गणित

अध्याय- 2: प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

परिभाषा (Definition)

किसी फलन का प्रतिलोम फलन (inverse function) उस फलन को कहते हैं जो मूल फलन द्वारा किये गये परिवर्तन को बदलकर मूल रूप में ला दे। किसी फलन f में x रखने पर परिणाम y मिलता है तो f के प्रतिलोम फलन में y रखने पर परिणाम x मिलेगा, अर्थात् $f(x)=y$ और $g(y)=x$ तो फलन f तथा g एक-दूसरे के प्रतिलोम फलन हैं।

हम जानते हैं कि फलन $f : x \rightarrow Y$ का प्रतिलोम फलन तभी सम्भव है जब एकैकी आच्छादक फलन (one-one onto) हो, तब

$$f(x) = y, \ \forall \ x \in X, y \in Y$$

$$\Rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

यहाँ f^{-1},f का प्रतिलोम फलन है।

अब, समीकरण $\sin\theta = x$ पर विचार कीजिए। इसका अर्थ यह है कि किसी दिये हुए कोण θ की ज्या (साइन) का मान x है। दूसरे शब्दों में θ, एक ऐसा कोण है जिसके ज्या (sine) का मान x है।

सांकेतिक रूप में, कोण θ को हम $\sin^{-1} x$ लिखते हैं इस प्रकार,

$\theta = \sin^{-1} x$ यदि $\sin\theta = x$ जहाँ $\sin^{-1} x$ एक ऐसा कोण है जिसकी ज्या (sine) का मान x है।

अर्थात $\sin(\sin^{-1} x) = x$

$\sin^{-1} x$ को ज्या प्रतिलोम x पढ़ते हैं।

उपर्युक्त परिभाषा से स्पष्ट है कि, $\sin(\sin^{-1} x) = x$ तथा $\sin^{-1} (\sin \theta) = \theta$

क्योंकि $\sin \theta = x$

दोनों पक्षों का $\sin^{-1}$ लेने पर,

$\sin^{-1}(\sin\theta) = \sin^{-1} x$

$\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$, ($\because \theta = \sin^{-1} x$)

ठीक इसी प्रकार $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\sec^{-1} x$, $\text{cosec}^{-1} x$ को भी परिभाषित किया जा सकता है। ये सभी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन है।

अत: "वे सभी त्रिकोणमितीय व्यंजक, जो किसी कोण को उसके मान के रूप में व्यक्त करते हैं, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन कहलाता है।"

उदाहरणार्थ - यदि $\cos\theta = y$ तो $\theta = \cos^{-1}y$

आंकिक रूप में, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तो $\frac{\pi}{6} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$ तो $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}(1)$

टिप्पणी – $\sin^{-1}x$ का अर्थ $(\sin x)^{-1}$ नहीं है क्योंकि $(\sin x)^{-1}$ का अर्थ एक राशि जिसका मान $\frac{1}{\sin x}$ अर्थात् cosec x है, जबकि $\sin^{-1}x$ का अर्थ एक कोण से है जिसकी ज्या (sine)x है।

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का मुख्य मान (Principal Value of Inverse Trigonometric Function)

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन ऐसा फलन होता है जिससे अनेक कोण प्राप्त होते हैं। इन सभी कोणों में से जो कोण संख्यात्मक रूप में "सबसे छोटा" होता है, उसे प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का "मुख्य मान" कहते हैं। जैसे-

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान $30°$ या $\frac{\pi^c}{6}$

"यदि दो कोण संख्यात्मक रूप से बराबर हों किन्तु उनके धन चिन्ह वाले कोण को मुख्य मान माना जाता है।"

उदाहरणार्थ— $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

इस प्रकार,

$\cos(\pm 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ अर्थात् $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm 30^\circ$ फिर भी $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान 30° है।

इसी प्रकार,

$\sec(\pm 60^\circ) = 2$ अर्थात् $\sec^{-1}(2) = \pm 60^\circ$ फिर भी $\sec^{-1}(2)$ का मुख्य मान 60° है।

त्रिकोणमितीय एवं प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन के प्रान्त तथा परिसर या परास (Trigonometric and Inverse Trigonometric Functions with their Domain and Range)

क्र.	फलन	प्रान्त (Domain)	परास (Range)
1.	$\sin x$	R या $x \in R$	$[-1,1]$ या $-1 \le \sin x \le 1$
2.	$\cos x$	R या $x \in R$	$[-1,1]$ या $-1 \le \cos x \le 1$
3.	$\tan x$	$x \in R - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in I\}$	R या $-\infty < \tan x < \infty$
4.	$\cot x$	$x \in R - \{n\pi; n \in I\}$	R या $-\infty < \cot x < \infty$
5.	$\sec x$	$x \in R - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in I\}$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$
6.	$\operatorname{cosec} x$	$x \in R - \{n\pi : n \in I\}$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$
7.	$\sin^{-1} x = \theta$	$[-1,1]$ या $-1 \le x \le 1$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ या $-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x \le \frac{\pi}{2}$
8.	$\cos^{-1} x = \theta$	$[-1,1]$ या $-1 \le x \le 1$	$[0,\pi]$ या $0 \le \cos^{-1} x \le \pi$
9.	$\tan^{-1} x = \theta$	$(-\infty,\infty)$ या $-\infty < x < \infty$ या $x \in R$	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ या $\frac{-\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$
10.	$\cot^{-1} x = \theta$	$(-\infty,\infty)$ या $-\infty < x < \infty$ या $x \in R$	$(0,\pi)$ या $0 < \cot^{-1} x < \pi$
11.	$\sec^{-1} x = \theta$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ या $x \le -1, x \ge 1$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ या $\theta \ne \frac{\pi}{2}$, $0 \le \theta \le \pi$
12.	$\operatorname{cosec}^{-1} x = \theta$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ या $x \le -1, x \ge 1$	$\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ या $\theta \ne 0, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

मुख्य मान शाखा (Principal Value Branch)

किसी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन के वक्र का वह भाग, जिस पर इस फलन का मुख्य मान स्थित होता है, मुख्य मान शाखा कहलाता है।

नीचे विभिन्न प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की मुख्य मान शाखाएँ दी गई हैं:

फलन	मुख्य मान शाखा
(i) $y=\sin^{-1}x$	$\frac{-\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$, जहाँ $-1\le x\le 1$
(ii) $y=\cos^{-1}x$	$0\le y\le\pi$, जहाँ $-1\le x\le 1$
(iii) $y=\tan^{-1}x$	$\frac{-\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2}$, जहाँ $-\infty< x<\infty$
(iv) $y=\sec^{-1}x$	$\begin{cases}0\le y<\frac{\pi}{2}, 1\le x<\infty\\ \frac{\pi}{2}<y\le\pi, -\infty<x\le -1\end{cases}$
(v) $y=\operatorname{cosec}^{-1}x$	$\begin{cases}0< y\le\frac{\pi}{2}, 1\le x<\infty\\ \frac{\pi}{2}\le y<0, -\infty<x\le -1\end{cases}$
(vi) $y=\cot^{-1}x$	$0<y<\pi, -\infty<x<\infty$

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के लेखाचित्र

(Graphs of Inverse Trigonometric Functions)

Y = $\sin^{-1}x$ का लेखाचित्र खींचना (To Draw Graph of y = $\sin^{-1}x$) — फलन y = $\sin^{-1}$

⇒ sin y = x.

