गणित

अध्याय-14: गणितीय विवेचन

प्रस्तावना (Introduction)

तर्क (Logic) का अध्ययन एक व्यापक क्षेत्र है। वास्तव में तर्क मनुष्य के चिन्तन से हुआ है। इसका अध्ययन हजारों वर्षों से किया जा रहा है।

प्रमुख दार्शनिक सुकरात (470 B.C. - 399 B.C.), प्लेटो (427 B.C.-346 B.C.) और अरस्तु (338 B.C.322 B.C.) ने तर्कशास्त्र के विकास में महत्त्वपूर्ण योगदान दिया

गणितीय तर्क में जार्ज बुल (1815-1869) का नाम हमेशा याद किया जायेगा। ब्रिटिश गणितज्ञ ने सर्वप्रथम सन् 1854 में अपनी पुस्तक "An Investigation of the Laws of Thoughts" में तर्कशास्त्र तथा इसका बीजगणितीय प्रतीकात्मक सूत्रण (formulation) किया, जो बूलियन तर्क (Boolean logic) के नाम से जाना जाता है।

गणित में तर्कशास्त्र का महत्त्वपूर्ण योगदान है, क्योंकि गणित में प्रत्येक परिकल्पना को सिद्ध किया जाता है और यह तार्किक विज्ञान पर आधारित होती है अर्थात् प्रत्येक कथन की व्युत्पत्ति कारणों के आधार पर होती है।

इस अध्याय में हम तर्क का प्रतीकात्मक सूत्रों में अध्ययन करेंगे। इसके अन्तर्गत विभिन्न प्रतीक चिन्हों और उनकी गणितीय संक्रियाओं का अध्ययन और विश्लेषण किया जायेगा।

तर्क और तर्क की अवधारणा (Logicand Concept of Logic)

किसी तथ्य को सत्य या असत्य प्रतिपादित करने के लिए दिये गये कथन को तर्क कहते हैं, अर्थात् यदि किसी कथन से, किसी जानकारी की सत्य या असत्य होने की पुष्टि हो सकती है, तो उसे तर्क कहते हैं।

तर्कशास्त्र में भाषा का विश्लेषण किया जाता है।

जैसे- (1) गंगा भारत की एक पवित्र नदी है। (सत्य)

(2) 3 + 9 = 10 (असत्य)

(3) $4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ (सत्य)

दिये गये उदाहरण में वाक्य सत्य या असत्य होने की पुष्टि करते हैं। अत: यह एक तार्किक कथन या तर्क वाक्य है।

कथन (Statement)

परिभाषा- यदि किसी वाक्य से यह स्पष्ट हो कि वह सत्य या असत्य है, तो उसे कथन या तर्क वाक्य कहते हैं।

प्रत्येक कथन वाक्य है परन्तु प्रत्येक वाक्य कथन नहीं है।

जो कथन सत्य हो, उसका सत्य मान अंग्रेजी शब्द 'True' या संक्षेप में 'T' से दर्शाते हैं एवं जो कथन असत्य है, उसका सत्य मान अंग्रेजी शब्द 'False' या संक्षिप्त में 'F' से दर्शाते हैं।

जैसे- (1) '3 और 4 का योग 7 है' यह कथन सत्य है इसका मान “True" या संक्षेप में 'T हैं।

(2) कथन '6,4 से छोटा है' असत्य है और इसका सत्य मान 'False' या संक्षेप में 'F' है।

(3) वाक्य, ‘दो ऐसे अंक हैं जिनका योग 9 है' या 'x +y= 9' से इसकी सत्यता अथवा असत्यता का पता नहीं लगाया जा सकता जब तक x और y के विशेष मान नहीं दिये जाते। ऐसे वाक्यों का बोलचाल की भाषा में भले ही महत्त्व हो लेकिन तर्कशास्त्र में इनका कोई महत्त्व नहीं है।

(4) “दिये गये कथनों के आधार पर संयुक्त कथन की सत्यता एवं असत्यता का अनुमान लगाना ही तर्कशास्त्र का मुख्य उद्देश्य है।"

कथन सम्बन्धी नियम

(i) तत्समक नियम (Law of Identity)- कोई भी प्रयुक्त कथन तथा उसका संकेत किसी समस्या के प्रारम्भ से अन्त तक ही अर्थ रखता है।

(ii) अपवर्जी मध्यमान नियम (Law of Excluded Middle)- कोई भी तर्क वाक्य या तो सत्य होता है अथवा असत्य होता है।

(iii) अवरोधी होने का नियम (Lawof Non-contradiction)- कोई भी तर्क वाक्य सत्य और असत्य एक साथ नहीं हो सकता है।

उपर्युक्त तीनों नियमों का पालन करने वाले वाक्य ही तर्क वाक्य कहलाते हैं।

उदाहरण

निम्नलिखित में से कौन-सा वाक्य तार्किक कथन है ? इसका सत्य मान बताइये।

(i) लाल किला दिल्ली में है।

(ii) तुम कहाँ जा रहे हो?

(iii) अनुराग अपने स्वास्थ्य की ओर ध्यान नहीं दे रहा है।

(iv) 25 एक सम संख्या है।

(v) x+2 =5.

हल : (i) दिया गया वाक्य एक तथ्य है और सत्य है। :. यह एक तार्किक कथन है जिसका सत्य मान 'T' है।

(ii) दिये गये वाक्य से यह नहीं ज्ञात किया जा सकता है कि वह सत्य है अथवा असत्य।

∴ यह कथन नहीं है।

(iii) दिये गये वाक्य से यह पता लगाया जा सकता है कि यह सत्य है या असत्य क्योंकि अनुराग का स्वास्थ्य या तो अच्छा होगा या खराब।

∴ यह एक तार्किक कथन है जिसका सत्य मान एक ही तथ्य से ज्ञात नहीं किया जा सकता।

(iv) निश्चित रूप से यह वाक्य कथन है जिसका सत्य मान 'F' है क्योंकि 25 एक सम संख्या नहीं है।

(vi) दिये गये समीकरण में सत्यता ज्ञात नहीं की जा सकती जब तक x का कोई निश्चित मान न दिया जाय। इसलिये यह कथन नहीं है।

कथनों के प्रतीक (Symbol of Statements)

तर्कशास्त्र में दिये गये कथनों को संक्षिप्त में अंग्रेजी के छोटे अक्षरों से दर्शाया जाता है। अतः इन अक्षरों को कथनों के प्रतीक कहते हैं।

साधारणत: कथनों के स्थान पर अंग्रेजी अक्षर a, b,c,.......p, q, r, s............x,y,z इत्यादि का उपयोग किया जाता है।

जैसे- “हिमालय, भारत के उत्तर में स्थित है।" एक कथन

है।

इसे संकेत में a= हिमालय, भारत के उत्तर में स्थित है, से दर्शाया जा सकता है।

विवृत्त कथन (Open Statement)

ऐसा वाक्य जिसमें एक या एक से अधिक चर (variable) • राशि उपस्थित हैं तथा चर राशि का मान रखने पर वाक्य सत्य या असत्य सिद्ध हो सके, विवृत्त कथन कहलाता है।

उदाहरण-

(1) $x + y \geq 7$

(2) $3a = 6$

उपर्युक्त दोनों विवृत्त वाक्य हैं, इनमें चर राशि x y एवं a के विभिन्न मान रखने पर ये सत्य अथवा असत्य होंगे।

तार्किक कथनों की पहचान (Identification of Logical Statements)

जब हम बातें करते हैं, तो कई प्रकार के वाक्यों का उपयोग करते हैं जिनमें से केवल कुछ ही वाक्य ऐसे होते हैं जो तर्क संगत हैं तथा जिनकी सत्यता की जाँच की जा सकती है। कथन की परिभाषा से स्पष्ट है कि केवल वे वाक्य ही तर्क वाक्य होंगे जो किसी तथ्य के सत्य या असत्य होने की पुष्टि कर सकें।

"कोई भी वाक्य सत्य और असत्य दोनों एक साथ नहीं हो सकता है।"

तर्क के दृष्टिकोण से कथन (statement) व्याकरण के अर्थों में एक ऐसा वाक्य (sentence) है जो आदेशात्मक (imperative), प्रश्नवाचक (interrogative), विस्मय बोधक (exclamatory) अथवा इच्छा सूचक (optative) न हो।

