\ 3\times2 & 3\times3 & 3\times4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1 + (-2)\times2 & 1\times2 + (-2)\times3 & 1\times3 + (-2)\times1 \\ 2\times1 + 3\times2 & 2\times2 + 3\times3 & 2\times3 + 3\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-4 & 2-6 & 3-2 \\ 2+6 & 4+9 & 6+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 1+3\times 0+4\times 3 & 2\times(-3)+3\times 2+4\times 0 & 2\times 5+3\times 4+4\times 5 \\ 3\times 1+4\times 0+5\times 3 & 3\times(-3)+4\times 2+5\times 0 & 3\times 5+4\times 4+5\times 5 \\ 4\times 1+5\times 0+6\times 3 & 4\times(-3)+5\times 2+6\times 0 & 4\times 5+5\times 4+6\times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0+12 & -6+6+0 & 10+12+20 \\ 3+0+15 & -9+8+0 & 15+16+25 \\ 4+0+18 & -12+10+0 & 20+20+30 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

(v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 1+1\times(-1) & 2\times 0+1\times 2 & 2\times 1+1\times 1 \\ 3\times 1+2\times(-1) & 3\times 0+2\times 2 & 3\times 1+2\times 1 \\ -1\times 1+1\times(-1) & -1\times 0+1\times 2 & -1\times 1+1\times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-1 & 0+2 & 2+1 \\ 3-2 & 0+4 & 3+2 \\ -1-1 & 0+2 & -1+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\text{(vi)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times2+(-1)\times1+3\times3 & 3\times(-3)+(-1)\times0+3\times1 \\ -1\times2+0\times1+2\times3 & -1\times(-3)+0\times0+2\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-1+9 & -9+0+3 \\ -2+0+6 & 3+0+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

प्रश्न 4. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ तथा } C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

तो (A + B) तथा (B - C) परिकलित कीजिए। साथ ही सत्यापित कीजिए कि A + (B - C) = (A + B) - C

उत्तर-

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3 & 2-1 & -3+2 \\ 5+4 & 0+2 & 2+5 \\ 1+2 & -1+0 & 1+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B - C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-4 & -1-1 & 2-2 \\ 4-0 & 2-3 & 5-2 \\ 2-1 & 0-(-2) & 3-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

पुनः $A + (B - C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1-1 & 2-2 & -3+0 \\ 5+4 & 0-1 & 2+3 \\ 1+1 & -1+2 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 9 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

तथा $(A + B) - C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4-4 & 1-1 & -1-2 \\ 9-0 & 2-3 & 7-2 \\ 3-1 & -1-(2) & 4-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 9 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

स्पष्ट है कि $A + (B - C) = (A + B) - C$

प्रश्न 5. यदि

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

तो 3A - 5B परिकलित कीजिए।

उत्तर-

$$3A = 3\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{और } 5B = 5\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 3A - 5B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 3-3 & 5-5 \\ 1-1 & 2-2 & 4-4 \\ 7-7 & 6-6 & 2-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 6. सरल कीजिए,

$$\cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$\cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 7. X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि-

$$\text{i} \quad X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ तथा } XY = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii} \quad 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ तथा } 3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

i. दिया गया समीकरण,

$$X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ तथा } XY = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \ldots (i)$$

$$XY = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \ldots (ii)$$

समी. (i) और (ii) को जोड़ने पर,

$$\Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7+3 & 0+0 \\ 2+0 & 5+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

समी. (i) और (ii) का गुणा करने पर,

$$\Rightarrow 2Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3 & 0-0 \\ 2-0 & 5-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ii. दिया गया समीकरण,

$$2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ तथा } 3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2\,X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \ldots (i)$$

$$3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \ldots (ii)$$

समी. (i) में 2 का गुणा करने पर,

$$\Rightarrow 4X + 6Y = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \ldots (iii)$$

समी. (ii) में 3 का गुणा करने पर,

$$\Rightarrow 9X + 6Y = 3\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -3 & 15 \end{bmatrix} \ldots (iv)$$

समी. (iv) में से समी. (iii) को घटाने पर,

$$\Rightarrow 5X = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -3 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-4 & -6-6 \\ -3-8 & 15-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ -11 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -12 \\ -11 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{11}{5} & 3 \end{bmatrix}$$

अब समी. (i) से,

$$\Rightarrow 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - 2X$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{11}{5} & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{24}{5} \\ -\frac{22}{5} & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\frac{4}{5} & 3+\frac{24}{5} \\ 4+\frac{22}{5} & 0-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{39}{5} \\ \frac{42}{5} & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{39}{5} \\ \frac{42}{5} & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 8. X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि-

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ तथा } 2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$ में Y का मान रखने पर,

$$2X + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{या } 2X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-3 & 0-2 \\ -3-1 & 2-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 9. x तथा y ज़ात कीजिए यदि-

$$2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2+y & 6 \\ 1 & 2x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$2+y=5$ और $2x+2=8$

$\Rightarrow y-5-2$ और $2(x+1)=8$

$\Rightarrow y=3$ और $x+1=4$

$\Rightarrow y=3$ और $x=3$

प्रश्न 10. प्रदत्त समीकरण को x, y, z तथा t के लिए हल कीजिए यदि-

$$2\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

उत्तर- दिया गया समीकरण,

$$2\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

या $\begin{bmatrix} 2x & 2z \\ 2y & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix} 2x+3 & 2z-3 \\ 2y+0 & 2t+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$

संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$\Rightarrow 2x+3=9$

$\Rightarrow x=\frac{9-3}{2}=\frac{6}{2}=3$

$\Rightarrow 2y=12$

$\Rightarrow y=\frac{12}{2}=6$

$$\Rightarrow 2z - 3 = 15$$

$$\Rightarrow z = \frac{15+3}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$\Rightarrow 2t + 6 = 18$$

$$\Rightarrow t = \frac{18-6}{2} = 6$$

$$\therefore\ x = 3,\ y = 6,\ z = 9,\ t = 6$$

प्रश्न 11. यदि

$$x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$$

है, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

प्रश्नानुसार, $x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix}2x\\3x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-y\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix}2x-y\\3x+y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow 2x - y = 10 \ldots (i)$$

