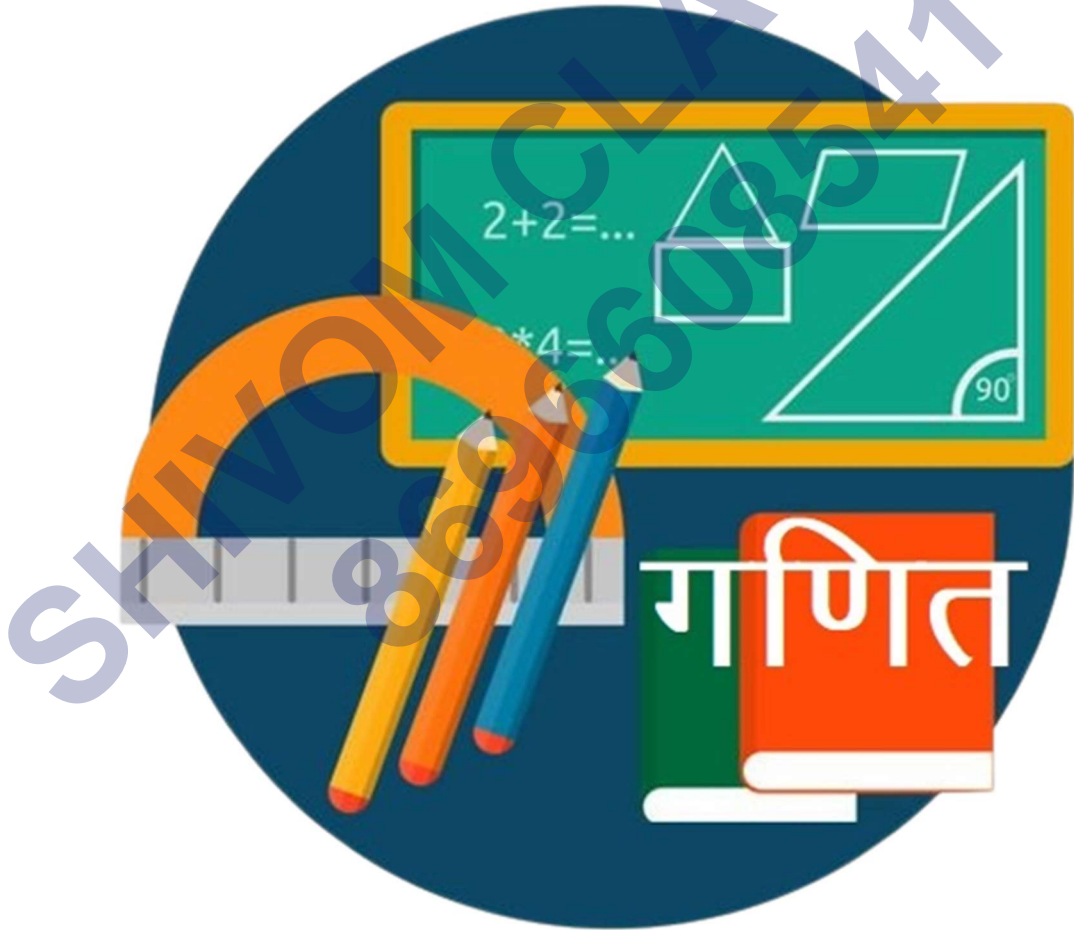
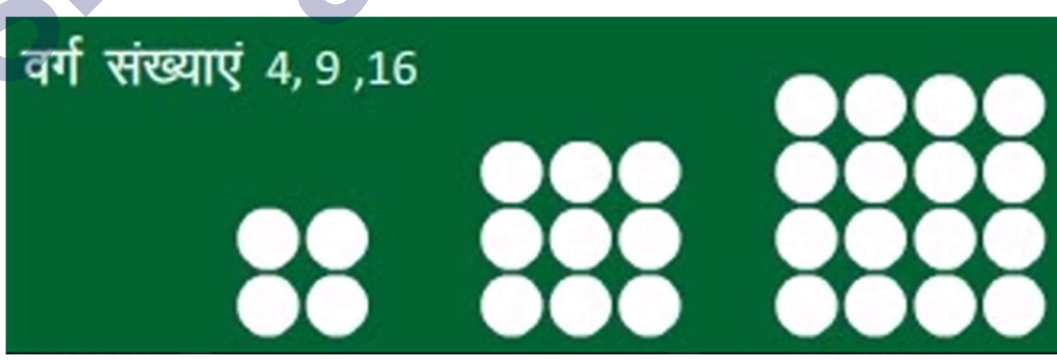
