गणित

अध्याय-2: बहुपद

SHIVOM CLASSES 8696608541

बहुपद

चर, अचर, चर के गुणांक तथा ऋणेतर घातांक के जोड़, घटाव या गुणन की क्रिया वाले बीजगणितीय व्यंजक को बहुपद कहा जाता हैं।

बीजीय बहुपद मुख्यतः दो प्रकार के होते है:

1) अचर बहुपद
2) चर बहुपद

1. अचर बहुपद

बहुपद का वैसा पद जिसका मान हमेशा स्थिर रहता है वह अचर बहुपद कहलाता है। जैसे:- 3x + 5, x – 2, 2 और 5 अचर बहुपद है क्योंकि इनका मान सदैव स्थिर रहता है। अचर बहुपद वास्तविक या काल्पनिक, दोनों संख्या हो सकते है। अचर बहुपद का घात शून्य होता है।

2. चर बहुपद

जिन बहुपदों में केवल एक ही चर राशि का प्रयोग किया जाए एक चर वाले बहुपद कहलाते हैं। $2x^2$ -5x+7 इस व्यंजक में $2x^2$, -5x और 7 तीन पद हैं।

मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

1. बहुपद का अर्थ
2. बहुपद की घात
3. गुणांक
4. एकपदी, द्विपद, इत्यादि
5. अचर, रैखिक, द्विघात बहुपद, इत्यादि
6. चर के दिए हुए मान के लिए बहुपद का मान

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

7. बहुपद के शून्यक
8. शेषफल प्रमेय
9. गुणनखंड प्रमेय
10. मध्यपद को विभक्त कर एक द्विघात बहुपद का गुणनखंडन

बहुपद की घात

यदि p(x) एक बहुपद है, तो चर x, के बहुपद p(x) में x की उच्चतम घात, बहुपद की घात कहलाती है।

उदाहरण

बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ में x की उच्चतम घात 2 है। इसलिए कह सकते हैं कि दिए गए बहुपद की घात 2 है।p

गुणनखंड बीजीय सर्वसमिकाएँ

गुणनखंड प्रमेय के प्रयोग द्वारा बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड बीजीय सर्वसमिकाएँ:

1. $(x + y)^2 = x^2 + 2x\,y + y^2$

2. $(x - y)^2 = x^2 - 2x\,y + y^2$

3. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

4. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

5. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x\,y + 2y\,z + 2z\,x$

6. $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3x\,y\,(x + y)$

7. $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3x\,y\,(x - y)$

8. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - x\,y + y^2)$

9. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + x\,y + y^2)$

10. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - x\,y - y\,z - z\,x)$

बहुपद का गुणांक

SHIVOM CLASSES 8696608541

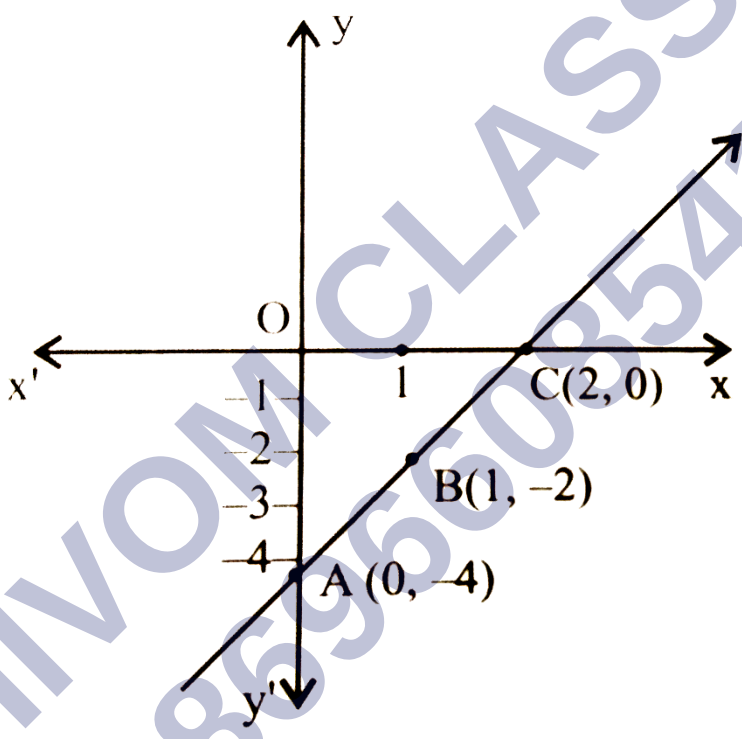
SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

बहुपद के प्रत्येक पद का एक गुणांक होता है।

उदाहरण के लिए बहुपद $x^2 + 5x + 4$ को लेते हैं इस बहुपद में अलग-अलग पदों के अलग गुणांक हैं। जैसे x^2 का गुणांक 1 है, x का गुणांक 5 है तथा अचर पद का गुणांक 4 है।

रैखिक बहुपद

मान लिया कि $4x + 2$ एक बहुपद है। इस बहुपद के चर x का घात 1 है। अतः इस बहुपद को एक घात वाला बहुपद या एक घातीय बहुपद या रैखिक बहुपद कहते हैं।



द्विघात बहुपद

ऐसे बहुपद जिनमें चर पद की उच्चतम घात दो होती है को द्विघात बहुपद या द्विघाती बहुपद कहते हैं। उदाहरण के लिए बहुपद $x^2 + x + 2$ में x की उच्चतम घात दो है अतः यह एक द्विघात बहुपद है।

a का मान ज्ञात कीजिए, यदि $x - a$ बहुपद $x^3 - a x^2 + 2x + a - 1$ का एक गुणनखंड है।

मान लीजिये $p(x) = x^3 - a x^2 + 2x + a - 1$

क्योंकि $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है इसलिए $p(a) = 0$

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अर्थात् $a^3 - a\,(a)^2 + 2a + a - 1 = 0$

या $a^3 - a^3 + 2a + a - 1 = 0$

या $3a - 1 = 0$

या $a = \frac{1}{3}$

चर के दिए हुए मान के लिए बहुपद का मान

यदि p(x), चर x में कोई बहुपद है और a कोई वास्तविक संख्या है, तो p(a) में x को a से प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त वास्तविक संख्या p(x) का x = a पर मान कहलाती है और इसे p(a) से निरूपित करते हैं। a, p(x) का शून्यक कहलाता है, यदि p(a) = 0 है।

मध्यपद को विभक्त कर एक द्विघात बहुपद का गुणनखंडन

एक द्विघात बहुपद के गुणनखंड करने के लिए मध्य पद को इस तरह से विभाजित करते हैं कि विभाजित पदों का योग मध्य पद के बराबर होता है तथा गुणनफल प्रथम और अंतिम पद के गुणनफल के बराबर होता है।