तथा $3x + y = 5 \ldots (ii)$

समी. (i) व (ii) को जोड़ने पर,

$$5x = 15$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{5} = 3$$

x का मान समी. (i) में रखने पर,

$$2 \times 3 - y = 10 \text{ या } y = 6 - 10 = -4$$

$$\therefore x = 3,\ y = -4$$

प्रश्न 12. यदि

$$3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$$

x, y, z तथा w के मानों को ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया गया समीकरण,

$$3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{या } \begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & 6+x+y \\ -1+z+w & 2w+3 \end{bmatrix}$$

दोनों और संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$$3x = x + 4$$

$$\Rightarrow 2x = 4 \text{ या } x = 2$$

$$3y = 6 + x + y$$

$$\Rightarrow 2y = 6 + x = 6 + 2 = 8$$

$$\Rightarrow y = \frac{8}{2} = 4$$

$$3w = 2w + 3$$

$$\Rightarrow w = 3$$

$$3z = -1 + z + w$$

$$\Rightarrow 2z = -1 + 3 = 2$$

$$\Rightarrow z = 1$$

$$\therefore\ x = 2,\ y = 4,\ w = 3,\ z = 1$$

प्रश्न 13. यदि

$$F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

है, तो सिद्ध कीजिए कि- F(x)F(y) = F(x + y)

उत्तर-

$$\because\ F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ F(y) = \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{ बायाँ पक्ष } F(x)\cdot F(y) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x\cos y - \sin x\sin y + 0 & -\cos x\sin y - \sin x\cos y + 0 & 0 \\ \sin x\cos y + \cos x\sin y + 0 & -\sin x\sin y + \cos x\cos y + 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= F(x+y) \text{ दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 14. दर्शाइए कि-

i $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

ii $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

उत्तर-

i. बायाँ पक्ष

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 2 + (-1) \times 3 & 5 \times 1 + (-1) \times 4 \\ 6 \times 2 + 7 \times 3 & 6 \times 1 + 7 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 - 3 & 5 - 4 \\ 12 + 21 & 6 + 28 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 33 & 34 \end{bmatrix}$$

दायाँ पक्ष $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 1 \times 6 & 2 \times (-1) + 1 \times 7) \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 & 3 \times (-1) + 4 \times 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + 6 & -2 + 7 \\ 15 + 24 & -3 + 28 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 39 & 25 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $\neq$ दायाँ पक्ष

इति सिद्धम।

ii. बायाँ पक्ष

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times(-1)+2\times 0+3\times 2 & 1\times 1+2\times(-1)+3\times 3 & 1\times 0+2\times 1+3\times 4 \\ 0\times(-1)+1\times 0+0\times 2 & 0\times 1+1\times(-1)+0\times 3 & 0\times 0+1\times 1+0\times 4 \\ 1\times(-1)+1\times 0+0\times 2 & 1\times 1+1\times(-1)+0\times 3 & 1\times 0+1\times 1+0\times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+0+6 & 1-2+9 & 0+12+12 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1+0+0 & 1-1+0 & 0+1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

दायाँ पक्ष $= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1\times 1+1\times 0+0\times 1 & -1\times 2+1\times 1+0\times 1 & -1\times 3+1\times 0+0\times + \\ 0\times 1+(-1)\times 0+1\times 1 & 0\times 2+(-1)\times 1+1\times 1 & 0\times 3+(-1)\times 0+1\times 0 \\ 2\times 1+3\times 0+4\times 1 & 2\times 2+3\times 1+4\times 1 & 2\times 3+3\times 0+4\times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+0+0 & -2+1+0 & -3+0+0 \\ 0+0+1 & 0-1+1 & 0+0+0 \\ 2+0+4 & 4+3+4 & 6+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

बायाँ पक्ष ≠ दायाँ पक्ष

इति सिद्धम।

प्रश्न 15. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

है तो A^2 - 5A + 6I, का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+0+1 & 0+0-1 & 2+0+0 \\ 4+2+3 & 0+1-3 & 2+3+0 \\ 2-2+0 & 0-1-0 & 1-3+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^2 - 5A + 6I = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-10+6 & -1-0+0 & 2-5+0 \\ 9-10+0 & -2-5+6 & 5-15+0 \\ 0-5+0 & -1+5+0 & -2-0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 16. यदि

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

है तो सिद्ध कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$

उत्तर-

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+0\times0+2\times2 & 1\times0+0\times2+2\times0 & 1\times2+0\times1+2\times3 \\ 0\times1+2\times0+1\times2 & 0\times0+2\times2+1\times0 & 0\times2+2\times1+1\times3 \\ 2\times1+0\times0+3\times2 & 2\times0+0\times2+3\times0 & 2\times2+0\times1+3\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+4 & 0+0+0 & 2+0+6 \\ 0+0+2 & 0+4+0 & 0+2+3 \\ 2+0+6 & 0+0+0 & 4+0+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5\times1+0\times0+8\times2 & 5\times0+0\times2+8\times0 & 5\times2+0\times1+8\times3 \\ 2\times1+4\times0+5\times2 & 2\times0+4\times2+5\times0 & 2\times2+4\times1+5\times3 \\ 8\times1+0\times0+13\times2 & 8\times0+0\times2+13\times0 & 8\times2+0\times1+13\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+0+16 & 0+0+0 & 10+0+24 \\ 2+0+10 & 0+8+0 & 4+4+15 \\ 8+0+26 & 0+0+0 & 16+0+39 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

बायाँ पक्ष $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 & 0 & 48 \\ 12 & 24 & 30 \\ 48 & 0 & 78 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 14 & 7 \\ 14 & 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21-30+7+2 & 0-0+0+0 & 34-48+14+0 \\ 12-12+0+0 & 8-24+14+2 & 23-30+7+0 \\ 34-48+14+0 & 0-0+0+0 & 55-78+21+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30-30 & 0 & 48-48 \\ 12-12 & 24-24 & 30-30 \\ 48-48 & 0 & 78-78 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

= 0 = दायाँ पक्ष

इति सिद्धम।

प्रश्न 17. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ तथा } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

एवं $A^2 = kA - 2I$ हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

प्रश्नानुसार, $A^2 = kA - 2I$

या $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix} 9-8 & -6+4 \\ 12-8 & -8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ 4k & -2k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k-2 & -2k \\ 4k & -2k-2 \end{bmatrix}$

संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$3k - 2 = 1$ या $3k = 3$

$k = 1$

प्रश्न 18. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

तथा I कोटि 2 का एक तत्समक आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$\text{बायाँ पक्ष} = (I + A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix} \ldots.(i)$$

$$\text{अब} = (I - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\alpha}{2} \\ -\tan\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\alpha}{2} \\ -\tan\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\alpha}{2} \\ -\tan\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} & \frac{-2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} & \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}+2\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} & \frac{-2\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}-\tan^3\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{-\tan\frac{\alpha}{2}+\tan^3\frac{\alpha}{2}+2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} & \frac{2\tan^2\frac{\alpha}{2}+1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} & \frac{-\tan\frac{\alpha}{2}-\tan^3\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan^3\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} & \frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix} \ldots.(ii)$$

अतः समी. (i) व (ii) से,

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

इति सिद्धम।

प्रश्न 19. किसी व्यापार संघ के पास 30000 रुपयों का कोष है, जिसे दो भिन्न-भिन्न प्रकार के बांडों में निवेशित करना है। प्रथम बांड पर 5% वार्षिक तथा द्वितीय बांड पर 7% वार्षिक ब्याज प्राप्त होता है। आव्यूह गुणन के प्रयोग द्वारा यह निर्धारित कीजिए कि 30000 रुपयों के कोष को दो प्रकार के बांडों में निवेश करने के लिए किस प्रकार बाँटें जिससे व्यापार संघ को प्राप्त कुल वार्षिक ब्याज-

i. रुपयों 1800 हो।
ii. रुपयों 2000 हो।

उत्तर-

i. माना 30000 के दो भाग क्रमशः रुपयों x तथा रुपयों (30000 - x) हैं।

   आव्यूह A = [x (30000 - x)] से दर्शाते हैं।

ब्याज दरें क्रमशः $\frac{5}{100} = 0.05$ तथा $\frac{7}{100} = 0.07$ हैं।

इसे $R = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.07 \end{bmatrix}$ से दर्शाते हैं।

प्रश्नानुसार, कुल ब्याज = ₹ 1800

$\therefore$ कुल ब्याज $AR = [x(30000 - x)] \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.07 \end{bmatrix} = ₹\ [1800]$

$\Rightarrow [x(30000 - x)] \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.07 \end{bmatrix} = [1800]$

$\Rightarrow [x \times 0.05 + (30000 - x)] = [1800]$

$\Rightarrow [0.05x + 0.07(30000 - x)] = [1800]$

$\Rightarrow 0.05x + 2100 - 0.07x = 1800$

$\Rightarrow x(0.05 - 0.07) = 1800 - 2100$

$\Rightarrow -0.02x = -300$

$\Rightarrow x = \frac{300}{0.02} = ₹\ 15000$

∴ दूसरा भाग = 30000 - x = 30000 - 15000 = ₹ 15000

अतः प्रत्येक बांड का मूल्य = ₹ 15000

ii. यदि ब्याज = 2000 हो तब समीकरण AR = [2000]

$\Rightarrow [x(30000 - x)] \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.07 \end{bmatrix} = [2000]$

$\Rightarrow 0.05x + 0.07(30000 - x) = 2000$

$\Rightarrow 2100 + x(0.05 - 0.07) = 2000$

$\Rightarrow -0.02x = 2000 - 2100 = -100$

$$\Rightarrow x = \frac{100}{0.02} = \frac{10000}{2} = ₹\ 5000$$

दूसरा भाग = 30000 - x = 30000 - 5000 = ₹ 25000

अतः ₹ 2000 ब्याज प्राप्त करने के लिए ₹ 30000 के दो भाग क्रमशः ₹ 5000 तथा 25000 होंगे।

प्रश्न 20. किसी स्कूल की पुस्तकों की दुकान में 10 दर्जन रसायन विज्ञान, 8 दर्जन भौतिक विज्ञान तथा 10 दर्जन अर्थशास्त्र की पुस्तकें हैं। इन पुस्तकों का विक्रय मूल्य क्रमशः ₹ 80, ₹ 60 तथा ₹ 40 प्रति पुस्तक है। आव्यूह बीजगणित के प्रयोग द्वारा ज्ञात कीजिए कि सभी पुस्तकों को बेचने से दुकान को कुल कितनी धनराशि प्राप्त होगी?

उत्तर- विद्यालय में पुस्तकों की संख्या,

रसायन विज्ञान– 10 दर्जन = 120 पुस्तकें

भौतिक विज्ञान– 8 दर्जन = 96 पुस्तकें

अर्थशास्त्र– 10 दर्जन = 120 पुस्तकें

इसे आव्यूह A = [120 96 120] से प्रदर्शित करते हैं।

रसायन विज्ञान, भौतिक विज्ञान और अर्थशास्त्र की प्रत्येक पुस्तक का विक्रय मूल्य क्रमशः ₹ 80, ₹ 60 तथा ₹ 40 है।

इसे आव्यूह $R = \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \\ 40 \end{bmatrix}$ से प्रदर्शित करते हैं।

$$\therefore \text{ प्राप्त राशि, } AB = \begin{bmatrix} 120 & 96 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 120 \times 80 + 96 \times 60 + 120 \times 40 \end{bmatrix}$$

$$= [9600 + 5760 + 4800]$$

$$= [20160]$$

अतः कुल प्राप्त राशि = ₹ 20160

प्रश्न 21. PY + WY के परिभाषित होने के लिए n, k तथा p पर क्या प्रतिबन्ध होगा?

a. k = 3, 2 = n

b. k स्वेच्छ है, p = 2

c. p स्वेच्छ है, k = 3

d. k = 2, p = 3

उत्तर-

a. k = 3, 2 = n

हल:

दिया है, आव्यूह: X, Y, Z, W तथा P की कोटियाँ क्रमशः $2 \times n, 3 \times k, 2 \times p, n \times 3, p \times k$ हैं।

∴ P की कोटि = $p \times k$ तथा Y की कोटि = $3 \times k$

∴ PY संभव है यदि k = 3

PY की कोटि = $p \times k = p \times 3$

∴ W और Y की कोटियाँ क्रमशः $n \times 3$ और $3 \times k = 3 \times 3$

WY की कोटि = $n \times 3$

PY व WY का योग तभी सम्भव है जब यह दोनों एक ही कोटि के हों

∴ $p \times 3 = n \times 3 \Rightarrow p = n$

∴ PY + WY परिभाषित हैं यदि p = n और k = 3

प्रश्न 22. यदि n = p, तो आव्यूह 7x - 5z की कोटि है-

a. p × 2

b. 2 × n

c. n × 3

d. p × n

उत्तर-

b. 2 × n

हल:

आव्यूह X तथा Z की कोटियाँ क्रमशः 2 × n और 2 × p हैं।

आव्यूह 7X - 5Z परिभाषित होगा यदि X तथा Z एक ही कोटि के हों, क्योंकि p = n दोनों की कोटि 2 × n है।

प्रश्नावली 3.3 (पृष्ठ संख्या 96-98)

प्रश्न 1. निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक का परिवर्त ज्ञात कीजिए-

i $\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

ii $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

iii $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

उत्तर-

i. पंक्तियों को स्तम्भों में तथा स्तम्भों को पंक्तियों में बदलने पर प्राप्त आव्यूह परिवर्त आव्यूह होंगे।

$$\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \text{ का परिवर्त आव्यूह } \begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

ii. पंक्तियों को स्तम्भों में तथा स्तम्भों को पंक्तियों में बदलने पर प्राप्त आव्यूह परिवर्त आव्यूह होंगे।

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ का परिवर्त आव्यूह } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

iii. पंक्तियों को स्तम्भों में तथा स्तम्भों को पंक्तियों में बदलने पर प्राप्त आव्यूह परिवर्त आव्यूह होंगे।

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ का परिवर्त आव्यूह } \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 5 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 2. यदि

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

है तो सत्यापित कीजिए कि-

i. $(A + B)' = A' + B'$

ii. $(A - B)' = A' - B'$

उत्तर-

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 6 & 9 & 9 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

तथा $A - B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 9 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

i. $(A + B)' = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 6 & 9 & 9 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -1 \\ 3 & 9 & 4 \\ -2 & 9 & 2 \end{bmatrix} \ldots (i)$

तथा $A' + B' = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -1 \\ 3 & 9 & 4 \\ -2 & 9 & 2 \end{bmatrix} \ldots (ii)$

∴ समी. (i) व (ii) से, (A + B)' = A' + B'

ii. $(A-B)' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 9 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \ldots \text{(iii)}$

तथा $A' - B' = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \ldots \text{(iv)}$

∴ समी. (iii) व (iv) से, (A - B)' = A' - B'

प्रश्न 3. यदि

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

है तो सत्यापित कीजिए कि-

i. $(A+B)' = A' + B'$

ii. $(A-B)' = A' - B'$

उत्तर-

i. हम जानते है कि, A=(A′)′

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A+B)' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A' + B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)' = A' + B'$$

i. $$A - B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A-B)' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A' - B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)' = A' - B'$$

ii.

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A-B)' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A' - B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)' = A' - B'$$

प्रश्न 4. यदि

$$A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

है तो (A + 2B)′ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\because\ A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2B = 2 \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ (A + 2B) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A + 2B) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A + 2B)' = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 5. A तथा B आव्यूहों के लिए सत्यापित कीजिए कि (AB)’ = B’A’, जहाँ-

$$\text{i}\quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii}\quad A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

i.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times (-1) & 1 \times 2 & 1 \times 1 \\ -4 \times (-1) & -4 \times 2 & -4 \times 1 \\ 3 \times (-1) & 3 \times 2 & 3 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & -4 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

बायाँ पक्ष $= (AB)' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & -4 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

$$(AB)' = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & -8 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

दायाँ पक्ष $= B'A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$B'A' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \times 1 & -1 \times (-4) & -1 \times 3 \\ 2 \times 1 & 2 \times (-4) & 2 \times 3 \\ 1 \times 1 & 1 \times (-4) & 1 \times 3 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & -8 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ = बायाँ पक्ष

अतः $(AB') = B'A'$ इति सिद्धम।

ii.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \times 1 & 0 \times 5 & 0 \times 7 \\ 1 \times 1 & 1 \times 5 & 1 \times 7 \\ 2 \times 1 & 2 \times 5 & 2 \times 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

बायाँ पक्ष $= (AB) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 14 \end{bmatrix}$

$$(AB)' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

दायाँ पक्ष $B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 0 & 1 \times 1 & 1 \times 2 \\ 5 \times 0 & 5 \times 1 & 5 \times 10 \\ 7 \times 0 & 7 \times 1 & 7 \times 2 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$ = बायाँ पक्ष

अतः $(AB') = B'A'$ इति सिद्धम।

प्रश्न 6.

i. यदि

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

हो तो सत्यापित कीजिए कि A'A = I

ii. यदि

$$A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

हो तो सत्यापित कीजिए कि A'A = I

उत्तर-

i.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A'A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ii.

दिया है, $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

$$A' = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $A'A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \sin\alpha \times \sin\alpha) + (-\cos\alpha) \times (-\cos\alpha) & \sin\alpha \times \cos\alpha - \cos\alpha \times \sin\alpha) \\ \cos\alpha \times \sin\alpha - \sin\alpha \times \cos\alpha & \cos\alpha \times \cos\alpha + \sin\alpha \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

दायाँ पक्ष

इति सिद्धम।

प्रश्न 7.

i. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

एक सममित आव्यूह है।

ii. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

एक विषम सममित आव्यूह है।

उत्तर-

i. दिया है।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

∴ आव्यूह A का सममित है।

ii. दिया है।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

∴ आव्यूह A विषम सममित है।

प्रश्न 8. आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

के लिए सत्यापित कीजिए कि-

i. (A + A’) एक सममित आव्यूह है।

ii. (A - A’) एक विषम सममित आव्यूह है।

उत्तर-

$$\because\ A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

i.

$$(A + A') = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(A + A')' = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\because\ (A + A') = (A + A')'$$

$\therefore\ (A + A')$ एक सममित आव्यूह है।

ii.

$$(A - A') = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A - A') = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - A')' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-(A - A') = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ (A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रश्न 9. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$ तो $\frac{1}{2}(A + A')$ तथा $\frac{1}{2}(A - A')$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ (A + A') = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + A') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ \frac{1}{2}(A + A') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

और $(A - A') = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$

$$(A - A') = \begin{bmatrix} 0 & 2a & 2b \\ -2a & 0 & 2c \\ -2b & -2c & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 2a & 2b \\ -2a & 0 & 2c \\ -2b & -2c & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}(A - A') = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 10. निम्नलिखित आव्यूहों को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए-

$$\text{i}\ \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii}\ \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii}\ \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv}\ \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

i.

$$\text{माना } A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A + A' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

माना $P = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

और $A - A' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3-3 & 5-1 \\ 1-5 & -1+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