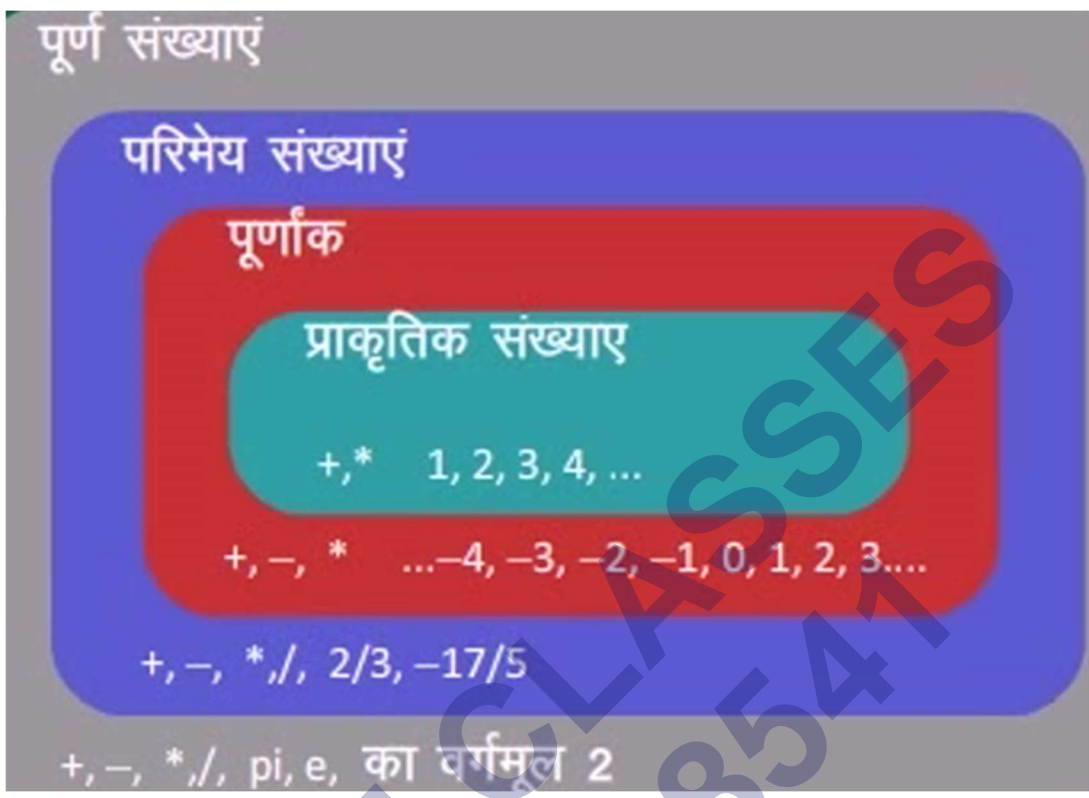