तर्क में वेन चित्रों का उपयोग (Use of Venn Diagrams in Lagic)

तर्कशास्त्र के विभिन्न कथनों को हम आधुनिक बीजगणित के वेन चित्रों द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं।

इन वेन चित्रों की सहायता से हम कई प्रकार के निष्कर्ष भी निकाल सकते हैं।

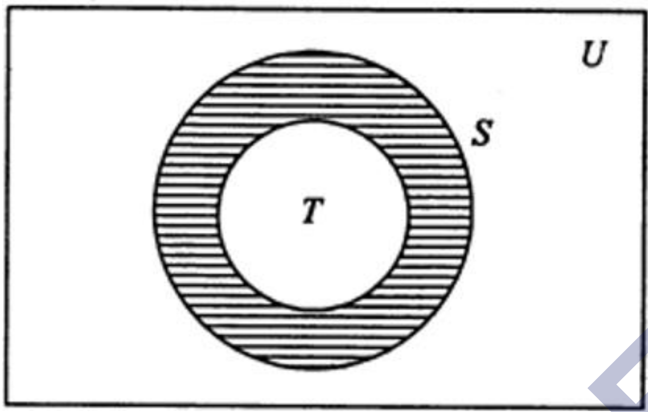
उदाहरण

निम्न दो कथन दिये गये हैं

- सभी शिक्षक विद्वान हैं।
- कुछ ही विद्वान ऐसे हैं जो शिक्षक हैं।

हल : माना 'T' सभी शिक्षकों का समुच्चय है एवं S सभी विद्वानों का समुच्चय है, और व्यक्तियों का समुच्चय है।

इन कथनों को वेन चित्र द्वारा निम्नानुसार दर्शायेंगे



उदाहरण

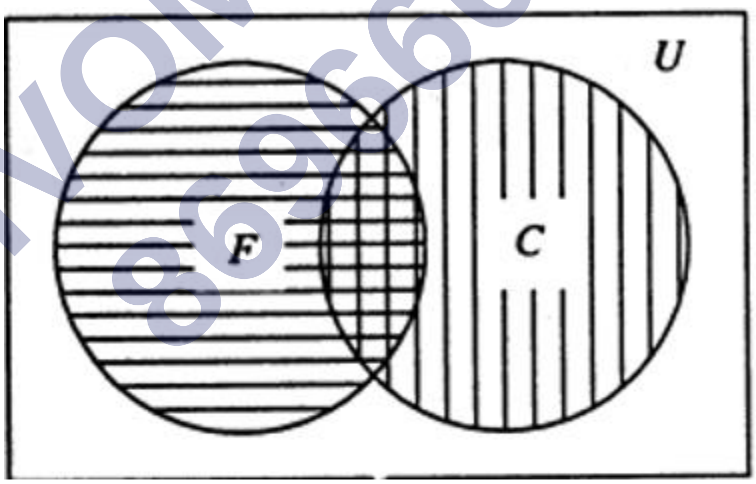
निम्न कथनों को वेन चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए

(a) कुछ फुटबाल खिलाड़ी क्रिकेट भी खेलते हैं।

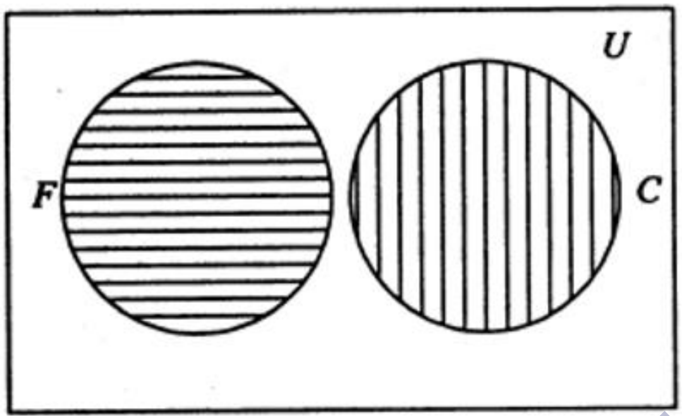
(b) कोई फुटबाल खिलाड़ी क्रिकेट नहीं खेलता है।

हल : माना F = सभी फुटबाल खिलाड़ी एवं C = सभी क्रिकेट खिलाड़ी।

(a) कुछ फुटबाल खिलाड़ी क्रिकेट भी खेलते हैं।



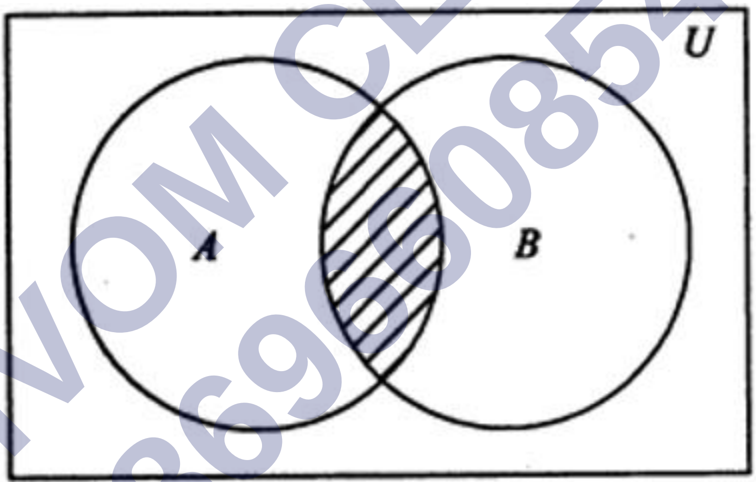
(b) कोई फुटबाल खिलाड़ी क्रिकेट नहीं खेलता है।



वेन चित्रों की सहायता से विभिन्न कथनों पर गणना द्वारा प्राप्त समुच्चयों के अवयवों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

माना A और B दो कथन दिये गये हैं। कथन A में अवयवों की संख्या n(A) एवं कथन B में अवयवों की संख्या n(B) है।

तब हम $n(A \cap B)$ को निम्न वेन चित्र द्वारा दर्शाते हैं



कथनों के प्रकार (Types of Statements)

कथन निम्न दो प्रकार के होते हैं

(1) सरल कथन (Simple Statement)

(2) संयुक्त कथन (Compound Statement)।

1. सरल कथन (Simple Statement)-

ऐसा कथन जो स्वयं अपनी सत्यता को स्पष्ट कर सकता है, सरल कथन कहलाता है, अर्थात् ऐसा कथन जिसकी सत्यता को सिद्ध करने के लिए दूसरे कथन पर निर्भर नहीं रहना पड़ता।

ऐसे कथन बनाने में किसी संयोजक शब्द का प्रयोग नहीं होता है।

उदाहरण

(1) सम संख्याओं का योग सम होता है-(सत्य)

(2) पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय अनन्त होता है-(सत्य)

(3) भारत की राजधानी मुम्बई है-(असत्य)

ये सभी सरल कथन हैं क्योंकि ये स्वयं ही अपनी सत्यता सिद्ध करते हैं।

2. संयुक्त कथन (Compound Statement)-

दो या दो से अधिक सरल कथनों को किसी शब्द द्वारा संयोग करके संयुक्त कथन बनाया जाता है।

यह संयोग 'और (and)', 'या (or)', 'यदि ....तो (if....... then)', "यदि और केवल यदि (Iff or if and only if)", इत्यादि शब्द द्वारा हो सकता है।

उदाहरण

रमेश अच्छा खिलाड़ी है और वह अवश्य ईनाम जीतेगा।

यहाँ पर "रमेश अच्छा खिलाड़ी है","वह अवश्य ईनाम जीतेगा"दो सरल कथन हैं।

दोनों कथनों को "और" शब्द से जोड़कर एक संयुक्त कथन बनाया गया है।

उदाहरण

यदि x और Y परिमेय संख्याएँ हैं तो उनका योग (x + Y) भी एक परिमेय संख्या होगा।

यहाँ पर "X और Y परिमेय संख्याएँ हैं ", "उनका योग (x + Y) भी एक परिमेय संख्या होगा" दो सरल कथन हैं।