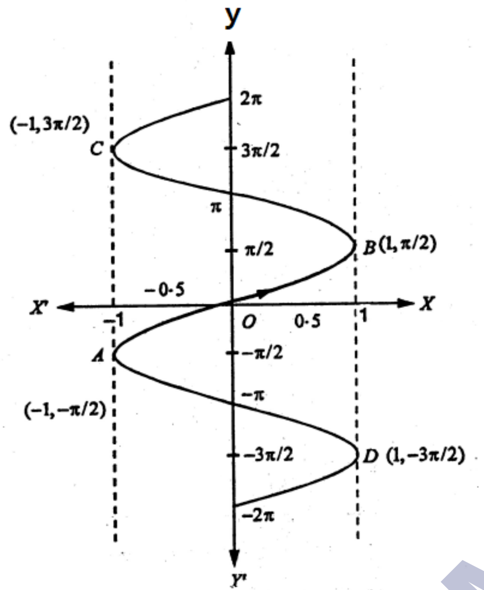
अतएव निम्नानुसार सारणी बनेगी (y = sinx की सारणी में x, y को परस्पर बदलने से प्राप्त मान):

x	0	0·5	1	0·5	0	−0·5	−1	−0·5	0
y	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	2π

तथा (-2π,0) के लिए :

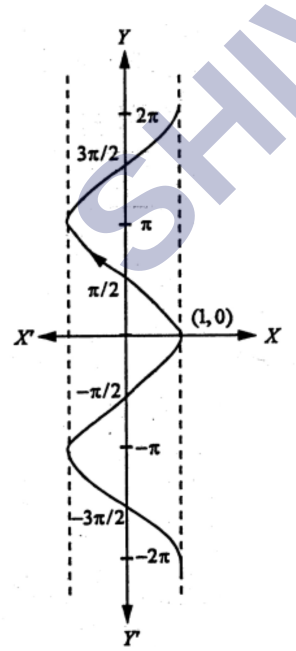
x	−0.5	−1	−0.5	0	0.5	−1	0.5	0
y	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\pi$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{6}$	-2π

(xy) के इन मानों को लेखाचित्र द्वारा निम्नानुसार दर्शाया जाता है :



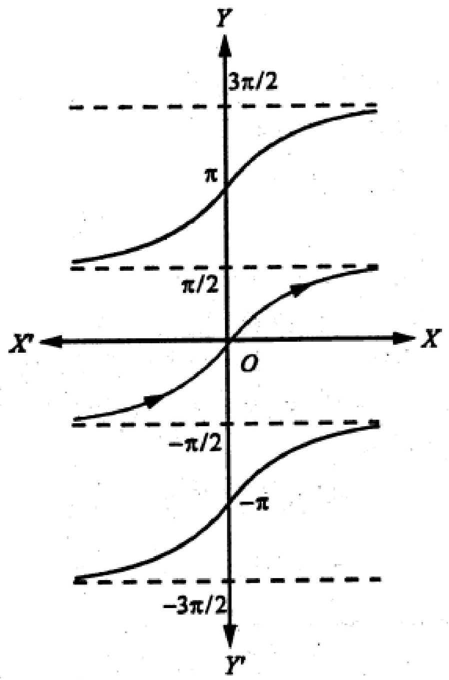
$y = \sin^{-1}x$ का लेखाचित्र

लेखाचित्र में गाढ़ा भाग AOB, $\sin^{-1}x$ की मुख्य शाखा को दर्शाता है।

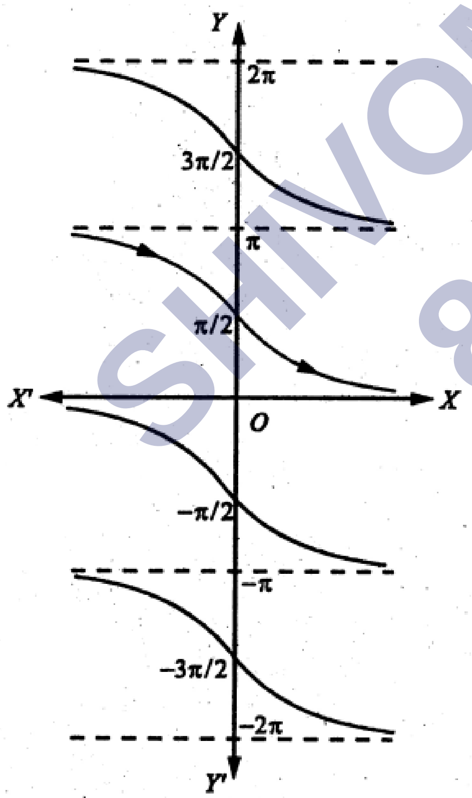


$Y = \cos^{-1}x$ का लेखाचित्र

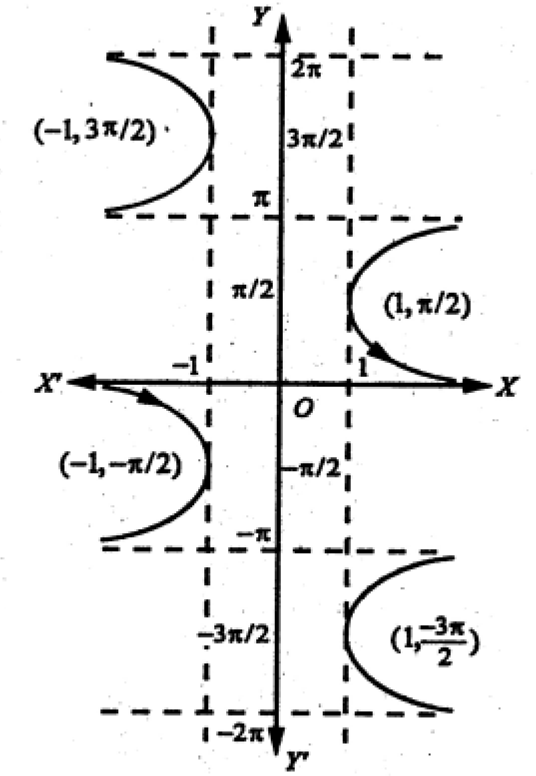
इसी प्रकार अन्य प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के लेखाचित्र विभिन्न चित्रों में प्रदर्शित किये गये हैं। लेखाचित्रों का गाढ़ा भाग मुख्य मान शाखा को प्रदर्शित करता है।



