

# गणित

## अध्याय-3: आँकड़ों का प्रबंधन



## आँकड़ों के संग्रह की मुख्य अवधारणाएं और परिणाम

1. संख्याओं के रूप में एकत्रित की गई जानकारी को आँकड़ा कहा जाता है।
2. आँकड़ों को व्यवस्थित और ग्राफिक रूप से दर्शाया जाता है जिससे कि वह समझने और व्याख्या करने में आसानी होती है।
3. उच्चतम और निम्नतम प्रेक्षणों के बीच का अंतर को दिए गए डेटा की परास (range) कहा जाता है।
4. किसी दिए गए डेटा का औसत या अंकगणितीय माध्य या माध्य है को निम्न रूप में परिभाषित किया जा सकता है:  $\text{माध्य} = \frac{\text{सभी अवलोकनों का योग}}{\text{अवलोकनों की संख्या}}$
5. बहुलक (mode) वह अवलोकन है जो डेटा में सबसे अधिक बार होता है।
6. यदि डेटा में प्रत्येक मान एक बार (या बराबर संख्या) में आ रहा है, तो सभी मोड हैं। कभी-कभी, हम यह भी कहते हैं कि यह डेटा में कोई बहुलक नहीं है क्योंकि उनमें से कोई भी बार-बार नहीं आ रहा है।
7. जब दिए गए डेटा को आरोही (या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित किया जाता है, तो बीच में सबसे अधिक अवलोकन डेटा को माध्यिका कहते हैं।

## केंद्रीय प्रवृत्ति की माप तथा प्रायिकता

केंद्रीय प्रवृत्ति की माप तथा प्रायिकता से संबंधित कुछ मुख्य तथ्य

1. माध्य, माध्यिका और बहुलक अवलोकन समूह के प्रतिनिधि मान हैं इन्हें केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप भी कहते हैं
2. आयतों (बार) के रूप में डेटा का प्रतिनिधित्व एकसमान चौड़ाई को बार ग्राफ कहा जाता है।
3. दो आँकड़ों से संबंधित सूचनाओं की तुलना करने के लिए एक डबल बार ग्राफ का उपयोग किया जा सकता है।

4. कोई घटना हो सकती है या नहीं हो सकती है, उसके घटित होने की संभावना है कितनी है।
5. एक निश्चित घटना के घटित होने की प्रायिकता '1' है।
6. जिस घटना का घटित होना असंभव है उसकी प्रायिकता '0' है।
7. किसी घटना के घटित होने की संभावना =  $\frac{\text{घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग में कुल परिणामों की संख्या}}$

## अंकगणितीय माध्य

अंकगणितीय माध्य एक सेट के भीतर सभी संख्याओं के मूल्यों को जोड़कर और सेट में वस्तुओं की मात्रा से कुल को विभाजित करके गणना की केंद्रीय प्रवृत्ति का एक उपाय है। सेट में सभी नंबर सकारात्मक वास्तविक संख्या होने चाहिए। औसत औसत और माध्य भी अंकगणित माध्य को संदर्भित करते हैं और वास्तविक जीवन की स्थितियों में अधिक सामान्यतः उपयोग किए जाते हैं।

**The Arithmetic Mean**

$$\text{The mean} = \frac{\text{Sum of values}}{\text{Number of values}} = \frac{6 + 5 + 9 + 1 + 2}{5}$$

$$\text{The mean} = \frac{20}{5} = 4$$

### उदाहरण:

उदाहरण के लिए एक फर्म के 10 कर्मचारियों के मासिक वेतन पर विचार करें: 2500, 2700, 2400, 2300, 2550, 2650, 2750, 2450, 2600, 2400, समांतर माध्य है।

$$\frac{2500 + 2700 + 2400 + 2300 + 2550 + 2650 + 2750 + 2450 + 2600 + 2400}{10} = 2530$$

यदि डेटा सेट एक सांख्यिकीय आबादी है (यानी, हर संभव अवलोकन शामिल है और न केवल उनका एक सबसेट), तो उस आबादी का मतलब जनसंख्या माध्य कहा जाता है, और ग्रीक अक्षर द्वारा दर्शाया जाता है  $\mu$ .<sup>[2]</sup> यदि डेटा सेट एक सांख्यिकीय नमूना (जनसंख्या का एक सबसेट) है तो हम इस गणना के परिणामस्वरूप सांख्यिकीय को एक नमूना माध्य (जो डेटा सेट के लिए कहते हैं) कहते हैं  $\bar{x}$  के रूप में दर्शाया गया है  $\bar{x}$ <sup>[2]</sup>

अंकगणित माध्य को समान रूप से अनेक आयामों में सदिशों के लिए परिभाषित किया जा सकता है न कि केवल अदिश मान इसे अक्सर सेंट्रोइड के रूप में जाना जाता है। अधिक सामान्यतः क्योंकि अंकगणित माध्य एक उत्तल संयोजन है (गुणांक 1 का योग) इसे केवल एक सदिश स्थान ही नहीं, बल्कि उत्तल स्थान पर भी परिभाषित किया जा सकता है।

### प्रसार या परिसर

परिसर (Range) परिसर ऐसी प्रकीर्णन की माप है जिसे बहुत ही सरलता से समझा एवं ज्ञात किया जाता है परिसर इस प्रकार परिभाषित है। उनकी माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है। जहाँ  $N = \sum f_i$  जहाँ  $x$ , वर्गों के मध्य बिन्दु हैं।

आंकड़ों का परिसर ज्ञात करने के लिये आंकड़ों के अधिकतम मान से आंकड़ों के न्यूनतम मान को घटाइये। इस दशा में आंकड़ों का परिसर  $19 - 8 = 11$  है।

For example, if a data set showed:

4, 15, 42, 55, 68, 72, 79

The range would be 75 because 79 (the largest number) minus 4 (the smallest number) is 75.

उदाहरण:

परिसर ज्ञात कीजिये 11, 14, 9, 18, 19, 15, 8, 10, 16

आंकड़ों का परिसर ज्ञात करने के लिये आंकड़ों के अधिकतम मान से आंकड़ों के न्यूनतम मान को घटाइये। इस दशा में आंकड़ों का परिसर  $19 - 8 = 11$  है। 11

### बहुलक

बहुत सी छोटी छोटी इकाइयों से मिलकर बने उच्च अणुभार वाले यौगिक बहुलक कहलाते हैं। वह छोटी संरचनात्मक इकाई जिसकी पुनरावर्ती से बहुलक का निर्माण होता है एकलक कहलाती हैं। बहुलक निर्माण की प्रक्रिया को बहुलकीकरण कहते हैं।

For example, if a data set showed:

67, 27, 46, 21, 46, 29,  
67, 28, 65, 67, 10

The mode would be 67 because it is shown three times.

### बहुलक का सूत्र

$$\text{बहुलक} = l + \left\{ \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right\} h$$

$l$  = बहुलक वर्ग की निम्न सिमा

$f_0$  = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की बारम्बारता

$f_1$  = बहुलक वर्ग की बारम्बारता

$f_2$  = बहुलक वर्ग के ठीक बाद आनेवाले वर्ग की बारम्बारता

$h$  = बहुलक वर्ग के अंतराल का अंतर

एक से अधिक बहुलक के सम्बन्ध में तथ्य

जब किसी आँकड़ा में दो बहुलक प्राप्त हो तो उसे द्विबहुलक कहा जाता है

**उदाहरण:** आँकड़ा: 1, 2, 3, 2, 4, 3, 5, 2, 6, 7, 3, 8, 2, 9 में बहुलक 2 और 3 हैं इसलिए यह द्विबहुलक है।

जब किसी संख्याओं के समूह में तीन बहुलक प्राप्त होए तो उसे त्रिबहुलक कहते हैं

**उदाहरण:** आँकड़ा: 1, 2, 3, 2, 4, 3, 5, 2, 6, 7, 4, 3, 8, 2, 9, 4 में बहुलक 2, 3 और 4 हैं इसलिए यह त्रिबहुलक है।

और यदि किसी दिए गए सेट में बहुलक की संख्या चार या चार से अधिक होए तो उसे Multimodal कहते हैं।

### बहुलक का गुण:

- Mode को दो भागों में विभाजित किया जा सकता है शुद्ध बहुलक और अशुद्ध बहुलक
- केवल सामान्य केंद्रीय प्रवृत्ति को ज्ञात करने के लिए बहुलक का प्रयोग होता है
- वितरण की संख्या ज्ञात करने के लिए बहुलक फार्मूला का प्रयोग होता है
- बहुलक का गणितीय विवेचन नहीं होता है
- व्यावहारिक जगत में बहुलक का उपयोग सबसे अधिक होता है

### उदाहरण:

दी गई सरणी का बहुलक निकालें?

आयु (वर्षों में)	5 – 15	15 – 25	25 – 35	35 – 45	45 – 55	55 – 65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

सरणी में सबसे अधिक संख्या 23 है इसलिए बहुलक वर्ग की वर्ग अंतराल 25 - 35 है अतः

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा  $l = 25$

$f_0$  = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की बारंबारता = 21

और  $f_1$  = बहुलक वर्ग की बारंबारता = 23

$f_2$  = बहुलक वर्ग के ठीक बाद आनेवाले वर्ग की बारंबारता = 14

$h$  = बहुलक वर्ग के अंतराल का अंतर = 10

फार्मूला से बहुलक =  $\frac{l+(f_1-f_0)}{(2f_1-f_0-f_2)} \times h$

$$= \frac{35+(23-21)}{(2 \times 23-21-14)} \times 10$$

$$= 35 + \left(\frac{2}{46} - 35\right) \times 10$$

$$= 35 + \frac{20}{11} = 35 + 1.81$$

$$= 36.8$$

### माध्यक

माध्यिका वह मान है जो संख्याओं के श्रेणी को दो बराबर संख्याओं में विभाजित करता है उसे माध्यक कहते हैं यह सामान्यतः वास्तविक मूल्यों से भिन्न होता है।

किसी आँकड़ों के समूह को आरोहीक्रम या अवरोही क्रम में सजाने पर ठीक बीच वाला आँकड़ा माध्यिका कहलाता है माध्यक फार्मूला के माध्यम से भी इसे निकला जा सकता है लेकिन वो केवल सारणी सम्बंधित आँकड़ों के लिए उपयुक्त होता है



For example, a data set showed:

68, 79, 10, 15,  
72, 55, 42

If the numbers are ordered  
smallest to largest:

10 15 42 (55) 68 72 79

The median would be 55.