दोनों कथनों को "तो" शब्द से जोड़कर एक संयुक्त कथन बनाया गया है।

नोट- किसी भी संयुक्त कथन को परिभाषित करते समय हमें

कथन की सत्यता के बारे में नहीं सोचना चाहिए।

तार्किक संयोजक, तार्किक संयोजन और उनके प्रतीक (Logical Connectives, Logical Operators and Their Symbols)

ऐसे शब्द (words) या प्रतीक चिह्न (symbols) जो दो या दो से अधिक सरल कथनों का संयोग करके संयुक्त कथन बनाने में प्रयुक्त होते हैं, तार्किक संयोजक कहलाते हैं।

संयुक्त कथन बनाने की प्रक्रिया को तार्किक संयोजन कहते

प्रत्येक प्रकार के संयोजन को विशेष प्रकार के प्रतीक चिह्न द्वारा दर्शाया जाता है।

तर्क संक्रियाएँ निम्न पाँच प्रकार की होती हैं—

क्रमांक	क्रिया का नाम	प्रतीक
(1)	संयोजन (Conjunction)	"$\wedge$"
(2)	वियोजन (Disjunction)	"$\vee$"
(3)	सोपाधिक (Conditional)	"$\Rightarrow$"
(4)	द्वि-उपाधिक (Bi-conditional)	"$\Leftrightarrow$"
(5)	निषेध (Negation)	"~"

1. संयोजन (Conjunction)- यदि दो या दो से अधिक सरल कथनों को 'और ' (and) से जोड़कर एक संयुक्त कथन बनाया जाये तो उसे संयोजन कह !

" और(and)" को प्रतीक चिन्ह " " से दर्शाया जाता है।

यदि p. दो सरल कथन हैं, तो "p और q" को "paq" से दर्शाया जायेगा।

उदाहरण-दो कथन निम्न प्रकार से दिये गये हैं

- "दीपक स्वस्थ बालक है।"
- "उसकी आँखें नीली हैं।"

यदि कथन "दीपक स्वस्थ बालक है"p के तुल्य है तथा कथन "उसकी आँखें नीली हैं" के तुल्य है दो तार्किक संयोजन के द्वारा संयोजक चिह्न $\wedge$ का प्रयोग करते हुए इसे संयुक्त कथन के रूप में निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

'$p \wedge q$' अर्थात् "दीपक स्वस्थ बालक है और उसकी आँखें नीली हैं।"

2. वियोजन (Disjunction)- यदि दो या दो से अधिक, सरल कथनों को "या" (or) शब्द से जोड़कर एक संयुक्त कथन बनाया जाये तो उसे वियोजन कहते हैं।

"या" (or)को प्रतीक चिह्न '' से दर्शाया जाता है।

यदि p.q दो सरल कथन हैं, तो "p या q" को "p v q" से दर्शाया जायेगा।

उदाहरण- कथन 'a,5 के बराबर है' या b,5 के बराबर है' को प्रतीकात्मक रूप से 'pvq' लिखा जा सकता है।

यहाँ p कथन 'a,5 के बराबर है' वq कथन 'b, 5 के बराबर है' के तुल्य हैं।

3**. सोपाधिक या प्रतिबंधी (Conditional)–**

यदि दो या दो से अधिक सरल कथनों को “यदि............तो ....(if ....then.........)" से जोड़कर एक संयुक्त कथन बनाया जाये तो उसे सोपाधिक कहते हैं।

"(यदि ....तो ....)” को प्रतीक चिह्न '⇒' से दर्शाया जाता है।

यदि p.q दो सरल कथन हैं, तो “यदि ....तो .....q .....”को "p ⇒ q” या “p → q"से दर्शाया जायेगा।

उदाहरण- कथन “यदि दो रेखायें समान्तर हैं तो वे प्रतिच्छेद नहीं करती हैं" को प्रतीकात्मक रूप में 'p→q' या 'paq' लिखा जाता है।

- यहाँ p= दो रेखायें समान्तर हैं
- और q= दो रेखायें प्रतिच्छेद नहीं करती हैं।

4. द्वि-उपाधिक (Bi-conditional)– यदि दो या दो से अधिक सरल कथनों को “यदि और केवल यदि" (if and only if) से जोड़कर एक संयुक्त कथन बनाया जाये तो उसे द्वि-उपाधिक कहते हैं।

“यदि और केवल यदि "को प्रतीक चिह्न '⇔' या '↔'से दर्शाया जाता है।

यदि p और दो सरल कथन हों तो 'p यदि और केवल यदि

q' को "p ⇔ q" से दर्शाया जायेगा।

यहाँ p ⇔ q का अर्थ है दो कथन p ⇒ q और q ⇒ p का संयोजन अर्थात्

$p \Leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

उदाहरण- कथन "एक त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा यदि और केवल यदि उसकी दो भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर है" को प्रतीकात्मक रूप में

'$p \leftrightarrow q$' या "$p \Leftrightarrow q$" लिखा जाता है। जहाँ p= एक समकोण त्रिभुज होगा।

और q=त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर है।

5. निषेध (Negation) किसी कथन के नकारात्मक कथन को निषेध कथन कहते हैं। नहीं का प्रतीक चिह्न -' है। यदि p कोई कथन है तो p का निषेध कथन ~p' होगा।

जैसे (i) p= दीप स्कूल जाता है

तो ~p = दीप स्कूल नहीं जाता है।

(ii) यदि p= अनिता शान्त है।

q= अनिता बुद्धिमती है।

$(p \wedge g)$ = अनिता शान्त और बुद्धिमती है।

अत:~ $(p \wedge q)$ = अनिता शान्त और बुद्धिमती नहीं है।

कथन अभिरचना (Statement Pattern)

परिमित संख्या में तार्किक संयोजकों के प्रयोग से अक्षरों द्वारा बनाये गये व्यंजक को कथन अभिरचना कहते हैं।

उदाहरण- यदि कोई दो तर्क, वाक्य p और q द्वारा बनाये जाते हैं तो निम्न व्यंजक कथन अभिरचना कहलाती है

(i) $p \vee g$

(ii) $P \rightarrow q \vee p$

(iii) $p \wedge q$.

स्पष्ट है कि कथन अभिरचना एक या अधिक तार्किक संयोजक के प्रयोगों के आधार पर सरल या संयुक्त होती है।

प्रधान संयोजक (Principal Connective)

संयुक्त कथन की रचना में जिस तार्किक का सबसे अन्त में प्रयोग होता है उसे प्रधान संयोजक कहते हैं।

उदाहरण

(i) $(p \wedge q) \rightarrow r$ में प्रधान संयोजक '→' है।

(ii) $(r \rightarrow p) \wedge (P \leftrightarrow A)$ में प्रधान संयोजक ' ∧ ' है।

प्रधान संयोजक के दोनों भाग उसके घटक(arguments) कहलाते हैं।

विशेष शब्द/वाक्यांश (Special Words/Phrases)

मिश्र कथन में और या प्रकार के कुछ संयोजक शब्दों का प्रयोग गणितीय कथनों में होता है ये शब्द संयोजक कहलाते हैं। मिश्र कथनों में इन शब्दों की भूमिका महत्वपूर्ण रहती है।

संयोजक

और एक कथन पर विचार कीजिए

p: संख्या 50, संख्याओं 5 और 10 से भाज्य है।

इस कथन का विघटन इस प्रकार है

q: संख्या 50, संख्या 5 से भाज्य है।

r: संख्या 50, संख्या 10 से भाज्य है।

यहाँ दोनों कथन सत्य है।

p: संख्या 8, संख्याओं 2 और 3 से भाज्य है।

इस कथन का विघटन इस प्रकार है

q: संख्या 8, संख्या 2 से भाज्य है।

r:संख्या 8, संख्या 3 से भाज्य है।

यहाँ प्रथम कथन सत्य है और दूसरा कथन असत्य है।

इस प्रकार हमें निम्नलिखित नियम प्राप्त होता है

(1) संयोजक 'और' के प्रयोग द्वारा बना मिश्र कथन सत्य होगा यदि उसके सभी घटक कथन सत्य हो।

(2) संयोजक 'और' के प्रयोग द्वारा बना मिश्र कथन असत्य होगा यदि इसका एक भी घटक असत्य हो।

शब्द 'या' से प्रयुक्त वाक्य (The word 'or')

