गणित

अध्याय-13: प्रायिकता

सप्रतिबंध प्रायिकता (Conditional probability)

यदि हमें किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ दी गई हों, तो इस पर विचार करें कि किसी एक घटना के घटित होने का प्रभाव दूसरी घटना की प्रायिकता पर पड़ता है। यदि किसी स्वेच्छ प्रतिदर्श समष्टि के संबद्ध दो घटनाएँ A और B हों, तो घटना के घटित होने की प्रायिकता जब घटना B पूर्व से घटित हो चुकी हो, घटना

A के घटित होने की सप्रतिबंध प्रायिकता कहलाती है। इसे P(A/B) से निरूपित करते हैं।

अब दो न्याय्य (fair) सिक्कों को उछाला जाये, तो प्रतिदर्श समष्टि है

S = {HH, HT, TH, TT}

चूँकि सिक्के न्याय्य (fair) है, तो प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक बिन्दु की प्रायिकता 1/4 है।

अब माना A घटना, न्यूनतम एक चित (Head) आना है और B घटना "पहले सिक्के पर पट (Tail) प्रकट होना" को निरूपित करता है।

तब A = {HH, HT, THY} .....(1)

B = {TH, TT} .....(2)

∴ घटना A के घटित होने की प्रायिकता

P(A) = P (HH) + P(HT) + P(TH)

∴ P(A) = 3/4 (क्यों ?) ....(3)

और घटना B के घटित होने की प्रायिकता

P(B) = P(TH) + P(TT)

$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (क्यों ?) $\ldots \ldots (4)$

और $A \cap B = \{TH\} \ldots \ldots \ldots . (5)$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{4} \ldots \ldots \ldots (6)$

टीप : यहाँ AUB = {HH, HT, TH, TT} ....(7)

P(AUB) = P(HI) + P(HT) + P(TH) + P(TT)

$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{4}{4}$$

= P(A ∪ B) = 1 ....(8)

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

$$\Rightarrow 1 + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{3+2-1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{4}{4}$$

$$\Rightarrow 1 = 1$$

अत: P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B) सत्य है।

घटना B पहले से घटित हो चुकी हो, तो A के घटित होने की प्रायिकता

$$= P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

ध्यान रहे B के वो अवयव जो घटना A के भी अनुकूल है, घटना A और B के साझे अवयव होते हैं अर्थात् A ∩ B के प्रतिदर्श बिन्दु कहलाते हैं।

इस प्रकार हम घटना A की सप्रतिबंध प्रायिकता, जबकि घटना B घटित हो चुकी है, को निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं-

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{(A \cap B) \text{ के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या}}{B \text{ के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या}}$$

$$\Rightarrow \qquad P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \qquad ...(1)$$

अब समी. (1) के R.H.S. में अंश और हर को प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की कुल संख्या n(S) से भाग दिया जाये, तो

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}$$

$$\Rightarrow \qquad P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad ...(2)$$

समी. (2) तभी सत्य है जब $P(B) \neq 0$ अर्थात् $B \neq \emptyset$ (?)

परिभाषा (Definition)- यदि A और B किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से संलग्न दो घटनाएं इस प्रकार हैं कि B के घटित होने की सूचना पर, A की प्रायिकता निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात होती है-

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{जहाँ } P(B) \neq 0$$

अर्थात् B रिक्त समुच्चय न हो।

13-2. सप्रतिबंध प्रायिकता के गुण (Properties of Conditional probability)

माना A और B किसी प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ हैं।

प्रगुण (1) $P\left(\frac{S}{B}\right) = P\left(\frac{B}{B}\right) = 1$

प्रमाण-चूँकि हम जानते हैं कि

$$P\left(\frac{S}{B}\right) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \quad \ldots (1)$$

$$\text{और } P\left(\frac{B}{B}\right) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \quad \ldots (2)$$

समी. (1) और (2) से,

$$P\left(\frac{S}{B}\right) = P\left(\frac{B}{B}\right) = 1,$$

प्रगुण (2) यदि M और N प्रतिदर्श समष्टि S की कोई दो घटनाएँ हैं और B एक अन्य घटना के घटित होने की सूचना इस प्रकार है कि $P(B) \neq 0$, तब

$$P\left[\frac{M \cup N}{B}\right] = P\left(\frac{M}{B}\right) + P\left(\frac{N}{B}\right) - P\left[\frac{M \cap N}{B}\right]$$

प्रमाण- यदि M और N परस्पर अपवर्जी घटनाएं हों, तो

$M \cap N = \phi$

$\Rightarrow \quad n(M \cap N) = 0$

$\Rightarrow \quad P(M \cap N) = 0$

$\therefore P\left[\frac{(M \cap N)}{B}\right] = 0$

तब $P\left[\frac{M \cup N}{B}\right] = P\left(\frac{M}{B}\right) + P\left(\frac{N}{B}\right)$

$\Rightarrow \quad P\left[\frac{M \cup N}{B}\right] = \frac{P[(M \cup N) \cap B]}{P(B)}$

$\Rightarrow \quad P\left[\frac{M \cup N}{B}\right] = \frac{P[(M \cap B) \cup (N \cap B)]}{P(B)}$

$[\because (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)]$

समुच्चयों के सर्वनिष्ठ पर सम्मिलन के बंटन नियम से,

$$P\left[\frac{M \cup N}{B}\right] = \frac{P(M \cap B) + P(N \cap B) - P(M \cap N \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P\left[\frac{M \cup N}{B}\right] = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} + \frac{P(N \cap B)}{P(B)} - \frac{P(M \cap N \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P\left[\frac{M \cup N}{B}\right] = P\left(\frac{M}{B}\right) + P\left(\frac{N}{B}\right) - P\left[\frac{M \cap N}{B}\right]$$

यही प्रगुण (2) का प्रमाण है।

पुनः, यदि M और N परस्पर अपवर्जी हों, तो

$$P\left[\frac{M \cup N}{B}\right] = P\left(\frac{M}{B}\right) + P\left(\frac{N}{B}\right),$$

$$\because P\left[\frac{M \cap N}{B}\right] = 0$$

प्रगुण (3) $P\left(\frac{A'}{B}\right) = 1 - P\left(\frac{A}{B}\right)$

प्रमाण-प्रगुण (1) से हम जानते हैं कि

$$P\left(\frac{S}{B}\right)=1$$

$$\Rightarrow \quad P\left[\frac{(A\cup A')}{B}\right]=1, \qquad (\because S=A\cup A')$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{A}{B}\right)+P\left(\frac{A'}{B}\right)=1$$

चूँकि A और A' परस्पर अपवर्जी घटनाएं हैं।

$$\therefore \quad P\left(\frac{A'}{B}\right)=1-P\left(\frac{A}{B}\right)$$

यही प्रगुण (3) का प्रमाण है।

उदाहरण 1.

एक फैक्टरी द्वारा उत्पादित बल्बों में 8% बल्ब लाल रंग के हैं और 2% लाल किन्तु फ्यूज हैं। यदि एक बल्ब यदृच्छया चुना जाए तो उसके फ्यूज होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि वह लाल है।

हल:

यहाँ n(S) = 100

S प्रतिदर्श समष्टि है।

P(लाल बल्ब) = P(R) = $\frac{8}{100}$

P(फ्यूज बल्ब) = P(F) = $\frac{2}{100}$

$$P(R\cap F)=\frac{2}{100}$$

प्रश्नानुसार प्रायिकता बल्ब के फ्यूज होने की यदि वह लाल है।

$$P\left(\frac{F}{R}\right)=\frac{P(R\cap F)}{P(R)}=\frac{\left(\frac{2}{100}\right)}{\left(\frac{8}{100}\right)}$$

$$P\left(\frac{F}{R}\right)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

उदाहरण 2.

एक टोकरी में दो फल हैं। यदि यह ज्ञात हो कि फलों में से कम-से-कम एक फल खराब है, तो दोनों फलों के खराब होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल:

माना F ताजा (अच्छा) फल को और R खराब फल को निरूपित करता है। तब परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि (Sample space)s है:

S = {(R, R), (F, R), (R, F), (FF)} ... (1)

A : “दोनों फल खराब हैं"

B : “फलों में से कम-से-कम एक फल खराब है"

$\therefore A = \{(R, R)\}$ ...(2)

$B = \{(R, R), (F, R), (R, F)\}$ ...(3)

$A \cap B = \{(R, R)\}$ ...(4)

$n(S) = 4,$ [समी. (1) से]

$n(A) = 1,$ [समी. (2) से]

$n(B) = 3,$ [समी. (3) से]

$n(A \cap B) = 1,$ [समी. (4) से]

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

प्रश्नानुसार, यह ज्ञात है कि टोकरी में रखे दो फलों में कमसे-कम एक फल खराब है तो दोनों फलों के खराब होने की प्रायिकता है-

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

उदाहरण 3.

एक स्कूल में 25% छात्र गणित में पास होते हैं, 15% छात्र भौतिकी में फेल होते हैं तथा 10% छात्र दोनों विषयों में फेल होते हैं। एक छात्र यदृच्छया चुना जाता है तो

i. यदि वह भौतिकी में फेल है, तो उसके गणित में फेल होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
ii. यदि वह गणित में फेल है, तो उसके भौतिकी में फेल होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
iii. उसके गणित या भौतिकी में फेल होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल:

प्रश्नानुसार,

M: गणित में छात्र के फेल होने की घटना (25%)

$$\therefore P(M) = \frac{25}{100} \quad ...(1)$$

P: भौतिक में फेल होने की घटना (15%)

$$\therefore P(P) = \frac{15}{100} \quad ...(2)$$

(M ∩ P): दोनों विषयों में फेल होने की घटना (10%)

$$P(M \cap P) = \frac{10}{100} \quad ...(3)$$

(i) गणित (M) में फेल होने की प्रायिकता यदि वह भौतिकी (P) में फेल है:

$$P\left(\frac{M}{P}\right) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)}$$

$$= \frac{\frac{10}{100}}{\frac{15}{100}}, \quad \text{[समी. (2) और (3) से]}$$

$$= \frac{10}{15}$$

$$= \frac{2}{3}$$

(ii) भौतिकी में फेल होने की प्रायिकता जबकि वह गणित में फेल है:

$$P\left(\frac{P}{M}\right) = \frac{P(P \cap M)}{P(M)}$$

$$= \frac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}} = \frac{10}{25}$$

$$= \frac{2}{5}.$$

(iii) गणित या भौतिकी में फेल होने की प्रायिकता:

$$P(M \cup P) = P(M) + P(P) - P(M \cap P)$$
$$= \frac{25}{100} + \frac{15}{100} - \frac{10}{100}$$
$$= \frac{30}{100}$$
$$= \frac{3}{10}.$$

उदाहरण 4.

एक सिक्का लगातार तीन बार उछाला जाता है। यदि A घटना है जिसमें कम से कम दो शीर्ष आने हैं और B घटना है जिसमें प्रथम उछाल में शीर्ष आना है, तो कम से कम दो शीर्ष आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि घटना प्रथम उछाल में शीर्ष आ चुका हो।

हल:

एक सिक्का को तीन बार उछालने के प्रयोग में प्रतिदर्श समष्टि S हो तो

S = {(HHH), (HHT), (THI), (HTH),(TTH), (HTT), (THT), (TTT)}

$\therefore n(S) = 8$

A : कम से कम दो शीर्ष आने की घटना

A = {(HHT), (THH), (HTI), (HHH)}

$\therefore n(A) = 4$

B: प्रथम उछाल में शीर्ष आने की घटना

B = {(HHT), (HTH), (HHH), (HTT)}

$\therefore n(B) = 4$

A ∩ B = {(HHT), (HTH),(HHH),}

$\therefore n(A \cap B) = 3$

अतः अभीष्ट प्रायिकता (अर्थात् कम से कम दो शीर्ष आने की प्रायिकता जबकि प्रथम उछाल में शीर्ष आ चुका है)

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{\left[\frac{n(A\cap B)}{n(S)}\right]}{\left[\frac{n(B)}{n(S)}\right]}$$

$$=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

$$=\frac{3}{4}.$$

प्रायिकता का गुणन नियम (Multiplication Theorem on probability)

माना कि और B एक प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ हैं। स्पष्ट है कि समुच्चय A ∩ B दोनों घटनाओंA और B के घटित होने को निरूपित करता है अर्थात् A ∩ B घटनाओं A और B के युगपत् घटित होने को निरूपित करता है।

सामान्यत: घटना A ∩ B को AB भी लिखा जाता है और इसकी आवश्यकता निम्न उदाहरण से समझ सकते हैं

उदाहरण 1.

एक के बाद दूसरा पत्ता निकालने के परीक्षण में मिश्र घटना "एक हुकुम का पत्ता और एक ईंट का पत्ता" निकलने की प्रायिकता ज्ञात करने में आवश्यकता पड़ती है। घटना AB की प्रायिकता ज्ञात करने के लिये हम सप्रतिबंध प्रायिकता का उपयोग करते हैं।

ध्यान दें- घटना B के दिए जाने पर घटना A की सप्रतिबंध प्रायिकता को $P\left(\frac{A}{B}\right)$ से निरूपित करते हैं इसे ज्ञात करने के लिए

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ जहाँ } P(B)\neq 0$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{A}{B}\right)P(B)=P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B)=P\left(\frac{A}{B}\right)P(B) \qquad ...(1)$$

हम यह भी जानते हैं कि

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{B}{A}\right)P(A)=P(A\cap B),\ [\because A\cap B=B\cap A]$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P\left(\frac{B}{A}\right)P(A) \qquad \ldots(2)$$

समी. (1) और (2) से,

$$P(A\cap B)=P\left(\frac{A}{B}\right)P(B)=P\left(\frac{B}{A}\right)P(A).$$

स्वतंत्र घटनाएँ (Independent Events)

किसी प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ A व B स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती हैं यदि एक घटना के पूर्व में घटित होने से दूसरी घटना की प्रायिकता पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता, अन्यथा घटनाएँ परतंत्र (Dependent) कहलाती हैं। .

यदि घटनाएँ A व B स्वतंत्र हैं तो

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=P(A) \text{ तथा } P\left(\frac{B}{A}\right)=P(B).$$

उदाहरणार्थ:

52 ताश वाली गड़ी से दो पत्ते क्रमानुसार खींचे जाते हैं। दोनों पत्ते इक्के हैं। ये दोनों पत्ते दो विधियों से खींचे जाते हैं

(i) पहला खींचा इक्का गड्डी में पुनः मिला दिया जाता है।

(ii) पहला खींचा इक्का गड्डी में पुनः नहीं मिलाया जाता है।

उपर्युक्त में S = {52 ताश के पत्ते}

(i) A = {52 पत्तों में से एक इक्का खींचने की घटना}

B = {52 पत्तों में से दूसरा इक्का खींचने की घटना}

यहाँ दोनों इक्के 52 पत्तों से ही निकाले गये हैं। अत: दोनों घटनायें परस्पर स्वतंत्र हैं।

(ii) C = {52 पत्तों में से एक इक्का खींचने की घटना}

D = {51 पत्तों में से एक इक्का खींचने की घटना}

यहाँ घटना C के घटने का प्रभाव घटना D पर पड़ता है। अतः C व D परस्पर परतंत्र घटनाएं हैं।

उदाहरण-

एक कक्षा में 60 विद्यार्थी है जिसमें 20 लड़कियाँ और 40 लड़के हैं उनमें से 15 होशियार और शेष कमजोर है और 10 खिलाड़ी है। एक होशियार लड़की जो खिलाड़ी हो, को चुनने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल:

यदि खिलाड़ी होना A, होशियार होना B और लड़की होनाको निरुपित करता है तब-

एक विद्यार्थी के खिलाड़ी होने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6} \quad \ldots (1)$$

एक विद्यार्थी के होशियार होने की प्रायिकता

$$P(B) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \quad \ldots (2)$$

एक विद्यार्थी के लड़की होने की प्रायिकता

$$P(C) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \quad \ldots (3)$$

प्रश्नानुसार तीन घटनायें खिलाड़ी होना, होशियार होना और लड़की होना साथ-साथ घटित हो रही है

∴ एक होशियार लड़की जो खिलाड़ी भी है, की प्रायिकता

$P(A.B.C) = P(A).\ P(B).\ P(C)$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{72}$$

13-5. दो स्वतंत्र घटनाओं में से कम-से-कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता (Probability of the Occurrence of atleast one of the two Independent Events) माना E_1 व E_2, दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं जिनके घटित होने की प्रायिकताएँ क्रमशः P_1 व P_2 हैं। तब उनके घटित न होने की प्रायिकता क्रमशः $(1 - P_2)$ व $(1 - P_2)$ होंगी।

∴ दोनों में से किसी भी घटना के घटित न होने की प्रायिकता

$= (1 - p_2)(1 - p_2) = q_1 q_2$ (माना), जहाँ $q_1 = 1 - p_1.\ q_2 = 1 - p_2.$

अत: दोनों में से कम-से-कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता

$= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$ या $1-q_1q_2$

व्यापीकरण (Generalization)-माना कि $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ n स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो इनमें से किसी भी घटना के घटित न होने की प्रायिकता

$= q_1q_2q_3 \ldots q_n$.

अतः इनमें से कम-से-कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता

$= 1 - q_1q_2q_3 \ldots q_n$

नोट : (i) यदि एक प्रयास में किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता p है, तो लगातार n प्रयासों में इसके घटित होने की प्रायिकता = p^n

(ii) इसी प्रकार, प्रयासों में उक्त घटना के एक भी बार घटित न होने की प्रायिकता = q^n (या) $(1 - p)^n$

उदाहरण 1.

यदि $P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{1}{5}$ और A और B स्वतंत्र घटनाएँ है तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए।

हल:

A और B स्वतंत्र घटनाएं हैं

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{25}$$

उदाहरण 2.

एक सिक्का दो बार उछाला जाता है। दोनों बार शीर्ष (Head) आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल:

माना प्रथम बार में शीर्ष प्राप्त होने की घटना में है तथा दूसरे फेंक में शीर्ष आने की घटना B है।

यहाँ $P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{2}$

चूँकि दोनों घटनाएँ स्वतंत्र हैं।

अतः अभीष्ट प्रायिकता

$$P(AB) = P(A).P(B)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

उदाहरण 3.