### मध्यिका का सूत्र

- जब  $n$  विषम संख्या हो, तो

$$\text{मध्यिका (M)} = \left\{ \frac{(n+1)}{2} \right\}^{\text{वाँ}} \text{ पद}$$

- जब  $n$  सम संख्या हो, तो

$$\text{मध्यिका M} = \frac{\left[ \frac{n}{2} \right]^{\text{वाँ}} \text{ पद} + \left\{ \left( \frac{n}{2} \right) + 1 \right\}^{\text{वाँ}}}{2}$$

$$\text{Median } l + \left[ \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right] \times h$$

जहाँ

$l$  = मध्यक वर्ग की निम्नसीमा

$n$  = प्रेक्षकों की संख्या

$CF$  = मध्यक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता

$f$  = मध्यक वर्ग की बारंबारता

$h$  = वर्ग अंतराल की लम्बाई



**उदाहरण:**

1. दिए गए आंकड़ों: 2, 5, 7, 9, 12 का अवरोही क्रम में मध्यािका निकालें?

**हल:** सबसे पहले संख्याओं को अवरोही क्रम में सजाते हैं

जैसे: 12, 9, 7, 5, 2 अर्थात् कुल संख्या 5 है

इसलिए, मध्यािका 7 होगा है जो संख्या के बिच में है

2. निम्नलिखित बारंबारता बंटन की मध्यािक ज्ञात करे?

वर्ग-अंतराल	65 – 85	85 – 105	105 – 125	125 – 145	145 – 165	165 – 185	185 – 205
बारंबारता	4	5	13	20	14	8	4

**हल:** माध्यिक ज्ञात करने से पहले संचयी बारंबारता निकालें

वर्ग अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
65 – 85	4	$4 = 4$
85 – 105	5	$4 + 5 = 9$
105 – 125	13	$9 + 13 = 22 = cf$
125 – 145	$20 = f$	$22 + 20 = 42$
145 – 165	14	$42 + 14 = 56$
165 – 185	8	$56 + 8 = 64$
185 – 205	4	$64 + 4 = 68$
Total	$N = 68$	

माध्यिक के लिए  $N = 68$

$$\text{इसलिए, } \frac{N}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

अर्थात्, 34 से अधिक संख्या 42 संचयी में है इसलिए, माध्यक वर्ग की वर्ग अंतराल 125 - 145 है

यहाँ,  $l = 125$ ,  $f = 20$ ,  $cf = 22$  or  $h = 20$  है

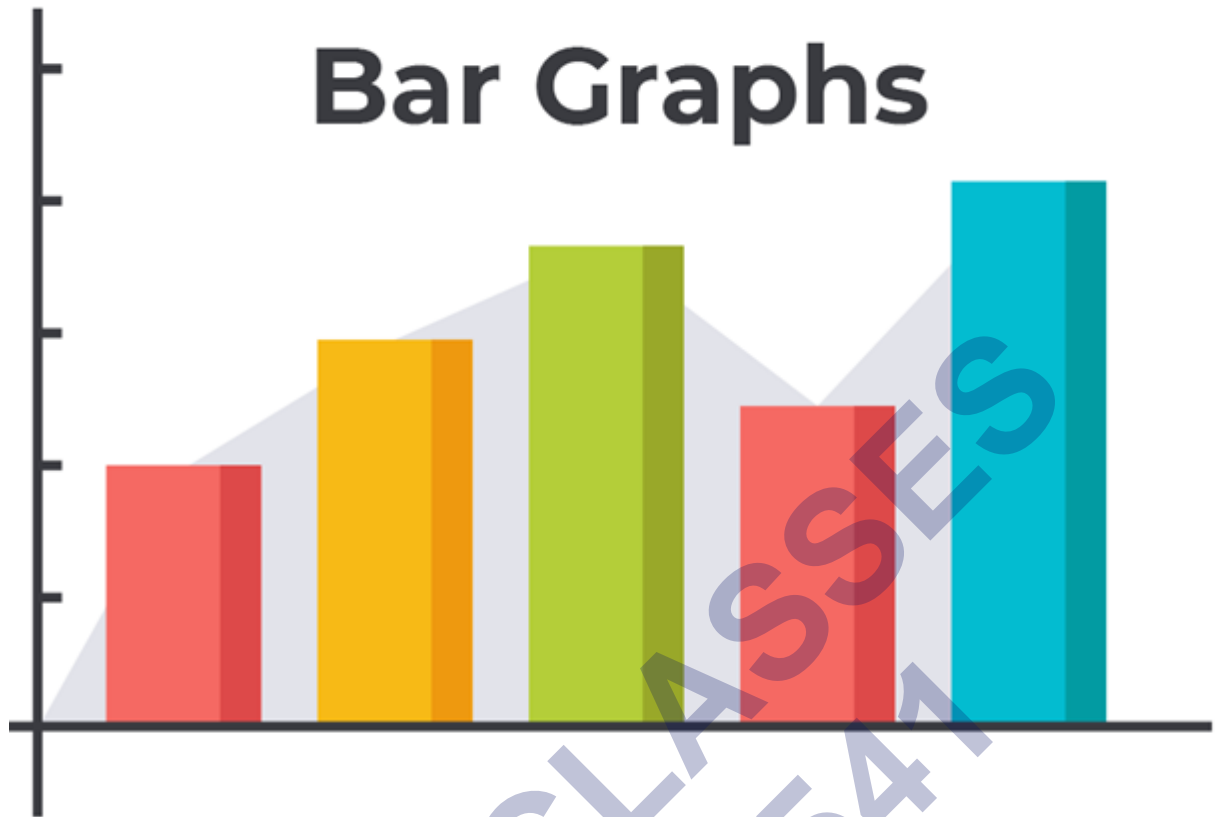
$$\begin{aligned} \text{मध्यिका फार्मूला} &= \frac{\left(\frac{l+n}{2} - cf\right)}{f \times h} \\ &= 125 + \left\{ \frac{(34 - 22)}{20} \right\} \times 20 = 125 + 12 \end{aligned}$$

अतः माध्यक = 137 Ans.

### भिन्न उद्देश्य के साथ दंड आलेखों का प्रयोग

#### दंड आरेख (Bar graph)

दंड आरेख (Bar graph) का उपयोग समय के साथ विभिन्न समूहों के बीच की वस्तुओं की तुलना करने के लिए किया जाता है। समय की अवधि में परिवर्तनों को मापने के लिए दंड आरेख (Bar graph) का उपयोग किया जाता है। जब परिवर्तन बड़े होते हैं, तो डेटा का प्रतिनिधित्व करने के लिए एक दंड आरेख (Bar graph) सबसे अच्छा विकल्प होता है।



**दंड आरेख (Bar graph) के प्रकार:**

लंबवत दंड चार्ट (Vertical bar chart)

क्षैतिज दंड चार्ट (Horizontal bar chart)

भले ही आरेख को क्षैतिज या लंबवत रूप से प्लॉट किया जा सकता है, सबसे सामान्य प्रकार का दंड आरेख इस्तेमाल किया जाता है जो लंबवत दंड आरेख होता है। ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दंड चार्ट के प्रकार के आधार पर  $x$ -अक्ष और  $y$ -अक्ष का अभिविन्यास बदल जाता है। लंबवत और क्षैतिज दंड आरेख के अलावा, दो अलग-अलग प्रकार के दंड चार्ट हैं

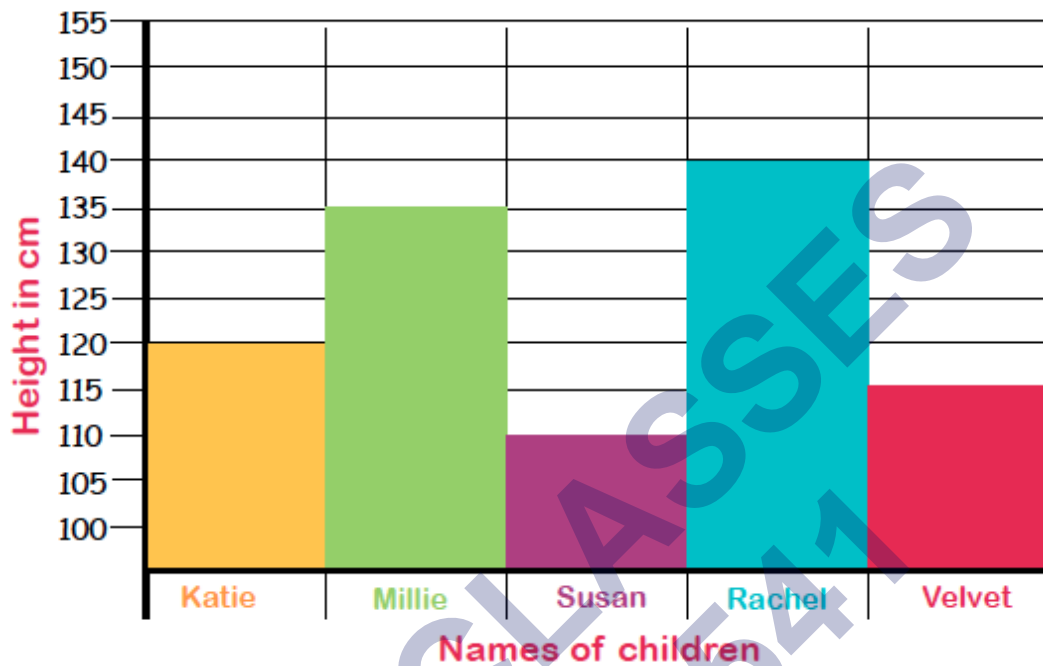
समूहीकृत दंड आरेख (Grouped Bar Graph)

स्टैकड दंड आरेख (Stacked Bar Graph)

**लंबवत दंड चार्ट (Vertical bar chart)**

जब समूहीकृत आँकड़ों को बारों की सहायता से एक ग्राफ या चार्ट में लंबवत रूप से प्रदर्शित किया जाता है, जहाँ दण्ड आँकड़ों की माप को प्रदर्शित करते हैं, ऐसे आलेखों को लंबवत दंड