गणित

अध्याय-16: संख्याओं के साथ खेलना



परिचय



उद्देश्य

इस पाठ के अंत में आप, निम्न करने में सक्षम हो जाएंगे:

- दो अंकों की संख्या का व्यापक रूप देना और उसे पलटना।
- तीन अंकों की संख्या को व्यापक रूप देना और उसे पलटना।
- व्यापक रूप में लिखी संख्याओं की पहली को सुलझाना।
- किसी संख्या की 2, 3, 5, 9, और 10 से विभाज्यता जांचना।

व्यापक रूप में संख्याएं

आइए एक संख्या 32 लें और उसे इस रूप में लिखें $32 = 30 + 2 = 10 \times 3 + 2$

इसी प्रकार,

सामान्यतः दो अंकों और b से बनी कोई भी दो अंकों की संख्या ab निम्न रूप में लिखी जा सकती है।

$$ab = 10 \times a + b = 10a + b$$

$$ba = 10 \times b + a = 10b + a$$

आइए एक संख्या 423 लें। यह तीन अंकों की संख्या है। इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$423 = 400 + 20 + 3 = 100 \times 4 + 10 \times 2 + 1 \times 3$$

$$392 = 300 + 90 + 2 = 100 \times 3 + 10 \times 9 + 1 \times 2$$

सामान्यतः, तीन अंकों की संख्या abc, निम्न रूप में लिखी जा सकती है।

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$

$$= 100a + 10b + c$$

इसी प्रकार,

$$cab = 100c + 10a + b$$

$$bca = 100b + 10c + a$$

दो अंकों की संख्या

B2 सामान्यतः

$$\begin{array}{r} B2 \\ + 8A \\ \hline 177 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 92 \\ + 85 \\ \hline 177 \end{array}$$

यदि हम दोनों संख्याओं का योग करें तो हमें प्राप्त होता है।

प्राप्त योग सदैव 11 का गुणज है। यदि हम योग को 11 से विभाजित करें तो भागफल है जो कि चुनी गई संख्या 5 x A के अंकों का योग है।

सामान्यतः, दो अंकों की संख्या A = 0 या A = 5,

के अंकों को पलटने पर हमें प्राप्त होता है B = 1, 15 x 15 = 125

B = 2, 25 x 25 = 625 :: A = 5 और B = 2

यदि इकाई का अंक दहाई के अंक से बड़ा है,

प्राप्त संख्या 9 से विभाजित होगी। अतः शेषफल 0 है।

अंकों का पलटना - तीन अंकों की संख्या

इन संख्याओं का प्रयोग दो अन्य तीन-अंकों की संख्या बनाने के लिए कीजिए। यदि आप abc को संख्या के रूप में चुनते हैं।

- अगली संख्या होगी cab (इकाई स्थान का अंक सैकड़ा के स्थान पर चला गया)
- अन्य संख्या होगी bca (दहाई स्थान का अंक सैकड़ा के स्थान पर चला गया) इनका योग करके 37 से विभाजित कीजिए, कोई शेषफल नहीं बचता।

$$\frac{1665}{37} = 45 \text{ कोई शेषफल नहीं।}$$

सामान्यतः

$$abc = 100a + 10b + c$$

$$cab = 100c + 10a + b$$

$$bca = 100b + 10c + a$$

$$abc + cab + bca = 111(a + b + c)$$

$$= 37 \times 3 (a + b + c) \text{ जो } 37 \text{ से विभाजित होता है।}$$

अंकों के लिए अक्षर यहां हम योग और गुणन पर आधारित कुछ पहेलियां देखने जा रहे हैं। एक अंकगणितीय प्रश्न में अंक के स्थान पर अक्षर होते हैं तथा समस्या यह ज्ञात करने की है कि कौन-सा अक्षर किस अंक को निरूपित करता है।

नियम : पहेली में प्रत्येक अक्षर केवल एक ही अंक को प्रदर्शित करना चाहिए। एक अंक केवल एक ही अक्षर से प्रदर्शित किया जाना चाहिए।

एक संख्या का पहला अंक शून्य नहीं हो सकता। इस प्रकार, हम संख्या पैसठ को 065 या 0065 न लिखकर 65 लिखते हैं।

उदाहरण : निम्न योग में A ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r} 51A \\ 1A5 \\ \hline 703 \end{array}$$

पहले स्तम्भ में $A + 5$ से हमें 3 प्राप्त होता है, यह वह संख्या है जिसका इकाई अंक 3 है। ऐसा होने के लिए A अंक 8 होना चाहिए।

अंकों के लिए अक्षर

उदाहरण : निम्नलिखित योग में A और B ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r} B2 \\ +8A \\ \hline 177 \end{array}$$

इकाई के स्तम्भ में, $2 + A$ से हमें 7 प्राप्त होता है, इसका अर्थ है कि A का मान 5 होना चाहिए।
दहाई के स्तम्भ में, $B + 8$ से हमें 17 प्राप्त होता है, इसका अर्थ है कि B का मान 9 होना चाहिए।

$$\begin{array}{r} 92 \\ +85 \\ \hline 177 \end{array}$$

उदाहरण : अंक A और B ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r} BA \\ \times B5 \\ \hline 62A \end{array}$$