एक पासा दो बार फेंका जाता है। प्रत्येक बार विषम संख्या ऊपरी फलक पर आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल:

प्रश्नानुसार,

माना A: प्रथम प्रयास में विषम संख्या ऊपरी फलक पर आने की घटना

$\therefore A = \{1, 3, 5\}$

$n(A) = 3$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \ldots (1)$$

$\because S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$n(S) = 6$

B: दूसरी बार विषम संख्या आने की प्रायिकता

$B = \{1, 3, 5)$

$n(B) = 3$

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \ldots (2)$$

घटनाएँ A और B स्वतंत्र है।

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता

$=P(AB) = P(A).\ P(B)$

$$= \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

बेज-प्रमेय (Bayes' Theorem)

यदि $E_1, E_2 \ldots\ldots\ldots E_n$, अरिक्त (Non-empty) घटनाएँ हैं, जो प्रतिदर्श समष्टि S के बिन्दु है अर्थात् E_1, E_2, E_3 ....E_n युग्मतः असंयुक्त है ($E_1 \cap E_2 . \neq \emptyset$,........

$E_{n-1} \cap E_n \neq \phi$ और $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots\ldots \cup E_n = S$

माना A कोई अन्य घटना है जिसकी प्रायिकता शून्येत्तर (Non-zero) है, अर्थात् $A \neq \emptyset$

$$n(A) \neq 0$$

तब $$P\left(\frac{E_i}{A}\right)=\frac{P(E_i).P\left(\frac{A}{E_i}\right)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j).P\left(\frac{A}{E_j}\right)}, \quad j=1,2,3,....$$

प्रमाण (Proof):

हम जानते हैं कि

$$P\left(\frac{E_i}{A}\right)=\frac{P(A\cap E_i)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{E_i}{A}\right)=\frac{P(E_i).P\left(\frac{A}{E_i}\right)}{P(A)},$$

[प्रायिकता के गुणन नियम से]

$$\Rightarrow P\left(\frac{E_i}{A}\right)=\frac{P(E_i).P\left(\frac{A}{E_i}\right)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j).P\left(\frac{A}{E_j}\right)},$$

[सम्पूर्ण प्रायिकता के नियम से]

यही सिद्ध करना था।

संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय (Theorem of Total probability)

माना कि E_1, E_2, E_3, ...E_n, प्रतिदर्श समष्टि S के बिन्दु है और प्रत्येक की प्रायिकता शून्येत्तर (Non-zero) है।

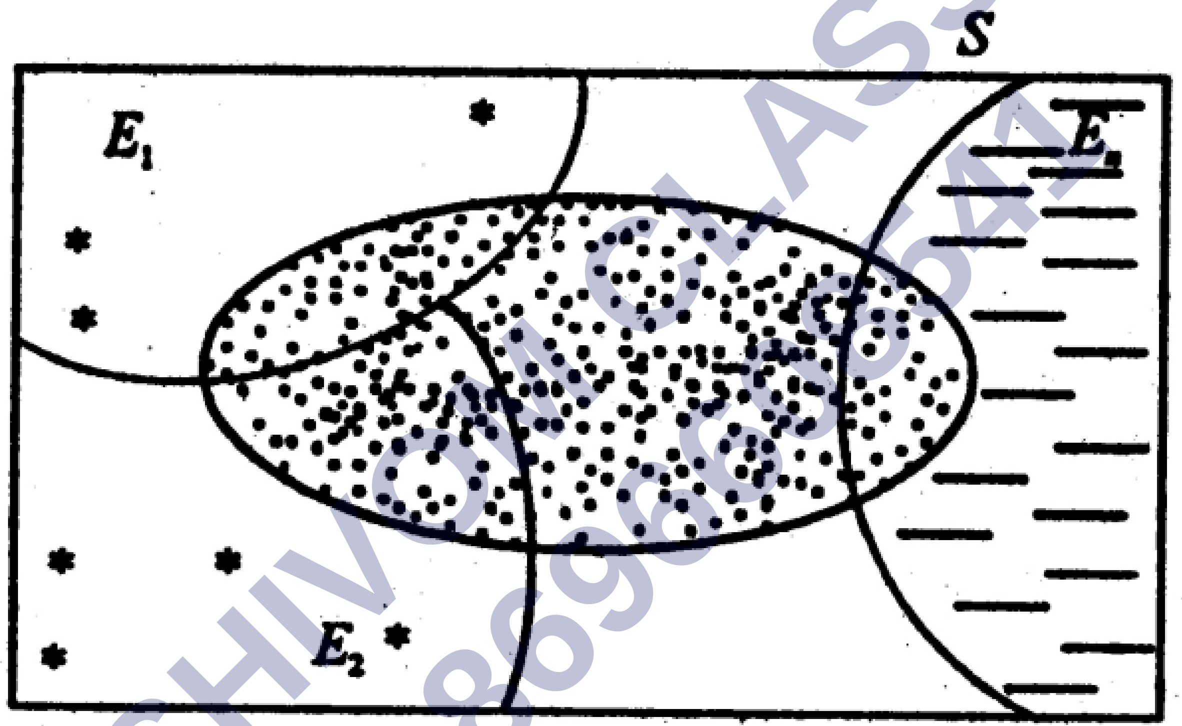
अब माना 4 प्रतिदर्श समष्टि के संगत एक घटना है, तब संपूर्ण प्रायिकता के प्रमेयानुसार

$$P(A) = P(E_1).P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2).P\left(\frac{A}{E_2}\right) + ...$$

$$..... + P(E_n).P\left(\frac{A}{E_n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j).P\left(\frac{A}{E_j}\right).$$

प्रमाण (Proof)



संलग्न चित्र में दर्शाये गये अनुसार

घटनाएँ E_1, E_2, E_3.......E_n, प्रतिदर्श समष्टि S के बिन्दु है। और $S = E_1 \cup E_2, \cup .... \cup E_n$, ...(1)

और $E_i \cap E_j = \phi \; i \neq j, \; i, \; j = 1, 2, 3, ... n$

और A घटना इस प्रकार है कि

$$A = A \cap S$$

$$\Rightarrow A = A \cap (E_1 \cup E_2 \cup ...... \cup E_n)$$

$$\Rightarrow A = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ..... \cup (A \cap E_n) \quad ...(2)$$

साथ ही $A \cap E_i$, और $A \cap E_j$, क्रमश: E_j, और E_j के उपसमुच्चय है जो $i \neq j$ के लिए असंयुक्त है, इसलिए $i \neq j$ $i, j = 1, 2, 3 \ldots n$ के लिए $A \cap E_i$, और $A \cap E_j$, भी असंयुक्त (Disjoint) है।

$$\therefore P(A) = P[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup .. \cup (A \cap E_n)]$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + ... + P(A \cap E_n)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(E_1) \times P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2).P\left(\frac{A}{E_2}\right) + ... + P(E_n).P\left(\frac{A}{E_n}\right)$$

प्रायिकता के गुणन नियम से,

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j).P\left(\frac{A}{E_j}\right)$$

उदाहरण 1.

किसी विद्यार्थी को शिक्षक ने गृहकार्य दिया, उसके स्वास्थ्य खराब होने की प्रायिकता 0-75 है। उसमें स्वास्थ्य खराबन होने और स्वास्थ्य खराब होने की स्थितियों में गृह कार्य समय पर पूर्ण होने की प्रायिकताएँ क्रमश: 0-90 तथा 0-35 है। दिये गये गृह कार्य समय पर पूर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल:

माना कि “गृह कार्य समय पर पूर्ण होने" की घटना A और स्वास्थ्य खराब होने की घटना B द्वारा दर्शाया जाता है।

प्रश्नानुसार P(A) =?

P(B) = 0-75 ....(1)

P(स्वास्थ्य खराब नहीं) = P(B')

P(B')= 1 - P(B)

= 1 – 0.75

P(B') = 0.25 ....(2)

पुनः प्रश्नानुसार, स्वास्थ्य खराब न होने की स्थिति में गृह कार्य समय पर पूर्ण होने की प्रायिकता

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = 0.90 \ldots (2)$$

और स्वास्थ्य खराब होने पर गृह कार्य पूर्ण होने की प्रायिकता

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = 0.35 \ldots ()$$

अब संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय से गृह कार्य समय पर पूर्ण होने की प्रायिकता

$$P(A) = P(B).P\left(\frac{A}{B}\right) + P(B').P\left(\frac{A}{B'}\right)$$

P(A) = 0.75 × 0.35 + 0.25 × 0.90

P(A) = 0.2625 + 0.225

P(A) = 0.4875

अत: गृह कार्य समय पर पूर्ण होने की प्रायिकता 0.4875.

उदाहरण 2.

तीन बैगों में क्रमश: 3 काली और 5 सफेद, 5 काली और 3 सफेद और 7 काली और 1 सफेद गेंदें हैं। बैग के चुनाव की प्रायिकता समान है। किसी एक बैगसे याद्दच्छया एक गेंद को निकाला जाये तो एक काली गेंद निकलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल:

माना E_1, E_2, और E_3, घटनाएँ क्रमश: पहले, दूसरे और तीसरे बैग के चुनने की घटनाएं हैं। तब प्रश्नानुसार

$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$

माना एक काली गेंद निकलने की घटना E है, तब

$$P\left(\frac{E}{E_1}\right)=\frac{3}{8}, P\left(\frac{E}{E_2}\right)=\frac{5}{8}$$

और $P\left(\frac{E}{E_3}\right)=\frac{7}{8}$

चूंकि प्रत्येक थैले में कुल गेंदों की संख्या

= 3 + 5 = 5 + 3 = 7 + 1 = 8

एक काली गेंद निकलने की प्रायिकता

$$P(E)=P(E_1).P\left(\frac{E}{E_1}\right)+P(E_2).P\left(\frac{E}{E_2}\right)+P(E_3).P\left(\frac{E}{E_3}\right)$$

$$P(E)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{8}$$

$$P(E)=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}\right]$$

$$P(E)=\frac{1}{3}\times\frac{15}{8}=\frac{5}{8}.$$

याद्दच्छिक चर (Random Variable)

यदि किसी चर का मान (या मूल्य) पूर्णतया संयोग (Chance) पर निर्भर होता है, उसे याद्दच्छिक चर कहते हैं। याद्दच्छिक प्रयोग के परिणाम भिन्न-भिन्न परिस्थितियों में भिन्न-भिन्न होते हैं। इन मानों के संबंध में हम पूर्व से ही भविष्यवाणी नहीं कर सकते। याद्दच्छिक चर वास्तविक संख्याएँ होती हैं।

उदाहरणार्थ- दो सिक्के के एक युग्म को उछालने पर प्राप्त शीर्षों (Heads) की संख्या को चर x से दर्शाया जाये तो x द्वारा ग्रहण किये जाने वाले मान (अर्थात् शीर्षों की संख्या) के संबंध में हम पूर्व से ही भविष्यवाणी नहीं कर सकते।

यहाँ याद्दच्छिक चर x तीन मानों 0, 1, 2 में से कोई भी एक मान ग्रहण कर सकता है।

चूँकि X के मान पूर्णतया संयोग (Chance) पर आधारित होते है। अत: यहाँ पर याद्दच्छिक चर (Random-variable) होगा।

उदत्त प्रयोग का निम्न सारणी में ध्यान दें।

दो सिक्के के एक युग्म को एक साथ उछालने पर प्राप्त प्रतिदर्श बिन्दुओं का समुच्चय प्रतिदर्श समष्टि (Sample space) है।

S= {(HH); (TT); (HT): (TH)}

n(S) = 4 प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या यदि शीर्षों (Heads) की संख्या को चर X से निरूपित किया जाये तो x मानों 0, 1, 2 को ग्रहण करने वाला याद्दच्छिक चर है। अतः इस याद्दच्छिक प्रयोग (Random experiment) के परिणाम पर x के मान निम्न सारणी से समझ सकते हैं-

यादृच्छिक चर (X) (Random variable (X)	प्रतिदर्श बिन्दु	प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या
0	(TT)	1
1	(HT) ; (TH)	2
2	(HH)	1
कुल		4

n(s) = 4

उक्त उदाहरण के आधार पर याद्दच्छिक चर को निम्न प्रकार से भी परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा (Definition): "एक याद्दच्छिक चर एक वास्तविक मानी फलन है जिसका प्रान्त (Domain) किसी याद्दच्छिक प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि (Sample space) तथा सह-प्रान्त (Co-domain) ऋणेत्तर (Non-negative) पूर्णांक संख्या का समुच्चय हैं।

याद्दच्छिक चर के प्रकार (Types of Random Variable)

याद्दच्छिक चर दो प्रकार के होते हैं-

1. विविक्त याद्दच्छिक चर (Discrete random variable)
2. संतत याद्दच्छिक चर (Continuous random variable)

विविक्त याद्दच्छिक चर (Discrete random variable)- यदि याद्दच्छिक चर X परिमित (finite) संख्या में या गणनीय अनन्त (Countable infinite) संख्या में मान ग्रहण करे X को विविक्त याद्दच्छिक चर कहते हैं।

याद्दच्छिक चर X के मान को सामान्यतः- $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ परिमित स्थिति (finite situation) में और $x_1, x_2, x_3 \ldots,$ गणनीय अनन्त (Countable infinite) स्थिति में लेते हैं।

उदाहरण- तीन सिक्कों की एक साथ उछाल में प्राप्त शीर्षों की संख्या विविक्त याद्दच्छिक चर है।

यहाँ प्रतिदर्श समष्टि है।

S = {(HHH), (TTT), (HHT), (THR), (HTH), (TFH), (HTT), (THT)}

$n(S) = 2^3 = 8$

यदि शीर्षों (Heads) की संख्या X से दर्शाएँ तो मानों 0, 1, 2, 3 को ग्रहण करने वाला विविक्त याद्दच्छिक चर है।

यहाँ X के मान निम्नानुसार हैं-

याद्दच्छिक चर (X)	प्रतिदर्श बिन्दु	प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या
0	(TTT)	1
1	(HTT) ; (TTH) (THT)	3
2	(HHT); (THH) (HTH)	3
3	(HHH)	1
कुल		8

$n(S) = 8$

संततयादृच्छिक चर (Continuous randomvariable)- यदि किसी दिये गये अन्तराल में यादृच्छिक X चर प्रत्येक मान को ग्रहण करें, तो X को संतत यादृच्छिक चर कहते हैं; अर्थात् यदि कोई चर X किसी बन्द अन्तराल (Close interval) [a, b] में अनन्त मान ग्रहण करता है तो वह संतत यादृच्छिक चर है तथा इसके बंटनों (Distribution) को संतत बंटन कहते हैं।

उदाहरण- $y = \sin x, \forall x \in [0, \pi]$ एक संतत बंटन है, क्योंकि बंद अन्तराल $[0, \pi]$ के मध्य x कोई भी मान ग्रहण कर सकता है।

एक यादृच्छिक चर वह फलन (Function) होता है. जिसका प्रांत (Domain) किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि होता है।

उदाहरणार्थ- एक सिक्के को दो बार लगातार (क्रम से) उछालने पर प्राप्त परीक्षण पर ध्यान देंइस परीक्षण का प्रतिदार्श समष्टि (Sample space)S है:

S = {HH, HT, TH, TT)...(1)

यदि X, प्राप्त शीर्षों (चितों) (Heads) की संख्या को निरूपित करता है, तो X एक यादृच्छिक चर है और प्रत्येक परिणाम का मान निम्नानुसार है-

X(HH) = 2; X (HT) = 1; X (TH) = 1, X(TT) = 0

एक ही प्रतिदर्श समष्टि S पर एक से अधिक यादृच्छिक चर परिभाषित कर सकते हैं।

उदाहरणार्थ- Y,प्रतिदर्श समष्टि S के प्रत्येक परिणाम के लिए शीर्षों (चितों) (Heads) की संख्या से पूच्छों (पटों) (Tails) की संख्या के अन्तर (घटाव) को व्यक्त करता है।

तब Y(HH) = 2 – 0 = 2

Y(HT) = 1 – 1 = 0

Y(TH) = 1 – 1 = 0

Y(TT) = 0 – 2 = -2

स्पष्टत: "एक ही प्रतिदर्श समष्टि पर एक से अधिक यादृच्छिक चर परिभाषित कर सकते हैं।'

यहाँ एक प्रतिदर्श समष्टि S पर X और Y दो भिन्न-भिन्न यादृच्छिक चर परिभाषित कर सकते हैं।

उदाहरण- एक व्यक्ति एक सिक्का को क्रम से दो बार उछालता है उसका मित्र उस व्यक्ति को प्रत्येक शीर्ष पर ₹ 5 देता है और प्रत्येक पुच्छ (चित) पर वह व्यक्ति अपने मित्र को ₹ 3 देता है। यदि X व्यक्ति द्वारा "जीती" गयी या "हारी" गई राशि को निरूपित करता है। दिखाइए कि X एक यादृच्छिक चर है और इसे परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि के फलन के रूप में निरूपित कीजिए।

हल:

एक सिक्का को क्रम से दो बार उछालने पर परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है-

S = {HH, HT, TH, TT}

माना X ऐसी संख्या है जिसका मान यादृच्छिक परीक्षण के S के परिणामों पर परिभाषित है।

अतः X एक यादृच्छिक चर है-

तब $X(HH) = (2 \times 5) =$ ₹ 10

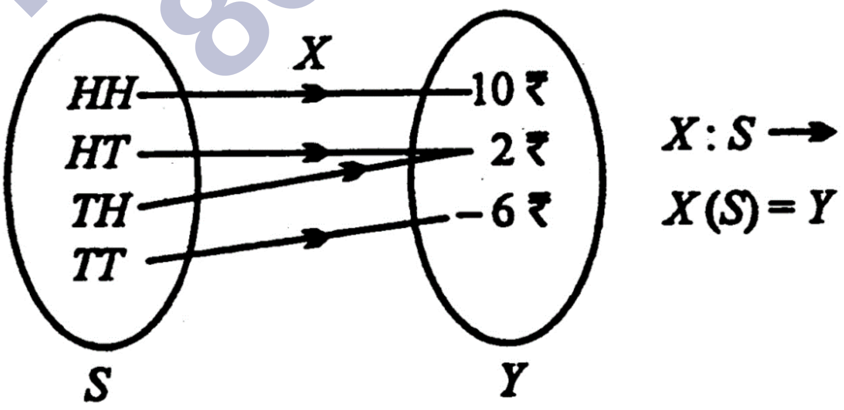
$X(HT) = (1 \times 5 - 1 \times 3) = (5 - 3)$ ₹ 2

$X(TH) = (1 \times 5 - 1 \times 3) = (5 - 3) =$ ₹ 2

$X(TT) = (0 \times 5 - 2 \times 3) =$ ₹ - 6

यहाँ ऋण, उस व्यक्ति के हानि को निरूपित करता है।

स्पष्टतः प्रतिदर्श समष्टि S के प्रत्येक अवयव के संगत X का अद्वितीय (Unique) मान रखता है।