नीचे लिखे कथन पर विचार कीजिएअवकाश या रविवार के दिन विद्यालय बंद रहता है। यहाँ पर या अंतर्विष्ट है क्योंकि विद्यालय अवकाश के दिन और साथ-ही-साथ रविवार को बंद रहता है।

अतः हम एक नया कथन लेते हैं।

दो रेखाएँ एक-दूसरे को एक बिन्दु पर काटती हैं या समान्तर होती हैं।

यहाँ पर दोनों रेखाओं के लिए संभव नहीं है कि वे एक-दूसरे को काटे और साथ-ही-साथ समान्तर भी हो इसलिए यहाँ पर 'या' अपवर्जित है।

संयोजक ‘या’ प्रयुक्त मिश्र कथन के लिए नियम

(1) अंतर्विष्ट 'या' प्रयुक्त मिश्र कथन सत्य होता है जब उसका कोई एक घटक कथन सत्य हो या दोनों ही घटक कथन सत्य हो।

(2) अन्तर्विष्ट 'या' प्रयुक्त मिश्र कथन असत्य होता है जब उसके दोनों ही घटक कथन असत्य होते हैं।

परिमाण वाचक वाक्यांश (युक्ति)(Quantities/Phrases)

एक ऐसे का अस्तित्व है और सभी के लिए/प्रत्येक के लिए' इन दोनों विशेष वाक्यांशों को परिमाण वाचक वाक्यांश कहते हैं।

जैसे-एक ऐसे आयत का अस्तित्व है जिसकी भुजाएँ समान लम्बाई की हैं। इस कथन का तात्पर्य है कि कम-से-कम एक ऐसा आयत है जिसकी सभी भुजाओं की लम्बाई समान है।

अंतर्भाव/प्रतिबंधकथन (Implication/Conditional Statements)

इस अनुच्छेद में हम अन्तर्भाव 'यदि तो' और 'यदि और केवल यदि' पर विचार विमर्श करेंगे।

जैसे-यदि कोई संख्या 6 की गुणज है तो वह 2 की भी गुणज है।

मान लीजिए p और निम्नलिखित कथनों को प्रकट करते

p: कोई संख्या 6 की गुणज है।

q: वह संख्या 2 की भी गुणज है।

यदि p. तो निम्नलिखित कथनों के समान है

(1)'p अन्तर्भाव' को $p \Rightarrow q$ से प्रदर्शित करते हैं। इसका अर्थ यह है कि कथन "कोई संख्या 6 की गुणज है में यह कथन अन्तर्निहित है कि वह संख्या 2 की भी गुणज है।

(2) 'p पर्याप्त प्रतिबंध है ' के लिए।

इसका अर्थ यह है कि यह ज्ञात होना कि संख्या 6 की गुणज है पर्याप्त है यह निष्कर्ष निकालने के लिए कि वह 2 की भी गुणज है।

(3) 'p केवल' यदि

इसका अर्थ यह है कि कोई संख्या 6 की गुणज है केवल यदि वह संख्या 2 की भी गुणज है।

(4) q अनिवार्य प्रतिबंध है p' के लिए

इसका अर्थ यह है कि कोई संख्या 6 की गुणज है तो वह संख्या अनिवार्य रूप से 2 की भी गुणज है।

(5) ~q अंतर्भाव ~p इसका अर्थ यह है कि कोई संख्या 2 की गुणज नहीं है तो वह संख्या 6 की भी गुणज नहीं है।

विरोधोक्ति द्वारा (By Contradiction)

इस विधि में यदि कथन p सत्य है तो हम मान लेते हैं कि कथन p सत्य नहीं है अर्थात् -p सत्य है। इस प्रकार हम एक ऐसे निष्कर्ष पर पहुंचते हैं जो हमारी मान्यता का खंडन करता है। परिणामतः p को सत्य होना चाहिए।

उदाहरण- विरोधोक्ति द्वारा निम्नलिखित कथन को सत्यापित कीजिए।

$\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : इस विधि में हम यह मान लेते हैं कि प्रदत्त कथन असत्य है।

अर्थात् $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

अर्थात् $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

दो ऐसे पूर्णांक a तथा b का अस्तित्व है कि

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ का कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

$= 2\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$

संख्या 2, संख्या a को विभाजित करती है इसलिए एक ऐसे पूर्णांक c का अस्तित्व है कि

a = 2 c

इस प्रकार,

$a^2 = 4c^2$ और $a^2 = 2b^2$

$2b^2 = 4c^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2$

संख्या 2, संख्या b को विभाजित करती है तथा संख्या 2, संख्या को भी विभाजित करती है। अत: संख्या 2, a तथा 6 का समापवर्तक है।

हमारी मान्यता है कि a तथा b का कोई समापवर्तक नहीं का खंडन है।

$\sqrt{2}$ परिमेय है यह असत्य है।

अत: $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है सत्य है। उत्तर

कथनों की वैधता को प्रमाणित (सत्यापित) करनाएक कथन किन स्थितियों में सत्य होता है, इस पर हम विचार करेंगे।

नियम 1. p और दो कथन हैं। दिये गये कथन सत्य हैं यह सिद्ध करने के लिए हम निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करेंगे

स्थिति I. दर्शाइए कि कथन p सत्य है।

स्थिति II. दर्शाइए कि कथन सत्य है।

नियम 2. संयोजक या से प्रयुक्त कथन

स्थिति I. p को असत्य मानते हैं और को अनिवार्यत: सत्य प्रमाणित करते हैं।

स्थिति II. 4 को असत्य मानते हैं और p को अनिवार्यत: सत्य प्रमाणित करते हैं।

नियम 3. वाक्यांश “यदि तो” से प्रयुक्त कथन

स्थिति I. p को सत्य मानते हैं और को अनिवार्यत: सत्य प्रमाणित करते हैं।

स्थिति II. q को असत्य मानते हैं और p को अनिवार्यतः असत्य प्रमाणित करते हैं।

नियम 4. वाक्यांश (प्रतिबंध) यदि और केवल यदि से प्रयुक्त कथन

(i) यदि p सत्य है तो सत्य है।

(ii) यदि सत्य है तो p सत्य है।

उदाहरण

उदाहरण 1. निम्नलिखित वाक्यों में कौन-सा कथन है ? अपने उत्तर के लिए कारण भी बताइए।

(i) गणित एक कठिन विषय है।

(ii) 5 और 7 का योगफल 10 से अधिक है।

(iii) आज एक तुफानी दिन है।

(iv) किसी त्रिभुज के सभी अंत:कोणों का योगफल 180° होता है।

(v) सूर्य एक तारा है।

(vi) बिना बादल के वर्षा नहीं होती।

(vii) प्रत्येक समुच्चय एक परिमित समुच्चय होता है।

हल : (i) यह एक कथन नहीं है। कुछ लोगों के लिए गणित कठिन है तो कुछ लोगों के लिए सरल हो सकता है।

इसका अर्थ यह हुआ कि यह वाक्य सत्य या असत्य नहीं है। अतः यह एक कथन नहीं है।

(ii) यह वाक्य सत्य है क्योंकि 5 और 7 का योगफल 10 से अधिक है। अत: यह एक कथन है।

(iii) यह कथन नहीं है क्योंकि स्पष्ट नहीं है कि कौन-सा दिन तुफानी होगा।

(iv) यह वाक्य सत्य है क्योंकि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है। अतः यह एक कथन है।

(v) वैज्ञानिक रूप से प्रमाणित है कि सूर्य एक तारा है और इसलिए यह वाक्य सत्य है। अत: यह एक कथन है।

(vi) वर्षा होने से पहले बादल बनते हैं इसलिए यह सदैव सत्य है। अत: यह एक कथन है।

(vii) यह वाक्य भी सदैव असत्य है क्योंकि ऐसे भी समुच्चय है जो कि परिमित नहीं होती हैं। अत: यह एक कथन है।

उदाहरण 2. निम्न में से कौन-सा वाक्य कथन है

(i) नई दिल्ली भारत की राजधानी है।

(ii) हे ईश्वर ! उसकी रक्षा कीजिए।

(iii) आप कैसे हैं?

(iv) $x+3=9$

(v).$x+y=9$.