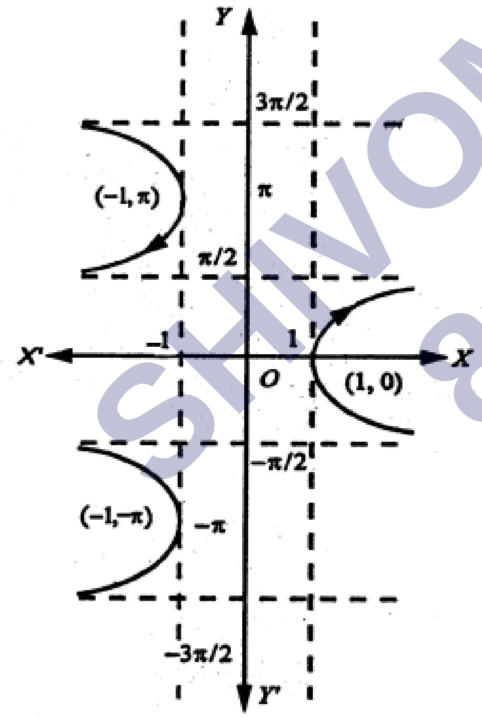
$y = \tan^{-1} x$ का लेखाचित्र



$y = \cot^{-1} x$ का लेखाचित्र



y = cosec^{-1}x का लेखाचित्र



y = sec^{-1}x का लेखाचित्र

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के सम्बन्ध तथा गुणधर्म (Properties and Relations Connecting Inverse Trigonometric Functions)

(A) स्वयं समंजक गुण (Self-adjusting Property)

i. $\sin^{-1}x(\sin\theta) = \theta$

$\sin(\sin-1\ x) = x$

ii. $\cos^{-1}x(\cos\theta) = \theta$

$\cos(\cos^{-1} x) = x$

iii. $\tan^{-1}x(\tan\theta) = \theta$

$\tan(\tan^{-1} x) = x$

प्रमाण : (i) यदि $\sin\theta = x$

तब $\theta = \sin^{-1}x$

$\Rightarrow \boxed{\theta = \sin^{-1}(\sin\theta)}$

यदि $\sin^{-1}x = \theta$

तब $x = \sin\theta$

$\therefore \boxed{x = \sin(\sin^{-1}x)}$

इसी प्रकार (ii) व (iii) को भी सिद्ध कर सकते हैं।

(B) **व्युत्क्रम गुण** (Reciprocal Property)

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1} x$

$$\sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x}$$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1} x$

$$\cos^{-1} x = \sec^{-1} \frac{1}{x}$$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cot^{-1} x$

$$\tan^{-1} x = \cot^{-1} \frac{1}{x}$$

प्रमाण : (i) मानलो $y = \operatorname{cosec}^{-1}x$

$\Rightarrow$ **$x = \operatorname{cosec} y$**

$\Rightarrow \quad \sin y = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y = \sin^{-1}\frac{1}{x}$

समी. (1) व (2) से,

$$\boxed{\sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x}}$$

पुनः मानलो $\sin^{-1}x = y$ ....(3)

$\Rightarrow x = \sin y$

$\Rightarrow \operatorname{cosec} y = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow y = \text{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad ....(4)$$

(4) समी. (3) व (4) से,

$$\boxed{\sin^{-1} x = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}}$$

इसी तरह से (ii) व (ii) को भी सिद्ध कर सकते हैं।

(C) रूपान्तरण गुण (Conversion Property)

(i) $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

(ii) $\cos^{-1} x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$= \cot^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(iii) $\tan^{-1} x = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sec^{-1}\sqrt{1+x^2}$$

प्रमाण : (i) मानलो $\sin^{-1}x = \theta$ ...(1)

तब $\sin\theta = x$ या $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

∴ $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

⇒ $\theta = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ ...(2)

अब $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

∴ $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ...(3)

इसी तरह, $\theta = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ...(4)

अत: समी. (1), (2), (3) व (4) से,

$$\boxed{\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}$$

इसी तरह (ii), (iii) को भी सिद्ध किये जा सकते हैं।

सिद्ध करना है कि

(i) $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$

(ii) $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$

(iii) $\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$

(iv) $\cot^{-1}(-x)=\pi-\cot^{-1}x$

(v) $\sec^{-1}(-x)=\pi-\sec^{-1}x$

(vi) $\operatorname{cosec}^{-1}(-x)=-\operatorname{cosec}^{-1}x.$

प्रमाण : (i) मानलो $\sin^{-1}(-x) = \theta$ ....(1)

तब $\sin\theta = -x$

$\Rightarrow -\sin\theta = x$

या $\sin(-\theta) = x$, $[\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$

$\therefore\ -\theta = \sin^{-1}x$

$\Rightarrow \theta = -\sin^{-1}x$ ....(2)

अत: समी. (1) और (2) से,

$\boxed{\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x}$

(ii) मानलो $\cot^{-1}(-x) = \theta$ ....(3)

$\therefore$ -x = cos θ $\Rightarrow$ x = -cos θ

x = cos(π – θ) $\Rightarrow$ π – θ = $\cos^{-1}$ x

$\therefore$ θ = π – $\cos^{-1}$ x ....(4)

अत: समी. (3) और (4) से,

$\boxed{\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos x}$

(iii) मानलो $\tan^{-1}(-x)$ = θ ....(5)

$\Rightarrow$ -x = tan θ $\Rightarrow$ x = -tan θ =tan(-θ)

$\therefore$ -θ = $\tan^{-1}$ x $\Rightarrow$ θ = - $\tan^{-1}$ x ....(6)

अत: समी. (5) और (6) से,

$\boxed{\text{Tan}^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x}$

इसी तरह अन्य सम्बन्ध भी सिद्ध किये जा सकते हैं।

उदाहरण 1. $\boldsymbol{cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}$ का मुख्य मान तथा व्यापक मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\cos^{-1}$x का मुख्य मान अंतराल [0, π] में होता है

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$$

तथा व्यापक मान $\cos^{-1}\frac{1}{2} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

उदाहरण 2. $\sec^{-1}(-2)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sec^{-1}$x का मुख्य मान अंतराल [0, π] में होता है

जहाँ $\theta \neq \frac{\pi}{2}$

$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$ का प्रयोग करने पर,

$$\sec^{-1}(-2) = \pi - \sec^{-1} 2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

सिद्ध करना है कि

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$.