उक्त चित्र में भी स्पष्ट है कि प्रतिदर्श समष्टि (S) के प्रत्येक अवयव (प्रतिदर्श बिन्दु) के संगत X का अद्वितीय (Unique) मान रखता है अत: X प्रतिदर्श समष्टि पर एक फलन (X) को निरूपित करता है जिसका परिसर (Range) हो : {₹ 10, ₹2, ₹-6}

यहाँ ₹-6 व्यक्ति के हानि को निरूपित करता है

यहाँ X का प्रान्त प्रतिदर्श समष्टि S है।

अत: परिसर (Range) = {₹ 10, ₹ 2, ₹ - 6}

प्रान्त (Domain) = {(HI), (HI), (TH), (TT)}

एक यादृच्छिक चर की प्रायिकता बंटन (Probability Distribution of a Random Variable)

यादृच्छिक चर के सभी मानों तथा उनके संगत प्रायिकताओं को दर्शाने वाला बंटन, प्रायिकता बंटन कहलाता है।

माना यादृच्छिक चर X के विभिन्न मानों X_1, X_2 X_3 ...X_n, के संगत प्रायिकताएं क्रमश: P_1, P_2 P_3... P_n, हैं, तो प्रायिकता बंटन में

(i) प्रत्येक प्रायिकता ऐसी ऋणेत्तर (non-negative) संख्या होती है।

जो 1 से बड़ी न हो अर्थात्

$$0 \le P_i \le 1, i = 1, 2, 3, ...n$$

(ii) सभी प्रायिकताओं का योग 1 होता है अर्थात्

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \text{ अर्थात्}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n = 1$$

परिभाषा : किसी यादृच्छिक चर X की प्रायिकता बंटन संख्याओं की निम्नलिखित निकाय (प्रणाली) होता है।

$X:$	x_1	x_2	x_3	....	x_n
$P(X):$	$P(x_1) = P_1$	$P(x_2) = P_2$	$P(x_3) = P_3$	... ...	$P(x_n) = P_n$

यहाँ $P_i > 0 \; \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

याद्दच्छिक चर का माध्य और प्रसरण (Mean and Variance of random variable)

माना याद्दच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्नानुसार परिभाषित है|

$X:$	x_1	x_2	x_3	x_4	....	x_n
$P(X)$	P_1	P_2	P_3	P_4	....	P_n

जहाँ $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots\ldots + P_n = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

प्रायिकता बंटन का माध्य होगा

$$\mu = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots\ldots + P_nx_n}{P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_n}$$

माध्य $(\bar{X}) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$

याद्दच्छिक चर X के माध्य को X की प्रत्याशा (expectation) भी कहते हैं जिसे E (X) से व्यक्त करते है।

$$E(X) = \mu = \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$

प्रसरण $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + \mu^2 - 2\mu x_i) P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} P_i - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i + \mu^2 \times 1 - 2\mu.\mu, \quad \begin{bmatrix} \Sigma P_i = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = \mu \end{bmatrix}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - \mu^2$$

या $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - (\text{माध्य})^2$

उदाहरण 1.

ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित प्रायिकता बंटनों (Probability distribution) में कौन-से एक याद्दच्छिक चर (Randomvariable) के लिए संभव है और कौन से संभव नहीं है।

(i)

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

(ii)

X	0	1	2	3
P(X)	0·3	0·5	0·3	–0·1

(iii)

Y	–1	0	1
P(Y)	0·4	0·1	0·3

(iv)

Z	1	2	3	0	–1
P(Z)	0·4	0·3	0·1	0·2	0·5

हल:

(i) X के संगत प्रायिकताओं का योग $= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$

अतः प्रायिकता बंटन एक याद्दच्छिक चर X के लिए संभव है।

$\because P = 1$

(ii) सारणी (ii)PX = 3) = -0.1 और हम जानते हैं कि किसी भी याद्दच्छिक चर के संगत प्रायिकता ऋणात्मक नहीं होती।

अतः दिया गया प्रायिकता बंटन एक याद्दच्छिक चर के लिए संभव "नहीं" है।

(iii) Y के संगत प्रायिकताओं का योग = 0.4 + 0.1 + 0.3 = 0.8 < 1

अतः दिया गया प्रायिकता बंटन एक याद्दच्छिक चर के लिए संभव नहीं है।

(iv) Z के संगत प्रायिकताओं का योग

= 0.4 + 0.3 + 0.1 + 0.2 + 0.5 = 3 = 1.5 > 1

अतः दिया गया प्रायिकता बंटन एक याद्दच्छिक चर के लिए संभव नहीं है।

उदाहरण: ध्यान (1) याद्दच्छिक चर के संगत प्रायिकता ऋणात्मक नही होती।

(ii) और प्रायिकता का योग $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ होने पर ही प्रायिकता बंटन का यादृच्छिक चर के लिए आवश्यक है।

उदाहरण 1.

एक यादृच्छिक चर X के संगत प्रायिकता बंटन निम्नानुसार है

$X=$	0	1	2	3	4	5
$P(X)=$	0	K	$2K$	K^2	$2K^2$	$2K^2+K$

तब (i) K का मान ज्ञात कीजिए।

(ii)P(X < 2), (iii) P(0 < X < 3), (iv)Px > 4),

हल:

हम जानते है कि यादृच्छिक चर X के संगत प्रायिकता बंटन के प्रायिकताओं का योग 1 होता है।

अर्थात् $\sum P(X) = 1$

∴ सारणी से

$$\Rightarrow P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1$$
$$\Rightarrow 0+K+2K+K^2+2K^2+2K^2+K=1$$
$$\Rightarrow 5K^2+4K-1=0$$
$$\Rightarrow 5K^2+5K-K-1=0$$
$$\Rightarrow 5K(K+1)-1(K+1)=0$$
$$\Rightarrow (K+1)(5K-1)=0$$
$$\therefore K+1=0 \Rightarrow K=-1$$
या $5K-1 \Rightarrow K=\frac{1}{5}$

K = -1 संभव नहीं है क्योंकि K = -1 की स्थिति में कुछ घटनाओं की प्रायिकता जैसे P(1), P(2), ऋणात्मक होगी, जो संभव नहीं है।

∴ $K\frac{1}{5}$ सत्य है।

अतः सारणी से

(ii) $P(X<2)=P(0)+P(1)$

$$=0+K=\frac{1}{5}.$$

(iii) $P(0<X<3)=P(1)+P(2)$

$\Rightarrow P(0<X<3)=K+2K=3K=\frac{3}{5}.$

(iv) $P(X>4)=P(5)$

$$=2K^2+K=2\left(\frac{1}{25}\right)+\frac{1}{5}$$

$$=\frac{2+5}{25}=\frac{7}{25}.$$

उदाहरण 8. एक थैले में 3 लाल और 2 सफेद गेंदें है, दो गेंदें एक-एक करके थैले से निकाली जाती है और यह मान लिया जाये कि यादृच्छिक चर X लाल गेंद निकालने की संख्या को व्यक्त करता है। तो इसके संगत प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार दिया है कि एक थैले में 3R और 2W गेंदें है।

चूँकि दो गेंदें एक-एक करके थैले से निकाली जाती है, तब यादृच्छिक चर X का मान है

X = 0, 1, 2

(i). X = 0 के संगत प्रायिकता है।

$$P(X=0)=P_1=\frac{{}^2C_1\times{}^1C_1}{{}^5C_1\times{}^4C_1}=\frac{2\times1}{5\times4}=\frac{2}{20} \quad ...(1)$$

(चूंकि थैले में 2W गेंदें और कुल गेंद 3R + 2W = 5)

(ii). X = 1 के संगत प्रायिकता है

$$P(X=1)=P_2=\left(\frac{{}^3C_1\times{}^2C_1}{{}^5C_1\times{}^4C_1}\right)+\left(\frac{{}^2C_1\times{}^3C_1}{{}^5C_1\times{}^4C_1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P(X=1)=P_2=\frac{3\times2}{5\times4}+\frac{2\times3}{5\times4}=\frac{12}{20} \quad ...(2)$$

(ii). X = 2 के संगत प्रायिकता

$$P(X=2)=\frac{{}^3C_1\times{}^2C_1}{{}^5C_1\times{}^4C_1}=\frac{3\times2}{5\times4}$$

$$\Rightarrow \quad P(X=2)=P_3=\frac{6}{20} \quad ...(3)$$

अत: याद्दच्छिक चर के संगत प्रायिकता बंटन है।

$X=$	0	1	2
$P(X)=$	$\frac{2}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$

उदाहरण 2.

वैज्ञानिकों के समूह में जो एक प्रयोग पर काम रहे हैं, 20 अपने काम में कभी गलती नहीं करते हैं और परिणामों को विस्तृत रूप से सूचित करते हैं। समूह में से दो वैज्ञानिकों को याद्दच्छया चुना जाता है।चुने गये वैज्ञानिकों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए जो काम और सूचना देने में कभी गलती नहीं करते है। बंटन का माध्य भी ज्ञात कीजिए।

हल:

X उन वैज्ञानिकों की संख्या को प्रदर्शित करता है जो काम और सूचना देने की कभी गलती नहीं करते हैं।X का मान 0, 1, 2 ले सकते हैं।

चुने गये दो वैज्ञानिक जो या तो काम में या सचना देने में गलती करते है।

$$P(X=0)=\frac{{}^{10}C_2}{{}^{30}C_2}=\frac{\frac{10\times9}{2\times1}}{\frac{30\times29}{2\times1}}=\frac{10\times9}{30\times29}=\frac{3}{29}$$

चुने गये दो वैज्ञानिकों में से एक काम और सूचना देने में कोई गलती नहीं करता जबकि दूसरा करता है।

$$P(X=1)=\frac{{}^{20}C_1\times{}^{10}C_1}{{}^{30}C_2}=\frac{20\times10}{\frac{30\times29}{2\times1}}$$

$$=\frac{20\times10\times2}{30\times29}=\frac{40}{87}$$

चुने गये दो वैज्ञानिक काम और सूचना देने में गलती नहीं करते हैं।

$$P(X=2)=\frac{{}^{20}C_2}{{}^{30}C_2}=\frac{\frac{20\times19}{2\times1}}{\frac{30\times29}{2\times1}}$$

$$=\frac{20\times19}{30\times29}=\frac{38}{87}$$

X प्रायिकता बंटन होगा| X-

$X=x_i$	0	1	2
$P(X)=P_i$	$\frac{3}{29}$	$\frac{40}{87}$	$\frac{38}{87}$

माध्य $=\sum x_i P_i$

$$=0\times\frac{3}{29}+1\times\frac{40}{87}+\frac{2\times38}{87}$$

$$=\frac{40+76}{87}=\frac{116}{87}=1\cdot33.$$

सैद्धान्तिक बारम्बारता बंटन (Theoretical Frequency Distribution):

यदि बारम्बारता बंटन (Frequency distribution) प्रयोगों या वास्तविक अवकलनों के आधार पन होकर पूर्व से निर्धारित मान्यताओं के आधार पर प्रत्याशित गणितीय विधियों के द्वारा प्रत्याशित बारम्बारताओं या सैद्धान्तिक बारम्बारता बंटन कहलाता है।

ये मुख्यत: तीन प्रकार के होते है

(i) पॉइसन बंटन (Poission distribution)

(ii) द्विपद बंटन (Binomial distribution)

(iii) प्रसामान्य बंटन (Normal distribution)

परिभाषा- जब याद्दच्छिक चर का प्रायिकता बंटन अथवा याद्दच्छिक चर का बारम्बारता बंटन वास्तविक प्रेक्षणों या प्रयोगों पर आधारित न होकर कुछ पूर्व निर्धारित मान्यताओं पर आश्रित होता है जिसमें गणितीय विधियों की सहायता से सैद्धान्तिक या प्रत्याशित बारम्बारताओं को ज्ञात कर लिया जाता है तो उसे सैद्धान्तिक (Theoretical) बंटन कहते हैं।

इस तरह प्रायिकता सिद्धान्त के आधार पर प्रेक्षण लेने से पूर्व ही सैद्धान्तिक (गणितीय) रीतियों की सहायता से बारम्बारता बंटन के बारे में अनुमान लगा लिये जाते हैं।

बरनौली परख (Bernoulli Trials) यदि किसी याद्दच्छिक प्रयोग के परिणामों को केवल दो परस्पर अपवर्जी तथा नि:शेषी (Mutually Exclusive and Exhaustive) घटनाओं "सफलता और असफलता" के रूप में ही दर्शाया जाये तो ऐसे प्रयोग को बरनौली परख कहते हैं।

सैद्धान्तिक बंटन तीन प्रकार के होते हैं-

(1) द्विपद बंटन (Binomial Distribution)

(2) पॉइसन बंटन (Poission Distribution)

(3) प्रसामान्य बंटन (Normal Distribution)।

द्विपद बंटन (Binomial Distribution)

परिभाषा- यदि एक परख (Trial) में सफलता की प्रायिकता p, असफलता की प्रायिकता q(q = 1 - P) है तथा परखों की संख्या n है, तो क्रमशः 0, 1, 2,.......r, ..., n सफलताओं की प्रायिकता $(g+p)^n$ के द्विपद प्रसार में क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय .....(r+1) वें, ... (n+1) वें पद से दी जाती है।

मान्यताएं- द्विपद बंटन प्रयुक्त करने के लिए निम्न मान्यताएं

(a) कोई परख या तो घटना की सफलता में अथवा असफलता में परिमित होती हो।

(b) सभी परख परस्पर अपवर्जी तथा स्वतंत्र हों।

(c) सफलता की प्रायिकता प्रत्येक परख में अचर रहती हो।

व्याख्या- n परखों के याद्दच्छ प्रयोग को उपर्युक्त मान्यताओं के आधार पर किया जाता है जिससे सफलता की प्रायिकता = p तथा असफलता की प्रायिकता = q जिससे p+q = 1.

यहाँ परखों में सफलताओं की संख्या 0, 1, 2, 3, ..., n तक हो सकती है। हमें r सफलताओं की प्रायिकता ज़ात करनी है। शेष n-r असफलताएँ प्राप्त होंगी। अतएव मिश्र प्रायिकता के सिद्धान्त से,

r सफलताओं की प्रायिकता = p^r

(n-1) असफलताओं की प्रायिकता = q^{n-r}

लेकिन n परखों में से कोई r सफलताएँ ^nC_r तरीकों से प्राप्त की जा सकती हैं, अतएव n परखों में से किसी भी क्रम में r सफलताओं तथा (n-1) असफलताओं की प्रायिकता = $^nC_rP^rq^{n-r}$.

उपर्युक्त व्याख्या के आधार पर द्विपद प्रायिकता बंटन निम्न हैं

x_i	p_i
0	q^n
1	$^nC_1pq^{n-1}$
2	$^nC_2p^2q^{n-2}$
...	...
...	...
r	$^nC_rp^rq^{n-r}$
...	...
...	...
n	p^n

यहाँ n, P, q द्विपद बंटन के प्राचल (Parameter) कहलाते हैं। इसे स्विस गणितज्ञ जेम्स बरनौली (1654-1705) ने दिया था।

नोट: एक प्रयोग में n परखें ली जाये तथा प्रयोग को N बार दुहराया जाये तो r सफलताओं की बारम्बारता $NP(r) = N{}_nC^rp^rq^{n-1}$ द्वारा दी जाती है। इस तरह n परखों वाले में प्रयोगों के समुच्चय में 0, 1, 2, 3, ..., n की संभावित बारम्बारताएँ द्विपद $N(g + p)^n$ के क्रमिक पद होते हैं जहाँ p + q = 1. इसे द्विपद बारम्बारता बंटन कहते हैं।

उदाहरणार्थ- (एक प्रयोग) (An experiment) एक सिक्के के उछालने के एक प्रयोग पर ध्यान देने पर प्रत्येक परीक्षण का परिणाम सफलता का अर्थ शीर्ष (चित) (Head) और असफलता का अर्थ पूच्छ (पट) (Tail) से निर्धारित होता है।

माना 6 परीक्षणों में एक सफलता (S) के विभिन्न तरीकों को ज्ञात करना है। जो निम्नानुसार है-

SFFFFF, FSFFFF, FFSFFF, FFFSFF, FFFFSF, FFFFFS

यहाँ स्पष्ट है कि 6 परीक्षणों में एक सफलता (S) और 5 असफलताओं (F) के कुल तरीकों की संख्या $^6C_1 = 6$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lfloor 6}{\lfloor 5 \cdot \lfloor 1} = {}^6C_1 = 6$$

अब इसी प्रकार 6 परीक्षणों में 2 सफलताएँ (S) और 4 असफलताओं $(F)\ \frac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \cdot \lfloor 2} = {}^6C_2$ तरीकों की संख्या है।

इन सभी क्रमचयों की सूची बनाना लम्बा कार्य होगा। इस प्रकार 0, 1, 2, 3 ...n सफलताओं (S) की प्रायिकता ज्ञात करना अत्यन्त लम्बा कार्य होगा।

इस उद्देश्य के लिए तीन बरनौली परीक्षणों से यादृच्छिक प्रयोग (Random experiment) प्रयोग लेते है। जिनमें प्रत्येक परीक्षण में सफलता (S) और असफलताओं की प्रायिकताएँ क्रमशः p और q है। इस प्रयोग को प्रतिदर्श समष्टि (Sample space) है।

S = {SSS, FFF, FSS, SFS, SSF, FFS, FSF, SFF} n(S = 6

माना सफलताओं की संख्या यादृच्छिक चर (Random variable). X है और 0, 1, 2, या 3 मान ग्रहण करता हो। सफलताओं की संख्या के संगत प्रायिकता बंटन निम्नानुसार ज्ञात कर सकते हैं

1. x = 0 के संगत प्रायिकता है।

   P(X = 0) = P(कोई सफलता नहीं)

   = P({FFF})

   = P(F).P(F).P(F)

   = q.q.q. (क्योंकि परीक्षण स्वतंत्र है।)

   ∴ P(x = 0) = q^3 और P(F) = q ...(1)

2. X = 1 एक सफलता के संगत प्रायिकता है।

   P(X = 1) = P (एक सफलता की घटना)

   = P({SFF, FSF, FFS})

$= P(\{SFF\}) + P(\{FSF\}) + P(\{FFS\})$

(क्योंकि यह प्रयोग भी परस्पर स्वतंत्र है)

$= P(S).P(F).P(F) + P(F).P(S).P(F) + P(F).P(F).P(S)$

(क्योंकि यह परीक्षण स्वतंत्र है।)

$\therefore P(X = 1) = p.q.g + g.p.q + q.q.p$

$\{\therefore\ P(S) = P, P(F) = q\}$

$\Rightarrow\ P(X = 1) = 3p.q^2$

$\Rightarrow\ P(X = 1) = 3p^2$ ....(2)