हल : (i) कथन है।

(ii) कथन नहीं है।

(iii) कथन नहीं है।

(iv) कथन नहीं है।

(v) कथन नहीं है।

उदाहरण 3. निम्न वाक्यों को प्रतीकों में लिखिए यदि मेरे पास कार नहीं है अथवा मैं बढ़िया पोशाक नहीं पहनता तो मैं लखपति नहीं हूँ।

हल : माना कि p = मेरे पास कार है,

q = मैं बढ़िया पोशाक पहनता हूँ,

तथा r = मैं लखपति हूँ।

तब दिये हुए वाक्य को प्रतीकों में निम्नवत् लिखा जा सकता है

$\sim p \vee \sim q \Rightarrow \sim r$.

उदाहरण 4. निम्नलिखित कथनों का निषेधन लिखिए

(i) $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

(ii) भोपाल मध्यप्रदेश की राजधानी है।

(iii) सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज नहीं होते हैं।

हल : (i) $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

(ii) भोपाल मध्यप्रदेश की राजधानी नहीं है।

(iii) सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।

उदाहरण 6. निम्नलिखित मिश्र कथन के घटक कथन ज्ञात कीजिए

(i) आकाश नीला है और घास हरी है।

(ii) सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं और सभी वास्तविक संख्याएं सम्मिश्र संख्याएँ होती हैं।

हल : (i) घटक कथन इस प्रकार है

- p: आकाश नीला है।
- q: घास हरी है। संयोजक शब्द 'और' है।

(ii) घटक कथन इस प्रकार है

- p : सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं।
- q : सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ होती हैं।

उदाहरण 7. तर्क कथनों को प्रतीकात्मक रूप में लिखिए

(i) यदि टीमें नहीं आती हैं या मौसम खराब हो जाता है तो मैच संभव नहीं होगा।

(ii) वर्षा के लिये आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि आसमान में बादल होने चाहिए।

(iii) यदि तुम सही समय पर स्टेशन न पहुँचे तो ट्रेन छूट जायेगी।

(iv) यदि मुझे नहीं बुलाया गया तो मैं नहीं जाऊँर

(v) यदि मैं धनवान हूँ अथवा अच्छे कपड़े नहीं पहनता तो मैं धनवान नहीं हूँ।

हल : (i) यदि p = टीमें नहीं आती

Q = मौसम खराब होता है

r = मैच संभव नहीं होगा

तो प्रतीकात्मक रूप में $p \vee q \rightarrow r$

(ii) यदि p = वर्षा होनी चाहिए।

q = बादल होने चाहिए।

तो प्रतीकात्मक रूप में $p \leftrightarrow q$

(iii) यदि p = सही समय पर स्टेशन पहुँचना

Q = ट्रेन छूटना

तो प्रतीकात्मक रूप में $\sim p \rightarrow q$

(iv) यदि p = मुझे बुलाया जायेगा

Q = मैं जाऊँगा

तो प्रतीकात्मक रूप में $\sim p \rightarrow \sim q$

(v) यदि p = मैं धनवान हूँ

Q = मैं अच्छे कपड़े पहनता हूँ

तो प्रतीकात्मक रूप में $(p \vee \sim q) \rightarrow \sim p$.

उदाहरण 8.

P = अभी 7 बजे हैं

Q = ट्रेन लेट है

तो निम्नलिखित प्रतीकात्मक संकेतों को कथनों के रूप लिखिए(

i) $q \vee \sim p$

(ii) $p \wedge q$

(iii) $\sim (p \wedge q)$

(iv) $p \wedge \sim q$.

हल : (i) या तो ट्रेन लेट है अथवा 7 नहीं बजे हैं।

(ii) अभी 7 बजे हैं और ट्रेन लेट है।

अथवा

यद्यपि अभी 7 बजे हैं परन्तु ट्रेन लेट है।

(iii) यह सत्य नहीं है कि अभी 7 बजे हैं और ट्रेन लेट है।

(iv) अभी 7 बजे हैं परन्तु ट्रेन लेट नहीं है।

उदाहरण 9. यदि p = वह बुद्धिमान है और q = वह बलवान है तो निम्न कथनों को तार्किक संयोजकों की सहायता से प्रतीकात्मक रूप में लिखिए

(i) वह बुद्धिमान एवं बलवान है।

(ii) वह बुद्धिमान है परन्तु बलवान नहीं है।

(iii) यह असत्य है कि वह बुद्धिमान या बलवान है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 14.1 (पृष्ठ संख्या 342)

प्रश्न 1 निम्नलिखित वाक्य में से कौन से कथन हैं? अपने उत्तर के लिए कारण भी बतलाइए।

(i) एक महीने में 35 दिन होते हैं।

(ii) गणित एक कठिन विषय है।

(iii) 5 और 7 का योगफल 10 से अधिक होता है।

(iv) किसी संख्या का वर्ग एक सम संख्या होती है।

(v) किसी चतुर्भुज की भुजाएँ बराबर (समान) लंबाई की होती हैं।

(vi) इस प्रश्न का उत्तर दीजिए।

(vii) -1 और 8 का गुणनफल 8 है।

(viii) किसी त्रिभुज के सभी अंतः कोणों का योगफल 180° होता है।

(ix) आज एक तूफानी दिन है।

(x) सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ होती हैं।

उत्तर-

(i) **कथन-** यह असत्य है क्योंकि महीने में 35 दिन नहीं होते।

(ii) **वाक्य-** गणित एक कठिन विषय है। इसकी कोई परिभाषा नहीं है। किसी एक के लिए सरल और दूसरे के लिए कठिन विषय हो सकता है।

(iii) **कथन-** यह कथन सत्य है।

(iv) **कथन-** यह असत्य है क्योंकि वर्ग संख्या विषम भी हो सकती है। जैसे 9, 25.....

(v) **कथन-** यह कथन असत्य है क्योंकि किसी चतुर्भुज की लंबाई असमान भी होती है।

(vi) **वाक्य-** यह एक आदेश है, इसलिए यह एक कथन नहीं है।

(vii) **कथन-** यह कथन असत्य है। $\because -1 \times 8 = -8 \neq 8$

(viii) **कथन-** यह कथन सत्य है। त्रिभुज के तीनों अंत: कोणों का योग 180° होता है।

(ix) **वाक्य-** यह स्पष्ट नहीं है कि कौन-सा दिन तूफानी है?

(x) **कथन-** यह सत्य कथन है।

प्रश्न 2 वाक्यों में तीन ऐसे उदाहरण दीजिए जो कथन नहीं हैं। उत्तर के लिए कारण भी बताइए।

उत्तर- तीन उदाहरण इस प्रकार हो सकते हैं।

(i) इस कमरे में उपस्थित प्रत्येक व्यक्ति निडर है। यह एक कथन नहीं है, क्योंकि संदर्भ से स्पष्ट नहीं है कि यहाँ पर किस कमरे के बारे में कहा जा रहा है और निडर शब्द भी स्पष्ट रूप से परिभाषित नहीं है।

(ii) वह अभियान्त्रिकी की छात्री है। यह भी एक कथन नहीं है क्योंकि यह स्पष्ट नहीं है कि 'वह' वह कौन है।

(iii) $\cos^2\theta$ का मान सदैव $\frac{1}{2}$ से अधिक होता है। जब तक हमें यह ज्ञात न हो कि θ क्या है हम यह नहीं कह सकते कि वाक्य सत्य है या नहीं।

प्रश्नावली 14.2 (पृष्ठ संख्या 347)

प्रश्न 1 निम्नलिखित कथन का निषेधन लिखिए।

(i) चैन्नई, तमिलनाडु की राजधानी है।

(ii) $\sqrt{2}$ एक सम्मिश्र संख्या नहीं है।

(iii) सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज नहीं होते हैं।

(iv) संख्या 2 संख्या 7 से अधिक है।

(v) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्णांक होती है।

उत्तर-

(i) चैन्नई, तमिलनाडु की राजधानी नहीं है।

(ii) $\sqrt{2}$ एक सम्मिश्र संख्या नहीं है।

(iii) सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज हैं।

(iv) संख्या 2 संख्या 7 से बड़ी नहीं है।

(v) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्णांक नहीं है।

प्रश्न 2 क्या निम्नलिखित कथन युग्म (कथन के जोड़े) एक दूसरे के निषेधन हैं?