प्रमाण : (i) मानलो $\sin^{-1}x = \theta$ ....(1)

$\therefore$ $x = \sin\theta$

$$\Rightarrow \quad x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta$$

समी. (1) से θ का मान रखने पर,

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$$

$$\therefore \quad \boxed{\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}}$$

इसी तरह सम्बन्ध (ii) व (iii) भी सिद्ध कर सकते हैं।

सिद्ध करना है कि

(i) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$,

यदि $xy < 1$

$= \pi + \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, यदि $xy > 1$ और

$x > 0, y > 0$

$= -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, यदि $xy > 1$ और

$x < 0, y < 0$.

(ii) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$, यदि

$xy > -1$

$= \pi + \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$, यदि $xy < -1$ और

$x > 0, y < 0$

$= -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$, यदि $xy < -1$ और

$x < 0, y > 0$.

प्रमाण : (i) मानलो $\tan^{-1} x = \alpha$ तब $x = \tan\alpha$

और $\tan^{-1} y = \beta \Rightarrow \tan\beta = y$

अब $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha . \tan\beta}$

$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{x+y}{1-xy}$

$\Rightarrow \alpha + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)}$$

सिद्ध करना है कि

(i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y$

$$=\sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}]$$

(ii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y$

$$=\sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}]$$

(iii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y$

$$=\cos^{-1}[xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}]$$

(iv) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y$

$$=\cos^{-1}[xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}]$$

(v) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\left(\frac{xy-1}{x+y}\right)$

(vi) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{y-x}\right)$.

प्रमाण : (i) मानलो $\sin^{-1}x=\alpha$. तब $x=\sin\alpha$

और $\sin^{-1}y=\beta$. तब $y=\sin\beta$

अब $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\beta}+\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow\ \alpha+\beta=\sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}]$$

$$\therefore\ \boxed{\begin{aligned}&\sin^{-1}x+\sin^{-1}y\\&\quad=\sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}]\end{aligned}}$$

(iii) मानलो $\cos^{-1} x = \alpha$ तब $x = \cos\alpha$

और $\cos^{-1} y = \beta$ तब $y = \cos\beta$

अब $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sqrt{1-\cos^2\alpha}.\sqrt{1-\cos^2\beta}$$

$$= xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta = \cos^{-1}[xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}[xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}]}$$

सिद्ध करना है कि

$$2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$$

प्रमाण : मानलो $\tan^{-1} x = \theta \Rightarrow x = \tan\theta$

अब $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \quad 2\theta = \boxed{2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}}$$

इसी तरह, $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$$\therefore \quad 2\theta = \boxed{2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

पुनः $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2x}{1-x^2}$

$$\therefore \quad 2\theta = \boxed{2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}}.$$

सिद्ध करना है कि

(i) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

(ii) $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$

प्रमाण : (i) मानलो $\sin^{-1}x = \theta$

$\therefore$ $x = \sin\theta$

अब $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= 2x\sqrt{1-x^2}$

$\therefore$ $2\theta = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

अतः $\boxed{2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})}$

(ii) मानलो $\cos^{-1}x = \theta$

तब $x = \cos\theta$

अब $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$

$\therefore$ $2\theta = \cos^{-1}(2x^2-1)$

अतः $\boxed{2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)}$

उदाहरण 1. सिद्ध कीजिए

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

हल : सूत्र— $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ का प्रयोग करने पर,

$$\text{L.H.S.} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}},$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

$= \text{R.H.S.}$

उदाहरण 2. सिद्ध कीजिए

$$\tan^{-1} 5 - \tan^{-1} 3 = \tan^{-1}\frac{1}{8}.$$

हल : सूत्र $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$ का प्रयोग करने पर,

$$\text{L.H.S.} = \tan^{-1} 5 - \tan^{-1} 3$$

$$= \tan^{-1}\frac{5-3}{1+5\cdot 3},$$

$$= \tan^{-1}\frac{2}{16} = \tan^{-1}\frac{1}{8}$$

$$= \text{R.H.S.}$$

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय समीकरण (Inverse Trigonometric Equation)

जब किसी समीकरण में दिये गये फलन अज्ञात राशि के प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन के रूप में होते हैं तब उन्हें प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के विभिन्न गुणों का उपयोग करके निम्न प्रकार से हल किया जा सकता है।

उदाहरण 1. समीकरण हल कीजिए:

$$\cos(2\sin^{-1} x) = \frac{1}{9}.$$

हल : माना $\sin^{-1} x = \theta \Rightarrow x = \sin\theta$

अब, दिया है : $\cos(2\sin^{-1} x) = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow \quad \cos(2\theta) = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow \quad 1 - 2\sin^2\theta = \frac{1}{9}$,

$[\because \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta]$

$\Rightarrow \quad 1 - 2x^2 = \frac{1}{9}$, $\quad [\because \sin\theta = x]$

$\Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{9} = 2x^2 \Rightarrow \frac{8}{9} = 2x^2$

$\Rightarrow \quad \frac{4}{9} = x^2$

$\Rightarrow \quad \frac{2}{3} = x.$ उत्तर

उदाहरण 2 हल कीजिए:

$$\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} + \sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2} = 2\tan^{-1} x.$$

हल : दिया है :

$$\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} + \sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2} = 2\tan^{-1} x$$

$\Rightarrow \quad 2\tan^{-1}(a) + 2\tan^{-1}(b) = 2\tan^{-1} x$,

$$\left[\because 2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}(a)+\tan^{-1}(b)=\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)=\tan^{-1}x,$$

$$\left[\because \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{1-ab}=x.$$ उत्तर

व्युत्क्रम त्रिकोणमितीय फलनों का सरलतम रूपों में परिवर्तन

(To Express inverse Trigonometric Functions in Simplest Form)

उदाहरण 1 सिद्ध करना है कि

$$\sin^{-1}\left[\frac{4x}{1+4x^2}\right]=2\tan^{-1}2x.$$

हल : $$\text{L.H.S.}=\sin^{-1}\left[\frac{4x}{1+4x^2}\right]$$

$$=\sin^{-1}\left[\frac{2(2x)}{1+(2x)^2}\right]$$

माना $2x=\tan\theta$

तब, $\theta=\tan^{-1}2x$ ...(1)

$$=\sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$=\sin^{-1}[\sin 2\theta],$$

$$\left[\because \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin 2\theta\right]$$

$= 2\theta = 2\tan^{-1} 2x$, [समी. (1) से]

$=$ R.H.S.

उदाहरण 2 सिद्ध करना है कि

$$\cos^{-1}\frac{1-6x^2}{1+6x^2} = 2\tan^{-1}\sqrt{6}x.$$

हल : L.H.S. $= \cos^{-1}\frac{1-6x^2}{1+6x^2}$

$$= \cos^{-1}\frac{1-(\sqrt{6}x)^2}{1+6x^2}$$

माना $\sqrt{6}\,x = \tan\theta$

तब, $\theta = \tan^{-1}\sqrt{6}\,x$ ...(1)

L.H.S. $= \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$= \cos^{-1}(\cos 2\theta)$,

$$\left[\because \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta\right]$$

$= 2\theta = 2\tan^{-1}\sqrt{6}\,x$, [समी. (1) से]

$=$ R.H.S.