3. X = 2 दो सफलताओं के संगत प्रायिकता है।

P(X = 2) = P (दो सफलताओं की घटना)

$\Rightarrow P(X = 2) = P(\{SSF, SFS, FSS\})$

$= P(SSF) + P(SFS) + P(FSS)$

$= P(S).P(S).P(F) + P(S).P(F).P(S) + P(F).P(S).P(S)$

$= p.p.q + p.q.p + q.P.P$

चूंकि प्रयोग SSF, SFS, FSS परस्पर स्वतंत्र है और प्रयोग SSF भी स्वतंत्र है।

$= p^2q + p^2q + p^2q$

$\therefore P(X = 2) = 3p^2q$

$= P(X\ \ = 2) = 3qp^2$ ...(3)

4. और X = 3, तीन सफलताओं के संगत प्रायिकता है

P(X = 3) = P (तीन सफलताएँ)

$= P(\{SSS\})$

= P(S).P(S).P(S)

चूँकि प्रयोग SSS स्वतंत्र है।

$\therefore$ P(X = 3) = p.p.p

$\because$ P(S) = P

$\Rightarrow$ P(X = 3) = p^3 ...(4)

अतः समी. (1), (2), (3) और (4) से X = 0, 1, 2, 3 और 3 के संगत प्रायिकता बंटन है।

X	0	1	2	3
$P(X)$	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

यहाँ ध्यान रहे कि X का प्रायिकता बंटन तभी संभव है जब $\sum P(X) = 1$

अर्थात् $q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3 = 1$

(q + p) = 1 ...(5)

समी. (5) से स्पष्ट है कि $(q + p)^3$ का द्विपद विस्तार के प्रत्येक पद सफलताएँ (S) 0, 1, 2 या 3 की प्रायिकताओं के मान को व्यक्त करता है। अर्थात्

X = 0, 1, 2, 3 सफलताओं के संगत प्रायिकताएँ क्रमशः

$(q + p)^3$ के प्रसार का पहला, दूसरा, तीसरा और चौथा पद है।

[जहाँ q असफलता और p सफलता की प्रायिकताएँ है]

बरनौली का सूत्र (Barnoulli's Formula)

यदि किसी प्रयोग में स्वतंत्र प्रयास करते हैं। सफलताओं के प्रयास को याद्दच्छिक चर X से व्यक्त करते हैं प्रत्येक प्रयास में सफलताओं की प्रायिकता p है। n प्रयासों में r सफलताओं और n - r असफलताओं की प्रायिकता को बरनौली के सूत्र से इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं-

$$p(r) = {}^nC_r p^r (q)^{n-r}, \text{ जहाँ } p + q = 1$$

यह द्विपद बंटन कहलाता है।

द्विपद बंटन का माध्य और प्रसरण

$$p(X=r) = {}^nC_r p^r q^{n-r} \text{, जहाँ } r = 0,1,2,\ldots\ldots n$$

$$\text{माध्य} = \sum_{r=0}^{n} rp(X=r)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r \times {}^nC_r p^r q^{n-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r \times \frac{n}{r}\, {}^{n-1}C_{r-1} p^r q^{n-r}, \quad \left[{}^nC_r = \frac{n}{r}\, {}^{n-1}C_{r-1}\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{n} n\, {}^{n-1}C_{r-1} p.p^{r-1} q^{n-1-(r-1)}$$

$$= np \sum_{r=0}^{n} {}^{n-1}C_{r-1} (p)^{r-1} (q)^{n-1-(r-1)}$$

$$\text{माध्य} = np(p+q)^{n-1}$$

$$= np \times 1, \qquad [p+q=1]$$

$$\text{माध्य} = np$$

$$\text{प्रसरण} = \sum_{r=0}^{n} r^2 p(x=r) - (\text{माध्य})^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} [r(r-1)+r]\, {}^nC_r p^r q^{n-r} - (np)^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r(r-1)\, {}^nC_r p^r q^{n-r} + \sum_{r=0}^{n} r.{}^nC_r.p^r q^{n-r} - (np)^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r(r-1)\frac{n}{r}\, {}^{n-1}C_{r-1} p^r q^{n-r} + np - (np)^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r(r-1)\frac{n}{r}.\frac{n-1}{r-1}\, {}^{n-2}C_{r-2} p^2 p^{r-2} q^{n-r} + np - (np)^2$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{r=0}^{n} {}^{n-2}C_{r-2} p^{r-2} q^{n-2-(r-2)} + np - (np)^2$$

$$= n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2} + np - n^2p^2$$

$$= n(n-1)p^2 (1) + np - n^2p^2, \ [p+q=1]$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np(1-p)$$

प्रसरण = npq

द्विपद बंटन का माध्य np तथा प्रसरण npq है।

उदाहरण 1.

यदि 5 परीक्षणों के लिए एक द्विपद बंटन के माध्य और प्रसरण का योगफल 1.8 हो बंटन ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया गया है:

माध्य + प्रसरण = 1.8

$$np+npq=1.8$$

यहाँ $n=5$

$$5p+5pq=1.8$$

$$p+q=1 \Rightarrow q=1-p$$

$$5p+5p(1-p)=1.8$$

$$5p+5p-5p^2=1.8$$

$$5p^2-10p+1.8=0$$

$$p^2-2p+0.36=0$$

$$p^2-1.8p-0.2p+0.36=0$$

$$p(p-1.8)-0.2(p-1.8)=0$$

$$(p-0.2)(p-1.8)=0$$

$p=0.2, p=1.8$ असम्भव है।

$$q=1-p=1-0.2=0.8$$

$$p(x=r)={}^nC_r p^r q^{n-r}$$

$$={}^5C_r(0.2)^r(0.8)^{5-r}$$

जहाँ $r=0,1,2,3,4,5$ है।

उदाहरण 2.

एक द्विपद बंटन का माध्य एवं प्रसरण क्रमशः 4 और $\frac{4}{3}$ में है। $p(X \geq 1)$ ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है : माध्य np = 4

प्रसरण $npq=\frac{4}{3}$

$$\frac{npq}{np}=\frac{\frac{4}{3}}{4}$$

$$q=\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

$$p+q=1$$

$$p+\frac{1}{3}=1$$

$$p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$np=4$$

$$n\times\frac{2}{3}=4$$

$$n=\frac{4\times3}{2}=6$$

$$p(X=r)={}^nC_r p^r q^{n-r}$$

$$={}^6C_r\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{6-r}$$

$$={}^6C_r\frac{2^r}{3^r.3^{6-r}}$$

$$={}^6C_r.\frac{2^r}{3^{6-r+r}}$$

$$P(X=r)={}^6C_r\frac{2^r}{3^6} \text{ जहाँ } r=0,1,2,3,4,5,6$$

$$P(X\geq1)=1-p(X<1)$$

$$=1-p(X=0)$$

$$=1-{}^6C_0\times\frac{2^0}{3^6}$$

$$=1-\frac{1}{3^6}=1-\frac{1}{729}=\frac{728}{729}.$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 13.1 (पृष्ठ संख्या 524-556)

प्रश्न 1 यदि E और F इस प्रकार की घटनाएँ हैं कि P (E) = 0.6, P (F) = 0.3 और P(E ∩ F) = 02, तो P(E|F) और P(F|E) ज्ञात कीजिए |

उत्तर- दिया है,

P(E) = 0.6, P(F) = 0.3 और P(E∩F) = 0.2

तब $P(E|F)=\frac{p(E\cap F)}{P(F)}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}$

और $P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{p(E)}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

प्रश्न 2 P(A|B) ज्ञात कीजिए यदि P(B) = 0.5 और P(A ∩ B) = 0.32

उत्तर-

$$P(A|B)=\frac{PA\cap B}{P(B)}$$

$$=\frac{0.32}{0.5}$$

$$=\frac{32}{50}$$

$$=\frac{16}{25}$$

प्रश्न 3 यदि P(A) = 0.8, P(B) = 0.5 और P(B|A) = 0.4 तो ज्ञात कीजिए।

a. P(A ∩ B)
b. P(A|B)
c. P(A ∪ B)

उत्तर-

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow 0.4 = \frac{P(A \cap B)}{0.8}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B)$$

a. $$= 0.4 \times 0.8 = 0.32$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.32}{0.5}$$

$$= \frac{32}{50}$$

b. $$= 0.64$$

$$\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.8 + 0.5 - 0.32$$

$$= 1.3 - 0.32$$

c. $$= 0.98$$

प्रश्न 4 P(A ∪ B) ज्ञात कीजिए यदि 2P(A) = P(B) $= \frac{5}{13}$ और P(A|B) $= \frac{2}{5}$

उत्तर- प्रश्नानुसार,

तथा $P(B) = \frac{5}{13}$

पुनः $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

या $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = \frac{5}{13} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{13}$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{5}{26} + \frac{5}{13} - \frac{2}{13}$

$= \frac{5+10-4}{26}$

$= \frac{11}{26}$

प्रश्न 5 यदि $P(A) = \frac{6}{11}$,$P(B) = \frac{5}{11}$ और $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ तो ज्ञात कीजिए।

a. P(A ∩ B)

b. P(A|B)

c. P(B|A)

उत्तर-

a. ∴ P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

$\therefore \frac{7}{11} = \frac{6}{11} + \frac{5}{11} - P(A \cap B)$

या $P(A \cap B) = \frac{11}{11} - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{\frac{4}{11}}{\frac{5}{11}}$

b. $= \frac{4}{5}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{4}{11}}{\frac{6}{11}}$$

$$= \frac{4}{6}$$

c. $$= \frac{2}{3}$$

प्रश्न 6 निम्नलिखित प्रश्न में $P\left(\frac{E}{F}\right)$ ज़ात कीजिए।

एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है

a. E : तीसरी उछाल पर चित F : पहली दोनों उछालों पर चित।3
b. E : न्यूनतम दो चित F : अधिकतम एक चित ।
c. E : अधिकतम दो पट F : न्यूनतम एक पट

उत्तर-

a. सिक्के को तीन बार उछालने पर कुल प्रतिदर्श समष्टि (प्रकार) = 2^3 = 8 समसंभाव्य प्रतिदर्श बिन्दुओं का समुच्चय है जो निम्न प्रकार है।

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

E = {तीसरी उछाल पर चित = {HHH, HTH, THH, TTH}

$$P(E) = \frac{\text{घटना के घटित होने की संख्या}}{\text{कुल संख्या}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

∴ E ∩ F = {HHH}

$$P(E \cap F) = \frac{1}{8}, P(F)$$

$$= \frac{2}{8}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{4}{1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

b. E = न्यूनतम दो चित = {HHH, HTH, THH, HHH}

F = अधिकतम दो चित = {TTT, HTT, THT, HTT, HHT, HTH, THH}

$$P(E \cap F) = \frac{\text{घटना के घटित होने की संख्या}}{\text{कुल संख्या}} = \frac{3}{8}, \quad P(F) = \frac{7}{8}$$

$$E \cap F = HHT, HTH, THH$$

$$\therefore P\left(\frac{E}{F}\right)$$

$$= \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{3}{8} \times \frac{8}{7}$$

$$= \frac{3}{7}$$

c. E = अधिकतम दो पट = {HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH}

F = न्यूनतम एक पट = {THH, HTH, HHT, TTH, THT, HTT, TTT}

∴ E ∩ F = {HTT,THT,TTH,THH,HTH,HHT}

$$p(E \cap F) = \frac{6}{8},$$

$$P(F) = \frac{7}{8}$$

$$\therefore P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{\frac{6}{8}}{\frac{7}{8}}$$

$$= \frac{6}{8} \times \frac{8}{7}$$

$$= \frac{6}{7}$$

प्रश्न 7 निम्नलिखित प्रश्न में $P\left(\frac{E}{F}\right)$ ज्ञात कीजिए।

दो सिक्कों को एक बार उछाला गया है-

a. : E एक सिक्के पर पट प्रकट होता है F : एक सिक्के पर चित प्रकट होता है।

b. E : कोई पट प्रकट नहीं होता है F : कोई चित प्रकट नहीं होता है।

उत्तर-

a. E = एक सिक्के पर प्रकट होता है |

= {TH, HT}

F = एक सिक्के पर चित प्रकट होता है।

= {TH, HT}

दो सिक्कों को उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि = 2^2 = 4

$$\therefore P\left(E \cap F\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

तथा $P(F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\therefore P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = 1$$

b. E = कोई प्रकट नहीं होता है ।

= {HH}

F = कोई चित प्रकट नहीं होता है

= {TT}

$$P(E) = \frac{1}{4}$$

$$P(F) = \frac{1}{4}$$

तथा $P(E \cap F) = \frac{0}{4} = 0$

$$\therefore E \cap F = \phi$$

$$P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{0}{114} = 0$$

प्रश्न 8 निम्नलिखित प्रश्न में $P\left(\frac{E}{F}\right)$ ज्ञात कीजिए।

एक पासे को तीन बार उछाला गया है-

E : तीसरी उछाल पर संख्या 4 प्रकट होना।

F : पहली दो उछालों पर क्रमशः 6 तथा 5 प्रकट होना।

उत्तर- E = तीसरी उछाल पर संख्या 4 प्रकट होना तथा F पहली दो उछालों पर क्रमशः 6 तथा 5 प्रकार होना-

= (1, 1, 4), (1, 2, 4), (1, 3, 4), ... (1, 6, 4)

= (2, 1, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 4), ... (2, 6, 4)

= (3, 1, 4), (3, 2, 4), (3, 3, 4), ... (3, 6, 4)

= (4, 1, 4), (4, 2, 4), (4, 3, 4), ... (4, 6, 4)

= (5, 1, 4), (5, 2, 4), (5, 3, 4), ... (5, 6, 4)

= (6, 1, 4), (6, 2, 4), 6, 3, 4),... (6, 6, 4)

= 36 परिणाम

तथा F = {6, 5, 1), (6, 5, 2), (6, 5, 3), (6, 5, 4), (6, 5, 5), (6, 5, 6)} = 6 परिणाम

∴ E ∩ F = {6,5,4}

$$\therefore P(E \cap F) = \frac{1}{216}$$

[पासे को तीन बार उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि = $(6)^3$ = 216]

$$P(F) = \frac{6}{216}$$

$$\therefore P\left(\frac{E}{F}\right)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

$$=\frac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}}$$

$$\frac{1}{216}\times\frac{216}{6}$$

$$=\frac{1}{6}$$

प्रश्न 9 निम्नलिखित प्रश्न में $P\left(\frac{E}{F}\right)$ ज्ञात कीजिए।

एक पारिवारिक चित्र में माता, पिता व पुत्र यादृच्छया खड़े हैं

E : पुत्र एक सिरे पर खड़ा है

F : पिता मध्य में खड़े हैं।

उत्तर- यदि एक पारिवारिक चित्र में (m), पिता (f) व पुत्र (s) यादृच्छया खड़े हैं।

कुल तरीके = 3. 2. 1 = 6

E = पुत्र एक सिरे पर खड़ा है। = {(s m f), (s f m), (f m s), (m f s)}

F = पिता मध्य में खड़े हैं। = {(m f s), (s f m)}

P(E ∩ F) = {(m f s),(s f m)}.

$$P(F\cap F)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(F)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore P\left(\frac{E}{F}\right)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{1}$$

$$= 1$$

प्रश्न 10 एक काले और एक लाल पासे को उछाला गया है-

a. पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 9 से अधिक होने की सप्रतिबन्ध प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात हो कि काले पासे पर 5 प्रकट हुआ है।
b. पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 8 होने की सप्रतिबन्ध प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात हो कि लाल पासे पर प्रकट संख्या 4 से कम है।

उत्तर-

a. माना A पासों पर प्राप्त संख्याओं को योगफल 9 से अधिक होने की घटना तथा F काले पासे पर 5 प्रकट होने की घटना को निरूपित करता है।

∴ A = {(4, 6), (5, 5), (6,4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)}

तथा B = {(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5,4), (5, 5), (5, 6)}

∴ A ∩ B = {(5,5), (5,6)}

तथा 2 पासों की उछाल में कुल परिणाम = 36

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{\text{घटना घटने की संख्या}}{\text{कुल प्रकार}}$$

$$= \frac{2}{6 \times 6}$$

$$= \frac{1}{18}$$

$$P(B) = \frac{6}{6 \times 6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$\therefore p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{1}{18} \times \frac{6}{1}$$

$$= \frac{1}{3}$$

b. माना A घटना पासों पर प्राप्त संख्याओं का योगफल 8 होने तथा B घटना लाल पासे पर प्रकट संख्या 4 से कम घटित होने को निरूपित करते हैं।

A = {(2, 6), (3, 5), 4, 4), (5, 3), (6, 2)}

B = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), 2, 3), (2,4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), 3, 4), 3, 5), (3, 6)}

कुल प्रकार = 18

= A ∩ B = {(2,6), (3,5)}

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{18} \times \frac{2}{1}$$

$$= \frac{1}{9}$$

प्रश्न 11 एक सम पाँसे को उछाला गया है। घटनाओं E = {1, 3, 5}, F = {2, 3} और G = {2, 3, 4, 5} के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए

a. P(E|F) और P(F|E)

b. P(E|G) और P(G|E)

c. P(E∪F|G) और P(E∩F|G)

उत्तर-

a. प्रश्नानुसार, n(E) = 3, n(F) = 2,n(G) = 4

तथा n(E ∩ F) = 1, n(E ∩ G) = 2

(E ∪ F) = 1, 2, 3, 5, (E OF) = 3

⇒ (E ∪ F) = 4, n(EOF) = 1

∴ (E ∪ F)2G = 2, 3, 5, E 0 F G = 3

$$P(E \mid F) = \frac{n(E \cap F)}{n(F)} = \frac{1}{2}$$

$$P(F \mid E) = \frac{n(E \cap F)}{n(E)} = \frac{1}{3}$$

b. प्रश्नानुसार, n(E) = 3, n(F) = 2,n(G) = 4

तथा $n(E \cap F) = 1, n(E \cap G) = 2$

(E ∪ F) = 1, 2, 3, 5, (E OF) = 3

⇒ (E ∪ F) = 4, n(EOF) = 1

∴ (E ∪ F)2G = 2, 3, 5, E 0 F G = 3

$$P(E \mid G) = \frac{n(E \cap G)}{n(G)} = \frac{1}{2}$$

$$P(G \mid E) = \frac{n(E \cap G)}{n(E)} = \frac{2}{3}$$

c. प्रश्नानुसार, n(E) = 3, n(F) = 2,n(G) = 4

तथा $n(E \cap F) = 1, n(E \cap G) = 2$

(E ∪ F) = 1, 2, 3, 5, (E OF) = 3

⇒ (E ∪ F) = 4, n(EOF) = 1

∴ (E ∪ F)2G = 2, 3, 5, E 0 F G = 3

$$P(E \cup F|G) = \frac{n[(E \cap F) \cap G]}{n(G)} = \frac{3}{4}$$

$$P(E \cap F|G) = \frac{n(E \cap F \cap G)}{n(G)} = \frac{1}{4}$$

प्रश्न 12 मान लें कि जन्म लेने वाले बच्चे को लड़का या लड़की होना समसंभाव्य है। यदि किसी परिवार में दो बच्चे हैं तो दोनों बच्चों के लड़की होने की सप्रतिबन्ध प्रायिकता क्या है, यदि यह दिया गया है कि