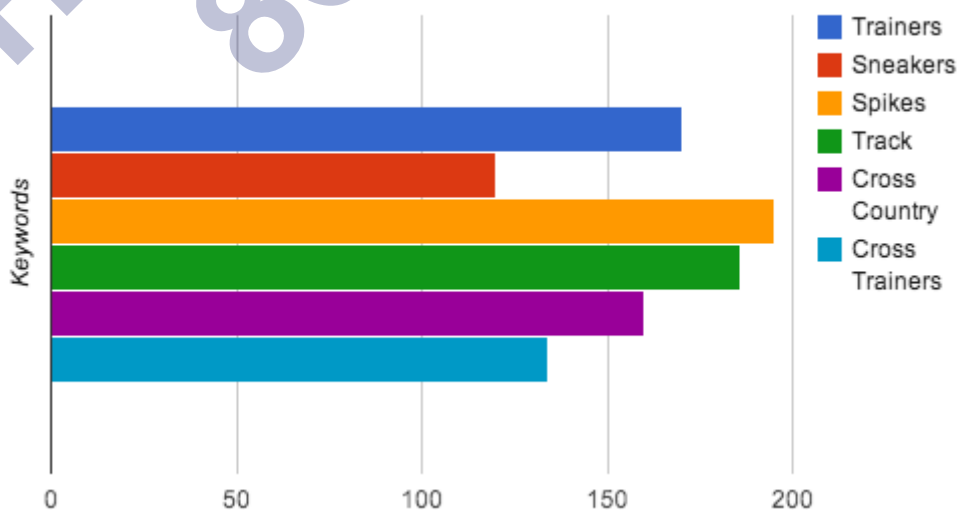
आलेख कहा जाता है। डेटा को ग्राफ़ के y-अक्ष के साथ दर्शाया जाता है, और बार की ऊँचाई मान दिखाती है।



### क्षैतिज दंड चार्ट (Horizontal bar chart)

जब समूहीकृत डेटा को बार की सहायता से चार्ट में क्षैतिज रूप से दर्शाया जाता है, तो ऐसे ग्राफ़ को क्षैतिज दंड आलेख कहा जाता है, जहाँ बार डेटा का माप दिखाते हैं। डेटा को ग्राफ़ के x-अक्ष के साथ यहां दर्शाया गया है, और सलाखों की लंबाई मानों को दर्शाती है।

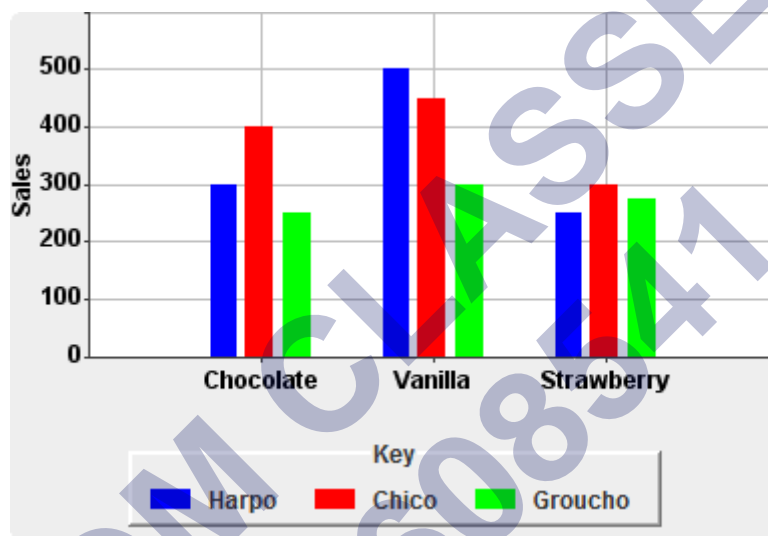
#### Keyword Search



### समूहीकृत दंड आरेख (Grouped Bar Graph)

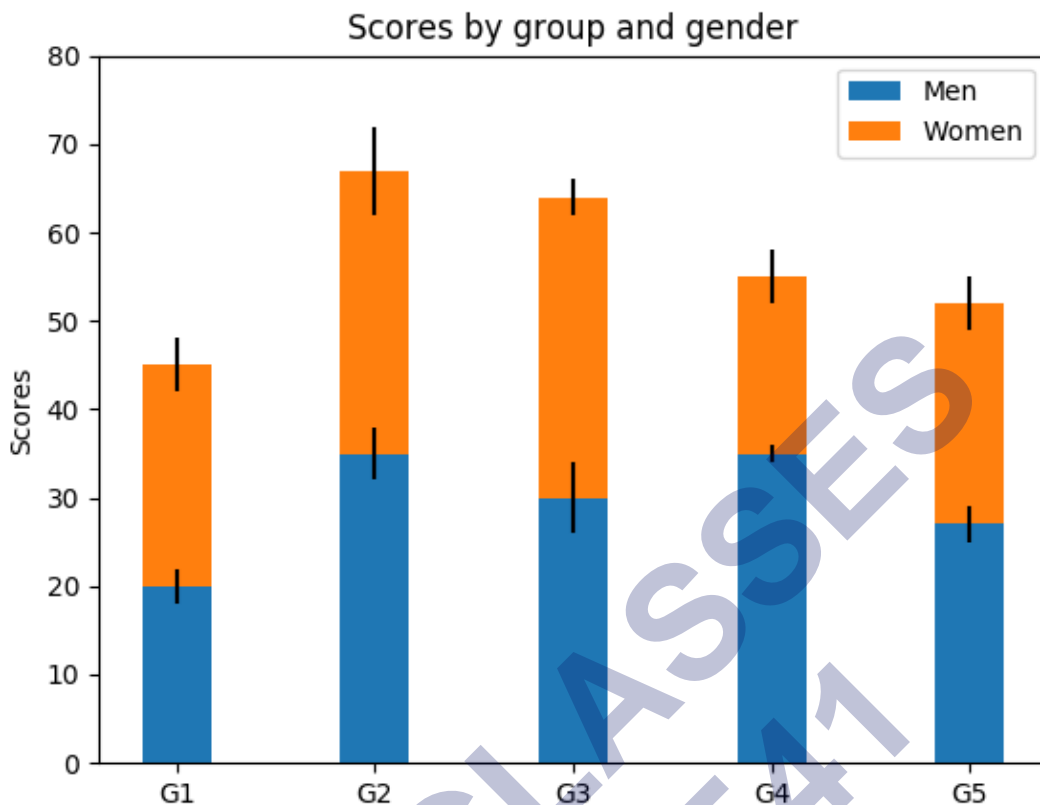
समूहीकृत दंड आरेख को क्लस्टर्ड दंड आरेख भी कहा जाता है, जिसका उपयोग एक से अधिक वस्तुओं के लिए असतत मूल्य का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है जो समान श्रेणी साझा करते हैं।

समूहीकृत दंड आरेख को लंबवत और क्षैतिज दोनों बार चार्ट का उपयोग करके दर्शाया जा सकता है।



### स्टैकड दंड आरेख (Stacked Bar Graph)

स्टैकड दंड आरेख को समग्र बार चार्ट भी कहा जाता है, जो समुच्चय को विभिन्न भागों में विभाजित करता है। इस प्रकार के दंड आलेख में, प्रत्येक भाग को विभिन्न रंगों का उपयोग करके दर्शाया जा सकता है, जो विभिन्न श्रेणियों को आसानी से पहचानने में मदद करता है।



### दंड आरेख (Bar graph) के गुण:

- सभी सलाखों का एक सामान्य आधार होना चाहिए।
- दंड आलेख में प्रत्येक स्तंभ की चौड़ाई समान होनी चाहिए।
- दंड की ऊंचाई डेटा मान के अनुरूप होनी चाहिए।
- प्रत्येक बार के बीच की दूरी समान होनी चाहिए।

### दंड आरेख (Bar graph) के अनुप्रयोग

दंड आरेख का उपयोग विभिन्न समूहों के बीच चीजों का मिलान करने या समय के साथ परिवर्तनों का पता लगाने के लिए किया जाता है। फिर भी, समय के साथ परिवर्तन का अनुमान लगाने की कोशिश करते समय, परिवर्तन बड़े होने पर दंड आरेख सबसे उपयुक्त होते हैं।

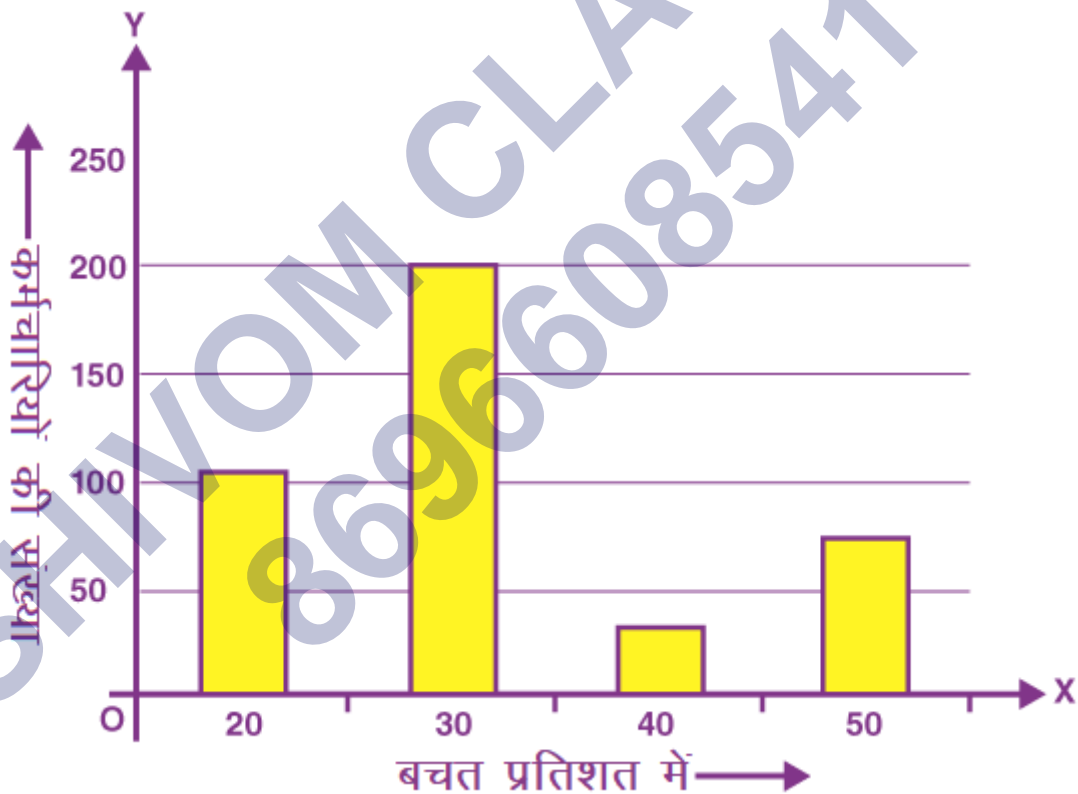
### दंड आरेख (Bar graph) हल उदाहरण:

400 कर्मचारियों की एक फर्म में, प्रत्येक कर्मचारी द्वारा बचाए गए मासिक वेतन का प्रतिशत निम्न तालिका में दिया गया है। इसे दंड आलेख द्वारा निरूपित करें।