माना $Q = \frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

अब $P' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = P$

$\therefore$ P समामित है।

और $Q' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - Q$

$\therefore$ Q विषम सममित है।

अब $P + Q = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$P + Q = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A$$

$\therefore$ A = P + Q, जहाँ P सममित तथा Q विषम सममित आव्यूह है।

ii.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; A + A' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + A' = \begin{bmatrix} 6+6 & (-2)+(-2) & 2+2 \\ (-2)+(-2) & 3+3 & (-1)+(-1) \\ 2+2 & (-1)+(-1) & 3+3 \end{bmatrix}$$

$$A + A' = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

और $A - A' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A - A' = \begin{bmatrix} 6-6 & (-2)-(-2) & 2-2 \\ -2-(-2) & 3-3 & (-1)-(-1) \\ 2-2 & (-1)-(-1) & 3-3 \end{bmatrix}$$

$$A - A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{माना } Q = \frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}(A - A') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{पुनः } P' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = P$$

∴ P सममित है।

$$\text{और } Q' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

∴ Q विषम सममित है।

$$\text{अब } P + Q = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P + Q = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

∴ A = P + Q, जहाँ P सममित तथा Q विषम सममित आव्यूह है।

iii.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + A' = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + A' = \begin{bmatrix} 3 \times 3 & 3 \times (-2) & (-1) \times (-4) \\ (-2) \times 3 & (-2) \times (-2) & 1 \times (-5) \\ (-4) \times (-1) & (-5) \times 1 & 2 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$A + A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ -\frac{5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

और $A - A' = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A - A' = \begin{bmatrix} 3 \times 3 & 3 \times (-2) & (-1) \times (-4) \\ (-2) \times 3 & (-2) \times (-2) & 1 \times (-5) \\ (-4) \times (-1) & (-5) \times 1 & 2 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$A - A' = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & 3 \\ -\frac{3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}(A - A') = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & 3 \\ -\frac{3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

पुनः $P' = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ -\frac{5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} = P$

∴ P सममित है।

और $Q' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & -3 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$

∴ विषम सममित है।

अब $P + Q = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ -\frac{5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & 3 \\ -\frac{3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$

$$P + Q = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} = A$$

∴ A = P + Q, जहाँ P सममित तथा Q विषम सममित आव्यूह है।

iv.

$$\text{माना } A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{अब } A + A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{माना } P = \frac{1}{2}(A + A') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{अब, } P = \frac{1}{2}(A + A')$$

$$A - A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}(A - A') = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

$$Q = \frac{1}{2}(A - A')$$

$$\text{अब } P + Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

$$P + Q = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

प्रश्न 11. सही उत्तर चुनिए।

यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो AB - BA एक-

a. विषम सममित आव्यूह है।
b. सममित आव्यूह है।
c. शून्य आव्यूह है।
d. तत्समक आव्यूह है।

उत्तर-

a. विषम सममित आव्यूह है।

हल:

चूँकि A और B समान कोटि की सममित आव्यूह है।

$$\therefore \; A' = A \text{ तथा } B' = B$$

$$(AB - BA)' = (AB)' - (BA)'$$

$$(AB - BA)' = B'A' - A'B'$$

$$(AB - BA)' = BA - AB \; [\because B' = B, A' = A]$$

$$(AB - BA)' = -(AB - BA)$$

AB - BA विषम सममित आव्यूह है।

प्रश्न 12. सही उत्तर चुनिए।

यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ तथा $A+A'=I$, तो α का मान है-

a. $\frac{\pi}{6}$

b. $\frac{\pi}{3}$

c. π

d. $\frac{3\pi}{2}$

उत्तर-

b. $\frac{\pi}{3}$

हल:

$$A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$A'=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A+A'=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\cos\alpha & 0\\ 0 & 2\cos\alpha\end{bmatrix}$$

प्रश्नानुसार, $A+A'=I$

$$\therefore\begin{bmatrix}2\cos\alpha & 0\\ 0 & 2\cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$2\cos\alpha=1$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3}$$

प्रश्नावली 3.4 (पृष्ठ संख्या 105-106)

आव्यूहों के व्युत्क्रम, यदि उनका अस्तित्व है तो प्रारम्भिक रूपान्तरण के प्रयोग से ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

दिया गया आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

आव्यूह A को A = IA के रूप में लिखने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \text{ या } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A \; R_2 \to R_2 - 2R_1$$

$$\text{या } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} A \; R_2 \to \frac{1}{5} R_2$$

$$\text{या } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} A \; R_1 \to R_1 + R_2$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

प्रश्न 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ इसलिए, A = IA जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \ [R_2 \leftrightarrow R_1]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A \ [R_2 \to R_2 - R_1]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

दिया गया आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

आव्यूह A को A = IA के रूप में लिखने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A \ R_2 \to R_2 - 2R_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A \ R_1 \to R_1 - 3R_2$$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 4.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

दिया गया आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$$A = IA$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A\ R_2 \Rightarrow R_2 - 2R_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A\ R_1 \Rightarrow R_1 - R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} A\ R_2 \Rightarrow R_2 - R_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} A\ R_2 \Rightarrow -R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} A\ R_1 \Rightarrow R_1 - 2R_2$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 5.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

दिया गया आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

$$A = IA$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} A \ R_2 \Rightarrow R_2 - 3R_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} A \ [R_1 \to R_1 - R_2]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} A \ [R_2 \to R_2 - R_1]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 6.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

दिया गया आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A = IA$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \; R_1 \Rightarrow R_1 - R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A \; R_2 \Rightarrow R_2 - R_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A \; R_1 \Rightarrow R_1 - 2R_2$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 7.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

दिया गया आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = IA$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A \; R_2 \Rightarrow R_2 - R_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A \; R_1 \Rightarrow R_1 - R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} A \; R_2 \Rightarrow R_2 - 2R_1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 8.

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

दिया गया आव्यूह $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$A = IA$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \; R_1 \Rightarrow R_1 - R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A \; R_2 \Rightarrow R_2 - 3R_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A \; R_1 \Rightarrow R_1 - R_2$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 9.

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

दिया गया आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

$A = IA$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \; R_1 \Rightarrow R_1 - R_2$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} A \; R_2 \Rightarrow R_2 - 2R_1$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} A \; R_1 \Rightarrow R_1 - 3R_2$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

प्रश्न 10.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

माना $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

$A = I_2 A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$R_1 \to R_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \to (-1) \times R_1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \to R_1 - R_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$$

$R_2 \to R_2 - 3R_1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} A$$

$R_2 \to \frac{1}{2} \times R_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} A$$

$R_1 \to R_1 + R_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} A$$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

प्रश्न 11.