1. सबसे छोटा बच्चा लड़की है
2. न्यूनतम एक बच्चा लड़की है।

उत्तर- माना पहले तथा-दूसरे बच्चे, लड़कियाँ G_1, G_2 तथा लड़के B_1, B_2 हैं।

∴ $S = \{(G_1, G_2), (G_1, B_2), (G_2, B_1), (B_1, B_2)\}$

माना A = दोनों बच्चे लड़कियाँ हैं = $\{G_1, G_2\}$

B = सबसे छोटा बच्चा लड़की है = $\{G_1G_2, B_1G_2\}$

C = न्यूनतम एक बच्चा लड़की है = $\{G_1B_2, G_1G_2, B_1G_2\}$

$A \cap B = G_1G_2$, $A \cap C = G_1G_2$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) - = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{3}{4}$$

i. $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ii. $P\left(\frac{A}{C}\right) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

प्रश्न 13 एक प्रशिक्षक के पास 300 सत्य/ असत्य प्रकार के आसान प्रश्न, 200 सत्य/ असत्य प्रकार के कठिन प्रश्न, 500 बहुविकल्पीय प्रकार के आसान प्रश्न और 400 बहुविकल्पीय प्रकार के कठिन प्रश्नों का संग्रह है। यदि प्रश्नों के संग्रह से एक प्रश्न यदृच्छया चुना जाता है, तो एक आसान प्रश्न की बहुविकल्पीय होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना E = आसान प्रश्न पूछे जाने की घटना

तथा F = बहुविकल्पीय प्रश्न पूछे जाने की घटना

तब n(E) = 300 + 500 = 800, n(F) = 500 + 400 = 900

तथा n(E) F = 500

∴ अभीष्ट घटना की प्रायिकता

$$= P(F|E) = \frac{n(E \cap F)}{n(E)}$$

$$= \frac{500}{800}$$

$$= \frac{5}{8}$$

प्रश्न 14 यह दिया गया है कि दो पासों को फेंकने पर प्राप्त संख्याएँ भिन्न-भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दो पासों को फेंकने से प्रतिदर्श समष्टि के परिणाम = 6 x 6 = 36

माना A = दो संख्याओं का योग 4 = {(1,3), (2, 2), (3, 1}}

दो पासों को फेंकने पर समान संख्या वाले परिणाम

= {(1, 1), (2, 2), (3, 3), 4, 4), (5, 5), 6, 6)} कुल 6 हैं।

∴ B = जब संख्या भिन्न हो तो ऐसे परिणाम

= 36 – 6 ≠ 30

A ∩ B = (1,3), (3,1)

$\therefore P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

तथा $P(B) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

$\therefore P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{2}{36} \div \frac{5}{36}$

$= \frac{2}{36} \times \frac{6}{5}$

$= \frac{1}{15}$

प्रश्न 15 एक पासे को फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। यदि पासे पर प्रकट संख्या 3 का गुणज है तो पासे को पुनः फेंकें और यदि कोई अन्य संख्या प्रकट हो तो एक सिक्के को उछालें। घटना न्यूनतम एक पासे पर संख्या 3 प्रकट होना' दिया गया है तो घटना 'सिक्के पर पट प्रकट होने की सप्रतिबन्ध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

अतः परिक्षण में प्रतिदर्श संशक्ति S = $\begin{cases} (3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6) \\ (6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6) \\ (1,H),(1,T),(2,H),(2,T),(4,H) \\ (4,T),(5,H),(5,T) \end{cases}$

$\therefore$ n(S) = 20

माना घटना E सिक्के पर पट प्रकट होना तथा घटना F न्यूनतम एक पासे पर संख्या 3 प्रकट होना को निरूपित करते हैं।

E = [(1, T), (2, T), (4, T), (5, T)]

$\Rightarrow$ n (E) = 4

F = [(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 3)]

$n(F) = 7$

$E \cap F = 0$ क्योंकि कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं है।

$$P(E) = \frac{\text{घटना के घटित होने की संख्या}}{\text{कुल प्रकार}}$$

$$= \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$= \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

तथा $P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{7}{20}$

$$P(E \cap F) = \frac{n(E \cap F)}{n(S)} = \frac{0}{20} = 0$$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिक्ता $= P\left(\frac{E}{F}\right)$

$$= \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$\frac{0}{\frac{7}{20}} = 0$$

प्रश्न 16 निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में सही उत्तर चुनें।

यदि $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = 0, p\left(\frac{A}{B}\right)$ है-

a. 0
b. $\frac{1}{2}$
c. परिभाषित नहीं
d. 1

उत्तर-

c. परिभाषित नहीं

हल:

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ तथा } P(B) = 0$$

$$\therefore P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{0} = \infty$$

= परिभाषित नहीं|

प्रश्न 17 निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में सही उत्तर चुनें।

यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार है कि $p\left(\frac{A}{B}\right) = P\left(\frac{B}{A}\right) \neq 0$ तब

a. $A \subset B$
b. $A = B$
c. $A \cap B = \phi$
d. $P(A) = P(B)$

उत्तर-

c. $P(A) = P(B)$

हल: दिया है,

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = P\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

या $A(A) = P(B)$

प्रश्नावली 13.2 (पृष्ठ संख्या 562-564)

प्रश्न 1 यदि $P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{1}{5}$ और A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ है तो P(A ∩ B) ज्ञात कीजिये|

उत्तर- ∵ A व B स्वतन्त्र घटनाये हैं।

∴ P(A ∩ B)

= P(A).P(B)

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{5}$

$= \frac{3}{25}$

प्रश्न 2 52 पत्तों की एक गड्डी में से यदृच्छया बिना प्रतिस्थापित किये दो पत्ते निकाले गए। दोनों पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- ताश की गड्डी में 26 काले पत्ते होते हैं। आगे उपरोक्त प्रश्न की भाँति हल करें।

$\text{संकेत- अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{^{26}C_1}{^{52}C_1} \times \frac{^{25}C_1}{^{51}C_1}$

$= \frac{26}{52} \times \frac{25}{51}$

$= \frac{50}{204}$

$= \frac{25}{102}$

प्रश्न 3 सन्तरों के एक डिब्बे का निरीक्षण उसमें से तीस सन्तरों को यदृच्छया बिना प्रतिस्थापित किये हुए निकाल कर किया जाता है। यदि तीनों निकाले गये सन्तरें अच्छे हैं; तो डिब्बे को बिक्री के लिए स्वीकृत किया जाता है अन्यथा अस्वीकृत कर देते हैं। एक डिब्बा जिसमें 15 सन्तरें हैं जिनमें से 12 अच्छे व 3 खराब सन्तरें हैं, के बिक्री के लिए स्वीकृत होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना पहली, दूसरी व तीसरी निकाल में अच्छा सन्तरा निकलने की घटनायें क्रमश: A, B व C है।

तब अभीष्ट प्रायिकता = P(A ∩ B ∩ C)

अब P(A) = पहली निकाल में अच्छा सन्तरा निकलने की प्रायिकता

$$= \frac{12}{15} \times \frac{4}{5}$$

पहली निकाल में एक अच्छा सन्तरा निकलने के बाद शेष सन्तरों की संख्या 14 है जिसमें 11 सन्तरे अच्छे हैं।

$$\therefore P(B|A) = \frac{11}{14}$$

दूसरी निकाल में भी एक अच्छा सन्तरा निकलने के बाद शेष सन्तरे 13 हैं जिसमें 10 सन्तरे अच्छे हैं।

$$\therefore P(C|A \cap B) = \frac{10}{13}$$

$$\therefore \text{अभीष्ट प्रायिकता} = P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{11}{4} \times \frac{10}{13}$$

$$= \frac{44}{91}$$

प्रश्न 4 एक न्याय्य सिक्का और एक अभिनत पाँसे को उछाला गया। माना A घटना 'सिक्के पर चित प्रकट होता है और B घटना पाँसे पर संख्या 3 प्रकट होती है' को निरूपित करते हैं। निरीक्षण कीजिए कि घटनाएँ स्वतन्त्र हैं या नहीं?

उत्तर- इस प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि इस प्रकार होगी।

S = {(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), (T, 1),(T, 2), (T, 3), (T, 4), T, 5), (T, 6)}

A = सिक्के पर चित प्रकट होना; B = पाँसे पर संख्या 3 प्रकट होती है।

(A ∩ B) = {(H, 3)}

तब n(S) = 12, n(A) = 6, n(B) = 2

तथा $n(A \cap B) = 1$

$$\therefore\ P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

तथा $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$

$$= \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= P(A) \cdot P(B)$$

अतः घटनायें A व B स्वतन्त्र है।

प्रश्न 5 एक पाँसे पर 1, 2, 3 लाल रंग से और 4, 5, 6 हरे रंग से लिखे गए हैं। इस पाँसे को उछाला गया। माना A घटना संख्या सम है' और B घटना 'संख्या लाल रंग से लिखी गई है' को निरूपित करते हैं। क्या A और B स्वतन्त्र हैं?

उत्तर- इस प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$

घटना $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3$

तथा घटना $B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow n(B) = 3$

तब $(A \cap B) = 2 \Rightarrow n(A \cap B) = 1$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$= P(A) \cdot P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1}$$

तथा $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{6}$

$$\because P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

$$\because P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

$\therefore$ घटनायें स्वतन्त्र नहीं।

प्रश्न 6 माना E तथा F दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(E) = \frac{3}{5}$,$P(F) = \frac{3}{5}$ और $P(E \cap F) = \frac{1}{5}$ तब क्या E तथा F स्वतन्त्र हैं?

उत्तर-

$$\because P(E).P(F) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10}$$

$$= \frac{9}{50} \neq P(E \cap F)$$

$\therefore$ घटनायें स्वतन्त्र नहीं हैं।

प्रश्न 7 A और B ऐसी घटनाएँ दी गई हैं जहाँ कि $P(A) = \frac{1}{2}$,$P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ और P(B) = P

तो p का मान ज्ञात कीजिए यदि-

i. घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं।
ii. घटनाएँ स्वतन्त्र हैं।

उत्तर-

i. चूँकि घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं।

$$\therefore P(A \cap B) = 0$$

पुन: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + P - 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$$

ii. $\because$ घटनाएँ स्वतन्त्र है।

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot P$$

पुनः $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

या $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + p - \frac{1}{2}p$

या $= \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

प्रश्न 8 मान ले A और B स्वतन्त्र घटनायें है तथा P(A) = 0.3 और P(B) = 0.4 तब ज्ञात कीजिए।

a. $P(A \cap B)$
b. $P(A \cup B)$
c. $P(A|B)$
d. $P(B|A)$

उत्तर-

a. ∵ A व B स्वतन्त्र घटनायें हैं।

∴ P(A ∩ B) = P(A) : P(B)

= 0.3 × 0.4 = 0.12

b. ∴ P(A ∪ B) = P(A) : P(B) - P(A ∩ B)

= 0.3 + 0.4 - 0.12 = 0.58

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.12}{0.4}$$

c. $$= \frac{3}{10} = 0.3$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

d. $$= \frac{0.12}{0.3} = 0.4$$

प्रश्न 9 मान लें A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं और

$P(A) = \frac{1}{2}$ तथा $P(B) = \frac{7}{12}$ और P(A- नहीं और B- नहीं) $= \frac{1}{4}$

क्या A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं?

उत्तर- P(A - नहीं और B - नहीं)

$$= P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})$$

अब $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

प्रश्न 10 मान लें A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं और

$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{2}$ तथा $\mathrm{P(B)} = \frac{7}{12}$ और P(A- नहीं और B- नहीं) $= \frac{1}{4}$

क्या A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं?

उत्तर- P(A - नहीं और B - नहीं)

$$= \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}})$$

$$= 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$$

$$= 1 - [\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{7}{12} - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{12}$$

$$= \frac{3-12+6+7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

तथा $\mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B)}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{24} \neq \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

$\therefore$ घटनाएँ A और B स्वतन्त्र नहीं है।

प्रश्न 11 A और B स्वतन्त्र घटनाएँ दी गई हैं जहाँ P(A) = 0.3, P(B) = 0.6 तो

a. P(A और B) का मान ज्ञात कीजिए।
b. P(A और B – नहीं) का मान ज्ञात कीजिए।
c. P(A या B) का मान ज्ञात कीजिए।
d. P(A और B में कोई भी नहीं) का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

a. P(A और B)

$= P(A \cap B) = P(A) : P(B)$

∴ स्वतन्त्र घटनायें हैं।

$= 0.3 \times 0.6 = 0.18$

b. P(A और B- नहीं)

$= P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A):P(\bar{B})$

$= P(A) : [1 - P(B)]$

$= 0.3 [1 - 0.6] = 0.3 \times 0.4 = 0.12$

c. P(A या B)

$= P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.3 + 0.6 - 0.18 = 0.72$

d. P(A और B में कोई भी नहीं)

$= P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - 0.72 = 0.28$

प्रश्न 12 एक पाँसे को तीन बार उछाला जाता है कम से कम एक बार विषम संख्या प्राप्त होने की प्राकियता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- पाँसे की पहली उछाल में कुल अंक प्राप्त होने की स्थिति = 6

तथा विषम अंक प्राप्त न होने की स्थिति = 3

∴ पहले उछाल में विषम अंक प्राप्त न होने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

इसी प्रकार दूसरे उछाल में विषम अंक प्राप्त न होने की प्रायिकता

$P(B) = \frac{1}{2}$

तीसरे उछाल में विषम अंक प्राप्त न होने की प्रायिकता

$P(C) = \frac{1}{2}$

∵ उपरोक्त तीनों घटनायें स्वतन्त्र हैं।

∴ तीनों के एक साथ घटने की प्रायिकता अर्थात् प्रत्येक उछाल में विषम संख्या प्राप्त न होने की घटना

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

∴ कम से कम एक बार विषम अंक होने की प्रायिकता

$= 1 - P(A \cap B \cap C)$

$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

प्रश्न 13 दो गेंदें एक बॉक्स से बिना प्रतिस्थापित किये निकाली जाती हैं। बॉक्स में 10 काली और 8 लाल गेंदें हैं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

a. दोनों गेंदें लाल हों।
b. प्रथम काली एवं दूसरी लाल हो।
c. एक काली तथा दूसरी लाल हो।

उत्तर-

a. माना R = लाल गेंद निकलने की घटना; B = काली गेंद निकलने की घटना

पहले निकाल में लाल गेंद निकलने की प्रायिकता

$P(R) = \frac{8}{10+8} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

क्योंकि गेंद पुनः वापस डाल दी जाती है।

दूसरे निकाल में लाल गेंद निकलने की प्रायिकता

$$P(R) = \frac{4}{9}$$

दोनों गेंद लाल निकलने की प्रायिकता = P(R) × P(R)

$$= \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$

b. पहले निकाल में काली गेंद निकलने की प्रायिकता

$$P(B) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

दूसरे निकाल में लाल गेंद निकलने की प्रायिकता

$$P(R) = \frac{4}{9}$$

P(पहली काली और दूसरी लाल) = P(B) × P(R)

$$= \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{81}$$

c. P(एक काली और एक लाल)

= P(प्रथम काली और दूसरी लाल) + P(प्रथम लाल और दूसरी काली)

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{40}{81}$$

प्रश्न 14 एक विशेष प्रश्न को A और B द्वारा स्वतन्त्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि दोनों स्वतन्त्र रूप से समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

i. प्रश्न हल हो जाता है।

ii. उनमें से तथ्यतः कोई एक प्रश्न हल कर लेता है।

उत्तर- प्रश्नानुसार,

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}$$

$\therefore P(\bar{A}) = 1 - PA$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

तथा $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

i. ∴ दोनों के द्वारा प्रश्न हल न होने की प्रायिकता

$= P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ कम से क़म एक के द्वारा प्रश्न हल होने की प्रायिकता

$= 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

ii. केवल किसी एक के द्वारा प्रश्न हल होने की प्रायिकता

$= P(A \cap B) + P(A' \cap B)$

$= P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{6} + \frac{1}{6}$

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

प्रश्न 15 ताश के 52 पत्तो की एक सुमिश्रति गड्डी से एक पत्ता यदृच्छया निकला जाता है। निम्न मेसे किन दशाओं में घटनाएँ E और F स्वतंत्र है?