उदाहरण 1 यदि $\cot^{-1}[\sqrt{\cos}] - tan^{-1}[\sqrt{\cos x}]$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि-

$$\sin y = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

हल: दिया गया है

$$y=\cot^{-1}[\sqrt{\cos x}]-\tan^{-1}[\sqrt{\cos x}]$$

$$\Rightarrow \quad y=\tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right]-\tan^{-1}\left[\sqrt{\cos x}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{\cos x}}-\sqrt{\cos x}}{1+\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\times\sqrt{\cos x}}\right],$$

$$\left[\because \tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y=\tan^{-1}\left[\frac{1-\cos x}{2\sqrt{\cos x}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \tan y=\frac{1-\cos x}{2\sqrt{\cos x}} \Rightarrow \cot y=\frac{2\sqrt{\cos x}}{1-\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad \cot^2 y=\frac{4\cos x}{(1-\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1+\cot^2 y=1+\frac{4\cos x}{(1-\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{cosec}^2 y=\frac{(1-\cos x)^2+4\cos x}{(1-\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{cosec}^2 y = \frac{1+\cos^2 x - 2\cos x + 4\cos x}{(1-\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{cosec}^2 y = \frac{(1+\cos x)^2}{(1-\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{cosec} y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\operatorname{cosec} y} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad \sin y = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin y = \tan^2 \frac{x}{2}.$$

उदाहरण 2 यदि $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \pi$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि-

$$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz.$$

हल : माना $\sin^{-1} x = \alpha, \sin^{-1} y = \beta$ और $\sin^{-1} z = \gamma$.

तब, $\sin\alpha = x, \sin\beta = y$ और $\sin\gamma = z$

$\therefore \quad \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}, \cos\beta = \sqrt{1-y^2}$

और $\quad \cos\gamma = \sqrt{1-z^2}$

प्रश्न के अनुसार, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

अतः $\text{L.H.S.} = x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2}$

$= \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma$

$= \frac{1}{2}[\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma]$

$$=\frac{1}{2}[(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)+\sin 2\gamma]$$

$$=\frac{1}{2}[2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma]$$

$$=\frac{1}{2}[2\sin(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma]$$

$$=\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma]$$

$$=\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\pi-(\alpha+\beta))]$$

$$=\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$=\sin\gamma.2\sin\alpha\sin\beta=2xyz$$

$$=\text{R.H.S.}$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 2.1 (पृष्ठ संख्या 47-48)

निम्नलिखित का मुख्य मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1. $\text{Sin}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

उत्तर- $\sin^{-1}$ की मुख्य मान शाखा परिसर $[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ है।

माना $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta$

तब,

$$\Rightarrow \sin\theta=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\theta=-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$\therefore \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 2. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

उत्तर- $\cos^{-1}$ की मुख्य मान शाखा परिसर $[0, \pi]$ है।

माना $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\theta,$

तब,

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}\in[0,\pi]$$

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 3. $\text{cosec}^{-1}(2)$

उत्तर- cosec^{-1} की मुख्य मान शाखा परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ है।

माना $\text{cosec}^{-1}(2) = \theta$

तब,

$$\text{cosec}\theta = 2 = \text{cosec}\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

$\therefore \text{cosec}^{-1}(2)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 4. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

उत्तर- $\tan^{-1}$ की मुख्य मान शाखा परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ है।

माना $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \theta$

तब,

$$\Rightarrow \tan\theta = (-\sqrt{3}) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\therefore \tan^{-1}(-\sqrt{3})$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{3}$ है।

प्रश्न 5. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

उत्तर- $\cos^{-1}$ की मुख्य मान शाखा परिसर $[0, \pi]$ है।

माना $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta$

तब,

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$$

$\therefore \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $\frac{2\pi}{3}$ है।

प्रश्न 6. $\tan^{-1}(-1)$

उत्तर- $\tan^{-1}$ की मुख्य मान शाखा परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ है।

माना $\tan^{-1}(-1) = \theta$

तब,

$$\Rightarrow \tan\theta = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\therefore \tan^{-1}(-1)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{4}$ है।

प्रश्न 7. $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

उत्तर- $\sec^{-1}$ की मुख्य मान शाखा परिसर $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ है।

माना $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \theta$

तब,

$$\Rightarrow \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$\therefore \sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 8. $\cot^{-1}(\sqrt{3})$

उत्तर- $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ की मुख्य मान शाखा परिसर [0, π] है।

$$\Rightarrow \cot\theta = \sqrt{3} = \cot\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{\pi}{6} \in (0, \pi)$$

$\therefore \cot^{-1}(\sqrt{3})$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 9. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

उत्तर- $\cos^{-1}$ की मुख्य मान शाखा परिसर [0, π] है।

माना $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \theta$

तब,

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$$

$\therefore \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{3\pi}{4}$ है।

प्रश्न 10. $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$

उत्तर- $\operatorname{cosec}^{-1}$ की मुख्य मान शाखा परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ है।

माना $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2}) = \theta$

तब,

$$\Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = -\sqrt{2} = \operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \theta = -\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

$\therefore \operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{4}$ है।

निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 11.

$$\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

उत्तर-

$$\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{3\pi+8\pi-2\pi}{12} = \frac{9}{12} . \pi = \frac{3\pi}{4}$$

प्रश्न 12.

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

उत्तर-

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} + 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

प्रश्न 13.

यदि $\sin^{-1} x = y$, तो

a. $0 \geq y \geq \pi$

b. $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

c. $0 < y < \pi$

d. $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

उत्तर-

b. $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

हल-

$\because \sin^{-1}$ का मुख्य मान शाखा परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है।

$\therefore -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ विकल्प (b) सही है।

प्रश्न 14.