(i) संख्या x एक परिमेय संख्या नहीं है।

संग्ख्या x एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

(ii) संख्या एक परिमेय संख्या है।

संख्या एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर-

(i) कथन "संख्या x एक परिमेय संख्या नहीं है।" का निषेधन संख्या x एक परिमेय संख्या है। यो x एक अपरिमेय संख्या नहीं है। यही दूसरा कथन है। अतः दिए गए कथन एक दूसरे के निषेधन हैं।

(ii) कथन "संख्या x एक परिमेय संख्या है।" का निषेधन संख्या ४ एक अपरिमेय संख्या है। जो कि दूसरे कथन के समान है। अतः यह कथन एक दूसरे के निषेधन हैं।

प्रश्न 3 निम्नलिखित मिश्र कथन के घटक कथन ज्ञात कीजिए और जाँचिए कि वे सत्य हैं या असत्य हैं।

(i) संख्या 3 अभाज्य है या विषम है।

(ii) समस्त (सभी) पूर्णांक धन या ऋण हैं।

(iii) संख्या 100 संख्याओं 3, 11 और 5 से भाज्य हैं।

उत्तर-

(i) p : संख्या 3 अभाज्य है। यह कथन सत्य है।

q : संख्या 3 विषम संख्या है। यह कथन सत्य है।

(ii) p : सभी पूर्णांक धन हैं। यह कथन सत्य है।

q : सभी पूर्णांक ऋण हैं। यह कथन सत्य है।

(iii) p : 100, 3 से भाज्य है। यह कथन असत्य है।

q : 100, 11 से भाज्य है। यह कथन असत्य है।

r : 100, 5 से भाज्य है। यह कथन सत्य है।

प्रश्नावली 14.3 (पृष्ठ संख्या 353)

प्रश्न 1 निम्नलिखित मिश्र कथन में पहले संयोजक शब्दों को पहचानिए और फिर उनको घटक कथन में विघटित कीजिए।

(i) सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं और सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ नहीं होती हैं।
(ii) किसी पूर्णांक का वर्ग धन या ऋण होता है।
(iii) रेत बालू घूप में शीघ्र गर्म हो जाती है और रात्रि में शीघ्र ठंडी नहीं होती है।
(iv) $x = 2$ और $x = 3$, समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ के मूल हैं।

उत्तर-

(i) संयोजक शब्द 'और'

घटक p : सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं।

q : सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ नहीं होती हैं।

(ii) संयोजक शब्द 'या'

घटक p : किसी पूर्णांक का वर्ग धन होता है।

q : किसी पूर्णा का वर्ग ऋण होता है।

(iii) संयोजक शब्द 'और'

घटक p : रेत (बालू) धूप में शीघ्र गर्म हो जाती है।

q : रेत (बालू) रात्रि में शीघ्र ठंडी नहीं होती।

(iv) संयोजक शब्द 'और'

घटक p : $x = 2$, समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ का मूल है।

q : $x = 3$ समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ को मूल है।

प्रश्न 2 निम्नलिखित कथन में परिमाण वाचक वाक्यांश पहचानिए और कथन के निषेधन लिखिए।

(i) एक ऐसी संख्या का अस्तित्व है, जो अपने वर्ग के बराबर है।

(ii) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए x, $(x + 1)$ से कम होता है।

(iii) भारत के हर एक राज्य/ प्रदेश के लिए एक राजधानी का अस्तित्व है।

उत्तर-

(i) **परिमाणवाचक वाक्यांश**- एक ऐसी संख्या का अस्तित्व है।

कथन का निषेधन- ऐसी संख्या का अस्तित्व नहीं है जो अपने वर्ग के बराबर हो।

(ii) **परिमाणवाचक वाक्यांश**- "प्रत्येक के लिए"

p : प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए x, $x + 1$ से कम होता है।

p का निषेधन = ~pकम से कम एक वास्तविक संख्या 7 ऐसी है जो $x + 1$ से कम नहीं है।

(iii) **परिमाणवाचक वाक्यांश**- एक ऐसे का अस्तित्व है।

कथन p : भारत के हर एक राज्य/ प्रदेश के लिए एक राजधानी का अस्तित्व है।

p का निषेधन : ~p = भारत के हर एक राज्य/ प्रदेश के लिए एक राजधानी का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 3 जाँचिए कि क्या नीचे लिखे कथनों के जोड़े (युग्म) एक दूसरे के निषेधन हैं। अपने उत्तर के लिए कारण भी बतलाइए।

(i) प्रत्येक वास्तविक संख्याओं x और y के लिए x + y = y + x सत्य है।

(ii) ऐसी वास्तविक संख्याओं x और y का अस्तित्व है जिनके लिए x + y = y + x सत्य है।

उत्तर- कथन (i) और (ii) एक दूसरे के निषेधन नहीं है।

प्रश्न 4 बतलाइए कि निम्नलिखित कथन में प्रयुक्त 'या' 'अपवर्जित है' अथवा 'अंतर्विष्ट' है। अपने उत्तर के लिए कारण भी बतलाइए।

(i) सूर्य उदय होता है या चन्द्रमा अस्त होता है।

(ii) ड्राइविंग लाइसेंस के आवेदन हेतु आपके पास राशन कार्ड या पासपोर्ट होना चाहिए।

(iii) **अपवर्जित-** सभी पूर्णांक धन या ऋण होते हैं। परन्तु धन या ऋण दोनों नहीं हो सकते।

उत्तर-

(i) **अपवर्जित-** सूर्य उदय होता है और चन्द्रमा अस्त होता है। एक समय पर सूर्य उदय होगा या चन्द्रमा

(ii) **अंतर्विष्ट-** ड्राइविंग लाइसेंस के आवेदन हेतु राशन कार्ड या पास पोर्ट या दोनों मान्य है।

(iii) **अपवर्जित-** सभी पूर्णांक धन या ऋण होते हैं। परन्तु धन या ऋण दोनों नहीं हो सकते।

प्रश्नावली 14.4 (पृष्ठ संख्या 357)

प्रश्न 1 निम्नलिखित कथन को वाक्यांश "यदि-तो" का प्रयोग करते हुए पाँच विभिन्न रूप में इस प्रकार लिखिए कि उनके अर्थ समान हों।

यदि एक प्राकृत संख्या विषम है तो उसका वर्ग भी विषम है।

उत्तर-

(i) यदि एक प्राकृत संख्या विषम है तो अंर्तभाव है उसको वर्ग भी विषम है।

(ii) कोई प्राकृत संख्या विषम संख्या है केवल यदि उसका वर्ग विषम है।

(iii) यदि प्राकृत संख्या का वर्ग विषम नहीं है तो वह प्राकृत संख्या भी विषम नहीं होगी।

(iv) एक प्राकृत संख्या विषम है, इसके लिए यह अनिवार्य है कि उनका वर्ग भी विषम होगा।

(v) एक प्राकृत संख्या का वर्ग विषम है, इसके लिए यह पर्याप्त होगा कि वह संख्या विषम है।

प्रश्न 2 निम्नलिखित कथन के प्रतिधनात्मक और विलोम कथन लिखिए।

(i) यदि x एक अभाज्य संख्या है, तो x एक विषम है।

(ii) यदि दो रेखाएँ समांतर हैं तो वे एक दूसरे को एक समतल में नहीं काटती हैं।

(iii) किसी वस्तु के ठंडे होने का तात्पर्य (अंतर्भाव) है कि उसका तापक्रम कम है।

(iv) आप ज्यामिति विषय को आत्मसात नहीं कर सकते यदि आपको यह ज्ञान नहीं है कि निगमनात्मक विवेचन किस प्रकार किया जाता है।

(v) "x एक सम संख्या है" से तात्पर्य (अंतर्भाव) है कि x संख्या 4 से भाज्य है।

उत्तर-

(i) **प्रतिधनात्मक कथन**- यदि एक संख्या x विषम नहीं है तो x एक अभाज्य संख्या नहीं है।

विलोम कथन- यदि एक संख्या x विषम है तो x एक अभाज्य संख्या है।

(ii) **प्रतिधनात्मक कथन**- यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को समतल में काटती हैं तो रेखाएँ समांतर नहीं हैं।