इकाई अंक $5 \times A$, A है, अतः $A = 0$ या $A = 5$ ।

यदि $B = 1$, $15 \times 15 = 125$ लेकिन गुणनफल 600 से अधिक होना चाहिए।

यदि $B = 2$, $25 \times 25 = 625$

$\therefore A = 5$ और $B = 2$ ।

10 द्वारा विभाज्यता

10 के गुणजों पर विचार कीजिए। ये हैं 10, 20, 30 40.....

10 के अगुणज। ये हैं 23, 31, 42, 55, 69..... यदि किसी संख्या का इकाई अंक 0 हो तो वह संख्या 10 का गुणज होती है। यदि इकाई अंक 0 न हो तो वह संख्या 10 का गुणज नहीं होती।

कोई संख्या pqr लीजिए,

$$= \dots 100p + 10q + r.$$

p इकाई स्थान का अंक है, q दहाई स्थान का अंक है और r सैकड़ा स्थान का अंक है।

क्योंकि 10, 100..... 10 से विभाज्य हैं इसलिए $10q$, $100q$ भी इससे विभाज्य हैं। जहां तक अंक का प्रश्न है, यदि दी गई संख्या 10 से विभाज्य है तो यह 10 से अवश्य ही विभाज्य होना चाहिए। यह तभी संभव है जब $r = 0$ हो।

5 द्वारा विभाज्यता

5 के गुणज हैं 5, 10, 15, 25

' इकाई स्थान का अंक या तो 5 हैं या 0।

यदि किसी संख्या का इकाई अंक 5 या 0 है तो वह 5 से विभाज्य होगी।

आइए इस नियम की व्याख्या करें। किसी भी संख्या ...pqr को

इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$\dots + 100p + 10q + r$$

क्योंकि 10, 100, 10 से विभाज्य हैं इसलिए $10q$, $100p$ भी इससे विभाज्य हैं। जो कि 5 से विभाज्य हैं क्योंकि $10 = 2 \times 5$ होता है। जहां तक अंक r का प्रश्न है, इसे अवश्य ही संख्या 5 से विभाज्य होना चाहिए। अतः r या तो 0 होगा या 5।

9 और 3 द्वारा विभाज्यता

10, 5 और 2 द्वारा विभाज्यता में हमने केवल इकाई अंक का प्रयोग किया। हमें अन्य अंकों की चिंता नहीं थी। विभाज्यता की जांच केवल इकाई अंक से होती है।

9 द्वारा विभाज्यता की जांच करने के लिए आइए एक संख्या 2689 लें।

$$= 2 \times 1000 + 6 \times 100 + 8 \times 10 + 91$$

$$= 2 \times (999 + 1) + 6 \times (99 + 1) + 8 \times (9 + 1) + 9$$

$$= 2 \times 999 + 6 \times 99 + 8 \times 9 + (9 + 6 + 8 + 2)$$

यदि $9 + 6 + 8 + 2$, 9 द्वारा विभाज्य है तो 2689, 9 द्वारा विभाज्य है।

- कोई संख्या N , 9 द्वारा विभाज्य होती है यदि उसके अंकों का योग 9 से विभाज्य होता है। अन्यथा, यह 9 से विभाज्य नहीं होती।
- कोई संख्या N , 3 द्वारा विभाज्य होती है यदि उसके अंकों का योग 3 से विभाज्य होता है। अन्यथा, यह 3 से विभाज्य नहीं होती।