एक उदाहरण के माध्यम से इसको समझने का प्रयास करते हैं:

$p(x) = x^2 + 5x + 4$ के गुणनखंड करने के लिए 5x को इस प्रकार विभाजित करते है कि विभाजित दोनों पदों का योग 5x के बराबर रहे तथा गुणनफल $4x^2$ के बराबर हो।

अतः 5x को x + 4x लिख सकते हैं।

$x + 4x = 5x$ और $x \times 4x = 4x^2$

$x^2 + 5x + 4 = x^2 + x + 4x + 4$

$= x\,(x + 1) + 4\,(x + 1)$

$= (x + 1)\,(x + 4)$

घात और पद के अधार पर बहुपदों को निम्न प्रकार से विभाजित किया जा सकता है:

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

1. अचर बहुपद को 'शून्य बहुपद' कहते हैं। इसमें $p(x) = 0$
2. रैखिक बहुपद: एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहते हैं।

   उदाहरण: $ax + b$, जहाँ $a \neq 0$

3. द्विघात बहुपद: दो घात वाली बहुपदों को द्विघात बहुपद कहा जाता है।

   उदाहरण: $ax^2 + bx + c$, जहाँ $a \neq 0$

4. त्रिघात बहुपद: तीन घात वाले बहुपद को त्रिघात बहुपद कहते हैं।

   उदाहरण: $ax^3 + bx^2 + cx + d$ जहाँ $a \neq 0$

5. एकपदी बहुपद: एक पद वाले बहुपद को एकपदी बहुपद कहते हैं।

   उदाहरण: $x, 2x, 3y^2, 5a^3$

6. द्विपदी बहुपद:- दो पदों वाले बहुपद को द्विपदी बहुपद कहते हैं।

   उदाहरण: $x + 2, 2x^2 + 5, 2y^2 - 4, 5a^3 + 7$

7. त्रिपदी बहुपद: तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपदी बहुपद कहते हैं।

   उदाहरण: $x^2 + 2x + 5, 2x^3 + x^2 - 5x, 4x^3 - 4x^2 - 8x$

बहुपद के शून्यक

बहुपद के शून्यक किसी बहुपद मे चर के स्थान पर किसी वास्तविक संख्या को प्रतिस्थापित करने पर यदि बहुपद का मान शून्य आ जाये तो वह वास्तविक संख्या बहुपद का शून्यक कहलाती है।

उदाहरण: $ax - b$ का शून्यक b/a है।

बहुपद के शून्यक एवं गुणांक में सम्बन्ध

उदाहरण के लिए एक रैखिक बहुपद $p(x) = ax + b$ जहाँ $a \neq 0$ हो, तो $p(x)$ का शून्यक एक होता हैं। जिसका मान $-b/a$ है।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

= – (अचर पद) / (x का गुणांक)

यहाँ अचर पद b है तथा x का गुणांक a है।

शेषफल प्रमेय

मान लीजिए कि p(x) एक से अधिक या उसके बराबर घात का कोई बहुपद है और मान लीजिए कि a कोई वास्तविक संख्या है। यदि p(x) को रैखिक बहुपद x – a से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल p(a) होता है।

उदाहरण:

बहुपद $p(x) = 2x^4 – 3x^3 + 3x + 1$ को x + 1 से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल:

$p(x) = 2x^4 – 3x^3 + 3x + 1$) में x = -1 रखने पर

$p(-1) = 2 (-1)^4 – 3(-1)^3 + 3(-1) + 1$

$p(-1) = 2 \times 1 - 3 \times -1 + 3 \times -1 + 1$

= 3

शेषफल = 3

गुणनखंड प्रमेय

यदि बहुपद p(x) को बहुपद g(x) से विभाजित किया जाए और शेषफल r(x) = 0 हो तो बहुपद g(x) बहुपद p(x) का एक गुणनखंड होगा या हम कह सकते हैं कि यदि g(x), p(x) का एक गुणनखंड है, तो शेषफल r(x) शून्य होगा।

हल कीजिए क्या x + 1 बहुपद $x^2 + 4x + 3$ का एक गुणनखंड है?

माना $p(x) = x^2 + 4x + 3$ और x + 1, p(x) का एक गुणनखंड है।

इसप्रकार, x = -1 के लिए p(x) का मान 0 होगा

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

इसके सत्यापन्न के लिए x = -1, p(x) में रखते हैं

$p(-1) = (-1)^2 + 4(-1) + 3$

$= 1 - 4 + 3$

$p(-1) = 0$

जिससे सिद्ध होता है कि x + 1, p(x) का एक गुणनखंड है।

बीजीय सर्वसमिकाएँ

बीजीय सर्वसमिका एक बीजीय समीकरण होती है जो कि चरों के सभी मानों के लिए सत्य होती है।

सर्वसमिका- 1: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

सर्वसमिका- 2: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

सर्वसमिका- 3: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

सर्वसमिका- 4: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

सर्वसमिका- 5: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

सर्वसमिका- 6: $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

सर्वसमिका- 7: $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

सर्वसमिका- 8: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

हल सहित उदाहरण

उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके, निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(104)^3$

(ii) $(999)^3$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उपरोक्त प्रश्न का हल

(i) $(104)^3 = (100 + 4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4)$ (सर्वसमिका- 6 का प्रयोग करने पर)

$= 1000000 + 64 + 124800$

$= 1124864$

(ii) $(999)^3 = (1000 - 1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1)$ (सर्वसमिका- 7 का प्रयोग करने पर)

$= 1000000000 - 1 - 2997000$

$= 997002999$

स्मरणीय तथ्य

1. एक पद वाले बहुपद को एकपदी कहा जाता है।
2. दो पदों वाले बहुपद को द्विपद कहा जाता है।
3. तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपद कहा जाता है।
4. एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहा जाता है।
5. दो घात वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद कहा जाता है।
6. तीन घात वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद कहा जाता है।
7. वास्तविक संख्या "a"ए बहुपद P(x) का एक शून्यक होती है, यदि P(a) = 0 हो।
8. एक चर में प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक अद्वितीय शून्यक होता है। एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं है और प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।
9. शेषफल प्रमेय रू यदि च(ग)ए एक से अधिक या एक के बराबर घात वाला एक बहुपद हो, और P(x) को रैखिक बहुपद x – a से भाग दिया गया हो, तो शेषफल P(a) होता है।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 2.1 (पृष्ठ संख्या 37-38)

प्रश्न 1. निम्नलिखित व्यंजक में एक चर में बहुपद हैं या नहीं हैं? कारण के साथ उत्तर दीजिए-