$\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान बराबर है।

a. π

b. $-\frac{\pi}{3}$

c. $\frac{\pi}{3}$

d. $\frac{2\pi}{3}$

उत्तर-

b. $-\frac{\pi}{3}$

हल-

माना $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = x$

$\Rightarrow \tan x = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$

$\because x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

पुनः माना

$y = \sec^{-1}(-2)$

$\Rightarrow \sec y = -2$

$\Rightarrow \sec y = -\sec\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \sec y = \sec\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow y = \frac{2\pi}{3}$

$\because y \in [0, \pi] - \left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$

$= x - y = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$

अतः विकल्प (B) सही है।

प्रश्नावली 2.2 (पृष्ठ संख्या 54-55)

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए:

प्रश्न 1. $3\sin^{-1}X = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$,$x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

उत्तर-

माना $\sin^{-1} x = \theta$

$\therefore \sin\theta = x$

पुनः $\sin 3\theta = 3\sin^3\theta - 4\sin\theta$

$\Rightarrow \sin 3\theta = 3x - 4x^3$

$\Rightarrow 3\theta = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$

$\therefore 3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$ इति सिद्धम्

प्रश्न 2. $3\cos^{-1}X = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$,$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

उत्तर-

माना $\cos^{-1} x = \theta$

$\therefore \cos\theta = x$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\Rightarrow \cos 3\theta = 4x^3 - 3x$

$\Rightarrow 3\theta = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

$3\cos^{-1} x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$ इति सिद्धम्

प्रश्न 3. $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{7}{24}$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{2}{11}+\frac{7}{24}}{1-\frac{2}{11}\times\frac{7}{24}}\right]$$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{48+77}{264-14}\right]$$

$=\tan^{-1}\left[\frac{125}{250}\right]=\tan^{-1}\frac{1}{2}$ = दायाँ पक्ष

प्रश्न 4. $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{31}{17}$

उत्तर-

ज्ञात है $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{31}{17}$

$$\therefore 2\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\tan^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\tan^{-1}\frac{1}{\frac{4-1}{4}}$$

$$\left[\because 2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right]$$

$$=\tan^{-1}\frac{4}{3}$$

बायाँ पक्ष

$$=2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{\frac{28+3}{21}}{\frac{21-4}{21}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{31}{17}$$ = दायाँ पक्ष

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए:

प्रश्न 5. $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, x \neq 0$

उत्तर-

$$\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, x \neq 0$$

माना $x = \tan\theta$

$$\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+\tan 2\theta}-1}{\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{1-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x$$

प्रश्न 6. $\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$

उत्तर-

माना $x = \text{cosec}\theta$

$$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\cot^2\theta}} = \left(\frac{1}{\cot\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta = \text{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}x$$

प्रश्न 7. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\right), x < \pi$

उत्तर-

माना $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-1+2\sin^2\frac{x}{2})}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2})}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \tan^{-1}\tan\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

प्रश्न 8. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right), x < \pi$

उत्तर-

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}-x$$

प्रश्न 9. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, |x|<a$

उत्तर-

माना $x=a\sin\theta$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{a\sin\theta}{a\cos\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta=\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

प्रश्न 10. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right), a>0; \frac{-a}{\sqrt{3}}\le x\le\frac{a}{\sqrt{3}}$

उत्तर-

माना $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right)$

$x=a\tan\theta$ रखने पर,

$$\therefore \tan\theta=\frac{x}{a}\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{3a^2.a\tan\theta - a^3\tan^3\theta}{a^3 - 3a.a^2\tan^2\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3a^3\tan\theta - a^3\tan^3\theta}{a^3 - 3a^3\tan^2\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{a^3(3\tan\theta - \tan^3\theta)}{a^3(1 - 3\tan^2\theta)}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\tan(3\theta)\ \left[\because \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}\right]$$

$$= 3\theta = 3\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 11.

$$\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$$

उत्तर-

माना $\sin^{-1}\frac{1}{2} = \theta$

तब $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$$\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right] = \tan^{-1}(2\cos(2\theta))$$

$$= \tan^{-1}\left(2\cos 2\times\frac{\pi}{6}\right) = \tan^{-1}\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(2\times\frac{1}{2}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

प्रश्न 12. $\cot(\tan^{-1} a + \cot^{-1} a)$

उत्तर-

माना $y = \cot\left(\tan^{-1} a + \cot^{-1} a\right)$

$= \cot \frac{\pi}{2} \left[\because \tan^{-1} a + \cot^{-1} a = \frac{\pi}{2}\right]$

$= 0 \left[\because \cot \frac{\pi}{2} = 0\right]$

प्रश्न 13.

$\tan \frac{1}{2}\left[\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1} \frac{1-y^2}{1+y^2}\right], |x| < 1, y > 0 \text{ and } xy < 1$

उत्तर-

माना $y = \tan \frac{1}{2}\left[\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1} \frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$

माना $x = \tan\theta$

तथा $y = \tan\phi \Rightarrow \theta = \tan^{-1} x$ तथा $\phi = \tan^{-1} y$

$= \tan \frac{1}{2}\left[\sin^{-1} \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} + \cos^{-1} \frac{1-\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}\right]$

$= \tan \frac{1}{2}\left[\sin^{-1} \sin 2\theta + \cos^{-1} \cos 2\phi\right]$

$= \tan \frac{1}{2}[2\theta + 2\phi] = \tan \frac{1}{2} \times 2\,[\theta + \phi]$

$= \tan[\theta + \phi]$

$= \tan(\tan^{-1} x + \tan^{-1} y)\ \left(\tan^{-1} x = \theta, \tan^{-1} y = \phi\right)$

$= \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right] = \frac{x+y}{1-xy}$

प्रश्न 14. यदि $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x\right)=1$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\sin\left(\sin^{-1}\tfrac{1}{5}+\cos^{-1}x\right)=1,$$

$$\Rightarrow \sin\left[\cos^{-1}\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{5}\right)}+\cos^{-1}x\right]=1$$

$$\Rightarrow \sin\left[\cos^{-1}\sqrt{\left(\tfrac{24}{5}\right)}+\cos^{-1}x\right]=1$$

$$\Rightarrow \sin\left[\cos^{-1}\left\{\sqrt{\left(\tfrac{24}{5}\right)}.x-\sqrt{\left(1-\tfrac{24}{25}\left(1-x^2\right)\right)}\right\}\right]=1$$

$$\Rightarrow \sin\left[\cos^{-1}\left\{\sqrt{\left(\tfrac{24}{5}\right)}.x-\sqrt{\left(1-\tfrac{24}{25}\left(1-x^2\right)\right)}\right\}\right]=1$$

$$\Rightarrow \sin\left[\cos^{-1}\left\{\sqrt{\left(\tfrac{24}{5}\right)}.x-\tfrac{\sqrt{1-x^2}}{5}\right\}\right]$$

$$=1=\sin\tfrac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}\left[\sqrt{\left(\tfrac{24}{5}\right)}.x-\tfrac{\sqrt{1-x^2}}{5}\right]=\tfrac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\tfrac{24}{5}\right)}.x-\tfrac{\sqrt{1-x^2}}{5}=\cos\tfrac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\tfrac{24}{5}\right)}.x-\tfrac{\sqrt{1-x^2}}{5}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{24}x=\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow 24x^2=1-x^2$$

$$\Rightarrow 25x^2=1$$

$$\Rightarrow x=\tfrac{1}{5}$$

प्रश्न 15. यदि $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- प्रश्नानुसार,