9 और 3 द्वारा विभाज्यता

संख्या par पर विचार करें।

$$100p + 10q + r = 99p + 90 + (p + q + r)$$

$$= 9(11p + q) + (p + q + r)$$

9 और 3 द्वारा विभाज्य

9 (या 3) से विभाज्यता संभव है यदि $a + b + c$, 9 (या 3) से विभाज्य है।

उदाहरण : 12345678 की 9 से विभाज्यता की जांच कीजिए।

हल : अंकों का योग है $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$

यह संख्या 9 से विभाज्य है।

इसलिए 12345678 भी 9 से विभाज्य है।

$$\frac{12345678}{9} = 1371742$$

उदाहरण : 285751 की 9 से विभाज्यता की जांच कीजिए।

हल : अंकों का योग है $2+8+5+7+5+ 1 = 28$

28, 9 से विभाज्य नहीं है।

इसलिए यह संख्या 9 से विभाज्य नहीं है।

भूमिका:-

संख्या समझ के अंतर्गत संख्याओं को अर्थ दिया जाता है – जिसका मतलब यह जानना है कि वे एक दूसरे के साथ किस प्रकार संबंधित हैं और उनके आपेक्षिक परिमाण क्या हैं। यह संख्याओं पर गणितीय संक्रियाओं के प्रभाव पर भी आधारित है, जैसे कि क्या किसी अन्य संख्या द्वारा दी गई संख्या का गुणन करने पर संख्या अधिक बड़ी या छोटी हो जाती है।

व्यापक रूप में संख्याएँ:-

व्यापक का अर्थ होता है दूर तक फैला हुआ, विस्तृत। हिन्दी में इसको इसी अर्थ में प्रयोग किया जाता है, पर बांग्ला में इसको बढ़िया, दर्शनीय जैसे अर्थों में भी प्रयोग किया जाता है।

- व्यापक ब्रह्म सबनिमें एकै को पंडित को जोगी।
- न्याय की संकल्पना वस्तुतया अति व्यापक है.
- इससे चीनी अर्थव्यवस्था को व्यापक आधार मिला
- व्यापक ब्रह्म सबनिमें एकै को पंडित को जोगी।
- स प्लैटफॉर्म पर असमर्थित तंत्र व्यापक विधि.
- इनके द्वारा व्यापक नेत्र जाँच उपलब्ध होती है।
- हम एक व्यापक सुधार कार्यक्रम सामने रखेंगे

विभाज्यता की जाँच:-

दी हुई संख्या के सभी अंकों का योग 3 से विभाजित हो। बहुत बड़ी संख्याओं (जिनके अंकों का योग भी बड़ी संख्या हो) के लिये यह नियम अंकों के योग पर भी लागू किया जाता है। $405:6 + 3 + 6 = 15$ जो कि 3 से विभाज्य है। 16, 499, 205, 854, 376 के अंकों का योग 69 है; $6 + 9 = 15$, $1 + 5 = 6$, जो स्पष्टतः 3 से विभाज्य है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 16.1 (पृष्ठ संख्या 266)

निम्नलिखित में से प्रत्येक में अक्षरों के मान ज्ञात कीजिए तथा सम्बद्ध चरणों के लिए कारण भी दीजिए:

प्रश्न 1

$$\begin{array}{r}
 3 \quad A \\
 + \quad 2 \quad 5 \\
 \hline
 B \quad 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

उत्तर- सबसे पहले हम $A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ रखते हैं।

चुकि हमें इकाई के स्थान पर 2 प्राप्त करना है।

अतः $7 + 5 = 12$ होता है जिसमे इकाई के स्थान पर 2 प्राप्त हो रहा है।

इसलिए $A = 7$ और नीचे 2 रख कर तथा शेष 1 को आगे ले जाकर जोड़ने पर $3 + 2 + 1 = 6$

अतः $B = 6$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार $A = 7$ तथा $B = 6$

प्रश्न 2

$$\begin{array}{r}
 4 \quad A \\
 + \quad 9 \quad 8 \\
 \hline
 C \quad B \quad 3 \\
 \hline
 \end{array}$$

उत्तर- सबसे पहले हम $A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7..$ रखते हैं।

चुकि हमें इकाई के स्थान पर 3 प्राप्त करना है।

अतः $5 + 8 = 13$ होता है जिसमे इकाई के स्थान पर 3 प्राप्त हो रहा है।

इसलिए $A = 5$ और नीचे 3 रख कर तथा शेष 1 को आगे ले जाकर जोड़ने पर

$$4 + 9 + 1 = 14 \text{ जहा से } B = 4 \text{ और } C = 1$$

अतः $B = 6$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार $A = 5, B = 4$ तथा $C = 1$