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = IA$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \; R_1 \Rightarrow R_1 - R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A \; R_2 \Rightarrow R_2 - R_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A \; R_1 \Rightarrow R_1 + 2R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix} A \; R_1 \Rightarrow \frac{1}{2} R_1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 12.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$\text{माना } A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

हम जानते है कि, $\mathrm{A}=\mathrm{IA}$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathrm{A}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathrm{A}\ [\mathrm{R}_1 \rightarrow \mathrm{R}_1+3\mathrm{R}_2]$$

चूंकि पहली पंक्ति में दोनों अवयव शून्य हैं।

∴ A का व्युत्क्रम A-1 का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 13.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}=\mathrm{IA}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathrm{A}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathrm{A}\ \mathrm{R}_1 \Rightarrow \mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\mathrm{A}\ \mathrm{R}_2 \Rightarrow \mathrm{R}_2+\mathrm{R}_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\mathrm{A}\ \mathrm{R}_1 \Rightarrow \mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2$$

अतः $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न 14.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

माना, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ इसलिए, A = IA जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A \ [R_2 \to R_2 - 2R_1]$$

प्रश्न 15.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

दिया गया आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

आव्यूह A को A = IA के रूप में लिखने पर,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \; C_2 \to C_2 + C_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A \; C_1 \to C_3 - C_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A \; C_3 \to C_3 - 3C_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 & -2 \end{bmatrix} A \; C_1 \to C_1 - \frac{1}{5} C_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 0 & 3 \\ \frac{-1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & -2 \end{bmatrix} \; C_1 \to C_1 + \frac{1}{5} C_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \; C_2 \to \frac{1}{5}, C_2 \to \frac{1}{5} C_3$$

$$\therefore \; A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$$

प्रश्न 16.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$\text{माना } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

हम जानते हैं कि, A = IA

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 9 & -11 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \left[R_2 \to R_2 + 3R_1, R_3 \to R_3 - 2R_1\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 21 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -13 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \left[R_2 \to R_2 + 8R_3\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -65 \\ 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -3 & -24 \\ -13 & 1 & 8 \\ -15 & 1 & 9 \end{bmatrix} A \left[R_1 \to R_1 - 3R_2, R_3 \to R_3 + R_2\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -65 \\ 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -3 & -24 \\ -13 & 1 & 8 \\ -\frac{15}{25} & \frac{1}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix} A \left[R_3 \to \frac{1}{25} \times R_3\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{11}{25} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix} A \left[R_1 \to R_1 + 65R_3,\ R_2 \to R_2 - 21R_3\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{11}{25} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix} = -\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -25 & 10 & 15 \\ 10 & -4 & -11 \\ 15 & -1 & -9 \end{bmatrix} (\because AA^{-1} = I)$$

प्रश्न 17.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A\ R_1 \Leftrightarrow R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A\ R_1 - 2R_1 \Rightarrow R_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A\ R_2 - 2R_1 \Rightarrow R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \; R_2 \Rightarrow -R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \; R_2 \Rightarrow R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \; R_2 - R_3 \Rightarrow R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \; R_1 - R_2 \Rightarrow R_1$$

प्रश्न 18. आव्यूह A तथा B एक-दूसरे के व्युत्क्रम होंगे केवल यदि-

a. AB = BA

b. AB = BA = 0

c. AB = 0, BA = I

d. AB = BA = I

उत्तर-

d. AB = BA = I

हल:

AB = BA = 1, केवल इस स्थिति में ही आव्यूह A और आव्यूह B एक-दूसरे के व्युत्क्रम होंगे।

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 108-110)

प्रश्न 1. मान लिजिए कि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

हो तो दिखाइए कि सभी n ∈ N के लिए $(aI + bA)^n = a^nI + na^{n-1}bA$, जहाँ I कोटि 2 का तत्सम आव्यूह है।

उत्तर-

यहाँ, $(aI + bA)^n = a^nI + na^{n-1}bA$

इसलिए, $P(1): (aI + bA)^1 = aI + bA$

अतः परिणाम n = 1 के लिए सत्य है।

माना, परिणाम n = k के लिए सत्य है। इसलिए,

$$P(k): (aI + bA)^k = a^kI + na^{k-1}bA$$

अब हमे सिद्ध करना है कि परिणाम n = k + 1 के लिए सत्य है। अर्थात

$$P(k+1): (aI + bA)^{k+1} = a^{k+1}I + (k+1)a^kbA$$

$$L.H.S = (aI + bA)^{k+1}$$

$$= (aI + bA)^k(aI + bA)$$

$$= (a^kI + na^{k-1}bA)(aI + bA) \left[\text{क्योंकि } (aI + bA)^{k+1} = a^kI + na^{k-1}bA\right]$$

$$= a^{k+1}I^2 + a^kIbA + na^kIbA + na^{k-1}b^2A^2$$

$$= a^{k+1}I + (k+1)a^kbA \left[\text{क्योंकि } A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\right]$$

= R. H. S

अतः परिणाम n = k + 1 के लिए भी सत्य है। गणितीय आगमन के सिद्धान्त से प्रमाणित होता है कि $(aI + bA)^n = a^nI + na^{n-1}bA$, समस्त प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

प्रश्न 2.

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध किजिए कि $A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}, n \in N$

उत्तर-

यहाँ $P(n): A^n = A = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$

इसलिए, $P(1): A^1 = A = \begin{bmatrix} 3^0 & 3^0 & 3^0 \\ 3^0 & 3^0 & 3^0 \\ 3^0 & 3^0 & 3^0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

अतः परिणाम n = 1 के लिए सत्य है।

माना, परिणाम n = k के लिए सत्य है। इसलिए

$$P(k): A^k = \begin{bmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{bmatrix}$$