विलोम कथन- अदि दो रेखाएँ एक दूसरे को एक ही समतल में नही काटती हैं तो रेखाएँ समांतर हैं।

(iii) **प्रतिधनात्मक कथन**- यदि किसी वस्तु का तापमान कम नहीं है तो वह वस्तु ठंडी नहीं है।

विलोम कथन- यदि किसी वस्तु का तापमान कम है तो वह वस्तु ठंडी है।

(iv) **प्रतिधनात्मक कथन**- यदि आपको यह ज्ञात है कि निगमनात्मक विवेचन किस प्रकार किया है तो आप ज्यामिति विषय को आत्मसात कर सकते हैं।

विलोम कथन- यदि आपको यह ज्ञात नहीं है कि निगमनात्मक विवेचन किस प्रकार किया जाता है तो आप ज्यामिन्नि विषय को आत्मसात नहीं कर सकते हैं।

(v) **प्रतिधनात्मक कथन**- यदि x संख्या 4 से भाज्य नहीं है तो x एक सम संख्या नहीं है।

विलोम कथन- यदि संख्या x, 4 से भाज्य है तो यह एक सम संख्या है।

प्रश्न 3 निम्नलिखित कथन में से प्रत्येक को 'यदि–तो' रूप में लिखिए।

(i) आपको नौकरी (काम) मिलने का तात्पर्य (अंतर्भाव) है कि आपकी विश्वसनियता अच्छी है।
(ii) केले का पेड़ फूलेगा यदि वह एक माह तक गरम बना रहे।
(iii) एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है यदि उसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करे।
(iv) कक्षा में ग्रेड A पाने के लिए यह अनिवार्य है कि आप पुस्तक के सभी प्रश्नों को सरल कर लेते है।

उत्तर-

(i) यदि आपको नौकरी मिल गई है तो आपकी विश्वसनियता अच्छी है।
(ii) यदि केले का पेड़ एक माह तक गरम बना रहे तो केले का पेड़ फूलेगा।
(iii) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो वह एक समांतर चतुर्भुज है।
(iv) यदि आप कक्षा में A ग्रेड पाते हैं, तो आप पुस्तक के सभी प्रश्न हल कर लेते हैं।

प्रश्न 4 नीचे प्रदत्त कथन में से प्रत्येक के (i) में दिए कथन का प्रतिधनात्मक और विलोम कथन पहचानिए।

(i) यदि आप दिल्ली में रहते हैं तो आपके पास जाड़े के कपड़े हैं।

a) यदि आपके पास जाड़े के कपड़े नहीं हैं, तो आप दिल्ली में नहीं रहते हैं।
b) यदि आपके पास जाड़े के कपड़े हैं, तो आप दिल्ली में रहते हैं।

(ii) यदि एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है, तो उसके विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

a) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित नहीं करते हैं तो चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज नहीं है।
b) यदि चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो वह समांतर चतुर्भुज है।

उत्तर-

(i)

a) प्रतिधनात्मक।
b) विलोम।

(ii)

a) प्रतिधनात्मक।
b) विलोम।

प्रश्नावली 14.5 (पृष्ठ संख्या 361-362)

प्रश्न 1 सिद्ध कीजिए कि कथन यदि x एक ऐसी वास्तविक संख्या है कि $x^3 + 4x = 0$, तो $x = 0$

(i) प्रत्यक्ष विधि द्वारा।
(ii) विरोधोक्ति द्वारा।
(iii) प्रतिधनात्मक कथन द्वारा।

उत्तर-

(i) प्रत्यक्ष विधि द्वारा-

$x^3 + 4x = 0$ या $x(x^2 + 4) = 0$

$x = 0$ या $x^2 + 4 = 0$

परन्तु $x^2 + 4 \neq 0, \in R$

अतः $x = 0$

(ii) विरोधोक्ति द्वारा माना $x \neq 0$

यदि समीकरण $x^2 + 4x = 0$ का एक मूल p हो, तब

$p^3 + 4p = 0$ या $p(p^2 + 4) = 0$

$p = 0$ या $p^2 + 4 = 0$

$p^2 + 4 \neq 0$

$p = 0$ विरोधात्मक है $x \neq p$ के जो पूर्व निर्धारित है।

अर्थात् $p = 0$ या $x = 0$

(iii) प्रतिधनात्मक कथन द्वारा-

माना $x = 0$ सत्य नहीं है।

$x \in R$, $x^3 + 4x \neq 0$, और $x \neq 0$ (माना गया है)

$x(x^2 + 4) \neq 0$ यह सिद्ध करता है कि $x^2 + 4x = 0$ का $x = 0$ मूल है।

प्रश्न 2 प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध कीजिए कि कथन "किसी भी ऐसी वास्तविक संख्याओं a और b के लिए, जहाँ $a^2 = b^2$ का तात्पर्य है कि $a = b$" सत्य नहीं है।

उत्तर- माना जब $a = 1$, $b = -1$ तो $a^2 = b^2$
परन्तु $a \neq b$ अतः दिया गया कथन सत्य नहीं है।

प्रश्न 3 प्रतिधनात्मक विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य है। p : यदि x एक पूर्णांक है और x^2 सम है तो x सम है।

उत्तर- माना x एक सम संख्या नहीं हैं। $x = 2n + 1$

$x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$

यह एक विषम संख्या है। इस प्रकार यदि q सत्य नहीं है तो p भी सत्य नहीं है। अर्थात दिया हुआ कथन सत्य है।

प्रश्न 4 प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य नहीं हैं।

(i) p : यदि किसी त्रिभुज के कोण समान हैं, तो त्रिभुज एक अधिक कोण त्रिभुज है।

(ii) q : समीकरण $x^2 - 1 = 0$ के मूल 0 और 2 के बीच स्थित नहीं है।

उत्तर-

(i) माना एक कोण $= 90 + \theta$

तीनों कोण समान हों, तब

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $= 3(90 + \theta) = 270 + 3\theta$

यह 180° के बराबर नहीं है।

त्रिभुज को कोई भी कोण अधिक कोण नहीं हो सकता अर्थात वह त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज नहीं हो सकता है।

(ii) 0 और 2 के बीच की संख्या 1 लीजिए।

$x^2 - 1 = 0$ में $x = 1$ रखने पर,

$1 - 1 = 0$,

अत: $x = 1$, दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है।

इसलिए $x = 1$, समीकरण $x^2 - 1 = 0$ का मूल है और 0 और 2 के बीच स्थित हैं।

अतः दिया गया कथन सत्य नहीं है।

प्रश्न 5 निम्नलिखित कथन में से कौन से सत्य हैं और कौन से असत्य हैं। प्रत्येक दशा में अपने उत्तर के लिए वैध कारण बतलाइए।

(i) p : किसी वृत्त की प्रत्येक त्रिज्या वृत्त की जीवा होती है।

(ii) q : किसी वृत्त का केंद्र वृत्त की प्रत्येक जीवा को समद्विभाजित करता है।

(iii) r : एक वृत्त किसी दीर्घवृत्त की एक विशेष स्थिति है।

(iv) s : यदि x और y ऐसे पूर्णांक हैं कि $x > y$, तो $-x < -y$ हैं।

(v) t : $\sqrt{11}$ एक परिमेय संख्या है।

उत्तर-

(i) असत्य

स्पष्टीकरण- त्रिज्या का एक सिरा केंद्र पर ओर दूसरा सिरा वृत्त पर होता हो तो वह जीवा नहीं होती है। अत: यह वृत्त की जीवा नहीं है।

(ii) असत्य

स्पष्टीकरण- वृत्त का केंद्र केवल व्यास को समद्विभाजित करता है। प्रत्येक जीवा केंद्र से होकर नहीं जाती है। अत: वृत्त का केंद्र प्रत्येक जीवा को समद्विभाजित नहीं करता है।

(iii) सत्य

स्पष्टीकरण-

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

जब $a = b$ तब $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

या $x^2 + y^2 = a^2$

अत: यह वृत्त का समीकरण है।

(iv) सत्य

स्पष्टीकरण- यदि x और y पूर्णांक हैं और $x > y$ तो $-x < -y$ (असमिकाओं के नियम से)

(v) असत्य

स्पष्टीकरण- $\sqrt{11}$ एक अपरिमेय संख्या है।

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 364-365)

प्रश्न 1 निम्नलिखित कथन के निषेधन लिखिए।

(i) प्रत्येक धन वास्तविक संख्या x के लिए, संख्या $x - 1$ भी धन संख्या है।

(ii) सभी बिल्लियाँ खरोंचती हैं।

(iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए या तो $x > 1$ या $x < 1$

(iv) एक ऐसी संख्या x का अस्तित्व है कि $0 < x < 1$

उत्तर-

(i) एक ऐसी धन वास्तविक संख्या x को अस्तित्व है कि $x - 1$ धन संख्या नहीं है।
(ii) सभी बिल्लियाँ खरोंचती नहीं हैं।
(iii) एक ऐसी वास्तविक संख्या x का अस्तित्व है कि न तो $x > 1$ और नही $x < 1$
(iv) किसी ऐसी वास्तविक संख्या x का अस्तित्व नहीं है कि $0 < x < 1$.