प्रश्न 3

$$\begin{array}{r} 1 \ A \\ \times \ A \\ \hline 9 \ A \end{array}$$

उत्तर- सबसे पहले हम $A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7..$ रखते हैं।

यहाँ $A \times A = A$ प्राप्त करना है।

अतः A के स्थान पर 6 रखने पर $6 \times 6 = 36$ जिसमे इकाई के स्थान पर 6 प्राप्त हो रहा है।

तथा $6 \times 1 + 3 = 9$ प्राप्त हो रहा है।

इस प्रकार $A = 6$

प्रश्न 4

$$\begin{array}{r}
 A \quad B \\
 + \quad 3 \quad 7 \\
 \hline
 6 \quad A \\
 \hline
 \end{array}$$

उत्तर- यहाँ हमें $B + 7 = A$ लाना है।

यदि $B = 5$ रखते हैं तो $5 + 7 = 12$ जहाँ इकाई के स्थान पर 2 प्राप्त होता है, जो A है। इकाई में 2 रखकर और शेष 1 को आगे ले जाकर जोड़ने पर-

$$2 + 3 + 1 = 6$$

इस प्रकार $A = 2$ तथा $B = 5$

प्रश्न 5

$$\begin{array}{r}
 A \quad B \\
 \times \quad 3 \\
 \hline
 C \quad A \quad B \\
 \hline
 \end{array}$$

उत्तर- यहाँ हमें $B \times 3 = B$ लाना है।

यदि $B = 0$ रखते हैं तो $0 \times 3 = 0$ जिससे B का मान 0 प्राप्त होता है।

$$A = 5 \text{ रखने पर } 5 \times 3 = 15$$

जिससे $A = 5$ और $c = 1$

इस प्रकार $A = 5$, $B = 0$ तथा $c = 1$

प्रश्न 6

$$\begin{array}{r} A \quad B \\ \times \quad 5 \\ \hline C \quad A \quad B \\ \hline \end{array}$$

उत्तर- यहाँ हमें $B \times 5 = B$ लाना है।

यदि $B = 0$ रखते हैं तो $0 \times 5 = 0$ जिससे B का मान 0 प्राप्त होता है।

$A = 5$ रखने पर $5 \times 5 = 25$

जिससे $A = 5$ और $c = 2$

इस प्रकार $A = 5$, $B = 0$ तथा $c = 2$

प्रश्न 7

$$\begin{array}{r} A \quad B \\ \times \quad 6 \\ \hline B \quad B \quad B \\ \hline \end{array}$$

उत्तर- यहाँ हमें $B \times 6 = B$ लाना है।

यदि $B = 4$ रखते हैं तो $4 \times 6 = 24$ जहाँ इकाई के स्थान पर भी 4 प्राप्त हो रहा है जिससे B का मान 4 प्राप्त होता है।

$A = 7$ रखने पर $6 \times 7 = 42$ और $42 + 2 = 44$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार $A = 7$ तथा $B = 4$

प्रश्न 8

$$\begin{array}{r}
 A \quad 1 \\
 + \quad 1 \quad B \\
 \hline
 B \quad 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

उत्तर- सबसे पहले हम B = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... रखते हैं।

चुकि हमें इकाई के स्थान पर 0 प्राप्त करना है।

अतः 1 + 9 = 10 होता है जिसमे इकाई के स्थान पर 0 प्राप्त हो रहा है।

इसलिए B = 9 और नीचे 0 रख कर तथा शेष 1 को आगे ले जाकर जोड़ते हैं।

A = 7 रखने पर

7 + 1 + 1 = 9, B का मान प्राप्त होता है।

इस प्रकार A = 7 तथा B = 9

प्रश्न 9

$$\begin{array}{r}
 2 \quad A \quad B \\
 + \quad A \quad B \quad 1 \\
 \hline
 B \quad 1 \quad 8 \\
 \hline
 \end{array}$$

उत्तर- सबसे पहले हम B = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... रखते हैं।

चुकि हमें इकाई के स्थान पर 8 प्राप्त करना है।

अतः 7 + 1 = 8 होता है जिसमे इकाई के स्थान पर 8 प्राप्त हो रहा है।

इसलिए $B = 7$

$A = 4$ रखने पर $4 + 7 = 11$ दहाई के स्थान पर 1 रखकर और शेष 1 को आगे ले जाकर जोड़ने पर $2 + 4 + 1 = 7$, B का मान प्राप्त होता है।