अब हमे सिद्ध करना है कि परिणाम n = k + 1 के लिए सत्य है। अर्थात

$$P(k+1): A^{k+1} = \begin{bmatrix} 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \end{bmatrix}$$

$$L.H.S = A^{k+1} = A^k A$$

$$= \begin{bmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} & 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} & 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} \\ 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} & 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} & 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} \\ 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} & 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} & 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 3^{k-1} & 3 \times 3^{k-1} & 3 \times 3^{k-1} \\ 3 \times 3^{k-1} & 3 \times 3^{k-1} & 3 \times 3^{k-1} \\ 3 \times 3^{k-1} & 3 \times 3^{k-1} & 3 \times 3^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \end{bmatrix}$$

$$= R.H.S$$

अतः, परिणाम n = k + 1 के लिए भी सत्य है। गणितीय आगमन के सिद्धांत से प्रमाणित होता है कि

$$A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$$

समस्त प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

प्रश्न 3. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

तो सिद्ध किजिए कि

$$A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$$

जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

उत्तर-

यहाँ $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$

इसलिए, $P(1)\colon A^1 = \begin{bmatrix} 1+2(1) & -4(1) \\ 1 & 1-2(1) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A$$

अतः परिणाम n = 1 के लिए सत्य है।

माना, परिणाम n = k के लिए सत्य है। इसलिए,

$$P(k)\colon A^k = \begin{bmatrix} 1+2k & -4k \\ k & 1-2k \end{bmatrix}$$

$$P(k+1)\colon A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1+2(k+1) & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{bmatrix}$$

$$L.H.S = A^{k+1} = A^k A$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2k & -4k \\ k & 1-2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+6k-4k & -4-8k+4k \\ 3k+1-2k & -4k-1+2k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(2k+2) & -4k-4 \\ k+1 & 1-(2k+2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2(k+1) & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{R.H.S}$$

अतः, परिणाम n = k + 1 के लिए भी सत्य है। गणितीय आगमन के सिद्धांत से प्रमाणित होता है कि

$$A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$$

समस्त प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

प्रश्न 4. यदि A तथा B सममित आव्यूह है तो सिद्ध कीजिए कि AB - BA एक विषम सममित आव्यूह है।

उत्तर-

$$(AB-BA)' = (AB)' - (BA)' \left[\because (X-Y)' = X' - Y'\right]$$

$$= B'A' - A'B' \left[\because (AB)' = B'A'\right]$$

$$= BA - AB \left[\because \text{दिया है } A' = A,\ B' = B\right]$$

$$= -(AB-BA)$$

$$(AB-BA') = -(AB-BA)$$

इसलिए, आव्यूह (AB - BA) एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रश्न 5. सिद्ध किजिए कि आव्यूह B'AB सममित अथवा विषम सममित है यदि A सममित अथवा विषम सममित है।

उत्तर- यदि A सममित आव्यूह है। तब A' = A

यहाँ, $(B'AB)' = (AB)'(B')'\ [\because (AB)' = B'A']$

$= (AB)'B\ [\because (B')' = B]$

$= B'A'B\ [\because (AB)' = B'A']$

$= B'AB\ [\because \text{दिया है, } A' = A]$

$(B'AB)' = B'AB$

इसलिए, आव्यूह B'AB एक सममित आव्यूह है।

यदि A विषम सममित आव्यूह है। तब A' = - A

यहाँ, $(B'AB)' = (AB)'(B')'\ [\because (AB)' = B'A']$

$= (AB)'B\ [\because (B')' = B]$

$= B'A'B\ [\because (AB)' = B'A']$

$= B'AB\ [\because \text{दिया है, } A' = A]$

$(B'AB)' = -B'AB$

इसलिए, आव्यूह B'AB एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रश्न 6. x, y तथा z के मानो को ज़ात किजिए, यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$$

समीकरण A'A = I को संतुष्ट करता है।

उत्तर- दिया है, A'A = I

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x & x \\ 2y & y & -y \\ z & -z & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0+4y^2+z^2 & 0+2y^2-z^2 & 0-2y^2+z^2 \\ 0+2y^2-z^2 & x^2+y^2+z^2 & x^2-y^2-z^2 \\ 0-2y^2+z^2 & x^2-y^2-z^2 & x^2+y^2+z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

यदि दो आव्यूह समान है तो उनके संगत अवयव भी समान होते है, इसलिए

$$4y^2+z^2=1,\ 2y^2-z^2=0 \text{ तथा } x^2+y^2+z^2=1$$

$$.\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \text{ तथा } z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

प्रश्न 7. x के किस मान के लिए

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0 \text{ है?}$$

उत्तर-

$$\text{दिया है, } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+4+1 & 2+0+0 & 0+2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0+4+4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4 + 4x = 0$$

$$\Rightarrow x = -1$$

प्रश्न 8. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

हो तो सिद्ध किजिए कि A2 - 5A + 7I = O है।

उत्तर-

$$\text{L.H.S} = A^2 - 5A + 7I$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 = \text{R.H.S}$$

प्रश्न 9. यदि

$$\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दिया है, $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+0-2 & 0-10+10 & 2x-5-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x-2 & -10 & 2x-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x^2-2x-40+2x-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^2 = 48$$

$$\Rightarrow x = \pm 4\sqrt{3}$$

प्रश्न 10. एक निर्माता तीन प्रकार की वस्तुएँ x, y तथा z का उत्पादन करता है जिन का वह दो बाजारों में विक्रय करता है। वस्तुओ की वार्षिक बिक्री नीचे सूचित (निदेशित है):

बाज़ार	उत्पादन		
I	10,000	2,000	18,000
II	6,000	20,000	8,000

i. यदि x, y तथा z की प्रत्येक इकाई का विक्रय मूलय क्रमशः ₹ 2.50, ₹ 1.50 तथा ₹ 1.00 है तो प्रत्येक बाज़ार में कुल आय (Revenue), आव्यूह बीजगणित की सहायता से ज्ञात कीजिए।

ii. यदि उपर्युक्त तीन वस्तुओ की प्रत्येक इकाई की लागत (Cost) क्रमशः ₹ 2.00, ₹ 1.00 तथा पैसे 50 है तो लाभ (Gross profit) ज्ञात किजिए।

उत्तर-

i. यदि x, y तथा z की प्रत्येक इकाई का विक्रय मूल्य क्रमशः ₹ 2.50, ₹ 1.50 तथा ₹ 1.00 है तो,

	वस्तुएँ	विक्रय मूल्य
बाजार I बाजार II	$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array}$ $\begin{bmatrix} 10000 & 2000 & 18000 \\ 6000 & 20000 & 8000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ₹\ 2.50 \\ ₹\ 1.50 \\ ₹\ 1.00 \end{bmatrix}$