बचत (प्रतिशत में)	कर्मचारियों की संख्या (आवृत्ति)
20	105
30	199
40	29
50	73
कुल	400

हल:

दिए गए डेटा को के रूप में दर्शाया जा सकता है,

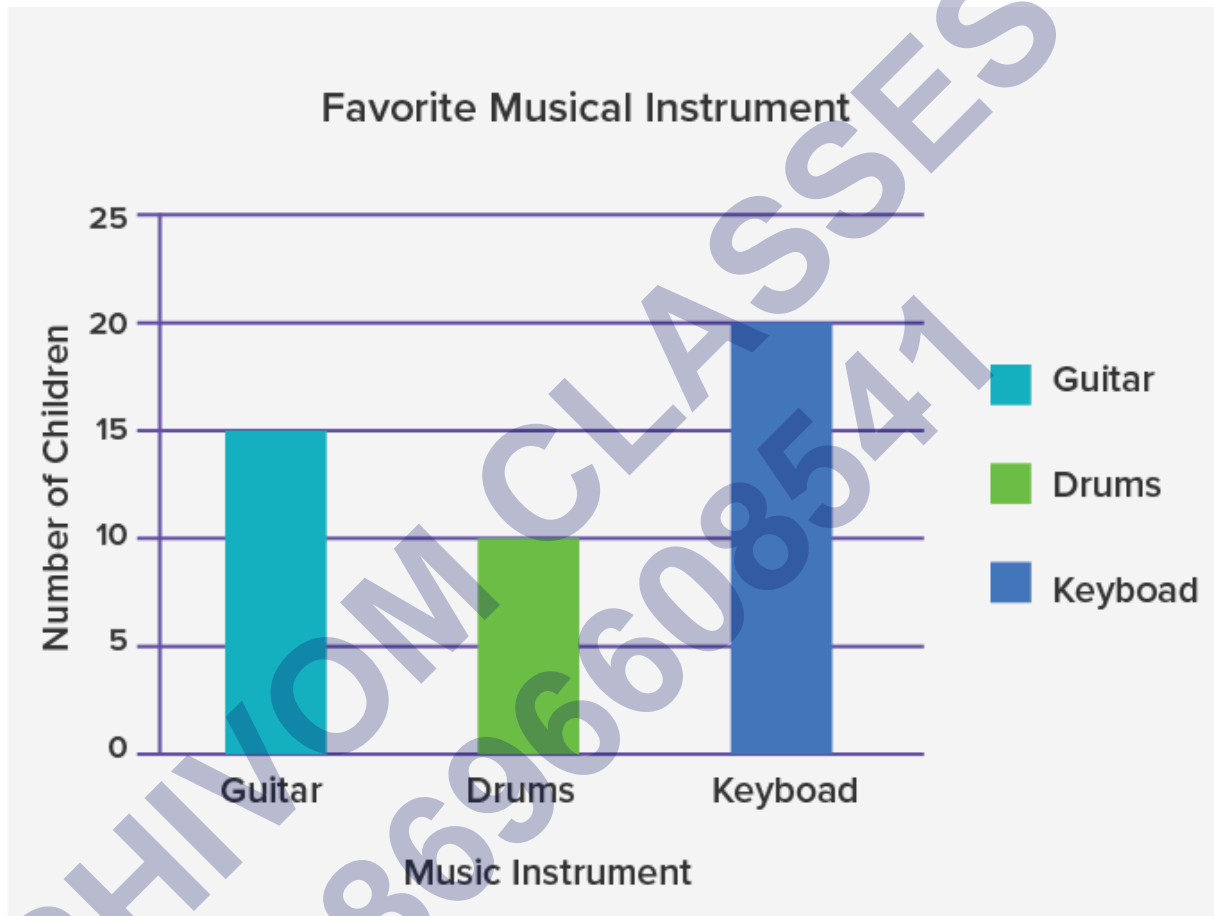


### एक स्केल (या मापदंड) का चुनना

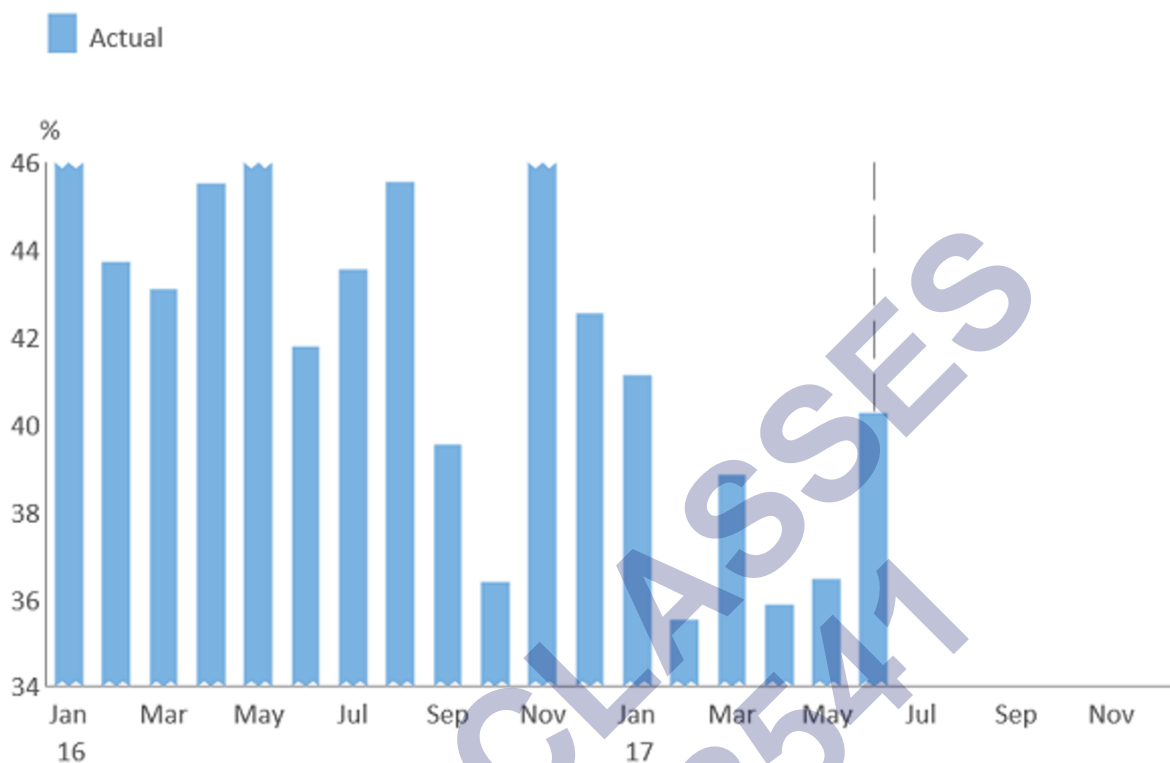
एक दंड आरेख में बड़ी संख्या का प्रतिनिधित्व नहीं किया जा सकता है, इसलिए स्केलिंग कारक का उपयोग बड़ी संख्या को कम करने या कम करने के लिए किया जाता है।



स्केल फैक्टर का उपयोग विभिन्न आयामों में आकृतियों को स्केल करने के लिए किया जाता है। ज्यामिति में, हम विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के बारे में सीखते हैं जो दो-आयाम और तीन-आयाम दोनों में होती हैं। स्केल फैक्टर समान आंकड़ों के लिए एक माप है, जो समान दिखते हैं लेकिन अलग-अलग पैमाने या माप हैं। मान लीजिए, दो वृत्त समान दिखते हैं लेकिन उनकी त्रिज्याएँ भिन्न हो सकती हैं।

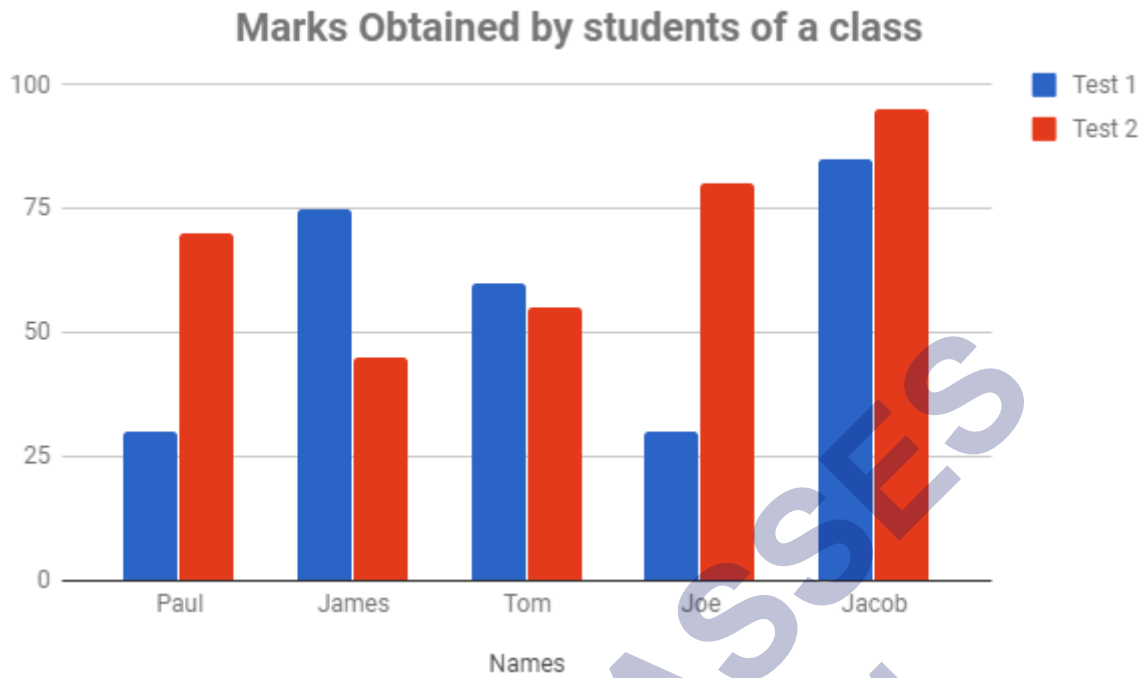


Gross Margin Percentage of Net Sales



### दोहरे दंड आलेख खींचना






एक ही प्रेक्षण के लिए दो मात्राओं के मूल्यों की तुलना करने के लिए दोहरा दंड आलेख एक प्रभावी उपकरण है। उदाहरण के लिए, एक कक्षा के पांच छात्रों द्वारा दो परीक्षणों में प्राप्त अंकों पर विचार करें। दोहरे दंड आलेख (Double bar graph) का उपयोग करके, हम विश्लेषण कर सकते हैं कि किस सप्ताह के छात्रों के बेहतर अंक थे।