E : 'निकाला गया पत्ता हुकुम का है

a. F : ‘निकाला गया पत्ता इक्का है ।

b. F : निकाला गया पत्ता एक बादशाह है।

c. F : निकाला गया पत्ता एक बेगम या एक गुलाम है।

उत्तर-

a. E : निकाला गया पत्ता हुकुम का है।

$\therefore P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ ($\because$ 52 पत्तों में 13 पत्ते हुकुम के है)

F : निकला गया पत्ता इक्का है।

$\therefore P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ($\because$ 52 पत्तो में ४ इक्के है)

तथा $P(E \cap F) = \frac{1}{52}$ ($\because$ हुकुम का इक्का एक है)

$\Rightarrow P(E) \cdot P(F)$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{52} = P(E \cap F)$

इसलिए घटनाएँ E व F स्वतन्त्र है।

b. E : निकाला गया पत्ता काले रंग का है।

$\therefore P(E) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ ($\because$ गड्डी में 26 पत्ते काले रंग के है)

F : निकला गया पत्ता बादशाह है।

$\therefore P(F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ($\because$ गड्डी में 4 बादशाह है)

तथा $P(E \cap F) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$ ($\because$ गड्डी मै 2 काले बादशाह है)

$\Rightarrow P(E) \cdot P(F)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{26} = P(E \cap F)$

इसलिए घटनाएँ E व F स्वतन्त्र है।

c. E : निकाला गया पत्ता एक बादशाह या एक बेगम है।

$$\therefore P(E) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$ ($\because$ गड्डी में 4 बादशाह व 4 बेगम है)

F : निकला गया पत्ता एक बेगम या एक गुलाम है।

$$\therefore P(F) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$ ($\because$ गड्डी में 4 बेगम व 4 गुलाम है)

$$\therefore P(E \cap F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$ ($\because$ E व F में 4 बेगम उभयनिष्ठ है)

$$\Rightarrow P(E) \cdot P(F)$$

$$= \frac{2}{13} \cdot \frac{2}{13} = \frac{4}{169} \neq \frac{1}{13} = P(E \cap F)$$

इसलिए E और F स्वतन्त्र घटनाएँ नहीं है।

प्रश्न 16 एक छात्रावास में 60% विद्यार्थी हिंदी का, 40% अंग्रेजी का और 20% दोनों अखबार पढ़ते हैं। एक छात्रा को यदृच्छया चुना जाता है।

i. प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिंदी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है।

ii. यदि वह हिंदी का अखबार पढ़ती है तो उसके अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

iii. यदि वह अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है तो उसके हिंदी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना H = हिंदी का अखबार पढ़ने की घटना; E = अंग्रेजी का अखबार पढ़ने की घटना

तब $P(H) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}, P(E) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

तथा $P(H)(H \cap E) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

i. अभीष्ट प्रायिकता $= P(H' \cap E') = P(H \cup E)' = 1 - P(H \cup E)$

$$= 1 - [P(H) + P(E) - P(H \cap E)]$$

$$= 1 - \left[\frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

ii. अभीष्ट घटना की प्रायिकता $P(E|H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$$

iii. अभीष्ट घटना की प्रायिकता $P(E|H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 17 यदि पांसों का एक जोड़ा उछाला जाता है तो प्रत्येक पासे पर सैम अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता निम्नलिखित में से क्या है-

a. 0

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{12}$

d. $\frac{1}{36}$

उत्तर-

d. $\frac{1}{36}$

हल:

∵ सम अभाज्य संख्या = 2

अर्थात दोनों पासो को उछालने पर सैम अभाज्य संख्या प्राप्त होने की

$$\text{प्रायिकता} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

प्रश्न 18 दो घटनाओं A और B को परस्पर स्वतंत्र कहते है यदि

A और B परस्पर अपवर्जी है

a. $P(A' \cap B') = [1 - P(A)][1 - P(B)]$
b. $P(A) = P(B)$
c. $P(A) + P(B) = 1$

उत्तर-

b. $P(A' \cap B') = [1 - P(A)][1 - P(B)]$

हल:

जब दोनों घटनाएँ A और B स्वतन्त्र हैं तब

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

या $P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$

$= [1 - P(A)][1 - P(B)]$

प्रश्नावली 13.3 (पृष्ठ संख्या 572-574)

प्रश्न 1 एक कलश में 5 लाल और 5 काली गेंदें हैं। यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है, इसका रंग नोट करने के बाद पुनः कलश में रख दी जाती है। पुनः निकाले गएं रंग की 2 अतिरिक्त गेंदें कलश में रख दी जाती हैं तथा कलश में से एक गेंद निकाली जाती है दूसरी गेंद की लाल होने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर- माना एक लाल गेंद निकाली जाती है

$\therefore$ कुल 10 गेंदों में से एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

अब यदि दो लाल गेंदें कलश में रख दी जाती हैं।

कलश में 7 लाल और 5 काली गेंदें हैं।

लाल गेंद निकालने की प्रायिकता

माना पहले काली गेंद निकाली जाती है $= \frac{7}{12}$

कुल 10 गेंदों में से एक काली गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

फिर दो काली गेंदें कलश में रख दी जाती हैं। अब कलश में 5 लाल और 7 काली गेंदें हैं।

एक लाल गेंद होने की प्रायिकता $= \frac{5}{12}$

दूसरी लाल गेंद होने की प्रायिकता $\frac{1}{2} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{12}$

$= \frac{7}{24} + \frac{5}{24} = \frac{12}{24}$

$= \frac{1}{2}$

प्रश्न 2 एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदें हैं और एक अन्य थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदें हैं। दोनों थैलों में से एक को यदृच्छया चुना जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है जो कि लाल है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि गेंद पहले थैले से निकाली गयी है।

उत्तर- माना पहले वे दूसरे थैले को चुनने की घटनायें क्रमशः E_1 व E_2 हैं, तब

$$P(E_2) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

माना लाल गेंद निकलने की घटना E है, तब

$$P(E|E_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(E|E_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

अब पहले थैले में से गेंद निकलने की प्रायिकता जब की यह ज्ञात है की ;लाल रंग की है

$$\text{बेज प्रमेय द्वारा } P(E_1|E) = \frac{P(E_1)\cdot P(E|E_1)}{P(E_1)\cdot P(E|E_1)+P(E_2)\cdot P(E|E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

प्रश्न 3 यह ज्ञात है कि एक महाविद्यालय के छात्रों में से 60% छात्रावास में रहते हैं और 40% छात्रावास में नहीं रहते हैं। पूर्ववर्ती वर्ष के परिणाम सूचित करते हैं कि छात्रावास में रहने वाले छात्रों में से 30% और छात्रावास में न रहने वाले छात्रों में से 20% छात्रों ने A-ग्रेड लिया। वर्ष के अंत में महाविद्यालय के एक छात्र को यादृच्छया चुना गया और यह पाया गया कि उसे A-ग्रेड मिला है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह छात्र छात्रावास में रहने वाला है?

उत्तर- E_1, E_2 और ए निम्नलिखित का प्रतिनिधित्व करते हैं:

E_1 = हॉस्टल में रहने वाले छात्र,

E_2 दिन विद्वान (छात्रावास में नहीं रह रहे हैं)

और A = छात्र जो ग्रेड A प्राप्त करते हैं

अब $P(E_1) = \frac{60}{100}$

$$P(E_2) = \frac{40}{100}$$

अब बेयोंस प्रमेय से

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)}$$

$$= \frac{\frac{60}{100} \times \frac{30}{100}}{\frac{60}{100} \times \frac{30}{100} \times \frac{40}{100} \times \frac{20}{100}} = \frac{9}{13}$$

प्रश्न 4 एक बहुविकल्पीय प्रश्न का उत्तर देने में एक विद्यार्थी या तो प्रश्न का उत्तर जानता है या वह अनुमान लगाता है। मान लें कि उसके उत्तर जानने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ है और अनुमान लगाने की

प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। मान लें कि छात्र के प्रश्न के उत्तर का अनुमान लगाने पर सही उत्तर देने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है तो इस बात की प्रायिकता क्या है कि कोई छात्र प्रश्न का उत्तर जानता है यदि यह ज्ञात है कि उसने सही उत्तर दिया है?

उत्तर- माना E_1 : विद्यार्थी उत्तर जानता है; E_2 : विद्यार्थी अनुमान लगाता हो।

E: विद्यार्थी सही उत्तर देता है।

तब $\mathrm{P(E_1)} = \frac{3}{4}, \mathrm{P(E_2)} = \frac{1}{4}$

और $\mathrm{P(E|E_1)} = 1, \mathrm{P(E|E_2)} = \frac{1}{4}$

$$\mathrm{P(E_1|A)} = \frac{\mathrm{P(E_1)P(A|E_1)}}{\mathrm{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\times 1}{\frac{3}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{3}{3+\frac{1}{4}} = \frac{12}{13}$$

प्रश्न 5 किसी विशेष रोग के सही निदान के लिए रक्त की जाँच 99% असरदार है, जब वास्तव में रोगी उस रोग से ग्रस्त होता है। किंतु 0.5% बार किसी स्वस्थ व्यक्ति की रक्त जाँच करने पर निदान गलत रिपोर्ट देता है यानी व्यक्ति को रोग से ग्रस्त बतलाता है। यदि किसी जनसमुदाय में 0.1% लोग उस रोग से ग्रस्त हैं तो क्या प्रायिकता है कि कोई यदृच्छया चुना गया व्यक्ति उस रोग से ग्रस्त होगा यदि उसके रक्त की जाँच में ये बताया जाता है कि उसे यह रोग है?

उत्तर- माना E_1 : एक व्यक्ति को विशेष रोग होना;

E_2 : एक व्यक्ति को विशेष रोग न होना।

तथा E : घटना जब जाँच की रिपोर्ट पॉजीटिव है।

अब $P(E_1) = 0.1\% = \frac{1}{1000} = 0.001$

$$P(E_2) = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000} = 0.999$$

प्रश्न 6 तीन सिक्के दिए गए हैं। एक सिक्के के दोनों ओर चित्त ही है। दूसरा सिक्का अभिनत (biased) है जिसमें चित्त 75% बार प्रकट होता है और तीसरा अनभिनत सिक्का है। तीनों में से एक सिक्के को यद्दच्छयो चुना गया और उसे उछाला गया है। यदि सिक्के पर चित्त प्रकट हो, तो क्या प्रायिकता है कि वह दोनों चित्त वाला सिक्का है?

उत्तर- E_1 : सिक्का जिसमें दोनों तरफ चित्त है, चुने जाने की घटना।

E_2 : अभिनत सिक्का जिसमें चित्त 75% प्रकट होता है, चुने जाने की घटना

E_3 : अनभिनत सिक्का चुने जाने की घटना

E : सिक्के पर चित्त प्रकट होने की घटना प्रश्नानुसार,

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{3}$$

और $P(E|E_1) = 1, P(E|E_2) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

$$P(E|E_3) = \frac{1}{2}$$

तो बेज प्रमेय द्वारा अभीष्ट प्रायिकता

$$P(E_1|E) = \frac{P(E_1)P(E|E_1)}{P(E_1)P(E|E_1)+P(E_2)P(E|E_2)+P(E_3)P(E|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{4}{4+3+2} = \frac{4}{9}$$

प्रश्न 7 एक बीमा कम्पनी 2000 स्कुटर चालकों, 4000 कार चालकों और 6000 ट्रक चालकों का बीमा करती है। दुर्घटनाओं की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.01, 0.03 और 0.15 है। बीमाकृत व्यक्तियों (चालकों) में से एक दुर्घटना ग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना E_1 : बीमित व्यक्ति एक स्कूटर चालक है; E_2 : बीमित व्यक्ति एक कार चालक है।

E_3 : बीमित व्यक्ति एक ट्रक चालक है; E : बीमित व्यक्ति दुर्घटना ग्रस्त है।

तब

$$P(E_1) = \frac{2000}{2000+4000+6000} = \frac{1}{2}$$

$$P(E_2) = \frac{4000}{2000+4000+6000} = \frac{1}{3}$$

$$P(E_3) = \frac{6000}{2000+4000+6000} = \frac{1}{2}$$

$$P(E|E_1) = 0.01, P(E|E_2) = 0.03, P(E|E_3) = 0.15$$

दुर्घटना ग्रस्त व्यक्ति स्कूटर चालक होने की प्रायिकता $= P(E_1|E)$

बैज प्रमेय द्वारा

$$P(E_1|E) = \frac{P(E_1)P(E|E_1)}{P(E_1)P(E|E_1)+P(E_2)P(E|E_2)+P(E_3)P(E|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}(0.01)}{\frac{0.01}{6}+\frac{0.03}{3}+\frac{0.15}{2}}$$

$$= \frac{0.01}{0.01+0.06+0.45}$$

$$= \frac{0.01}{0.52} = \frac{1}{52}$$

प्रश्न 8 एक कारखाने में A और B दो मशीने लगी हैं। पूर्व विवरण से पता चलता है कि कुल उत्पादन का 60% मशीन A और 40% मशीन B द्वारा किया जाता है। इसके अतिरिक्त मशीन A का 2% और मशीन B का 1% उत्पादन खराब है। यदि कुल उत्पादन का एक ढेर बना लिया जाता है और उस ढेर से यादृच्छया निकाली गई वस्तु खराब हो, तो इस वस्तु के 'मशीन A' द्वारा बने होने की प्रायिकता क्या होगी?

उत्तर- माना कि घटनायें E_1 व E_2 इस प्रकार हैं।

E_1 = वस्तु मशीन A द्वारा बनायी गयी है; E_2 = वस्तु मशीन B द्वारा बनायी गयी है। E = वस्तु खराब है।

तब प्रश्नानुसार, $P(E_1) = 0.6$, $P(E_2) = 0.4$

$P(E \mid E_1)$ = वस्तु के खराब होने की प्रायिकता जबकि वह मशीन A द्वारा बनायी गयी है।

$$= \frac{2}{100} = 0.02$$

इसी प्रकार $P(E|E_2) = \frac{1}{100} = 0.01$

अब वस्तु के मशीन A द्वारा बने होने की प्रायिकता जबकि वह खराब है $= P(E1 \mid E)$

बैज प्रमेय द्वारा $P(E_1|A) = \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)}$

$$= \frac{0.6\times0.02}{0.6\times0.02+0.4\times0.01}$$

$$= \frac{0.012}{0.012+0.004}$$

$$= \frac{0.012}{0.016} = \frac{3}{4}$$

प्रश्न 9 दो दल एक निगम के निदेशक मंडल में स्थान पाने की प्रतिस्पर्धा में हैं। पहले तथा दूसरे दल के जीतने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.6 तथा 0.4 हैं। इसके अतिरिक्त यदि पहला दल जीतता है तो एक नए उत्पाद के प्रारम्भ होने की प्रायिकता 0.7 है और यदि दूसरा दल जीतता है तो इस

बात की संगत प्रायिकता 0.3 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि नया उत्पादन दूसरे दल द्वारा प्रारम्भ किया गया था।

उत्तर- दिया गया: P (G_1) = 0.6, P (G_2) = 0.4

P नए उत्पाद P (P | G_1) = 0.7 और P (P | G_2) = 0.3 के लॉन्चिंग का प्रतिनिधित्व करता है

बायस प्रमेय द्वारा से

$$P(G_2|P) = \frac{P(G_2) \times P(P|G_2)}{P(G_1).P(P|G_1) + P(G_2) \times P(P|G_2)}$$

$$= \frac{0.4 \times 0.3}{0.6 \times 0.7 + 0.4 \times 0.3} = \frac{2}{9}$$

प्रश्न 10 मान लीजिए कि कोई लड़की एक पासा उछालती है। यदि उसे 5 या 6 की संख्या प्राप्त होती है तो वह एक सिक्के को तीन बार उछालती है और 'चितों' की संख्या नोट करती है। यदि उसे 1, 2, 3 या 4 की संख्या प्राप्त होती है तो वह एक सिक्के को एक बार उछालती है और यह नोट करती है कि उस पर 'चित' या 'पट' प्राप्त हुआ। यदि उसे ठीक एक चित प्राप्त होता है, तो उसके द्वारा उछाले गए पासे पर 1, 2.3 या 4 प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर- माना E_1 = एक पाँसे के उछाल पर संख्या 5 या 6 का आना

E_2 = एक पाँसे के उछाल पर संख्या 1, 2, 3 या 4 का आना

E = सिक्के के उछाल में एक ही चित्त का आना

तब

$$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(E_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(E|E_2) = \frac{3}{8}$$

क्योकि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

E = {HTT, THT, TTH}

तथा

$P(E|E_1) = \frac{1}{2}$ (क्योंकि S = {T, H}, E = {H})

अतः बेज प्रमेय से

$$P(G_2|P) = \frac{P(G_2)\times P(P|G_2)}{P(G_1).P(P|G_1)+P(G_2)\times P(P|G_2)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}}$$

प्रश्न 11 एक व्यावसायिक निर्माता के पास A,B तथा C मशीन ऑपरेटर हैं। प्रथम ऑपरेटर A1% खराब सामग्री उत्पादित करता हैं तथा ऑपरेटर B और C क्रमशः 5% और 7% खराब सामग्री उत्पादित करता है। कार्य पर A कुल समय का 50% लगाता है, B कुल समय का 30% तथा C कुल समय का 20% लगाता है। यदि एक खराब सामग्री उत्पादित है तो इसे A द्वारा उत्पादित किए जाने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर- माना

E_1 : ऑपरेटर A द्वारा उत्पादित होने की घटना

E_2 : ऑपरेटर B द्वारा उत्पादित होने की घटना

E_3 : ऑपरेटर C द्वारा उत्पादित होने की घटना

E : एक खराब सामग्री उत्पादित होने की घटना

तब,

$$P(E_1) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$P(E_2) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$P(E_3) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

और,

$$P(E|E_1) = \frac{1}{100}$$

$$P(E|E_2) = \frac{5}{100}$$

$$P(E_3) = \frac{7}{100}$$

$\therefore$ खराब सामग्री उत्पादित हैं तो इसे A द्वारा उत्पादित किए जाने की प्रायिकता

$$P(E_1|E) = \frac{P(E_1)P(E|E_1)}{P(E_1)P(E|E_1)+P(E_2)P(E|E_2)+P(E_3)P(E|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}+\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{100}+\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{100}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{15}{10}+\frac{7}{5}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5+15+14}{10}}$$

$$= \frac{5}{34}$$

प्रश्न 12 52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते हैं जो ईंट के पत्ते हैं। खो गये पत्ते की ईंट होने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर- माना,

E_1 : खोने वाला पत्ता ईंट का है;

E_2 : खोने वाला पत्ता पान का है।

E_3 : खोने वाला पत्ता चिड़ी का है

E_4 : खोने वाला पत्ता हुकम का है।

E : शेष पत्तों से 2 ईंट के पत्ते निकालने की घटना

तब,

$= P(E_1) = P(E_2)$

$= P(E_3) = P(E_4)$

$$= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$P(E|E_1)$ = दोनों पत्तै ईंट के है, की प्रायिकता यदि ईंट का पत्ता खो गया हो।

$$= \frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}$$

$$= \frac{13\times12}{51\times50}$$

$$= \frac{26}{17\times25}$$

$$= \frac{26}{425}$$

इसी प्रकार,

$$P(E|E_3) = \frac{26}{425}$$

$$P(E|E_4) = \frac{26}{425}$$

तब बैज प्रमेय से खो पत्ते के ईंट के होने की प्रक्रियाता (1) अगर पान का पत्ता खो गया है।

$$P(E_1|E) = \frac{P(E_1)P(E|E_1)}{P(E_1)\cdot P(E|E_1)+P(E_2)\cdot P(E|E_2)+P(E_3)\cdot P(E|E_3)+P(E|E_3)+(E_4)\cdot P(E|E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{22}{425}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{22}{425}+\frac{1}{4}\cdot\frac{26}{425}+\frac{1}{4}\cdot\frac{26}{425}\ \frac{1}{4}\cdot\frac{26}{425}}$$

$$= \frac{22}{22+78}$$

$$= \frac{22}{100}$$

$$= \frac{11}{50}$$

प्रश्न 13 A द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। एक सिक्का उछाला जाता है तथा A बताता है कि चित प्रदर्शित हुआ। वास्तविक रूप में चित प्रकट होने की प्रायिकता है-

a. $\frac{4}{5}$

b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{5}$

d. $\frac{2}{5}$

उत्तर-

a. $\frac{4}{5}$

हल: मन कि सत्य बोलने तथा सत्य न बोलने की घटनाएँ E1 तथा E2 हों, तब

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}_1) = \frac{4}{5}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}_2) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

जब E चित होने की घटना दर्शाता हो,तब

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_1}\right) = \frac{1}{2}$$

और,

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_2}\right) = \frac{1}{2}$$

अतः चित आने की घटना की अभीष्ट प्रायिकता,

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}}\right) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{E}_1).\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_1}\right)}{\mathrm{P}(\mathrm{E}_1).\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_1}\right) + \mathrm{P}(\mathrm{E}_2).\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{4}{5}$$

प्रश्न 14 यदि A और B ऐसी घटनाएँ हैं कि $A \subset B$ तथा $P(B) \neq 0$, तो निम्न में से कौन ठीक है-

a. $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(B)}{P(A)}$

b. $P\left(\frac{A}{B}\right) \leq P(A)$

c. $P\left(\frac{A}{B}\right) \geq P(A)$

d. इनमें से कोई नहीं।

उत्तर-

c. $P\left(\frac{A}{B}\right) \geq P(A)$

हल: $\because A \subset B$ अर्थात $A \cap B = A$

$P(A \cap B) = (A)$

$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$

परन्तु $P(B) \leq 1$

अर्थात $P\left(\frac{A}{B}\right) \geq P(A)$

प्रश्नावली 13.4 (पृष्ठ संख्या 586-588)

प्रश्न 1 बताइए कि निम्नलिखित प्रायिकता बंटनों में कौन-से एक यादृच्छिक चर के लिए सम्भव नहीं है। अपना उत्तर कारण सहित लिखिए।

a.

x	0	1	2
p(x)	0.4	0.4	0.2

b.

x	0	1	2	3	4
p(x)	0.1	0.5	0.2	-0.1	0.3

c.