(i) $4x^2 - 3x + 7$

(ii) $y^2 + \sqrt{2}$

(iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \frac{2}{y}$

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

उत्तर-

(i) यह एक चर में बहुपद है क्योंकि चर घात एक प्राकृत संख्या है।
(ii) यह एक चर में बहुपद है क्योंकि चर घात एक प्राकृत संख्या है।
(iii) यह एक चर में बहुपद नहीं है क्योंकि चर का घात एक भिन्नात्मक संख्या है कोई प्राकृत संख्या नहीं है।
(iv) यह एक चर में बहुपद नहीं है।
(v) यह एक चर में बहुपद नहीं है, बल्कि यह तीन चर में बहुपद है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित में से में x^2 का गुणांक लिखिए।

(i) $2 + x^2 + x$

(ii) $2 - x^2 + x^3$

(iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$

(iv) $\sqrt{2x} - 1$

उत्तर-

(i) $2 + x^2 + x$

x^2 का गुणांक = 1

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(ii) $2 - x^2 + x^3$

x^2 का गुणांक = -1

(iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$

x^2 का गुणांक $= \frac{\pi}{2}$

(iv) $\sqrt{2x} - 1$

x^2 का गुणांक = 0 [क्योंकि यहाँ x^2 नहीं है इसलिए इसका गुणांक शून्य होगा।

प्रश्न 3. घात के द्विपद का और 100 घात के एकपदी का एक-एक उदाहरण दीजिए।

उत्तर- **35 घात का एक द्विपदी-**

$\Rightarrow 2x^{35} + 5y$

Note- द्विपदी का अर्थ दो पदों वाला व्यंजक जैसे- x + 5, 3a - 2b, 3t + 7 आदि।

100 घात का एक एकपदी-

$\Rightarrow 3y^{100}$

Note- एकपदी का अर्थ एक पद वाला व्यंजक जैसे- 3x, 5t, y, 3xy आदि।

प्रश्न 4. निम्नलिखित बहुपद में से प्रत्येक के घात लिखिए-

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$

(ii) $4 - y^2$

(iii) $5t - \sqrt{7}$

(iv) 3

उत्तर-

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

नोट- बहुत का घात ज्ञात करने के लिए सभी घातों में से सबसे बड़ी घात को चुना जाता है।

(ii) $4 - y^2$

बहुपद का घात = 2

(iii) $5t - \sqrt{7}$

बहुपद का घात = 1

(iv) 3

बहुपद का घात = 0

नोट- चूँकि यहाँ कोई चर नहीं है इसलिए बहुपद का घात शून्य (0) है।

प्रश्न 5. निम्नलिखित को रैखिक, द्विघात और त्रिघात बहुपद में वर्गीकृत कीजिए-

(i) $x^2 + x$

(ii) $x - x^3$

(iii) $y + y^2 + 4$

(iv) $1 + x$

(v) $3t$

(vi) r^2

(vii) $7x^2$

उत्तर-

(i) द्विघात बहुपद।
(ii) त्रिघात बहुपद।
(iii) द्विघात बहुपद।
(iv) रैखिक बहुपद।
(v) रैखिक बहुपद।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(vi) द्विघात बहुपद।
(vii) त्रिघात बहुपद।

प्रश्नावली 2.2 (पृष्ठ संख्या 41)

प्रश्न 1. निम्नलिखित पर बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ के मान ज्ञात कीजिए-

(i) $x = 0$
(ii) $x = -1$
(iii) $x = 2$

उत्तर-

(i) $P(x) = 5x - 4x^2 + 3$

बहुपद $P(x)$ में $x = 0$ रखने पर

$P(0) = 5(0) - 4(0)^2 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$

अत: बहुपद का मान 3 है।

(ii) $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

बहुपद $p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

$P(1) = 5(-1) - 4(-1)^2 + 3 = -5 - 4 + 3 = -9 + 3 = -6$

अत: बहुपद का मान -6 है।

(iii) $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

बहुपद $p(x)$ में $x = 2$ रखने पर

$P(2) = 5(2) - 4(2)^2 + 3 = 10 - 16 + 3 = -3$

अत: बहुपद का मान -3 है।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रश्न 2. निम्नलिखित बहुपद में p(0), p(1) और p(2) ज्ञात कीजिए-

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$

(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$

(iv) $P(x) = (x - 1)(x + 1)$

उत्तर-

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$

$P(0)$ के लिए

$P(0) = (0)^2 - 0 + 1 = 1$

$P(1)$ के लिए

$P(1) = (1)^2 - 1 + 1$

$= 1 - 1 + 1 = 1$

$P(2)$ के लिए

$P(2) = (2)^2 - 2 + 1$

$= 4 - 2 + 1 = 3$

(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

$P(0)$ के लिए

$P(0) = 2 + 0 + 2(0)^2 - (0)^3 = 2$

$P(1)$ के लिए

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$P(1) = 2 + 1 + 2(1)^2 - (1)^3 = 4$

$P(2)$ के लिए

$P(2) = 2 + 2 + 2(2)^2 - (2)^3$

$= 4 + 8 - 8 = 4$

(iii) $p(x) = x^3$

$P(0)$ के लिए

$P(0) = (0)^3 = 0$

$P(1)$ के लिए

$P(1) = (1)^3 = 1$

$P(2)$ के लिए

$P(2) = (2)^3 = 8$

(iv) $P(x) = (x - 1)(x + 1)$

$P(0)$ के लिए

$P(0) = (0 - 1)(0 + 1) = (-1)(1) = -1$

$P(1)$ के लिए

$P(1) = (1 - 1)(1 + 1) = 0\ (1) = 0$

$P(2)$ के लिए

$P(2) = (2 - 1)(2 + 1) = 1(3) = 3$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रश्न 3. सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थितियों में संगत बहुपद के शुन्यक हैं-

(i) $p(x) = 3x + 1, x = -\frac{1}{3}$

(ii) $p(x) = 5x - \pi,\ x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1,\ x = 1, -1$

(iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2),\ x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2,\ x = 0$

(vi) $p(x) = lx + m, x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1,\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(viii) $p(x) = 2x + 1, x = \frac{1}{2}$

उत्तर-

(i)

$P(x) = 3x + 1$

$\text{given } x = \frac{1}{3}$

$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1$

$= -1 + 1$

$= 0$

p(x) = 0, अत: दिया गया x का मान बहुपद का शुन्यक है।

(ii)