### दंड आलेख का उपयोग करते हुए सचित्र प्रतिनिधित्व

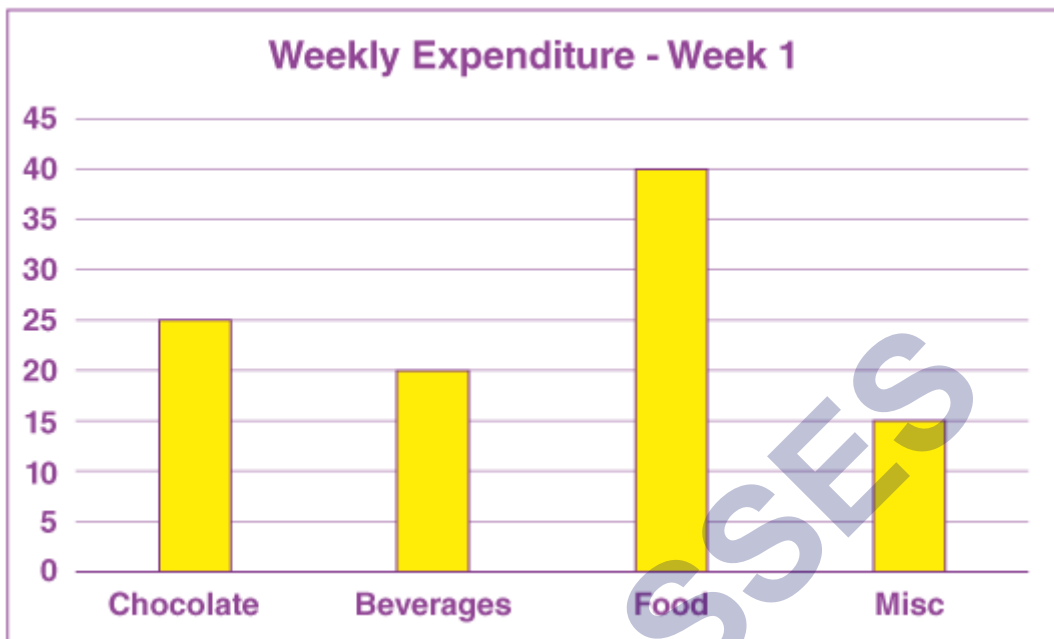
एक दंड आलेख जिसे बार चार्ट के रूप में भी जाना जाता है, एक चार्ट है जो डेटा प्रस्तुत करता है जिसे आयताकार सलाखों में समूहीकृत किया जाता है। यहां बार की लंबाई उनके द्वारा दर्शाए गए मानों के सीधे आनुपातिक है। दंड आलेख को लंबवत या क्षैतिज रूप से खींचा जा सकता है। एक लंबवत दंड आलेख को कॉलम बार ग्राफ के रूप में जाना जाता है। चूंकि एक दंड आलेख का उपयोग एक ही ग्राफ पर डेटा के कई समूहों को प्रदर्शित करने के लिए किया जा सकता है, दंड आलेख को तुलनात्मक उपकरण के रूप में भी इस्तेमाल किया जा सकता है जहां आयताकार बार की लंबाई प्रत्येक श्रेणी के मूल्य का प्रतिनिधित्व करती है। चूंकि आयताकार छड़ें समानुपाती होती हैं, इसलिए उनके अंतर को शब्दों की तुलना में अधिक आसानी से देखा जा सकता है। आइए दंड आलेख पर करीब से नज़र डालें।

### चित्रलेख (Pictograph)

Small Towns	Number of illiterate children
Melrose	
Marengo	
Midway	
Parral	
Rushville	

Days	Number of Red-Boxes Sold
Monday	
Tuesday	
Wednesday	
Thursday	
Friday	
Saturday	

उदाहरण:



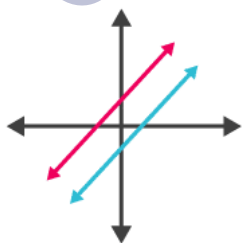
### संयोग और प्रायिकत

#### संयोग

वे रेखाएँ जो एक-दूसरे से मिलती हैं या एक-दूसरे के ऊपर स्थित होती हैं, संपाती रेखाएँ कहलाती हैं। आपने ज्यामिति में विभिन्न प्रकार की रेखाओं के बारे में सीखा होगा, जैसे कि दो-आयामी या त्रि-आयामी विमान के संबंध में समानांतर रेखाएं, लंबवत रेखाएं।

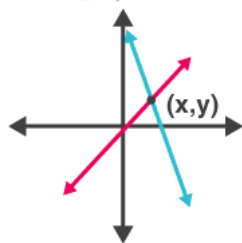
समानांतर रेखाओं के मामले में, वे एक दूसरे के समानांतर होते हैं और उनके बीच एक निश्चित दूरी होती है। दूसरी ओर, लंबवत रेखाएं वे रेखाएं होती हैं जो एक दूसरे को 90 डिग्री पर काटती हैं। लेकिन, समानांतर रेखाएं और लंबवत रेखाएं दोनों एक-दूसरे से संपाती नहीं होती हैं।

समानांतर रेखाएं



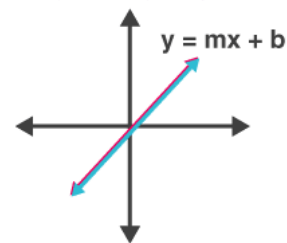
सामान्य समाधान में कोई बिंदु नहीं  $\emptyset$

प्रतिच्छेदन रेखाएं



सामान्य समाधान में एक बिंदु :  $(x, y)$

संयोग रेखाएं



असीम रूप से कई बिंदु आम हैं  $\{(x, y) : y = mx + b\}$

#### संयोग रेखाएं परिभाषा

'संयोग' शब्द का अर्थ है कि यह एक ही समय में घटित होता है। गणित के संदर्भ में, संयोग रेखाएं वे रेखाएं होती हैं जो एक-दूसरे पर इस प्रकार स्थित होती हैं कि जब हम उन्हें देखते हैं, तो वे दोहरी या एकाधिक रेखाओं के बजाय एक ही रेखा प्रतीत होती हैं।



संयोग रेखा समीकरण

जब हम एक रेखा के समीकरण पर विचार करते हैं, तो मानक रूप है:

$$y = mx + b$$

जहाँ  $m$  रेखा का ढाल है और  $b$  अवरोधन है।

**समानांतर रेखाओं का समीकरण:**

अब, दो रेखाओं के मामले में जो एक दूसरे के समानांतर हैं, हम रेखाओं के समीकरणों को इस प्रकार निरूपित करते हैं:

$$y = m_1x + b_1$$

और  $y = m_2x + b_2$

For example,  $y = 2x + 2$  and  $y = 2x + 4$  are parallel lines. Here, the slope is equal to 2 for both the lines and the intercept difference between them is 2. Hence, they are parallel at a distance of 2 units.

### संयोग रेखाओं का समीकरण:

जब हम संपाती रेखाओं के बारे में बात करते हैं, तो रेखाओं का समीकरण किसके द्वारा दिया जाता है;

$$ax + by = c$$

जब दो रेखाएं आपस में मिलती हैं, तो उनके बीच कोई अवरोध अंतर नहीं हो सकता है।

उदाहरण के लिए,  $x + y = 2$  और  $2x + 2y = 4$  संपाती रेखाएँ हैं। दूसरी पंक्ति पहली पंक्ति की दुगुनी है।

क्योंकि यदि हम बायीं ओर 'y' और शेष समीकरण को दायीं ओर रखते हैं, तो हमें प्राप्त होता है;

$$\text{पहली पंक्ति: } y = 2 - x \dots\dots (1)$$

$$\text{दूसरी पंक्ति: } 2y = 4 - 2x$$

$$2y = 2(2 - x)$$

$$y = 2 - x \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (1) और (2) से,

दोनों पंक्तियाँ समान हैं।

इसलिए, वे मेल खाते हैं।

### संयोग रेखाएं उदाहरण

संपाती रेखाओं के सूत्र का उपयोग कैसे करें, यह समझने के लिए नीचे दिए गए उदाहरण का अध्ययन करें।



**उदाहरण:** जाँच करें कि समीकरणों के युग्म को निरूपित करने वाली रेखाएँ  $9x - 2y + 16 = 0$  और  $18x - 4y + 32 = 0$  संपाती हैं या नहीं।

**हल:**

दिया गया,

$$9x - 2y + 16 = 0$$

$$18x - 4y + 32 = 0$$

उपरोक्त समीकरणों की तुलना  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  और  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  से करने पर,

$$a_1 = 9, b_1 = -2, c_1 = 16$$

$$a_2 = 18, b_2 = -4, c_2 = 32$$

अब,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

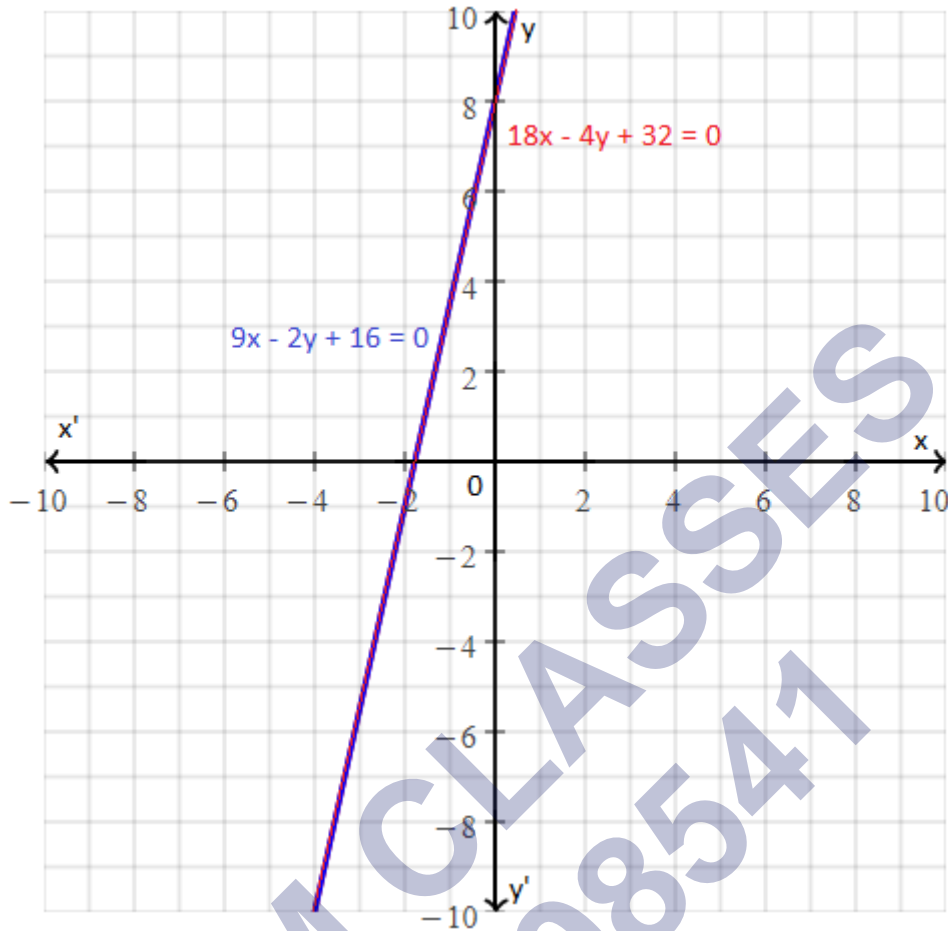
$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