इस प्रकार $A = 4$ तथा $B = 7$

प्रश्न 10

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 2 \quad A \\
 + \quad 6 \quad A \quad B \\
 \hline
 A \quad 0 \quad 9 \\
 \hline
 \end{array}$$

उत्तर- सबसे पहले हम $B = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ रखते हैं।

चुकि हमें इकाई के स्थान पर 9 प्राप्त करना है।

$A = 8$ और $B = 1$ रखने पर $8 + 1 = 9$ प्राप्त हो रहा है।

अतः $A = 8$ और $B = 1$

अगले स्तंभ में $2 + 8 = 10$ दहाई के स्थान पर 0 रखकर और शेष 1 को आगे ले जाकर जोड़ने पर

$1 + 6 + 1 = 8$, A का मान प्राप्त होता है।

इस प्रकार $A = 8$ तथा $B = 1$

प्रश्नावली 16.2 (पृष्ठ संख्या 266)

प्रश्न 1 यदि $21y5$, 9 का एक गुणज है, जहाँ y एक अंक है, तो y का मान क्या है?

उत्तर- प्रश्नानुसार संख्या $21y5$, 9 का एक गुणज है।

अतः, इसके अंकों का योग $2 + 1 + y + 5 = 8 + y$, 9 का एक गुणज है।

$\therefore (8 + y) = 0$ या 9 या 18 या 27.... है। चूँकि y एक अंक है,

अतः $(8 + y)$, 9 के बराबर होना चाहिए।

अतः, $8 + y = 9$ या $y = 9 - 8 = 1$

प्रश्न 2 यदि 3125,9 का एक गुणज है, जहाँ एक अंक है, तो का मान क्या है? आप देखेंगे कि इसके दो उत्तर हैं। ऐसा क्यों है?

उत्तर- प्रश्नानुसार संख्या 3125, 9 का एक गुणज है।

अतः, इसके अंकों का योग $3 + 1 + z + 5 = 9 + z$, 9 का एक गुणज है।

$\therefore (9 + z) = 0$ या 9 या 18 या 27.... है।

चूँकि एक अंक है, अतः $(9+z)$ का मान 9 या 18... होना चाहिए।

$z = 0$ या 9

अर्थात् $9 + z = 9 \Rightarrow z = 0$ तथा $9 + z = 18 \Rightarrow z = 9$

प्रश्न 3 यदि $24x, 3$ का एक गुणज है, जहाँ x एक अंक है, तो का मान क्या है?

उत्तर- प्रश्नानुसार $24x, 3$ का एक गुणज है। अतः, इसके अंकों का योग $2 + 4 + x = (6 + x)$, 3 का एक गुणज है।

$\therefore (6 + x)$ का मान 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18.... में से एक लेकिन x एक अंक है। अतः $(6 + x)$, 6 या 9 या 12 या 15 के बराबर होना चाहिए। अर्थात् $6 + x = 6$ या 9 या 12 या 15 या

$x = 0$ या 3 या 6 या 9 इस प्रकार, x का 0, 3, 6 या 9 में से कोई भी एक मान हो सकता है।

प्रश्न 4 यदि 31:5, 3 का एक गुणज है, जहाँ : एक अंक है, तो 2 का मान क्या हो सकता है?

उत्तर- प्रश्नानुसार 31-5, 3 का एक गुणज है। अतः, इसके अंकों का योग $3 + 1 + z + 5 = (9 + z)$, 3 का एक गुणज

$\therefore (9 + 2)$ संख्याओं 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, में से कोई एक हो सकता है। लेकिन ? एक अंक है।

अतः $(9 + z) = 9$ या 12 या 15 या 18 के बराबर होना चाहिए।

अर्थात् $9 + 2 = 9$ या 12 या 15 या 18

या $z = 0$ या 3 या 6 या 9

इस प्रकार, 2 का मान 0, 3, 6 या 9 इनमें से कोई एक हो सकता है।

SHIVOM CLASSES
8696608541