Y	-1	0	1
P(Y)	0.6	0.1	0.2

d.

Z	3	2	1	0	-1
P(Y)	0.3	0.2	0.4	0.1	0.05

उत्तर-

a. हाँ पर $P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = 0.4 + 0.4 + 0.2 = 1$

और सभी $P(X) \geq 0$

$\therefore$ यह प्रायिकता बंटन सम्भव है।

b. यहाँ पर $P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4)$

$= 0.1 + 0.5 + 0.2 - 0.1 + 0.3 = 1.0$

परन्तु,

$P(x = 3) = -0.1 < 0$

यह प्रायिकता बंटन सम्भव नहीं है।

c. यहाँ पर, $P(Y = -1) + P(Y = 0) + P(Y = 1)$

$= 0.6 + 0.1 + 0.2 = 0.9 \neq 1$

$\therefore$ यह प्रायिकता बंटन सम्भव नहीं है।

d. यहाँ पर,

$P(Z = 3) + P(Z = 2) + P(Z = 1) + P(2 = 0) + P(Z = -1)$

$= 0.3 + 0.2 + 0.4 + 0.1 + 0.05 \neq 1.0541$

यह प्रायिकता बंटन सम्भव नहीं है।

प्रश्न 2 एक कलश में 5 लाल और 2 काली गेंद हैं। दो गेंद यदृच्छया निकाली गई। मान लीजिए x काली गेंदों की संख्या को व्यक्त करता है। x के सम्भावित मान क्या हैं? क्या x यदृच्छिक चर है?

उत्तर-

1. निकाली गई दोनों गेंदें लाल हैं, में x = 0
2. 1 गेंद लाल, एक काली, में x = 1
3. दोनों काली, में x = 2

∴ परिणाम x = {0, 1, 2}

∵ x का परिसर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

इसलिए x एक याद्दच्छिक चर है।

प्रश्न 3 मान लीजिए x चित्तों की संख्या और पटों की संख्या में अन्तर को व्यक्त करता है, जब एक सिक्के को 6 बार उछाला जाता है। x सम्भावित मूल्य क्या हैं?

उत्तर- यदि एक सिक्का 6 बार उछाला गया हो तो, चित्तों व पटों की कुल संख्याएँ = 26 = 64 चित्त व पट इस प्रकार आ सकते हैं।

i. 6 चित्त, 0 पट
ii. 5 चित्त, 1 पेट
iii. 4 चित्त, 2 पट
iv. 3 चित्त, 3 पट
v. 2 चित्त, 4 पट
vi. 1 चित्त, 5 पट

0 चित्त, 6 पट

चूँकि x चित्तों की संख्या और पटों की संख्या में अन्तर को व्यक्त करता है।

इसलिए

i. में x = 6 - 0 = 6
ii. में x = 5 - 1 = 4
iii. में x = 4 - 2 = 2
iv. में x = 3 - 3 = 0
v. में x = 4 - 2 = 2
vi. में x = 5 - 1 = 4
vii. में x = 6 - 0 = 6

इसलिए X के सम्भावित मूल्य = 0, 2, 4, 6

प्रश्न 4 निम्नलिखित के प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए

a. एक सिक्के की दो उछालों में चित्तों की संख्या का
b. तीन सिक्कों को एक साथ एक बार उछालने पर पटों की संख्या का
c. एक सिक्के की चार उछालों में चित्तों की संख्या का

उत्तर-

a. सिक्के की दो उछालों की प्रतिदर्श समष्टि : S = {HH, HT, TH, TT}

$$= \mathrm{P(H)} = \frac{1}{2}$$

$$= \mathrm{P(H)} = \frac{1}{2}$$

यदि x, प्राप्त चितो की संख्या को व्यक्त करता है तो x एक यादृच्छिक चर है तथा

$$\mathrm{x} = 0, 1, 2$$

$$\mathrm{P(X = 0) = P(TTT)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P(X = 1) = P(HT - TH)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(HH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

इस लिये प्रायिकता बंटन है-

X	0	1	2
P(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

b. जब तीन सिक्के एक साथ एक बार उछालते है तो प्रदर्शित समष्टि

S = {HHH, THH, HTH, HHT, HTT, THT, TTH, TTT}

$$\therefore P(H) = \frac{1}{2}$$

और,

$$= P(T) = \frac{1}{2}$$

माना X पटों की संख्या आना तब

$$x = 0, 1, 2, 3$$

$P(X = 0) = P$ (कोई पट नहीं)

$$P(HHH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$P(X = 1) = P$ (एक पट दो चित्त)

$$= P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$P(X = 2) = P$ (दो पट, एक चित्त)

$$= P(HTT) + P(THT) + P(TTH)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3)$$

$$= P(TTT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

इसलिये प्रायिकता बंटन है

X	0	1	2	3
P(x)P(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c. जब एक सिक्के को चार बार उछाला गया हो तो कुल उछाल = 24 = 16

$$P(H) = \frac{1}{2}$$

$$P(T) = \frac{1}{2}$$

माना X चीतों की संख्या तब

$$x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$P(X = 0) = P$ (कोई चित नहीं)

$$P(TTTT\ ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$P(X = 1) = P$ (एक चित, तीन पट)

$$= P(HTTT) + P(THTT) + P(TTHT) + P(TTTH)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$P(X = 2) = P$ (दो पट, दो चित्त)

$$= P(HHT,HTHT,HTTH,THTH,THHT,TTHH)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3)$$

= P (3 चित, 1 पट)

$$= P(HHHT) + P(HHTH) + P(HTHH) + P(THHH)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 4)$$

= P (4 चित)

$$= P(HHHH) = \frac{1}{16}$$

अतः X का प्रायिकता बंटन है

X	0	1	2	3	4
P(x)	$\frac{1}{116}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

प्रश्न 5 एक पाँसा दो बार उछालने पर सफलता की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए जहाँ

i. '4 से बड़ी संख्या' को एक सफलता माना गया है।

ii. न्यूनतम एक 'पाँसे पर संख्या 6 प्रकट होना' को एक सफलता माना गया है।

उत्तर-

i. पाँसे की एक उछाल की प्रतिदर्श समष्टि S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

सफलता की प्रायिकता = P(सफलता)

$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (क्योंकि 5, 6 दो संख्या 4 से बड़ी है)

इसलिए P(असफलता) $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow P(F) = \frac{2}{3}$$

माना X 'सफलता की संख्या'

तब दो उछालों में,

$$X = 0, 1, 2$$

$$P(X = 0) = P(FF)$$

$$= P(F)P(F) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

P(X = 1) P(SF या FS) = P(SF) + P(FS) = P(S) P(F) + P(F) P(S)

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 2) = P(SS)$$

$$= P(S)P(S) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

अतः प्रायिकता बंटन है

X	0	1	2
P(X)	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

ii. माना A 'न्यूनतम एक पासें पर संख्या 6 आना'

⇒ {(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)}

इस लिये सफलता की प्रायिकता

$P(S) = \frac{11}{36}$ (क्योंकि कुल सम्भव संख्यायें = 6 × 6 = 36)

असफलता की प्रायिकता,

$$P(F) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$$

माना X 'सफलता की संख्या'

इसलिए प्रायिकता बंटन है

X	0	1
P(X)	$\frac{25}{36}$	$\frac{11}{36}$

प्रश्न 6 30 बल्बों के एक ढेर से, जिसमे 6 बल्ब ख़राब है 4 बल्बों का एक नमूना (प्रतिदर्श) यद्दच्छया बिना प्रतिस्थापन के निकाला जाता है। खराब बल्बों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

उत्तर- कुल बल्ब = 30

खराब बल्ब = 6

सही बल्ब = 30 - 6 = 24

ख़राब बल्ब निकलने की प्रायिकता,

$$= \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

$\therefore$ P(ख़राब) $= \frac{1}{5}$

P (सही) $= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

माना x 'एक ख़राब बल्ब का निकलना'

तब X = 0, 1, 2, 3, 4,

P(X = 0) = P(चारों बार कोई भी ख़राब नहीं)

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{256}{625}$$

P(X = 1) = P(एक ख़राब, तीन सही)

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{256}{625}$$

P(X = 2) = P(दो ख़राब दो सही)

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}$$

$$+ \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}$$

$$= \frac{16\times6}{625} = \frac{96}{625}$$

P(X = 3) = P(तीन खराब, एक सही)

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{16}{325}$$

P(X = 4) = P (चार ख़राब)

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{625}$$

अतः प्रायिकता बंटन है

X	0	1	3	4
P(X)	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{1}{625}$

प्रश्न 7 एक सिक्का समसर्वय सन्तुलित नहीं है जिसमें चित्त प्रकट होने की सम्भावना पट प्रकट होने की सम्भावना की तीन गुनी है। यदि सिक्का दो बार उछाला जाता है तो पटों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

उत्तर- क्योंकि चित्त और पट की प्रायिकता का अनुपात 3 : 1 है।

$\therefore$ P(चित्त) $= \mathrm{P(H)} = \frac{3}{4}$

P(पट) = P(T)

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

माना X पट आने की संख्या

P(X = 0) = P(कोई पट नहीं) $= \mathrm{P(HH)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

P(X = 0) = P(एक पट) P(TH या HT) $= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{6}{16}$

P(X = 0) = P(दो पट) $= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

अतः प्रायिकता बंटन है

X	0	1	2
P(X)	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

प्रश्न 8 यादृच्छिक चर x का प्रायिकता बंटन नीचे दिया गया है।

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	0	K	2K	2K	3K	K^2	$2k^2$	$7K^2 + K$

ज्ञात कीजिए

i. k

ii. P(X < 3)

iii. P(X > 6)

iv. P(0<X <3)

उत्तर-

i. चूंकि $\sum P(X) = 1$

$\therefore 0 + k + 2k + 2k + 3k + k^2 + 2k^2 + 7k^2 + k = 1$

$\Rightarrow 10k^2 + 9k - 1 = 0$

$\Rightarrow (10k - 1)(k + 1) = 0$

$\Rightarrow \mathbf{k} = \frac{1}{10} - 1$

क्योंकि $P(X) \geq 0$

$\therefore$ k = -1 नहीं हो सकता

अतः $\mathbf{k} = \frac{1}{10}$

ii. P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)

$= \frac{7}{100} + \frac{1}{10}$

$= \frac{7+10}{100}$

$= \frac{17}{100}$

iii. P(0 < X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2)

$= K + 2K = 3K$

$= \frac{3}{10}$

प्रश्न 9 एक याद्दच्छिक चर X का प्रायिकता फलन P(x) निम्न प्रकार से है, जहाँ K कोई संख्या है।

i. k का मान ज्ञात कीजिए।

ii. P(x < 2), (x ≤ 2) P(x ≥ 2) ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

a. चूंकि किसी याद्दच्छिक चर के प्रायिकता बंटन का कुल योग 1 के बराबर होता है

अर्थात $\sum P(X) = 1$

अत: P(0) + P(1) + P(2) + P (अन्यथा) = 1

$\therefore$ k + 2k + 3k + 0 = 1 या 6k = 1

$\therefore K = \frac{1}{6}$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है-

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

b.

i. $P(X<2)=P(0)+P(1)=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

ii. $P(\leq 2)=P(0)+P(1)+P(2)=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$

iii. $P(X\geq 2)=P(2)+P$ अन्यथा $=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$

प्रश्न 10 एक न्याय्य सिक्के की तीन उछालों पर प्राप्त चित्तों की संख्या का माध्यज़ात कीजिए।

उत्तर- माना तीन सिक्कों की उछाल में X चित्त आने की संख्या दर्शाता है।

तब X = 0, 1, 2 या 3

अब P(H) = एक सिक्के के उछाल पर चित्त आने की प्रायिकता $=\frac{1}{2}$

P(T) = चित न आने की प्रयिकता $=\frac{1}{2}$

P(X = 0) = P(TTT) = P(T) P(T) P(T)

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

P(X = 1) = P(HTT) + P(THT) + P(TTH)

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

P(X = 2) = P(HHT) + P(HTH) + P(TTH)

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

P(X = 3) = P(HHH)

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

अतः X का प्रायिकता बंटन है-

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

इसलिए बंटन का माध्य $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i$

$$= 0 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) + 1 \cdot \left(\frac{3}{8}\right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{8}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$

प्रश्न 11 दो पाँसों को युग्मत् उछाला गया। यदि x, छक्कों की संख्या को व्यक्त करता है, तो x की प्रत्याशा ज्ञात कीजिए।

उत्तर- स्पष्ट है कि X = 0, 1, 2

P(X = 0) = किसी भी पासे पर 6 न आने की प्रायिकता $= \frac{25}{36}$

केवल एक पाँसे पर 6 आने की घटना

{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)}

∴ P(X = 1) = एक 6 आने की प्रायिकता $= \frac{10}{36}$

P(X = 2) = P((6, 6)) $= \frac{1}{36}$

अत: X का प्रायिकता बंटन है।

X	0	1	3
P(X)	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

इसलिए बंटन का माध्य $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i$

$$= 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36}$$

$$= \frac{10+2}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

प्रश्न 12 प्रथम छः धन पूर्णांकों में से दो संख्याएँ यदृच्छया (बिना प्रतिस्थापन) चुनी गई। मान लें x दोनों संख्याओं में से बड़ी संख्या को व्यक्त करता है। E(X) ज्ञात कीजिए।

उत्तर- स्पष्ट है X का मान 2, 3, 4, 5, 6 हो सकता है।

P(X = 2) = प्रायिकता जब दोनों संख्याओं में बड़ी संख्या 2 है।

⇒ P(X = 2) = P((1, 2) या (2, 1))

= P(1, 2) + P(2, 1)

$$= \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$$

P(x = 3) = प्रायिकता जब दोनों संख्याओं में बड़ी संख्या 3 है।

= P((1 या 2 या 3 या 4, 5) अथवा (5, 1 या 2 या 3 या 4)

$$\frac{4}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{30}$$

इसी प्रकार P(X = 6)

$$= \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{30}$$

अतः X का प्रायिकता बंटन है

X	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{10}{30}$

इसलिए बंटन का माध्य $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i$

$$= 2 \cdot \frac{2}{30} + 3 \cdot \frac{4}{30} + 4 \cdot \frac{6}{30} + 5 \cdot \frac{8}{30} + 6 \cdot \frac{10}{30}$$

$$= \frac{4+12+24+40+60}{30} = \frac{140}{30} = \frac{14}{3}$$

प्रश्न 13 मान लीजिए दो पाँसों को फेंकने पर प्राप्त संख्याओं के योग को x से व्यक्त किया गया है। X का प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दो पाँसों की फेंक में कुल घटनायें = 6 × 6 = 36

जिन्हें (x_i, y_i}) के रूप में लिख सकते हैं,

जहाँ xi = 1, 2, 3, 4, 5, 6, yi = 1, 2, 3, 4, 5, 6

यादृच्छिक चर X के मान अर्थात् पाँसों पर प्राप्त संख्याओं का योग 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 या 12 हो सकता है।

X का प्रायिकता बंटन है

P(X = 2) = P({(1, 1)}) $= \frac{1}{36}$

P(X = 3) = P({(1, 2), (2, 1)}) $= \frac{2}{36}$

P(X = 4) = P({(1, 3), (2, 2), (3, 1)}) $= \frac{3}{36}$

P(X = 5) = P({(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}) $= \frac{4}{36}$

P(X = 6) = P({(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)}) $= \frac{5}{36}$

P(X = 7) = P({(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4,3), (5, 2), (6,1)}) $= \frac{6}{36}$

P(X = 8) = P({(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)}) $= \frac{5}{36}$

P(X = 9) = P({(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}) $= \frac{4}{36}$

P(X = 10) = P({(4, 6), (5, 5), (6, 4)}) $= \frac{3}{36}$

P(X = 11) = P({(5, 6), (6, 5)}) $= \frac{2}{36}$

P(X = 12) = P({6, 6)}) $= \frac{1}{36}$

X का प्रायिकता बंटन है-

X या x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(x) या P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{11}{36}$