अतः दिए गए समीकरणों को निरूपित करने वाली रेखाएँ संपाती होती हैं।

इसे रेखांकन के रूप में दिखाया जा सकता है:



## NCERT SOLUTIONS

## प्रश्नावली 3.1 (पृष्ठ संख्या 67-69)

प्रश्न 1 अपनी कक्षा के किन्हीं दस (10) विद्यार्थियों की ऊँचाइयों का परिसर ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना कक्षा के दस विद्यार्थियों की ऊँचाई

148, 152, 151, 148, 149, 149; 150, 151, 153, 154 हैं।

आरोही क्रम में ऊँचाइयों को व्यवस्थित करने पर

148, 148, 149, 149, 150, 151, 151, 152, 153, 154

विद्यार्थियों की ऊँचाइयों का परिसर =  $154 - 148 = 6$

प्रश्न 2 कक्षा के एक मूल्यांकन में प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों को एक सारणीबद्ध रूप में संगठित कीजिए:

4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

1. सबसे बड़ा अंक कौनसा है?
2. सबसे छोटा अंक कौनसा है?
3. इन आँकड़ों का परिसर क्या है?
4. अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अंकों को सारणीबद्ध रूप में व्यवस्थित करने पर

अंक	मिलान संख्या	बारंबारता
11		11
22		22
33		11

44		33
55		55
66		44
77		22
88		11
88		1

1. सबसे बड़ा अंक = 9
2. सबसे छोटा अंक = 1
3. परिसर =  $9 - 1 = 8$
4. गणितीय माध्य

$$= \frac{4 + 6 + 7 + 5 + 3 + 5 + 4 + 5 + 2 + 6 + 2 + 5 + 1 + 9 + 6 + 5 + 8 + 4 + 6 + 7}{100}$$

$$= \frac{100}{20} = 5$$

प्रश्न 3 प्रथम 5 पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

उत्तर- प्रथम पाँच पूर्ण संख्याएँ = 0, 1, 2, 3, 4

$$\text{अतः माध्य} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

प्रश्न 4 एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 8 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए:

58, 76, 40, 35, 46, 50, 0, 100.

उसका माध्य स्कोर (score) या रन ज्ञात कीजिए।

उत्तर- कुल रन =  $58 + 76 + 40 + 35 + 46 + 50 + 0 + 100 = 405$

प्रेक्षणों की संख्या = 8

$$\therefore \text{माध्य } \frac{405}{8} = 50.625$$

प्रश्न 5 निम्नलिखित सारणी प्रत्येक खिलाड़ी द्वारा चार खेलों में अर्जित किए गए अंकों को दर्शाती है:

खिलाड़ी	खेल 1	खेल 2	खेल 3	खेल 4
A	14	16	10	10
B	0	8	6	4
C	8	11	खेला नहीं	13

अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

1. प्रत्येक खेल में A द्वारा अर्जित औसत अंक ज्ञात करने के लिए, मध्य ज्ञात कीजिए।
2. प्रत्येक खेल में C द्वारा अर्जित माध्य अंक ज्ञात करने के लिए आप कुल अंकों को 3 से भाग देंगे या 4 से, क्यों?
3. B ने सभी चार खेलों में भाग लिया है। आप इसके अंकों का माध्य किस प्रकार ज्ञात करेंगे?
4. किसका प्रदर्शन सबसे अच्छा है?

उत्तर-

1. A के प्रत्येक खेल के लिए माध्य संख्या

$$\frac{14 + 16 + 10 + 10}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$$

2. प्रत्येक खेल में C द्वारा अर्जित माध्य अंक ज्ञात करने के लिए कुल अंकों को 3 से भाग देंगे। क्योंकि उसने 3 खेलों में ही भाग लिया था। ...

$$\text{वांछित माध्य} = \frac{8+11+13}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

3. B के प्रत्येक खेल के लिए माध्य अंक

$$= \frac{0 + 8 + 6 + 4}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$$

4. इसलिए  $12.5 > 10$

$$10\frac{2}{3}$$

इसलिए A का प्रदर्शन सबसे अच्छा है।

प्रश्न 6 विज्ञान की एक परीक्षा में, विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81 और 75 हैं। ज्ञात कीजिए:

1. विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त सबसे अधिक अंक और सबसे कम अंक
2. प्राप्त अंकों का परिसर
3. समूह द्वारा प्राप्त माध्य अंक

उत्तर-

समूह के विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर ..

39, 48, 56, 75, 76, 81, 85, 85, 90 और 95

1. उच्चतम और निम्नतम अंक क्रमशः 95 और 39 हैं।
2. प्राप्त अंकों का परिसर =  $95 - 39 = 56$
3. समूह द्वारा प्राप्त माध्य अंक।

$$\frac{39 + 48 + 56 + 75 + 76 + 81 + 85 + 85 + 90 + 95}{10}$$

$$= \frac{730}{10} = 73$$

प्रश्न 7 छह क्रमागत वर्षों में एक स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित थी :

1555, 1670, 1750, 2013, 2540, 2820

इस समय काल में स्कूल के विद्यार्थियों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- छह क्रमागत वर्षों में संख्याओं का योग

$$= 1555 + 1670 + 1750 + 2013 + 2540 + 2820 = 12348$$

$$\text{माध्य} = \frac{12348}{6} = 2058$$

प्रश्न 8 एक नगर में किसी विशेष सप्ताह के 7 दिनों में हुई वर्षा (mm में) निम्नलिखित रूप से रिकॉर्ड की गई-

दिन	वर्षा (mm)
सोमवार	0.0
मंगलवार	12.2
बुधवार	2.1
बृहस्पतिवार	0.0
शुक्रवार	20.5
शनिवार	5.5
रविवार	1.0

- उपरोक्त आँकड़ों से वर्षा का परिसर ज्ञात कीजिए।
- इस सप्ताह की माध्य वर्षा ज्ञात कीजिए।
- कितने दिन वर्षा, माध्य वर्षा से कम रही?

उत्तर-

- वर्षा को (सप्ताह भर की) आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर  
0.0, 0.0, 1.0, 2.1, 5.5, 12.2, 20.5  
परिसर =  $20.5 - 0.0 = 20.5$
- सप्ताह में वर्षा का योग  
=  $0.0 + 0.0 + 1.0 + 2.1 + 5.5 + 12.2 + 20.5$   
= 41.3  
माध्य =  $\frac{41.3}{7} = 5.9$
- पाँच दिन वर्षा, माध्य वर्षा से कम रही।

प्रश्न 9 10 लड़कियों की ऊँचाइयाँ cm में मापी गईं और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

135, 150, 139, 128, 151, 132, 146, 149, 143, 141.



1. सबसे लम्बी लड़की की लम्बाई क्या है?
2. सबसे छोटी लड़की की लम्बाई क्या है?
3. इन आँकड़ों का परिसर क्या है?
4. लड़कियों की माध्य ऊँचाई (लम्बाई) क्या
5. कितनी लड़कियों की लम्बाई, माध्य लम्बाई से अधिक है?

उत्तर-

ऊँचाइयों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

128, 132, 135, 139, 141, 143, 146, 149, 150, 151

1. सबसे लम्बी लड़की की लम्बाई = 151cm
2. सबसे छोटी लड़की की लम्बाई = 128cm
3. परिसर (151 - 128) cm = 23cm

$$4. \text{ औसत ऊँचाई} = \frac{135+140+139+128+151+132+146+149+143+141}{10} =$$

$$\frac{1414}{10} = 141.4 \text{ सेमी}$$

5. 5 लड़कियों की ऊँचाई औसत ऊँचाई (यानी, 141.4 सेमी) से अधिक है और ये ऊँचाई 143, 146, 149, 150 और 151 सेमी हैं।

### प्रश्नावली 3.2 (पृष्ठ संख्या 73-74)

प्रश्न 1 गणित की एक परीक्षा में, 15 विद्यार्थियों द्वारा (25 में से ) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं :

19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20

इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए। क्या ये समान हैं?.

उत्तर- गणित के प्राप्तांकों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

5, 9, 10, 12, 15, 16, 19, 20, 20, 20, 20, 23, 24, 25, 25

स्पष्ट है, 20 सबसे अधिक बार आया है।

इसलिए, बहुलक = 20

उक्त प्रेक्षण में 15 पद हैं। इसमें ठीक मध्य (बीच) वाला प्रेक्षण माध्यक होता है। अतः 8वें पद पर स्थित 20 माध्यक है। इसके दोनों ओर 7-7 पद हैं।

हाँ, बहुलक और माध्यक समान हैं।

प्रश्न 2 एक क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों द्वारा बनाए गए रन इस प्रकार हैं:

6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15

इन आँकड़ों के माध्य, बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए। क्या ये तीनों समान हैं?

उत्तर- संख्याओं को आरोही क्रम में लगाने पर,

6, 8, 10, 10, 15, 15, 15, 50, 80, 100, 120

$$\text{माध्य} = \frac{(6 + 8 + 10 + 10 + 15 + 15 + 15 + 50 + 80 + 100 + 120)}{11}$$

$$= \frac{429}{11} = 39$$

रनों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

6, 8, 10, 10, 15, 15, 15, 50, 80, 100, 120

स्पष्टतः, 15 सबसे अधिक बार आया है।

इसलिए, बहुलक = 15

इस प्रेक्षण में 11 पद हैं। अतः छठा पद बिल्कुल मध्य का पद है।

अतः माध्यक = 15

नहीं, ये तीनों समान नहीं हैं।

प्रश्न 3 एक कक्षा के 15 विद्यार्थियों के भार (kg में) इस प्रकार हैं:

38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47

- इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए।
- क्या इनके एक से अधिक बहुलक हैं?