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$p(x) = 5x - \pi$$

$$p\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right) - \pi$$

$$= 5 - \pi$$

$$\because p(x) \neq 0$$

$\therefore$ x के लिए दिया गया मान P(x) का शुन्यक नहीं है।

(iii) $p(x) = x^2 - 1$, $x = 1, -1$

$p(1) = 1^2 - 1 = 0$

$p(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

इसलिए, 1 और -1 p(x) के शून्यक हैं।

(iv) $P(x) = (x + 1)(x - 2)$

$x = -1$ के लिए,

$P(-1) = (-1 + 1)(-1 - 2)$

$= 0\ (3)$

$= 0,$

$x = 2$ के लिए

$P(2) = (2 + 1)(2 - 2)$

$= (3)(0)$

$= 0,$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

दोनों स्थितियों में P(x) = 0,

इसलिए x = -1, 2 के बहुपद शून्य हैं।

(v) $p(x) = x^2$

$p(0) = (0)^2 = 0,$

$p(x) = 0$

इसलिए x = 0 का बहुपद शून्य है।

(vi)

$$p(x) = lx + m$$

$$p\left(-\frac{m}{l}\right) = \left(l \times -\frac{m}{l}\right) + m$$

$$= -m + m = 0$$

$$p(x) = 0,$$

इसलिए $x = -\frac{m}{l}$ का बहुपद शून्य है।

(vii)

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$p(x) = 3x^2 - 1$

For $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1$

$= 1 - 1 = 0$

$p(x) = 0$, इसलिए $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ का बहुपद शुन्य है।

For $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$p\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1$

$= 4 - 1 = 3$

$p(x) \neq 0$, इसलिए $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ का बहुपद शुन्य नहीं है।

(viii)

$p(x) = 2x + 1$

For $x = \frac{1}{2}$

$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1$

$= 1 + 1 + 2$

$p(x) = 0$, इसलिए $x = \frac{1}{2}$ का बहुपद शुन्य नहीं है।

प्रश्न 4. निम्नलिखित स्थिति में बहुपद का शुन्यक ज्ञात कीजिए-

(i) P(x) = x + 5

(ii) P(x) = x – 5

(iii) P(x) = 2x + 5

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(iv) $p(x) = 3x - 2$

(v) $p(x) = 3x$

(vi) $P(x) = ax, a \neq 0$

उत्तर-

(i) $P(x) = x + 5$

$\Rightarrow x + 5 = 0$

$\Rightarrow x = -5$

बहुपद का शुन्यक -5 हैं।

(ii) $P(x) = x - 5$

$\Rightarrow x - 5 = 0$

$\Rightarrow x = 5$

बहुपद का शुन्यक 5 है।

(iii) $P(x) = 2x + 5$

$P(x) = 0$

$2x + 5 = 0$

$2x = -5$

$x = -\frac{5}{2}$

बहुपद का शुन्यक $-\frac{5}{2}$ है।

(iv) $p(x) = 3x - 2$

$3x - 2 = 0$

$x = \frac{2}{3}$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

बहुपद का शुन्यक $\frac{2}{3}$ है।

(v) $p(x) = 3x$

$3x = 0$

$3x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{3} \Rightarrow x = 0$

(vi) $P(x) = ax, a \neq 0$

$ax = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{a} \Rightarrow x = 0$

बहुपद का शुन्यक 0 है।

प्रश्नावली 2.3 (पृष्ठ संख्या 47)

प्रश्न 1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को निम्नलिखित से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए-

(i) $x + 1$

(ii) $x - \frac{1}{2}$

(iii) x

(iv) $x + \pi$

(v) $5 + 2x$

उत्तर-

(i) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को $x + 1$ से भाग देने पर-

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 1 \\
\hline
x + 1 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
 & x^3 + x^2 \\
 & (-)\ \ (-) \\
\hline
 & 2x^2 + 3x + 1 \\
 & 2x^2 + 2x \\
 & (-)\ \ (-) \\
\hline
 & x + 1 \\
 & x + 1 \\
 & (-)\ \ (-) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

अत: भाग देने पर शेषफल 0 है।

(ii)

SHIVOM CLASSES
8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + \frac{5x}{2} + \frac{7}{4} \\
\hline
x + \frac{1}{2} & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
 & x^3 + \frac{x}{2} \\
 & (-) \quad (-) \\
\hline
 & \frac{5x^2}{2} + 3x + 1 \\
 & \frac{5x^2}{2} + \frac{5x}{4} \\
 & (-) \quad (-) \\
\hline
 & \frac{7x}{4} + 1 \\
 & \frac{7x}{4} + \frac{7}{8} \\
 & (-) \quad (-) \\
\hline
 & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

अत: भाग देने पर शेषफल $\frac{1}{8}$ है।

(iii) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को x से भाग देने पर-

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 3x + 3 \\
\hline
x & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
 & x^3 \\
 & (-) \\
\hline
 & 3x^2 + 3x + 1 \\
 & 3x^2 \\
 & (-) \\
\hline
 & 3x + 1 \\
 & 3x \\
 & (-) \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

अत: भाग देने पर शेषफल 1 है।

(iv) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को $x + \pi$ से भाग देने पर

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + (-\pi + 3)x + (\pi^2 - 3\pi + 3) \\
\hline
x + \pi & x^3 + 3x^3 + 3x + 1 \\
 & x^3 + \pi x^2 \\
 & (-)\ \ (-) \\
\hline
 & (-\pi + 3)x^2 + 3x + 1 \\
 & (-\pi + 3)x^2 + (-\pi^2 + 3\pi)x \\
 & (-)\qquad (-) \\
\hline
 & (\pi^2 - 3\pi + 3)x + 1 \\
 & (\pi^2 + 3\pi + 3)x + (-\pi^3 - 3\pi^2 + 3\pi) \\
 & (-)\qquad\qquad (-) \\
\hline
 & -\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1
\end{array}
$$

अत: भाग देने पर शेषफल $\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1$ है।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(v) यहाँ 5 + 2x = 0

$$\Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \Rightarrow x + \frac{5}{2}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \\
\hline
x + \frac{5}{2} & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
 & x^3 + \frac{5x^2}{2} \\
 & (-) \quad (-) \\
\hline
 & \frac{x^2}{2} + 3x + 1 \\
 & \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{4} \\
 & (-) \quad (-) \\
\hline
 & \frac{7x}{4} + 1 \\
 & \frac{7x}{4} + \frac{35}{8} \\
 & (-) \quad (-) \\
\hline
 & \frac{-27}{8}
\end{array}
$$

अत: भाग देने पर शेषफल $-\frac{27}{8}$ है।

प्रश्न 2. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ को $x - a$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $p(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ और $g(x) = x - a$ है|

$g(x) = x - a$ का शुन्यक

अत: $x - a = 0$

$x = a$

अत: शेषफल प्रमेय से-

$p(x)$ को $x - a$ से भाग देने पर शेषफल प्रमेय द्वारा शेषफल $p(a)$ प्राप्त होगा।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