प्रत्येक बाज़ार में कुल आय

$$= \begin{bmatrix} 10000 & 2000 & 18000 \\ 6000 & 20000 & 8000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ₹\ 2.50 \\ ₹\ 1.50 \\ ₹\ 1.00 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ₹\ 25000 + ₹\ 3000 + ₹\ 18000 \\ ₹\ 15000 + ₹\ 30000 + ₹\ 8000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ₹\ 46000 \\ ₹\ 53000 \end{bmatrix}$$

अतः, बाज़ार I में कुल आय ₹ 46000 तथा बाज़ार II में कुल आय ₹ 53000 है।

ii. यदि x, y तथा 2 की प्रत्येक इकाई की लागत क्रमशः ₹ 2.00, ₹ 1.00 तथा 50 पैसे है तो

	वस्तुएँ	लागत
बाजार I बाजार II	$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$ $\begin{bmatrix} 10000 & 2000 & 18000 \\ 6000 & 20000 & 8000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ₹\,2.00 \\ ₹\,1.00 \\ ₹\,0.50 \end{bmatrix}$

प्रत्येक बाज़ार में कुल लागत

$$= \begin{bmatrix} 10000 & 2000 & 18000 \\ 6000 & 20000 & 8000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ₹\,2.00 \\ ₹\,1.00 \\ ₹\,0.50 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ₹\,20000 + ₹\,2000 + ₹\,9000 \\ ₹\,12000 + ₹\,20000 + ₹\,4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ₹\,31000 \\ ₹\,36000 \end{bmatrix}$$

बाज़ार I में कुल आय ₹ 46000 तथा कुल लागत ₹ 31000 है।

अतः, कुल लाभ = आय - लागत = ₹ 46000 - ₹ 31000 = ₹ 15000

बाज़ार II में कुल आय ₹ 53000 तथा कुल लागत ₹ 36000 है।

अतः, कुल लाभ = आय - लागत = ₹ 53000 - ₹ 36000 = ₹ 17000

प्रश्न 11. आव्यूह X ज्ञात कीजिये, यदि

$$X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

उत्तर-

माना, $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\text{इसलिए, } X\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}a+4b & 2a+5b & 3a+6b\\c+4d & 2c+5d & 3c+6d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

यदि दो आव्यूह समान है तो उनके संगत अवयव भी समान होते है, इसलिए,

a + 4b = -7, 2a + 5b = -8, c+ 4d = 2 तथा 2c + 5d = 4

हल करने पर, a = 1, b = 2, c = 2 तथा d = 0

$$\text{इसलिए, } X=\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 0\end{bmatrix}$$

प्रश्न 12. यदि A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह इस प्रकार हैं कि AB = BA है तो गणितीय आगमन द्वारा सिद्ध कीजिए कि $AB^n = B^nA$ होगा। इसके अतिरिक्त सिद्ध कीजिए कि समस्त n ∈ N के लिए $(AB)^n = A^nB^n$ होगा।

उत्तर- यहाँ, P(n): $AB^n = B^nA$

इसलिए, P(1): AB = BA

अतः, परिणाम n = 1 के लिए सत्य है।

माना, परिणाम n = k के लिए सत्य है। इसलिए, P(R): $AB^k = B^kA$

अब हमें सिद्ध करना है कि परिणाम n = k + 1 के लिए भी सत्य है। अर्थात,

P(k + 1): $AB^{k+1} = B^{k+1}A$

दायाँ पक्ष = AB^{k+1}

= AB^kB [क्योंकि $AB^k = B^kA$]

= B^kAB [क्योंकि AB = BA]

= $B^{k+1}A$ बायाँ पक्ष

अतः, परिणाम n = k + 1 के लिए भी सत्य है। गणितीय आगमन के सिद्धांत से प्रमाणित होता है कि $AB^n = B^nA$, समस्त प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

यदि $(AB)^n = A^nB^n$ इसलिए P(1): $(AB)^1 = A^1B^1$

माना, परिणाम n = k के लिए सत्य है। इसलिए, P(k): $(AB)^k = A^kB^k$

अब हमें सिद्ध करना है कि परिणाम n = k + 1 के लिए भी सत्य है। अर्थात,

P(k + 1): $(AB)^{k+1} = A^{k+1}\ B^{k+1}$

दायाँ पक्ष = $(AB)^{k+1}$

= $(AB)^kAB$

= A^kB^kAB [क्योंकि $(AB)^k = A^kB^k$]

= A^kAB^kB [क्योंकि AB = BA]

= $A^{k+1}B^{k+1}$ बायाँ पक्ष

अतः, परिणाम n = k + 1 के लिए भी सत्य है। गणितीय आगमन के सिद्धांत से प्रमाणित होता है कि $(AB)^n = A^nB^n$, समस्त प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

प्रश्न 13. सही उत्तर चुनिए-

यदि $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}$ इस प्रकार है कि $A^2 = I$

a. $1+\alpha^2+\beta\gamma=0$

b. $1-\alpha^2+\beta\gamma=0$

c. $1-\alpha^2-\beta\gamma=0$

d. $1+\alpha^2-\beta\gamma=0$

उत्तर-

c. $1-\alpha^2-\beta\gamma=0$

हल:

दिया है, $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha^2+\beta\gamma & \alpha\beta-\alpha\beta\\ \alpha\gamma-\gamma\alpha & \beta\gamma+\alpha^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

तुलना करने पर, $\alpha^2+\beta\gamma=1$

प्रश्न 14. सही उत्तर चुनिए-

यदि एक आव्यूह सममित तथा विषम सममित दोनों ही है तो-

a. A एक विकर्ण आव्यूह है।
b. A एक शून्य आव्यूह है।
c. A एक वर्ग आव्यूह है।
d. इनमें से कोई नहीं।

उत्तर-

b. A एक शून्य आव्यूह है।

हल:

एक शून्य आव्यूह ही सममित तथा विषम सममित दोनों प्रकार का होता है।

प्रश्न 15. सही उत्तर चुनिए-

यदि A एक वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि $A^2 = A$, तो $(I + A)^3 - 7A$ बराबर है-

a. A

b. I - A

c. I

d. 3A

उत्तर-

c. I

हल:

$(I + A)^3 - 7A = I^3 + A^3 + 3I^2A + 3IA^2 - 7A$

$= I + A^2A + 3IA + 3IA^2 - 7A$ [क्योंकि $I^3 = I^2 = I$]

$= I + AA + 3A + 3IA - 7A$ [क्योंकि A2 = A]

$= I + A + 3A + 3A - 7A = I$ [क्योंकि IA = A]