उत्तर-

- भारों (kg में) को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

32, 35, 36, 37, 38, 38, 38, 40, 42, 43, 43, 43, 45, 47, 50

स्पष्टतः, 38 और 43 सबसे अधिक बार आए हैं।

∴ बहुलक 38 और 43 हैं।

इस प्रेक्षण में 15 पद हैं। आठवाँ पद इस प्रेक्षण का मध्य (बीच का) पद है।

अतः माध्यक = 40

- हाँ, इनके एक से अधिक बहुलक हैं।

प्रश्न 4 निम्नलिखित आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए :

13, 16, 12, 14, 19, 12, 14, 13, 14

उत्तर- आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर

12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 16, 19

स्पष्टतः, 14 सबसे अधिक बार आया है।

इसलिए, बहुलक = 14

इस प्रेक्षण समूह में बीच वाला प्रेक्षण 14 है।

अतः माध्यक = 14

प्रश्न 5 बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य :

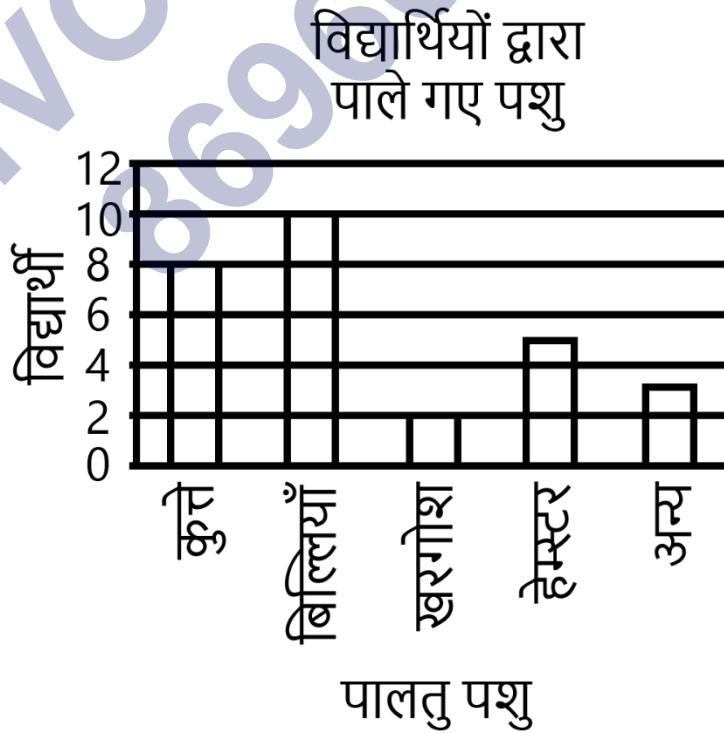
1. बहुलक आँकड़ों में से सदैव एक संख्या होता है।
2. माध्य दिए हुए आँकड़ों में से एक संख्या हो सकता है।
3. माध्यक आँकड़ों में से सदैव एक संख्या होता
4. आँकड़ों 6, 4, 3, 8, 9, 12, 13, 9 का माध्य 9 है।

उत्तर-

1. सत्य,
2. असत्य,
3. सत्य (जब प्रेक्षणों की संख्या विषम हो),
4. असत्य,

### प्रश्नावली 3.3 (पृष्ठ संख्या 78-79)

प्रश्न 1 निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देने के लिए, आकृति में दिए दण्ड आलेख का प्रयोग कीजिए:

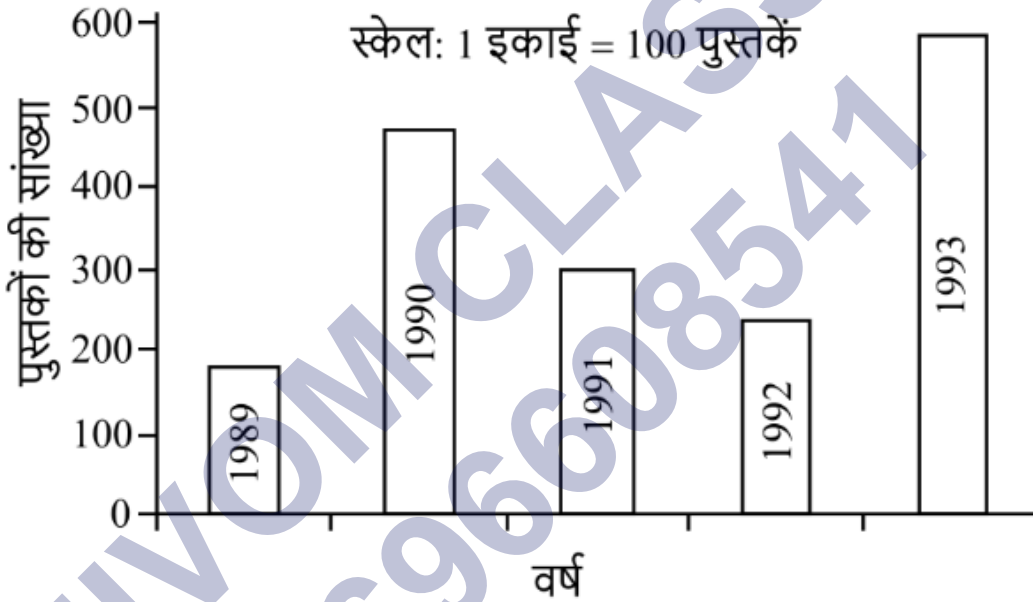


1. कौन-सा पालतू पशु अधिक लोकप्रिय है?
2. कितने विद्यार्थियों का पालतू पशु कुत्ता है?

उत्तर-

1. बिल्ली
2. 8

प्रश्न 2 निम्नलिखित दंड आलेख को पढ़िए जो एक पुस्तक भंडार द्वारा 5 क्रमागत वर्षों में बेची गई पुस्तकों की संख्या दर्शाती है, और आगे आने वाले प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



1. वर्षों 1989, 1990 और 1992 में से प्रत्येक में लगभग कितनी पुस्तकें बेची गईं?
2. किस वर्ष में लगभग 475 पुस्तकें बेची गईं? किस वर्ष में लगभग 225 पुस्तकें बेची गईं?
3. किन वर्षों में 250 से कम पुस्तकें बेची गईं?
4. क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि आप वर्ष 1989 में बेची गई पुस्तकों का आकलन किस प्रकार करेंगे?

उत्तर-

1. वर्षों में पुस्तकें बेची गईं-  
1989 : 180 (लगभग)

1990 : 475 (लगभग)

1992 : 225 (लगभग)

2. 1990 वर्ष में लगभग 475 पुस्तकें बेची गईं। 1992 वर्ष में लगभग 225 पुस्तकें बेची गईं।
3. 1989 और 1992 में 250 से कम पुस्तकें बेची गईं।
4. आलेख में पैमाना  $1\text{cm} = 100$  पुस्तकें दिया गया है। जिसके आधार पर 1989 में बेची गई पुस्तकों का आकलन करेंगे।

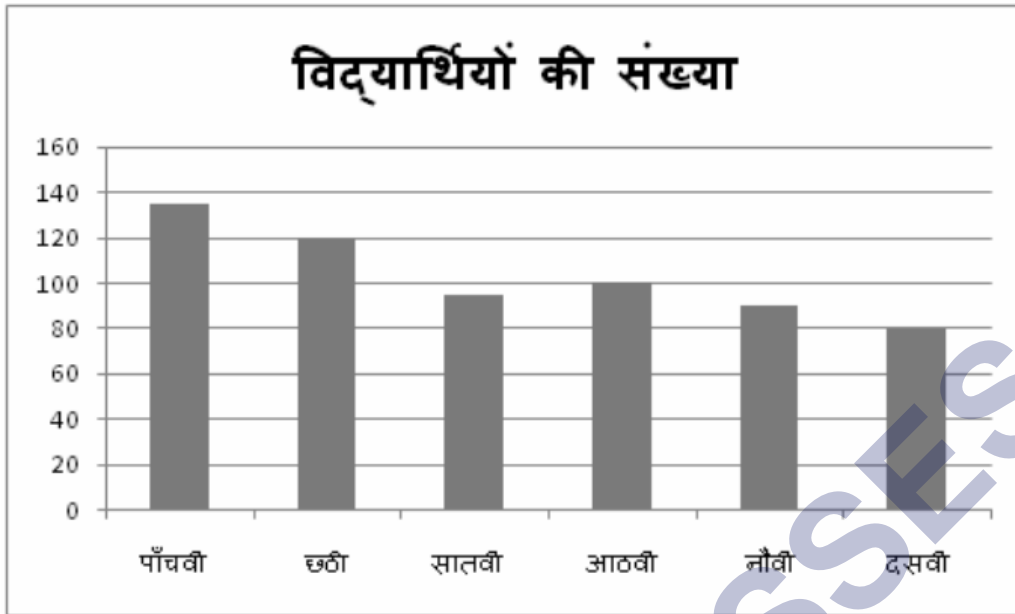
प्रश्न 3 छ: विभिन्न कक्षाओं के विद्यार्थियों की संख्याएँ नीचे दी गई हैं। इन आँकड़ों को एक दण्ड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए : | कक्षा पाँचवीं | छठी सातवीं आठवीं नौवीं | दसवीं | विद्यार्थियों | 135 | 120 | 95 | 100 | 90 | 80 की संख्या

कक्षा	पाँचवीं	छठी	सातवीं	आठवीं	नौवीं	दसवीं
विद्यार्थियों की संख्या	135	120	95	100	90	80

- a. आप स्केल किस प्रकार चनेंगे?
- b. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:
  - i. किस कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है? किस कक्षा में न्यूनतम है?
  - ii. कक्षा 6 के विद्यार्थियों की संख्या का कक्षा 8 के विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

- a. स्केल को 0 से शुरू करेंगे। आँकड़ों में 135 सबसे बड़ी संख्या है। इसलिए स्केल पर 135 से अधिक मान पर जैसे 140 पर खत्म करेंगे। अक्ष पर समान अन्तराल जैसे 20 से वृद्धि करेंगे। 1 इकाई. 20 बच्चे के बराबर मानते हैं।



b. पाँचवीं कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है।

i. न्यूनतम विद्यार्थी दसवीं कक्षा में हैं।

ii. कक्षा छः व कक्षा आठ के विद्यार्थियों की संख्या में अनुपात =  $120 : 100 = 6 : 5$