इसलिए, $p(a) = (a)^3 - a(a)^2 + 6(a) - a$

$= a^3 - a^3 + 6a - a = 5a$

अत: शेषफल $5a$ है।

प्रश्न 3. जाँच कीजिए कि $7 + 3x$, $3x^3 + 7x$ का एक गुणनखंड है या नहीं।

उत्तर-

$7 + 3x = 0$

$\Rightarrow 3x = -7$

$\Rightarrow x = \frac{-7}{3}$

अतः $7 + 3x$ का शून्यक $\frac{-7}{3}$ है।

अब गुणनखंड प्रमेय से-

यदि $p\left(\frac{-7}{3}\right) = 0$ **तो** $7 + 3x$, $3x^3 + 7x$ का एक गुणनखंड है अथवा नहीं है।

अतः $p(x) = 3x^3 + 7x$

तो $p\left(\frac{-7}{3}\right) = 3\left(\frac{-7}{3}\right) + 7\left(\frac{-7}{3}\right)$

$= \frac{-343}{3} - \frac{49}{3}$

$= \frac{-343-147}{9}$

$\frac{-490}{9}$

चूँकि शेषफल $\frac{-490}{9}$ है।

अतः $p(x) \neq 0$ है।

इसलिए $7 + 3x$, $3x^3 + 7x$ का एक गुणनखंड नहीं है।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रश्नावली 2.4 (पृष्ठ संख्या 52)

प्रश्न 1 बताइए कि निम्नलिखित बहुपद में से गुणनखंड x + 1 है या नहीं?

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$

(ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

(iv) $x^3 - x^3 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

उत्तर-

(i) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

माना $g(x) = x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -1$

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से-

$p(x) = 0$ यदि $x = -1$ $p(x)$ का शुन्यक है।

अत: $p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= -1 + 1 - 1 + 1 = 0$

चूँकि $p(-1) = 0$ इसलिए -1 $p(x)$ का शुन्यक है और $x + 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

(ii) $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

माना $g(x) = x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -1$

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से-

$p(x) = 0$ यदि $x = -1$ $p(x)$ का शुन्यक है।

अत: $p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$

चूँकि $p(-1) = 1$ इसलिए -1 $p(x)$ का शुन्यक नहीं है इसलिए गुणनखंड प्रमेय से $x + 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड नहीं है।

(iii) $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

माना $g(x) = x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -1$

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से-

$p(x) = 0$ यदि $x = -1$ $p(x)$ का शुन्यक है।

अत: $p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

$p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

$p(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$

$= 1 - 3 + 3 - 1 + 1 = 1$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

चूँकि p(-1) = 1 इसलिए -1 p(x) का शुन्यक नहीं है अत: गुणनखंड प्रमेय से x + 1 p(x) का एक गुणनखंड नहीं है।

माना g(x) = x + 1 = 0

⇒ x = -1

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से-

p(x) = 0 यदि x = -1 p(x) का शुन्यक है।

अत: p(x) में x = -1 रखने पर

इसलिए -1 p(x) का शुन्यक नहीं है अत: गुणनखंड प्रमेय से x + 1 p(x) का एक गुणनखंड नहीं है।

(iv)

$$x^3 - x^3 - (2+\sqrt{2})x + \sqrt{2}$$

$$p(-1) = -(-1)^3 - (-1)^2 - (2+\sqrt{2})(-1) + \sqrt{2}$$

$$= -1 - 1 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= -2 + 2 + 2\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

चूँकि $p(-1) = 2\sqrt{2}$ है।

प्रश्न 2 गुणनखंड प्रमेय लागु करके बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में g(x), p(x) का एक गुणनखंड है या नहीं-

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

g(x) = x + 1

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

$g(x) = x - 3$

उत्तर-

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

$g(x) = x + 1$

$g(x)$ का शुन्यक

$\Rightarrow x + 1 = 0$

अत: $x = -1$

गुणनखंड प्रमेय लागु करने पर यदि $p(-1) = 0$, तो गुणनखंड है अथवा नहीं।

अत: $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ दिया है।

अब, $p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$

$= 2(-1) + 1 + 2 - 1 = -2 + 1 + 2 - 1 = 0$

चूँकि $p(-1) = 0$ है इसलिए -1 $p(x)$ का एक शुन्यक है अत: गुणनखंड प्रमेय से $x + 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$

$g(x)$ का शुन्यक

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\Rightarrow x + 2 = 0$

अत: $x = -2$

गुणनखंड प्रमेय लागु करने पर यदि $p(-2) = 0$, तो गुणनखंड है अथवा नहीं।

अत: $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ दिया है।

अब, $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$

$= -8 + 12 - 6 + 1 = 13 - 14 = -1$

चूँकि $p(-2) = -1$ है इसलिए -2 $p(x)$ का एक शुन्यक नहीं है अत: गुणनखंड प्रमेय से $x + 2$ $p(x)$ का एक गुणनखंड भी नहीं है।

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

$g(x)$ का शुन्यक

$\Rightarrow x - 3 = 0$

अत: $x = 3$

गुणनखंड प्रमेय लागु करने पर यदि $p(3) = 0$, तो गुणनखंड है अथवा नहीं।

अत: $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ दिया है

अब, $p(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6$

$= 27 - 36 + 3 + 6 = 36 - 36 = 0$

चूँकि $p(3) = 0$ है इसलिए 3 $p(x)$ का एक शुन्यक है अत: गुणनखंड प्रमेय से $x - 3$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

प्रश्न 3 k का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में (x - 1), p(x) का एक गुणनखंड हो-

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2x} + 1$

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

उत्तर-

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

x - 1 p(x) का एक गुणनखंड है।

इसलिए $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

अत: 1 p(x) का शुन्यक है।

इसलिए $p(1) = 0$

अब $p(x) = x^2 + x + k = 0$

$p(1) = (1)^2 + (1) + k = 0$

$1 + 1 + k = 0$

$2 + k = 0$

$k = -2$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

चूँकि x - 1 p(x) का एक गुणनखंड है।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

इसलिए x - 1 = 0

⇒ x = 1

अत: 1 p(x) का शुन्यक है।

इसलिए p(1) = 0

अब $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2} = 0$

$p(1) = 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2} = 0$

$2 + k + \sqrt{2} = 0$

$k = -2 - \sqrt{2}$

$k = -(2 + \sqrt{2})$

(iii)

$p(x) = kx^2 - \sqrt{2x} + 1$

चूँकि x - 1 p(x) का एक गुणनखंड है।

इसलिए $x - 1 = 0 => x = 1$

अत: 1 p(x) का शुन्यक है।

इसलिए p(1) = 0

अब $p(x) = kx^2 - \sqrt{2x} + 1$

$p(1) = k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1 = 0$

$k - \sqrt{2} + 1 = 0$

$k = \sqrt{2} - 1$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

चूँकि $x - 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

इसलिए $x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1$

अत: 1 $p(x)$ का शुन्यक है।

इसलिए $p(1) = 0$

अब $p(x) = kx^2 - 3x + k = 0$

$p(1) = k(1)^2 - 3(1) + k = 0$

$k - 3 + k = 0$

$2k - 3 = 0$

$2k = 3$

$k = \frac{3}{2}$

प्रश्न 4 5 गुणनखंड ज्ञात कीजिए-

(i) $12x^2 - 7x + 1$

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$

(iv) $3x^2 - x - 4$

उत्तर-

(i) $12x^2 - 7x + 1$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$\Rightarrow 12x^2 - 3x - 4x + 1$