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}\right]=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left[\frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)-(x-1)(x+1)}\right]=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{x^2+2x-x-2+x^2-2x+x-2}{x^2-4-(x^2-1)}=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-4}{-3}=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\Rightarrow 2x^2-4=-3$$

$$\Rightarrow 2x^2=1$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

दिए गए व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 16. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

उत्तर- $\sin^{-1}$ की मुख्य मान शाखा परिसर $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ है।

$$=\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)\neq\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{अब} = \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left\{\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\therefore \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

प्रश्न 17. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

उत्तर-

$\tan^{-1}$ की मुख्य मान शाखा परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है।

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) \neq \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{अब } \tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = \tan^{-1}\left\{\tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] = -\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\therefore \tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

प्रश्न 18. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

उत्तर-

माना $\sin^{-1}\frac{3}{5}=\theta$ तब $\sin\theta=\frac{3}{5}$

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \theta=\tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$\therefore \tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)=\tan\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

$$=\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}\right)\right]$$

$$=\tan\left[\tan^{-1}\frac{17}{6}\right]=\frac{17}{6}$$

प्रश्न 19. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान बराबर है

a. $\frac{7\pi}{6}$

b. $\frac{5\pi}{6}$

c. $\frac{\pi}{3}$

d. $\frac{\pi}{6}$

उत्तर-

b. $\frac{5\pi}{6}$

हल-

$\cos^{-1}$ की मुख्य मान शाखा परिसर $[0,\pi]$ है

$$\therefore \cos^{-1}\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right) \neq \frac{7\pi}{6}$$

$$\cos^{-1}\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \cos^{-1}\left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\cos \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$$

$$\therefore \cos^{-1}\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

प्रश्न 20. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ का मान है

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{4}$

d. 1

उत्तर-

d. 1

हल-

$$= \sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)\right]$$

$$= \sin\left[\frac{\pi}{3} - \left(\frac{-\pi}{6}\right)\right] = \sin\left[\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right] = 1$$

$$\sin \frac{3\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

अतः विकल्प (D) है

प्रश्न 21.

$\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान है

a. π

b. $-\frac{\pi}{2}$

c. 0

d. $2\sqrt{3}$

उत्तर-

b. $-\frac{\pi}{2}$

हल-

फलन $\cot^{-1}$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $=(0, \pi)$

$$\therefore \cot^{-1}(-\sqrt{3}) = \cot^{-1}\left(-\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \cot^{-1}\left[\cot\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] \quad [\because \cot(\pi - \theta) = -\cot\theta]$$

$$= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi - 5\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

अतः विकल्प (B) सही है

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 58-59)

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$

उत्तर- दिया है $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$

हम जानते है की $\cos^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है।

$\therefore \cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$

इसलिए, $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

प्रश्न 2. $\tan^{-1}(\tan\frac{7\pi}{6})$

उत्तर- $\tan^{-1}(\tan\frac{7\pi}{6})$

हम जानते है की $\tan^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है।

$\therefore \tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

इसलिए, $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

सिद्ध कीजिए:

प्रश्न 3. $2\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{24}{7}$

उत्तर-

$$\text{LHS} = 2\sin^{-1}\frac{3}{5} = 2\tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{5^2-3^2}}$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{3}{4} = \tan^{-1}\left[\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{3}{2}}{\frac{16-9}{16}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\times\frac{16}{7}\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{24}{7}$$

$$= \text{RHS}$$

प्रश्न 4. $\sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{77}{36}$

उत्तर- $\text{LHS} = \sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5}$

$$= \tan^{-1}\frac{8}{\sqrt{17^2-8^2}} + \tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{5^2-3^2}} \quad \left[\because \sin^{-1}\frac{a}{b} = \tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{8}{15} + \sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{8}{15}+\frac{3}{4}}{1-\frac{8}{15}\times\frac{3}{4}}\right] \left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{32+45}{15\times4}}{\frac{15\times4-8\times3}{15\times4}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{77}{60}}{\frac{36}{60}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{77}{36}$$

$$= \text{RHS}$$

प्रश्न 5. $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$

उत्तर- LHS $=\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}$

$$=\tan^{-1}\frac{\sqrt{5^2-4^2}}{4}+\tan^{-1}\frac{13^2-12^2}{12}\quad\left[\because \cos^{-1}\frac{a}{b}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right]$$

$$=\cos^{-1}\frac{3}{4}+\cos^{-1}\frac{5}{12}$$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{3}{4}+\frac{5}{12}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{5}{12}}\right]\quad\left[\because \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{36+20}{4\times12}}{\frac{4\times12-3\times5}{4\times12}}\right]=\tan^{-1}\frac{56}{33}$$

$$=\cos^{-1}\frac{33}{\sqrt{56^2+33^2}}\quad\left[\because \cos^{-1}\frac{a}{b}=\cos^{-1}\frac{b}{a^2-b^2}\right]$$

$$=\cos^{-1}\frac{33}{\sqrt{4225}}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$$

$$=\text{RHS}$$

प्रश्न 6. $\cos^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\frac{56}{65}$

उत्तर- LHS $=\cos^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{3}{5}$

$$=\tan^{-1}\frac{13^2-12^2}{12}+\tan^{-1}\frac{3}{5^2-3^2}$$

$$\left[\because \cos^{-1}\frac{a}{b}=\tan^{-1}\frac{b^2-a^2}{a},\sin^{-1}\frac{a}{b}=\tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\right]$$

$$=\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{5}{12}+\frac{3}{4}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{3}{4}}\right]\quad\left[\because \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{20+36}{12\times4}}{\frac{12\times4-5\times3}{12\times4}}\right] = \tan^{-1}\frac{56}{33}$$

$$= \sin^{-1}\frac{56}{\sqrt{56^2+33^2}} \quad \left[\because \tan^{-1}\frac{a}{b} = \sin^{-1}\frac{a}{a^2+b^2}\right]$$

$$= \sin^{-1}\frac{56}{\sqrt{4225}} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$$

$$= \text{RHS}$$

प्रश्न 7. $\tan^{-1}\frac{63}{16} = \sin^{-1}\frac{5}{13} + \cos^{-1}\frac{3}{5}$