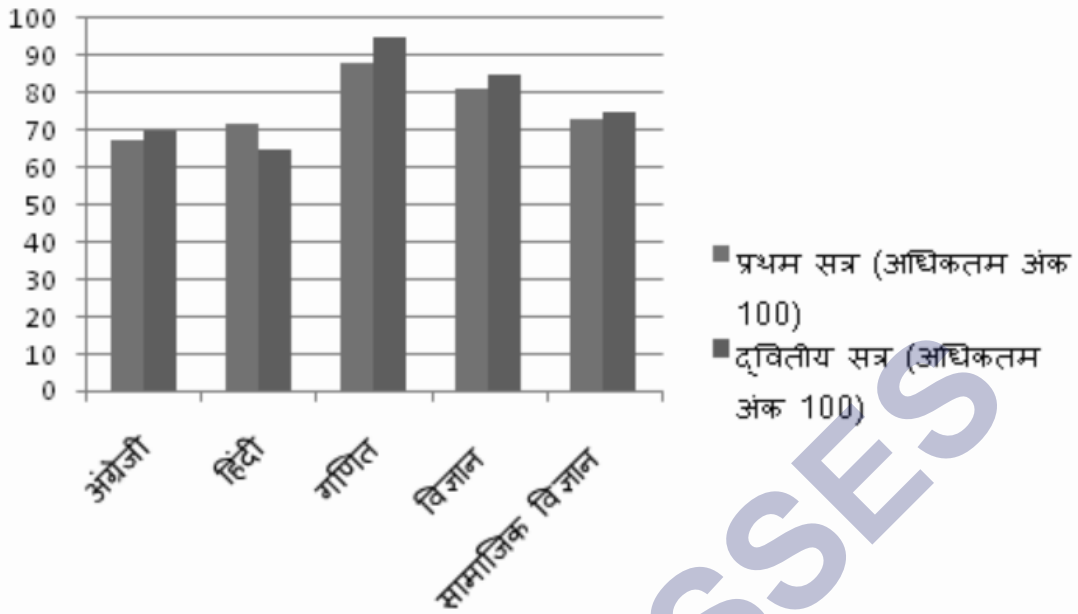
प्रश्न 4 एक विद्यार्थी के प्रथम सत्र और द्वितीय सत्र का प्रदर्शन दिया हुआ है। एक उपयुक्त स्केल चुनकर एक दोहरा दण्ड आलेख खींचिए और दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

विषय	अंग्रेज़ी	हिन्दी	गणित	विज्ञान	सामाजिक विज्ञान
प्रथम सत्र (अधिकतम अंक 100)	67	72	88	81	73
द्वितीय सत्र (अधिकतम अंक 100)	70	65	95	85	75

1. किस विषय में विद्यार्थी ने अपने प्रदर्शन में सबसे अधिक सुधार किया है?
2. किस विषय में सुधार सबसे कम है?
3. क्या किसी विषय में प्रदर्शन नीचे गिरा है?

उत्तर-





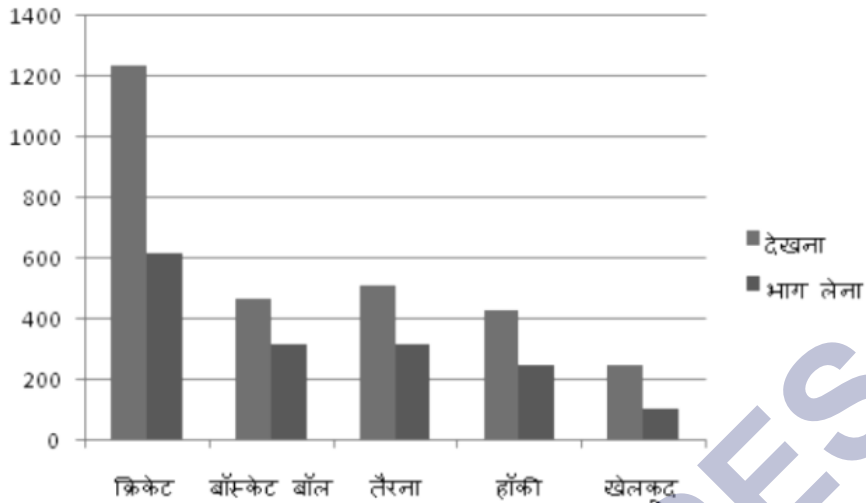
1. विद्यार्थी ने गणित में अपने प्रदर्शन में सबसे अधिक सुधार किया है।
2. सामाजिक विज्ञान में सुधार सबसे कम है।
3. हाँ, हिन्दी में प्रदर्शन नीचे गिरा है।

प्रश्न 5 किसी कॉलोनी में किए गए सर्वेक्षण से प्राप्त निम्नलिखित आँकड़ों पर विचार कीजिए:

पसंदीदा खेल	क्रिकेट	बॉस्केट बॉल	तैरना	हॉकी	खेलकूद
देखना	12401240	470470	510510	430430	250250
भाग लेना	620620	320320	320320	250250	105

1. एक उपयुक्त स्केल चुनकर, एक दोहरा दंड आलेख खींचिए। इस दंड आलेख से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?
2. कौन-सा खेल अधिक लोकप्रिय हैं?
3. खेलों को देखना अधिक पसंद किया जाता है या उसमें भाग लेना?

उत्तर-



1. दोहरा दंड आलेख बताता है कि कितने लोग खेल में भाग ले रहे हैं और कितने लोग खेल देख रहे हैं। सर्वाधिक लोग क्रिकेट में भाग एव देख रहे हैं और सबसे कम खेलकूद में भाग एवं देख रहे हैं।
2. क्रिकेट.
3. देखना

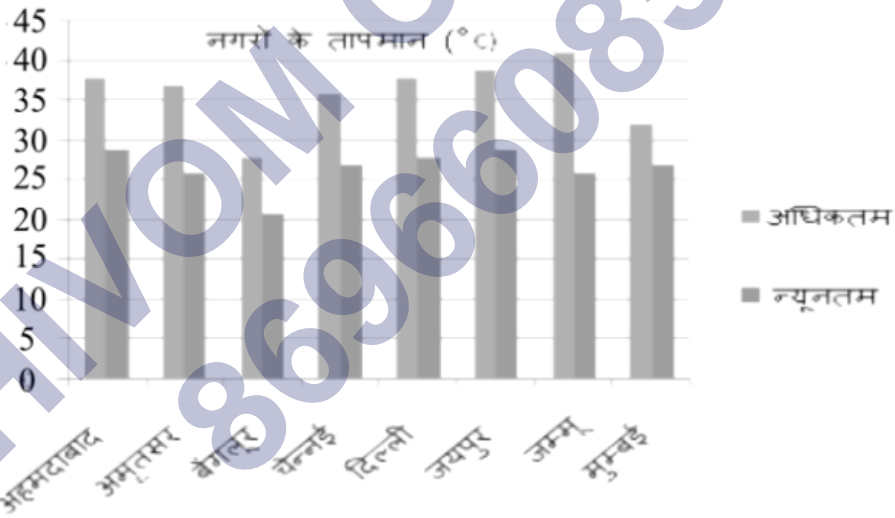
प्रश्न 6 इस अध्याय के प्रारंभ में, दिए हुए विभिन्न नगरों के न्यूनतम और अधिकतम तापमानों के आँकड़ों (सारणी 3.1) लीजिए। इन आँकड़ों का एक दोहरा दंड आलेख खींच कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

1. दी हुई तिथि पर किस नगर के न्यूनतम और अधिकतम तापमान का अन्तर सबसे अधिक है?
2. कौनसा नगर सबसे गर्म है और कौनसा नगर सबसे ठण्डा है?
3. ऐसे दो नगरों के नाम लिखिए, जिनमें से एक का अधिकतम तापमान दूसरे के न्यूनतम तापमान से कम था।
4. उस नगर का नाम लिखिए, जिसके न्यूनतम और अधिकतम तापमानों का अन्तर सबसे कम है।

नगरों के तापमान

(°C)

	अधिकतम	न्यूनतम
अहमदाबाद	3838	2929
अमृतसर	3737	2626
बेंगलूर	2828	2121
चेन्नई	3636	2727
दिल्ली	3838	2828
जयपुर	3939	2929
जम्मू	4141	2626
मुम्बई	3232	27



उत्तर-

1. दी हुई तिथि पर जम्मू शहर के न्यूनतम और अधिकतम तापमान का अन्तर सबसे अधिक है।
2. जम्मू नगर सबसे गर्म शहर है और बेंगलूर शहर सबसे ठण्डा।
3. दो शहर जिनके अधिकतम तापमान दूसरे के न्यूनतम तापमान से कम हैं बेंगलूर और जयपुर या बेंगलूर और अहमदाबाद।

4. मुम्बई के अधिकतम व न्यूनतम तापमानों में अन्तर सबसे कम है।

### प्रश्नावली 3.4 (पृष्ठ संख्या 83)

प्रश्न 1 बताइए कि निम्नलिखित में किसका होना निश्चित है, किसका होना असम्भव है तथा कौन हो भी सकता है, परन्तु निश्चित रूप से नहीं :

1. आज आप कल से अधिक आयु के हैं।
2. एक सिक्के को उछालने पर चित आएगा।
3. एक पासे के फेंकने पर 8 आएगा।
4. अगली ट्रैफिक लाइट हरी दिखेगी।
5. कल बादल घिरे होंगे।

उत्तर-

1. निश्चित घटित होगा।
2. हो सकता है, परन्तु निश्चित रूप से नहीं।
3. असम्भव।
4. हो सकता है परन्तु निश्चित रूप से नहीं।
5. हो सकता है परन्तु निश्चित रूप से नहीं।

प्रश्न 2 एक डिब्बे में 6 कंचे हैं, जिन पर 1 से 6 संख्याएँ अंकित हैं।

- i. संख्या 2 वाले कंचे को इसमें से निकालने की प्रायिकता क्या है?
- ii. संख्या 5 वाले कंचे को इसमें से निकालने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर-

i. संभावना = अनुकूल परिणाम की संख्या / संभावित परिणाम की संख्या

$$\text{संख्या 2 वाले कंचे की उपस्थिति} = \frac{1}{6}$$

$$\text{ii. संख्या 5 वाले कंचे की उपस्थिति} = \frac{1}{6}$$

प्रश्न 3 यह निर्णय लेने के लिए कि कौनसी टीम खेल प्रारम्भ करेगी, एक सिक्का उछाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि आपकी टीम खेल प्रारम्भ करेगी?

उत्तर- सिक्के को उछालने पर सम्भव संयोग चित या पट आ सकते हैं।

$$\therefore \text{अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{1}{2}$$

SHIVOM CLASSES  
8696608541