$\Rightarrow 3x(4x - 1) - 1(4x - 1)$

$\Rightarrow (4x - 1)(3x - 1)$

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

$\Rightarrow 2x^2 + 6x + x + 3$

$\Rightarrow 2x(x + 3) + 1(x + 3)$

$\Rightarrow (x + 3)(2x + 1)$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$

$\Rightarrow 6x^2 + 9x - 4x - 6$

$\Rightarrow 3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$

$\Rightarrow (2x + 3)(3x - 2)$

(iv) $3x^2 - x - 4$

$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$\Rightarrow x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$\Rightarrow (3x - 4)(x + 1)$

प्रश्न 5. गुणनखंड ज्ञात कीजिए-

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

उत्तर-

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

बहुपद का संभावित शुन्यक हैं- ±1 और ±2

अत: बहुपद $x^3 - 2x^2 - x + 2$ में $x = 1$ रखने पर

$p(x) = (1)^3 - 2(1)^2 - (1) + 2$

$= 1 - 2 - 1 + 2 = 0$

चूँकि $p(x) = 0$ है,

अत: 1 p(x) का शुन्यक है इसलिए $x - 1$ p(x) का एक गुणनखंड है।

पहली विधि- $x - 1$ से $x^3 - 2x^2 - x + 2$ में भाग देने पर

$$
\begin{array}{r|l}
x - 1 & x^2 - x - 2 \\
\cline{2-2}
 & x^3 - 2x^2 - x + 2 \\
 & x^3 - x^2 \quad (-)\ (+) \\
\cline{2-2}
 & -x^2 - x + 2 \\
 & -x^2 + x \quad (+)\ (-) \\
\cline{2-2}
 & -2x + 2 \\
 & -2x + 2 \quad (+)\ (-) \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

अत: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2)$ [चूँकि $p(x) = g(x) \times q(x)$]

$= (x - 1)(x^2 - 2x + x - 2)$

$= (x - 1)[x(x - 2) + 1(x - 2)]$

$= (x - 1)(x - 2)(x + 1)$

नोट: चूँकि यह त्रिघात बहुपद है इसलिए इसके तीन शुन्यक होंगे और तीन गुणनखंड होंगे।

दूसरी विधि : हम यहाँ पर $x - 1$ से भाग की लंबी प्रक्रिया न अपनाकर गुणनखंड विधि से अन्य गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं। चूँकि एक गुणनखंड $x - 1$ प्राप्त है।

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 1) - x^2 - x + 2$

$= x^2(x - 1) - x(x - 1) - 2x + 2$

$= x^2(x - 1) - x(x - 1) - 2(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 - x - 2)$

$= (x - 1)(x^2 - 2x + x - 2)$

$= (x - 1)[x(x - 2) + 1(x - 2)]$

$= (x - 1)(x - 2)(x + 1)$

तीसरी विधि- हमें बहुपद का संभावित शुन्यक ± 1 और ± 2 ज्ञात है-

$p(x)$ में $x = 1, -1, 2$ और $=2$ रखने पर

$p(1) = 0$ है। अत: $x - 1$ एक गुणनखंड है।

अब $p(-1) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$= (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2$

$= -1 - 2 + 1 + 2 = 0$

अत: $p(-1) = 0$ है अत: $x + 1$ एक गुणनखंड है।

अब $p(2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$= (2)^3 - 2(2)^2 - (2) + 2$

$= 8 - 8 - 2 + 2$

$= 0$

$p(2) = 0$ है अत: $x - 2$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

अब $p(-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$= (-2)^3 - 2(-2)^2 - (-2) + 2$

$= -8 - 8 + 2 + 2$

$= -16 + 4 = -12$

$p(-2) \neq 0$ अत: -2 $p(x)$ का शुन्यक नहीं है।

अत: $x^3 - 2x^2 - x + 2$ के गुणनखंड है $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

बहुपद का संभावित शुन्यक ± 1 और ± 5 है।

बहुपद में $x = -1$ रखने पर

$p(-1) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$= (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$

$= -1 - 3 + 9 - 5 = 9 - 9 = 0$

अत: $x = -1$ $p(x)$ का शुन्यक है इसलिए $x + 1$ एक गुणनखंड है।

$x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = x^2(x + 1) - 4x^2 - 9x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 - 4x - 5)$

$= (x + 1)(x^2 - 5x + x - 5)$

$= (x + 1)[x(x - 5) + 1(x - 5)]$

$= (x + 1)(x - 5)(x + 1)$

अत: त्रिघात बहुपद के गुणनखंड $(x + 1)$, $(x - 5)$ और $(x + 1)$ है।

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

बहुपद का संभावित शुन्यक ±1, ±2, ±4, ±5, ±10 और ±20 हैं।

बहुपद में $x = -1$ रखने पर

$p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$= (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20$

$= -1 + 13 - 32 + 20 = 33 - a\ 33 = 0$

चूँकि $p(-1) = 0$ है अत: $x + 1$ बहुपद का एक गुणनखंड है।

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$x^3 + 13x^2 + 32x + 20 = x^2(x + 1) + 12x^2 + 32x + 20$

$= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20x + 20$

$= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + 12x + 20)$

$= (x + 1)(x^2 + 10x + 2x + 20)$

$= (x + 1)[(x(x + 10) + 2(x + 10)]$

$= (x + 1)(x + 10)(x + 2)$

अत: त्रिघात बहुपद के गुणनखंड $(x + 1)$, $(x + 10)$ और $(x + 2)$ है।

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

$= y^2(2y + 1) - 1(2y + 1)$

$= (y^2 - 1)(2y + 1)$

$= (y + 1)(y - 1)(2y + 1)$

बहुपद के गुणनखंड $(y + 1)$, $(y - 1)$ और $(2y + 1)$हैं।

उपयोगी बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ-

1. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
4. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
5. $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
6. $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

7. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
8. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
9. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
10. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

प्रश्नावली 2.5 (पृष्ठ संख्या 57-59)

प्रश्न 1 उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए-

(i) $(x + 4)(x + 10)$

(ii) $(x + 8)(x - 10)$

(iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

(iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

(v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

उत्तर-

(i) $(x + 4)(x + 10)$

सर्वसमिका-

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$(x + 4)(x + 10) = x^2 + (4 + 10)x + (4)(10)$

$= x^2 + 14x + 40$

(ii) $(x + 8)(x - 10)$

सर्वसमिका- $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$(x + 8)(x - 10) = x^2 + [8 + (-10)]x + (8)(-10)$