प्रश्न 2 निम्नलिखित सप्रतिबंध कथन (अंतर्भाव) में से प्रत्येक का विलोम तथा प्रतिधनात्मक कथन लिखिए।

(i) एक धन पूर्णाक अभाज्य संख्या है केवल यदि 1 और पूर्णांक स्वयं के अतिरिक्त उसका कोई अन्य भाजक नहीं है।
(ii) मैं समुद्र तट पर जाता हूँ जब कभी धूप वाला दिन होता है।
(iii) यदि बाहर गर्म है, तो आपको प्यास लगती है।

उत्तर-

(i) **विलोम कथन**- यदि एक धन पूर्णांक अभाज्य है, तो 1 तथा स्वयं के अतिरिक्त इसका कोई अन्य भाजक नहीं है।

प्रतिधनात्मक कथन- यदि एक धन पूर्णांक के 1 तथा स्वयं के अतिरिक्त अन्य भाजक भी हैं, तो वह धन पूर्णांक अभाज्य संख्या नहीं है।

(ii) **विलोम कथन**- यदि कभी धूप वाला दिन हो तो मैं समुद्र तट पर जाता हूँ।

प्रतिधनात्मक कथन- जब कभी धूप वाला दिन नहीं होता तो मैं समुद्र तट पर नहीं जाता।

(iii) **विलोम कथन**- यदि आपको प्यास लगी है, तो बाहर गर्म है।

प्रतिधनात्मक कथन- यदि आपको प्यास नहीं लगती है तो बाहर गर्म नहीं है।

प्रश्न 3 निम्नलिखित कथन में से प्रत्येक को "यदि p तो q" के रूप में लिखिए।

(i) सर्वर पर लॉग आन करने के लिए पासवर्ड का होना आवश्यक है।
(ii) जब कभी वर्षा होती है यातायात में अवरोध उत्पन्न होता है।
(iii) आप वेबसाइट में प्रवेश कर सकते हैं केवल यदि आपने निर्धारित शुल्क का भुगतान किया हो।

उत्तर-

(i) "यदि p तो q" के रूप में कथन

यदि सर्वर पर लॉग आन है, तो पासवर्ड ज्ञात है।

(ii) "यदि p तो q" के रूप में कथन

यदि वर्षा होती है, तो यातायात में अवरोध उत्पन्न होता है।

(iii) "यदि p तो q" के रूप में कथन

यदि आप निर्धारित शुल्क का भुगतान करते हैं, तो आप बेवसाइट में प्रवेश कर सकते हैं।

प्रश्न 4 निम्नलिखित कथन में से प्रत्येक को 'p यदि और केवल यदि q' के रूप में पुनः लिखिए।

(i) यदि आप दूरदर्शन (टेलीविजन) देखते हैं, तो आपका मन मुक्त होता है तथा यदि आपका मन मुक्त है तो आप दूरदर्शन देखते हैं।
(ii) आपके द्वारा A ग्रेड प्राप्त करने के लिए यह अनिवार्य और पर्याप्त है कि आप गृहकार्य नियमित रूप से । करते हैं।
(iii) यदि एक चतुर्भुज समान कोणिक है, तो वह एक आयत होता है तथा यदि एक चतुर्भुज आयत है, तो वह समान कोणिक होता है।

उत्तर-

(i) 'p यदि और केवल यदि q' के रूप में कथन

आप टेलीविज़न देखते हैं यदि और केवल यदि आपका मन मुक्त होता है।

(ii) 'p यदि और केवल यदि q' के रूप में कथन

आप A ग्रेड प्राप्त करते हैं यदि और केवल यदि आप नियमित रूप से समस्त गृहकार्य करते हैं।

(iii) 'p यदि और केवल यदि q' के रूप में कथन

एक चतुर्भुज समान कोणिक है यदि और केवल यदि वह एक आयत है।

प्रश्न 5 नीचे दो कथन दिए हैं,

p : 25 संख्या 5 का एक गुणज है।

q : 25 संख्या 8 का एक गुणज है।

उपरोक्त कथनों का संयोजक 'और' तथा 'या' द्वारा संयोजन करके मिश्र कथन लिखिए। दोनों दशाओं में प्राप्त मिश्र कथनों की वैधता जाँचिए।

उत्तर-

(i) 'और' संयोजन द्वारा मिश्र कथन- 25 संख्या 5 और 8 का गुणज है। यह असत्य कथन है क्योंकि p और q दोनों सत्य नहीं हैं।

(ii) संयोजक 'या' द्वारा मिश्र कथने- 25 संख्या 5 या 8 का गुणज है। यह कथन सत्य है।

प्रश्न 6 नीचे लिखे कथन की वैधता की जाँच उनके सामने लिखित विधि द्वारा कीजिए।

(i) p : एक अपरिमेय संख्या और एक परिमेय संख्या का योगफल अपरिमेय होता है। (विरोधोक्ति विधि)

(ii) q : यदि n एक ऐसी वास्तविक संख्या है कि $n > 3$ तो $n^2 > 9$ (विरोधोक्ति विधि)

उत्तर-

(i) मान लीजिए $\sqrt{a}$ अपरिमेय और b परिमेय सेख्याएँ हों, तब

दोनों का योग $b + \sqrt{a} = s$

माना यह योग अपरिमेय नहीं है।

यदि s अपरिमेय नहीं है तो यह परिमेय संख्या है।

$b + \sqrt{a} = \frac{p}{q} \ldots (1)$

जबकि p और q पूर्णांक हैं, $p \neq 0$ तथा उनमें कोई समान गुणनखण्ड नहीं है।

समीकरण (1) से, $\sqrt{a} = - b$

बायाँ पक्ष $= \sqrt{a} =$ एक अपरिमेय संख्या

दायाँ पक्ष $= \frac{p}{q} - b =$ एक परिमेय संख्या चूँकि यह दोनों विरोधात्मक हैं।

अतः योग s परिमेय संख्या नहीं हो सकती।

(ii) माना $n^2 > 9$ नहीं है जबकि $n > 3$

$n = 3 + a$ रखने पर

$n = a + 3$ $n^2 = (a + 3)^2$

$= a^2 + 6a + 9 = 9 + (a^2 + 6a)$

$n^2 > 9$

पूर्वनिर्धारित कथन और यह कथन विरोधात्मक है।

अतः जब $x > 3$ तो $x^2 > 9$

प्रश्न 7 निम्नलिखित कथन को पाँच भिन्न-भिन्न तरीकों से इस प्रकार व्यक्त कीजिए कि उनके अर्थ समान हों।

q : यदि एक त्रिभुज समान कोणिक है तो वह एक अधिक कोण त्रिभुज है।

उत्तर- पाँच समान अर्थ वाले कथन।

(i) कथन "एक त्रिभुज समान कोणिक है" का अंतर्भाव है कि यह अधिक कोण त्रिभुज है।

(ii) एक त्रिभुज के अधिक कोण त्रिभुज होने के लिए यह पर्याप्त है कि यह समान कोणिक है।
(iii) एक त्रिभुज समान कोणिक है यदि और केवल यदि त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज है।
(iv) एक त्रिभुज को समान कोणिक होने के लिए यह अनिवार्य है कि त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज हो।
(v) यदि एक त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज नहीं है तो वह समान कोणिक त्रिभुज नहीं है।