उत्तर- $\text{RHS} = \sin^{-1}\frac{5}{13} + \cos^{-1}\frac{3}{5}$

$$= \tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{13^2-5^2}} + \tan^{-1}\frac{\sqrt{5^2-3^2}}{3}$$

$$\left[\because \cos^{-1}\frac{a}{b} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}, \sin^{-1}\frac{a}{b} = \tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{5}{12} + \tan^{-1}\frac{4}{3}$$

$$\left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{5}{12}+\frac{4}{3}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{15+48}{12\times3}}{\frac{12\times3-5\times4}{12\times3}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{63}{16}$$

$$= \text{RHS}$$

प्रश्न 8. $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

उत्तर- LHS $= \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8}$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}}\right] + \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}}\right]$$

$$\left[\text{as} \quad \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{7+5}{5\times7}}{\frac{5\times7-1\times1}{5\times7}}\right] + \tan^{-1}\left[\frac{\frac{8+3}{3\times8}}{\frac{3\times8-1\times1}{3\times8}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{12}{34} + \tan^{-1}\frac{11}{23} = \tan^{-1}\frac{6}{17} + \tan^{-1}\frac{11}{23}$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{6}{17}+\frac{11}{23}}{1-\frac{6}{17}\times\frac{11}{23}}\right] \quad \left[\text{as} \quad \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{138+187}{17\times23}}{\frac{17\times23-6\times11}{17\times23}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{138+187}{391-66}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{325}{325}\right) = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} = \text{RHS}$$

सिद्ध कीजिए:

प्रश्न 9. $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), x \in [0,1]$

उत्तर- LHS $= \tan^{-1}\sqrt{x}$

$$= \frac{1}{2} \times 2\tan^{-1}\sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left[\frac{1-(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2}\right]$$

$$\left[\because 2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$= \text{RHS}$$

प्रश्न 10.

$$\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \frac{x}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

उत्तर-

$$\text{LHS} = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)$$

$$= \cot^{-1}\left(\left(\frac{\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{1+cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}-\sqrt{\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}}\right)\right.$$

$$\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos y}+\sqrt{1-\cos y}}{\sqrt{1+\cos y}-\sqrt{1-\cos y}}\right) \left[\text{माना } \frac{\pi}{2} - x = y\right]$$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{y}{2}}+\sqrt{2\sin^2\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\cos^2\frac{y}{2}}-\sqrt{2\sin^2\frac{y}{2}}}\right)$$

$$\left[\because 1+\cos y = 2\cos^2\frac{y}{2} \text{ तथा } 1-\cos y = 2\sin^2 y2\right]$$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\frac{y}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{y}{2}}{\sqrt{2}\cos\frac{y}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{y}{2}}\right)$$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}}\right) \left[\text{प्रत्येक पद को } \sqrt{2}\cos\frac{y}{2} \text{ से भाग देने पर}\right]$$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan\frac{y}{2}}\right) = \cot -1\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)\right]$$

$$= \cot^{-1}\left[\cot\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+y2\right) = \frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left[\because \frac{\pi}{2}-x=y\right]$$

$$= \frac{x}{2}$$

$$= \text{RHS}$$

प्रश्न 11.

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}x, -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$$

$$\left[\text{संकेत } x = \cos y \text{ रखिये}\right]$$

उत्तर-

$$\text{LHS} = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos y}-\sqrt{1-\cos y}}{\sqrt{1+\cos y}+\sqrt{1-\cos y}}\right)\ [\text{ माना } x = \cos y]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{y}{2}}-\sqrt{2\sin^2\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\cos^2\frac{y}{2}}+\sqrt{2\sin^2\frac{y}{2}}}\right)$$

$$\left[\because 1+\cos y = 2\cos^2\frac{y}{2} \text{ तथा } 1-\cos y = 2\sin^2 y2\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\frac{y}{2} - \sqrt{2}\sin\frac{y}{2}}{\sqrt{2}\cos\frac{y}{2} + \sqrt{2}\sin\frac{y}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\frac{y}{2}}{1+\tan\frac{y}{2}}\right) \left[\because \text{प्रत्येक पद को } 2\cos^2\frac{y}{2} \text{ से भाग देने पर}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{y}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\frac{y}{2}}\right) = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{y}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1} x = \text{RHS}$$

प्रश्न 12. $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{1}{3} = \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

उत्तर- LHS $= \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{1}{3}$

$$= \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{9}{4}\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right) \left[\because \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{9}{4}\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3^2-1^2}}{3}\right)$$

$$= \frac{9}{4}\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{8}}{3}\right) = \frac{9}{4}\left(\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \text{RHS}$$

$$\left[\because \cos^{-1}\frac{a}{b} = \sin^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right]$$

निम्नलिखित समीकरणों को सरल कीजिए:

प्रश्न 13. $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

उत्तर- $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2\cos x}{1-\cos^2 x}\right) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)\ \left[\because 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos x}{1-\cos^2 x} = 2\operatorname{cosec} x$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\ x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin x}$$

$$\Rightarrow 2\sin x.\cos x = 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2\sin x.\cos x = 2\sin^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x = 0 \text{ या } \cos x - \sin x = 0$$

लेकिन sin ≠ 0 क्योंकि यह समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है

$$\therefore \cos x - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow \tan x = 1$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

प्रश्न 14. $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x, (x > 0)$

उत्तर- दिया है

$$\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}1 - \tan^{-1}x = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

$$\left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\tan^{-1}x$$

$\Rightarrow \tan^{-1} x = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \tan \frac{\pi}{6} = x$

$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 15.

$\sin\left(\tan^{-1} x\right), |x| < 1$ बराबर होता है-

a. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

b. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

d. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

उत्तर-

d. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

हल-

दिया है $\sin(\tan^{-1} x)$

$= \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \left[\because \cos^{-1} \frac{a}{b} = \sin^{-1} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$

$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

अतः विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 16.

यदि $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ तो x का मान बराबर है-

a. $0, \frac{1}{2}$

b. $1, \frac{1}{2}$

c. 0

d. $\frac{1}{2}$

उत्तर-

c. 0

हल-

दिया है, $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

माना, $x = \sin y$

$\therefore \sin^{-1}(1-\sin y) - 2y = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin^{-1}(1-\sin y) = \frac{\pi}{2} + 2y$

$\Rightarrow (1-\sin y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2y\right)$

$\Rightarrow 1 - \sin y = \cos 2y$

$\Rightarrow 1 - \sin y = 1 - 2\sin^2 y$

$\Rightarrow 2\sin^2 y - \sin y = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - x = 0$

$\Rightarrow x = 0$ या $x = \frac{1}{2}$

लेकिन $x = \frac{1}{2}$ दिए गए समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

$\therefore x = 0$ दिए गए समीकरण का हल है।

अतः सही जवाब C है।

प्रश्न 17.

$\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$ का मान है-

a. $\frac{\pi}{2}$

b. $\frac{\pi}{3}$

c. $\frac{\pi}{4}$

d. $\frac{36\pi}{3}$

उत्तर-

c. $\frac{\pi}{4}$

हल-

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x}{y} - \frac{x-y}{x+y}}{1+\frac{x}{y}\times\frac{x-y}{x+y}}\right] \quad \left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x(x+y)-y(x-y)}{y(x+y)}}{\frac{y(x+y)+x(x-y)}{y(x+y)}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{x^2+xy-xy+y^2}{xy+y^2+x^2-xy}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

अतः विकल्प (c) सही है