$= x^2 - 2x - 80$

(iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

सर्वसमिका-

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$(3x + 4)(3x - 5) = (3x)^2 + [4 + (-5)]\ 3x + (4)(-5)$

$= 9x^2 - 3x - 20$

(iv)

$$\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$$

सर्वसमिका- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ का प्रयोग करने पर

$$= (y^2)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= y^4 - \frac{9}{4}$$

(v) $(3 - 2x)\ (3 + 2x)$

सर्वसमिका- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ का प्रयोग करने पर

$(3 - 2x)(3 + 2x) = (3)^2 - (2x)^2$

$= 9 - 4x^2$

प्रश्न 2 सीधे गुना किये बिना निम्नलिखित गुणनफल के मान ज्ञात कीजिए-

(i) 103×107

(ii) 95×96

(iii) 104×96

उत्तर-

(i) $103 \times 107 = (100 + 3)\ (100 + 7)$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

सर्वसमिका- $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$(100 + 3)(100 + 7) = (100)^2 + (3 + 7)100 + 3 \times 7$

$= 10000 + 1000 + 21 = 11021$

(ii) $95 \times 96 = (90 + 5)(90 + 6)$

सर्वसमिका- $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$(90 + 5)(90 + 6) = (90)^2 + (5 + 6)90 + 5 \times 6$

$= 8100 + 990 + 30 = 9120$

(iii) $104 \times 96 = (100 + 4)(100 - 4)]$

सर्वसमिका- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ का प्रयोग करने पर

$(100)^2 - (4)^2$

$= 10000 - 16 = 9984$

प्रश्न 3 उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित का गुणनखंड कीजिए-

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$

(ii) $4y^2 - 4y + 1$

(iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

उत्तर-

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$

$= (3x)^2 + 2.3x.y + (y)^2$[$\because\because\because$ $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$]

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$= (3x + y)^2$

$= (3x + y)(3x + y)$

(ii) $4y^2 - 4y + 1$

$= (2y)^2 - 2.2y.1 + (1)^2$

$[\because x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2]$

$\therefore = (2y - 1)^2$

$= (2y - 1)(2y - 1)$

(iii)

$$x^2 - \frac{y^2}{100}$$

$$= (x^2) - \left(\frac{y}{10}\right)^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{10}\right)\left(x - \frac{y}{10}\right)$$

$[\because x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)]$

प्रश्न 4 उपयुक्त सर्वसमिका को प्रयोग करके निम्नलिखित का प्रसार कीजिए-

(i) $(x + 2y + 4z)^2$

(ii) $(2x - y + z)^2$

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$

(vi) $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उत्तर-

(i) $(x + 2y + 4z)^2$

यहाँ माना कि $a = x, b = 2y, c = 4z$ और a, b तथा c का मान सर्वसमिका

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर

$\therefore (x + 2y + 4z)^2 = (x)^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2(x)(2y) + 2(2y)(4z) + 2(4z)(x)$

$= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8zx$

(ii) $(2x - y + z)^2$

यहाँ माना कि $a = 2x, b = -y, c = z$ और a, b तथा c का मान

सर्वसमिका- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर

$\therefore (2x - y + z)^2 = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(2x)$

$= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx$

(iii) यहाँ माना कि $a = -2x, b = 3y, c = 2z$ और a, b तथा c का मान

सर्वसमिका-

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर

$\therefore (-2x + 3y + 2z)^2 = (-2x)^2 + (3y)^2 + (2z)^2 + 2(-2x)(3y) + 2(3y)(2z) + 2(2z)(-2x)$

$= 4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8zx$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$

यहाँ माना कि $x = 3a, y = -7b, z = -c$ और x, y तथा z का मान

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

सर्वसमिका $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ में रखने पर

$\therefore (3a - 7b - c)^2 = (3a)^2 + (-7b)^2 + (-c)^2 + 2(3a)(-7b) + 2(-7b)(-c) + 2(-c)(3a)$

$= 9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$

यहाँ माना कि $a = -2x$, $b = 5y$, $c = -3z$ और a, b तथा c का मान

सर्वसमिका- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर

$\therefore (-2x + 5y - 3z)^2 = (-2x)^2 + (5y)^2 + (-3z)^2 + 2(-2x)(5y) + 2(5y)(-3z) + 2(-3z)(-2x)$

$= 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12zx$

(vi)

$$\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर

यहाँ $a = \frac{a}{4}, b = -\frac{b}{2}$ और $c = 1$

$$\left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{-b}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(2 \times \frac{a}{4} \times \frac{-b}{2}\right) + \left(2 \times \cdot \frac{-b}{2}\right) + \left(2 \times \frac{a}{4}\right)$$

$$\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 1 - \frac{b}{4} - b + \frac{a}{2}$$

प्रश्न 5 गुणनखंड कीजिए-

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2xy} + 4\sqrt{2yz} - 8xz$

उत्तर-

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(4z) + 2(4z)(2x)$

$[\because a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2]$

$= (2x + 3y + 4z)^2$

$= (2x + 3y + 4z)(2x + 3y + 4z)$

(ii)

$$2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$$

$[\because (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca]$

$$= (\sqrt{2}x)^2 + y^2 + (2\sqrt{2}z)^2 - 2(\sqrt{x})(y) + 2(y)(2\sqrt{2}z) + 2(-\sqrt{2}x)(2\sqrt{2}z)$$

$$= (-\sqrt{2}x)^2 + (y)^2 + (2\sqrt{2}z)^2 + (2 \times -\sqrt{2}x \times y) + (2 \times y \times 2\sqrt{2}z) + (2 \times 2\sqrt{2}z \times -\sqrt{2}x)$$

$$\therefore \ (-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)^2$$

$$= (-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)$$

प्रश्न 6 निम्नलिखित घन को विस्तारित रूप में लिखिए-

(i) $(2x + 1)^3$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$

(iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

उत्तर-

(i) $(2x + 1)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$]

$(2x + 1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + (1)^3$

$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

(ii) $(2a - 3b)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$]

$(2a - 3b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2 - (3b)^3$

$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

(iii)

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$]

$$\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3 = \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)^2(1) + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)^2 + (1)^3$$

$$= \frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

(iv)

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$]

$$\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3 = (x)^3 - 3(x^2)\left(\frac{3}{2}y\right) + 3(x)\left(\frac{3}{2}y\right)^2 - \left(\frac{3}{2}y\right)^3$$

$$= x^3 - \frac{9}{2}x^2y + \frac{27}{4}xy^2 - \frac{27}{8}y^3$$

प्रश्न 7 उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए-

(i) $(99)^3$

(ii) $(102)^3$

(iii) $(998)^3$

उत्तर-

(i) $(99)^3$

$= (100 - 1)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$]

$(100 - 1)^3 = (100)^3 - 3(100)^2(1) + 3(100)(1)^2 - (1)^3$

$= 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 1000300 - 30001 = 970299$

(ii) $(102)^3$

$= (100 + 2)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$]

$(100 + 2)^3 = (100)^3 + 3(100)^2(2) + 3(100)(2)^2 + (2)^3$

$= 1000000 + 60000 + 1200 + 8 = 1061208$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(iii) $(998)^3$

$= (1000 - 2)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$]

$(1000 - 2)^3 = (1000)^3 - 3\,(1000)^2\,(2) + 3(1000)(2)^2 - (2)^3$

$= 1000000000 - 6000000 + 12000 - 8$

$= 1000012000 - 6000008$

$= 994011992$

प्रश्न 8 निम्नलिखित का गुणनखंड कीजिए-

(i) $8a^3 + b3 + 12a^2b + 6ab^2$

(ii) $8a^2 - b^2 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{2}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

उत्तर-

(i) $8a^3 + b3 + 12a^2b + 6ab^2$

$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = (x + y)^3$]

$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2 = (2a + b)^3$

$= (2a + b)(2a + b)(2a + b)$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(ii) $8a^2 - b^2 - 12a^2b + 6ab^2$

$= (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3$]

$= (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2 = (2a - b)^3$

$= (2a - b)(2a - b)(2a - b)$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

$= (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3$]

$= (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2 = (3 - 5a)^3$

$= (3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3$]

$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2 = (4a - 3b)^3$

$= (4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3$]

(v)

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

[सर्वसमिका के प्रयोग से $x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3$]

$$27p^3 - \frac{2}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$$

$$= (3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3(3p)^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \left(3p - \frac{1}{6}\right)^3$$

$$= \left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$$

प्रश्न 9 सत्यापित कीजिए-

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

उत्तर-

(i) RHS = $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2)$

$= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3$

$= x^3 + y^3$

∵ LHS = RHS सत्यापित

(ii) RHS = $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$

$= x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$= x^3 - y^3$

$\because$ LHS = RHS सत्यापित|

प्रश्न 10 निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंड ज्ञात कीजिए-

(i) $27y^3 + 125z^3$

(ii) $64m^3 - 343n^3$

उत्तर-

(i) $27y^3 + 125z^3$

$= (3y)^3 + (5z)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$]

$(3y)^3 + (5z)^3 = (3y + 5y)[(3y)^2 - (3y)(5z) + (5z)^2]$

$= (3y + 5y)(9y^2 - 15yz + 25z^2)$

(ii) $64m^3 - 343n^3$

$= (4m)^3 - (7n)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$]

$(4m)^3 - (7n)^3 = (4m - 7n)[(4m)^2 + (4m)(7n) + (7n)^2]$

$= (4m - 7n)(16m^2 + 28mn + 49n^2)$

प्रश्न 11 गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए-

$27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

उत्तर-

$= (3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 9xyz$

$\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

सर्वसमिका के प्रयोग से-

$= (3x + y + z)((3x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (3x)(y) - (y)(z) - (z)(3x))$

$= (3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx)$

प्रश्न 12 सत्यापित कीजिए-

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$$

उत्तर-

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$$

$$\text{LHS} = \frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ [सर्वसमिका के प्रयोग से]

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

प्रश्न 13 यदि x + y + z = 0 हो, तो दिखाइए कि x3 + y3 + z3 = 3xyz है।

उत्तर-

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$x + y + z = 0$ दिया है।

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= (0)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

अत: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

या $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ सत्यापित

प्रश्न 14 वास्तव में घनों का परिकलन किए बिना निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए-

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

उत्तर-

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

इस सर्वसमिका में $x = -12$, $y = 7$ और $z = 5$ रखने पर

चूँकि- $12 + 7 + 5 \Rightarrow -12 + 12 = 0$

अत: $x + y + z = 0$ है।

अब, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ [x, y, और z का मान रखने पर]

$\Rightarrow (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3 \times (-12) \times 7 \times 5$

$= -1260$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

$28 + (-15) + (-13) = 28 - 28 = 0$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

चूँकि $x + y + z = 0$ है |

इसलिए $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

अब, $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3 = 3 \times 28 \times (-15) \times (-13)$

$= 133380$

प्रश्न 15 नीचे दिए गए आयात, जिसमें क्षेत्रफल दिया गया है, लंबाई और चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिये।

(i) क्षेत्रफल- $25a^2 - 35a + 12$

(ii) क्षेत्रफल- $35y^2 + 13y - 12$

उत्तर-

(i) क्षेत्रफल : $25a^2 - 35a + 12$

क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

अत: $25a^2 - 35a + 12$ के दो गुणनखंड होंगे जिसमें एक लंबाई होगा और दूसरा चौड़ाई होगा।

गुणनखंड करने पर-

$25a^2 - 35a + 12 = 25a^2 + 15a + 20a + 12$

$= 5a(5a + 3) + 4(5a + 3)$

$= (5a + 3)(5a + 4)$

चूँकि $(5a + 3) < (5a + 4)$ है |

अत: लंबाई = $5a + 4$ और चौड़ाई = $5a + 3$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

(ii) क्षेत्रफल- $35y^2 + 13y - 12$

गुणनखंड करने पर-

$35y^2 + 13y - 12 = 35y^2 + 28y - 15y - 12$

$= 7y(5y + 4) - 3(5y + 4)$

$= (5y + 4)(7y - 3)$

अत: लंबाई = $5y + 4$ और चौड़ाई = $7y - 3$

प्रश्न 16 घनाभों (cuboids), जिनके आयतन नीचे दिया गया हैं कि, विमाओं के लिए संभव व्यंजक क्या हैं?

(i) आयतन- $3x^3 - 12x$

(ii) आयतन- $12ky^2 + 8ky - 20k$

उत्तर-

(i) आयतन : $3x^3 - 12x$

गुणनखंड करने पर

आयतन = $3x^3 - 12x = 3x(x - 4)$

चूँकि आयतन = L × B × H

अत: L = 3, B = x और H = x – 4

(ii) आयतन- $12ky^2 + 8ky - 20k$

आयतन = $12ky^2 + 8ky - 20k$

SHIVOM CLASSES 8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)

$= 4k\,(3y^2 + 2y - 5)$

$= 4k\,(3y^2 + 5y - 3y - 5)$

$= 4k\,[y\,(3y + 5) - 1(3y + 5)]$

$= 4k\,(3y + 5)(y - 1)$

चूँकि आयतन $= L \times B \times H$

अत: $L = 4k$, $B = (3y + 5)$ और $H = (y - 1)$

SHIVOM CLASSES
8696608541

SHIVOM CLASSES - WhatsApp for Notes (8696608541)