इसलिए माध्य $\mu = E(X) = \sum p_i x_i$

$$= 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36}$$

$$+ 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36}$$

$$= \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

प्रसारण $\sigma^2 = \sum(x_i)^2 P_i - \mu^2 = \left[4\cdot\frac{1}{36} + 9\cdot\frac{2}{36} + 16\cdot\frac{3}{36} + 25\cdot\frac{4}{36} + 36\frac{5}{36} + 49\cdot\frac{6}{36}\right.$

$$\left. + 64\cdot\frac{5}{36} + 81\cdot\frac{4}{36} + 100\cdot\frac{3}{36} + 121\cdot\frac{2}{36} + 144\cdot\frac{1}{36}\right] - (7)^2$$

$$= \frac{1}{36}[4 + 18 + 48 + 100 + 180 + 294 + 320 + 324 + 300 + 242 + 144] - 49$$

$$= \frac{1}{36} \times 1974 - 49$$

$$= 54.833 - 49 = 50833$$

$\therefore$ मानक विचलन $= \sqrt{(\sigma^2)} = \sqrt{50833} = 2.415$

प्रश्न 14 एक कक्षा में 15 छात्र हैं जिनकी आयु 14, 17, 15, 14, 21, 17, 19, 20, 16, 18, 20, 17, 16, 19 और 20 वर्ष हैं। एक छात्र को इस प्रकार चुना गया कि प्रत्येक छात्र के चुने जाने की सम्भावना समान है और चुने गए छात्र की आयु (X) को लिखा गया। यादृच्छिक चर x को प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। x का माध्य, प्रसरण व मानक विचलन भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

X	14	15	16	17	18	19	20	21
P(x)	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

इसलिए माध्य $\mu = E(X) = \sum p_i x_i$

$$E(X) = \sum p_i x_i = \frac{2}{15} \cdot 14 + \frac{1}{15} \cdot 15 + \frac{2}{15} \cdot + 16 + \frac{3}{15} \cdot 17 + \frac{1}{15} \cdot + 18 + \frac{2}{15} \cdot 19 + \frac{3}{15} \cdot 20 + \frac{1}{15} \cdot 21$$

$$= \frac{28+15+32+51+18+38+60+21}{15} = \frac{263}{15} = 17.53$$

पुनः $E(X^2) = \sum p_i x_i = \frac{2}{15} \cdot 14^2 + \frac{1}{15} \cdot 15^2 + \frac{2}{15} \cdot + 16^2 + \frac{3}{15} \cdot 17^2 + \frac{1}{15} \cdot + 18^2 + \frac{2}{15} \cdot 19^2 + \frac{3}{15} \cdot 20^2 + \frac{1}{15} \cdot 21^2$

$$= \frac{392+225+512+867+324+722+1200+441}{15} = \frac{4683}{15}$$

प्रसारण (X) या var (X) = $E(E^2) - (E(X))^2$

$$= \frac{4683}{15} = \left(\frac{263}{15}\right)^2$$

$$= \frac{70245-69169}{225} = \frac{1076}{225} = 4.78$$

इसलिए मानक विचलन $(S.D.) = \sqrt{(X)} = \sqrt{4.78} = 2.19$

प्रश्न 15 एक बैठक में 70% सदस्यों ने किसी प्रस्ताव का अनुमोदन किया और 30% सदस्यों ने विरोध किया। एक सदस्य को यद्दच्छया चुना गया और, यदि उसे सदस्य ने प्रस्ताव का विरोध किया हो तो x = 0 लिया गया, जब कि यदि उसने प्रस्ताव का अनुमोदन किया हो तो x = 1 लिया गया। Ex) और प्रसरण (X) ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

xx	00	11
P(x)P(x)	3010030100	70100

इसलिए माध्य $E(X)=\sum p_i x_i = 0\cdot\frac{30}{100}+1\cdot\frac{70}{100}=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$

और $E(X)^2=\sum x_i^2 p_i = 0^2\cdot\frac{30}{100}+1^2\cdot\frac{70}{100}=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}=0.7$

प्रसारण (X) या var (X) = $E(X^2) - (E(X))^2$

$=\frac{7}{10}-\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{7}{10}-\frac{49}{100}$

$=\frac{70-49}{100}=\frac{21}{10}=0.21$

प्रश्न 16 निम्न में से प्रत्येक में सही उत्तरे चुनें।

तीन चेहरे पर 1 लिखा हुआ मरने पर प्राप्त संख्या का मतलब, दो चेहरों पर 2 और एक चेहरे पर 5 है-

a. 1

b. 2

c. 5

d. $\frac{8}{3}$

उत्तर-

b. 2

हल:

X_i	P_i	P_iX_i
1	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
		$\sum P_{ix_i}=\frac{12}{6}=2$

प्रश्न 17 निम्न में से प्रत्येक में सही उत्तरे चुनें।

मान लीजिए कि दो कार्ड कार्ड के डेक से याद्दच्छिक रूप से खींचे जाते हैं। X को प्राप्त एसेस की संख्या होने दें। E(X) का मूल्य क्या है?

a. $\frac{37}{221}$

b. $\frac{5}{13}$

c. $\frac{1}{13}$

d. $\frac{2}{13}$

उत्तर-

d. $\frac{2}{13}$

हल:

$$n(S) = 52$$

$$n(A) = 4$$

$$P(X = 0) = \frac{^{48}C_2}{^{52}C_2} = \frac{48\times47}{52\times51} = \frac{188}{221}$$

$$P(X = 1) = \frac{^{48}C_1\times{^4C_1}}{^{52}C_2} = \frac{32}{221}$$

$$P(X = 0) = \frac{^4C_2}{^{52}C_2} = \frac{4\times3}{52\times51} = \frac{1}{221}$$

X_i	P_i	P_iX_i
1	$\frac{118}{221}$	0
2	$\frac{32}{221}$	$\frac{32}{221}$
3	$\frac{1}{221}$	$\frac{2}{221}$

		$\sum P_{iX_i} = \frac{34}{221} = \frac{2}{13}$

प्रश्नावली 13.5 (पृष्ठ संख्या 593-594)

प्रश्न 1 एक पाँसे को 6 बार उछाला जाता है। यदि 'पाँसे पर सम संख्या प्राप्त होना' एक सफलता है तो निम्नलिखित की प्रायिकता क्या होंगी?

i. तथ्यत: 5 सफलताएँ
ii. न्यूनतम 5 सफलताएँ
iii. अधिकतम 5 सफलताएँ

उत्तर- मानी प्रयोग में सफलता की प्रायिकता = P

इसलिए $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (क्योंकि सम संख्या है 2, 4, 6)

$$\Rightarrow q = 1 - P = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

पुनः माना प्रयोग मै X सफलता की संख्या दर्शाती है।

तब $P(X = r) = {}^nC_5\, q^{n-r} p^5$ (यहाँ पर n = 6)

i. P(तथ्यत: 5 सफलताएँ)

$$(X = 5) = {}^6C_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= {}^6C_1 \frac{1}{2^6} = \frac{6}{2^6} = \frac{3}{2^5} = \frac{3}{32}$$

ii. P(न्यूनतम 5 सफलताएँ)

$$= P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= \ {}^6C_5 \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \ {}^6C_6 \left(\tfrac{1}{2}\right)^6$$

$$= \ {}^6C_1 \cdot \tfrac{1}{2^6} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^6$$

$$= \tfrac{6}{2^6} + \tfrac{1}{2^6} = \tfrac{7}{2^6} = \tfrac{7}{64}$$

iii. P(अधिकतम 5 सफलताएँ)

$$= P(X \leq 5) = 1 - P(X = 6)$$

$$1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^6 = 1 - \tfrac{1}{64} = \tfrac{63}{64}$$

प्रश्न 2 पासों के एक जोड़े को 4 बार उछाला जाता है। यदि 'पासों पर प्राप्त अंकों का द्विक होना' एक सफलता मानी जाती है, तो 2 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- n(S) = 36, A = {11, 22, 33, 44, 55, 66}

$$n(A) = 6$$

$$p = \frac{n(A)}{n(A)}$$

$$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$q = 1 - p$$

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$n = 4, r=2$$

$$P(X = r) = C(n.r)p^r q^{n\text{-}r}$$

$$P(X = 2) = C(4, 2)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$= 6 \times 25 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{25}{216}$$

प्रश्न 3 वस्तुओं के एक ढेर में 5% त्रुटियुक्त वस्तुएँ हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि 10 वस्तुओं के एक प्रतिदर्श में एक से अधिक त्रुटियुक्त वस्तुएँ नहीं होंगी?

उत्तर- एक त्रुटियुक्त वस्तु प्राप्त होने की प्रायिकता p = 5%

$$= \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

एक अच्छी वस्तु प्राप्त होने की प्रायिकता,

$$q = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

10 वस्तुओं के एक प्रतिदर्श में एक से अधिक त्रुटियुक्त वस्तुएँ नहीं होंगी।

${}^{n}C_{r}q^{n-r}p^{r}$ में $n = 10$ तथा

P(0) के लिए r = 0, P(1) के लिये r = 1 रखने पर,

अभीष्ट प्रायिकता = P(0) + P(1)

$$= \left(\frac{19}{20}\right)^{10} + {}^{10}C_1\left(\frac{19}{20}\right)^{9}\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$= \left(\frac{19}{20}\right)^{9}\left(\frac{19}{20} + 10 \times \frac{1}{20}\right)$$

$$= \left(\frac{29}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^{9}$$

प्रश्न 4 52 ताश के पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से 5 पत्ते उत्तरोतर प्रतिस्थापना सहित निकाले जाते हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि-

i. सभी 5 पत्ते हुकुम के हो?
ii. केवल 3 पत्ते हुकुम के हो?
iii. एक भी पत्ता हुकुम का नहीं हो?

उत्तर- ताश की गड्डी में कुल पत्तों की संख्या = 52

तथा हुकुम के पत्तों की संख्या = 13

∴ 1 पत्ता खींचने पर हुकुम का पत्ता आने की प्रायिकता,

$$= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

∴ हुकुम का पत्ता न आने की प्रायिकता,

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

i. पाँच पत्ते खींचने पर सभी हुकुम के पत्ते आने की प्रायिकता,

$$= (14)^5 = \frac{1}{1024}$$

ii. पाँच पत्तों में से 3 पत्ते हुकुम के आने की प्रायिकता,

$$= {}^5C_3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$= {}^5C_3 \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{64}$$

$$1 = \frac{10\times 9}{16\times 64} = \frac{45}{512}$$

iii. एक भी पत्ता हुकुम का ना आने की प्रायिकता,

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

$$= \frac{3\times3\times3\times3\times3}{4\times4\times4\times4\times4} = \frac{243}{1024}$$

प्रश्न 5 किसी फैक्ट्री में बने एक बल्ब की 150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज होने की प्रायिकता 0.05 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस प्रकार के 5 बल्बों में से-

i. एक भी नहीं
ii. एक से अधिक नहीं
iii. एक से अधिक
iv. कम-से-कम एक, 150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज हो जाएँगे।

उत्तर- 150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज होने की प्रायिकता $p = 0.05$

150 दिनों में उपयोग के बाद फ्यूज न होने की प्रायिकता $q = 1 - 0.05 = 0.95$

i. P पाँचों में से कोई भी बल्ब 150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज नहीं होगा

$= (0.95)^5$

ii. P (एक से अधिक बल्ब फ्यूज नहीं होंगे)

= (एक भी बल्ब फ्यूज न हो + एक बल्ब फ्यूज हो) की प्रायिकता

$= P(0) + P(1) = (0.95)^5 + {}^5C_1 \times (0.95)^4 \times (0.05)$

$= (0.95)^4 [0.95 + 5 \times 0.05]$

$= (0.95)^4 [0.95 + 0.25]$

$= (0.95)^4 \times 1.2$

iii. P (एक से अधिक बल्ब फ्यूज होंगे)

= (2 बल्ब + 3 बल्ब +4 बल्ब + 5 बल्ब) फ्यूज होने की अलग-अलग प्रायिकता

$= P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$

$= [P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) - [P(0) + P(1)]$

$= 1 - [P(0) + P(1)]$

$= 1 - (0.95)^4 \times 1.2$

iv. P (कम-से-कम एक बल्ब फ्यूज होता है)

$= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$

$= P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) - P(0)$

$= 1 - P(0)$

$= 1 - (0.95)^5$

प्रश्न 6 एक थैले में 10 गेंदें हैं जिनमें से प्रत्येक पर 0 से 9 तक के अंकों में से एक अंक लिखा है। यदि थैले से 4 गेंदें उत्तरोत्तर पुनः वापस रखते हुए निकाली जाती है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि उनमें से किसी भी गेंद पर अंक 0 न लिखा हो?

उत्तर- एक गेंद जिसमें 0 निशान है, उसके आने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{10}$$

इसलिए,

$$P = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow q = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

यहाँ पर $n = 4$

P (किसी भी गेंद पर 0 ना लिखा हो)

$$= P(X=0) = {}^4C_0\, q^n$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = \left(\frac{9}{10}\right)^4$$

प्रश्न 7 एक सत्य-असत्य प्रकार के 20 प्रश्नों वाली परीक्षा में मान ले कि एक विद्यार्थी एक न्याय्य (unbiased) सिक्के को उछाल कर प्रत्येक प्रश्न का उत्तर निर्धारित करता है। यदि पाँसे पर चित्त प्रकट हो, तो प्रश्न का उत्तर 'सत्य' देता है और यदि पट प्रकट हो, तो असत्य' लिखता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह कम से कम 12 प्रश्नों का सही उत्तर देता है।

उत्तर- प्रश्न का सही उत्तर देने की प्रायिकता (p) = पाँसे पर चित्त आने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

∴ गलत उत्तर देने की प्रयिक्ता $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

तथा यहाँ पर n = 20

माना प्रयोग में X सफलता की संख्या को दर्शाता है-

तब $P(X = r) = {}^nC_r q^{n-r} p^r$

∵ 20 परीक्षणों में कम से काम 12 प्रश्नों के सही उत्तर होने के लिये

X = 12, 13, 14, 15, ..., 20

∴ अभीष्ट प्रायिकता = P (कम से कम 12 सही)

$$= {}^{n}C_{12}q^{n-12}p + {}^{n}C_{13}q^{n-13}p^{13} + \ldots + {}^{20}C_{20}p^{20}$$

$$= {}^{20}C_{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20-12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + {}^{20}C_{13}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20-13}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{13} + \ldots + {}^{20}C_{20}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left[{}^{20}C_{12} + {}^{20}C_{13} + \ldots + {}^{20}C_{20}\right]$$

प्रश्न 8 मान लीजिए की X का बंटन $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$ द्विपद बंटन है। दर्शाएँ कि X = 3 अधिकतम प्रायिकता वाला परिणाम है।

(संकेत: P(X = 3)सभी $P(x_i)$, x_i = 0, 2, 3, 4, 5, 6 में से अधिकतम है)

उत्तर- यहाँ पर X का द्विपद बंटन है जहाँ,

$$n = 6, P = \frac{1}{2}, = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(X = 0) = {}^{6}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(X = 1) = {}^{6}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(X = 2) = {}^{6}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 15\left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad \left[{}^{6}C_2 = \frac{6\times5}{1\times2} = 15\right]$$

$$P(X = 3) = {}^{6}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20\left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad \left[{}^{6}C_3 = \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3} = 20\right]$$

$$P(X = 4) = {}^{6}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = {}^{6}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 15\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(X = 5) = {}^{6}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 = {}^{6}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(X = 6) = {}^{6}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

क्योकि $P(X = 3) = 20\left(\frac{1}{2}\right)$ अधिकताम प्रायिकता है, [X_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]

अतः X = 3 अधिकतम प्रायिकता वाला परिणाम है

प्रश्न 9 एक बहु-विकल्पीय परीक्षा में 5 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक के तीन सम्भावित उत्तर हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि एक विद्यार्थी केवल अनुमान लगा कर चार या अधिक प्रश्नों के सही उत्तर दे देगा ?

उत्तर- माना X सही उत्तरों की संख्या

$$n = 5, p = \frac{1}{3}, q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$ द्विपद बंटन है।

अतः अभीष्ट प्रायिकता = P(X ≥ 4) = (X = 4) + P(X = 5)

तब X का बंटन

$$= {}^5C_4\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}^5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$= 5 \times \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^5} = \frac{10+1}{243} = \frac{11}{243}$$

प्रश्न 10 एक व्यक्ति एक लॉटरी के 50 टिकट खरीदता है, जिसमें उसके प्रत्येक में जीतने की। प्रायिकता $\frac{1}{100}$ है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह (a) न्यूनतम एक बार (b) तथ्यत: एक बार (c) न्यूनतम दो बार, इनाम जीतेगा?

उत्तर- माना X जीतने की संख्या

तब X वाला द्विपद बंटन है जहाँ,

$$n = 50, p = \frac{1}{100}$$

$$q = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

a. P (न्यूनतम एक बार),

= P(X ≥ 1) = 1 − P(X < 1) = 1 − P(X = 0)

$$= 1 - {}^{50}C_0 \left(\frac{99}{100}\right)^{50} \left(\frac{1}{100}\right)^{0}$$

$$= 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{50}$$

b. P (तथ्यत: एक बार),

$$= P(X = 1) = {}^{50}C_1 \left(\frac{99}{100}\right)^{49} \left(\frac{1}{100}\right)^{1}$$

$$= \frac{50}{100} \left(\frac{99}{100}\right)^{49}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{99}{100}\right)^{49}$$

c. P (न्यूनतम दो बार),

$$= P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - \left[= {}^{50}C_0 \left(\frac{99}{100}\right)^{49} \left(\frac{1}{50}\right)^{0} + = {}^{50}C_1 \left(\frac{99}{100}\right)^{49} \left(\frac{1}{100}\right)^{1} \right]$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{99}{100}\right)^{50} + \frac{1}{2} \left(\frac{99}{100}\right)^{49} \right]$$

$$= 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{49} \left(\frac{99}{100} + \frac{1}{5}\right)^{1}$$

$$= 1 - \frac{149}{100} \left(\frac{99}{100}\right)^{49}$$

प्रश्न 11 एक पाँसे को 7 बार उछालने पर तथ्यत: दो बार 5 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मानी सफलता की प्रायिकता = p।

$$\Rightarrow P = \frac{1}{6}$$

(क्योंकि पाँसे में 1, 2, 3, 4, 5, 6 आ सकता है)

∴ असफलता की प्रायिकता

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

माना X = सफलता मिलने की संख्या

यहाँ पर $n = 7, p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}$

$$P(X = 2) = {}^7C_2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{7\times6}{1\times2} \cdot \frac{5^2}{6^7} = \frac{7}{2} \cdot \frac{5^5}{6^6}$$

$$= \frac{7}{12} \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

प्रश्न 12 एक सँसे को 6 बार उछालने पर अधिकतम 2 बार छः आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- प्रश्नानुसार, n = 6, पाँसे की उछाल पर 6 आने की प्रायिकता अर्थात् सफलता की प्रायिकता

$p = \frac{1}{6}$, तब $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

माना X सफलता मिलने की संख्या

P (अधिक 2 बार 6 आना)

$$= P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= {}^6C_0 \left(\frac{5}{6}\right)^6 \left(\frac{1}{6}\right)^0 + {}^6C_1 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \left(\frac{1}{6}\right)^1 + {}^6C_2 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{5^6}{6^6} + 6 \cdot \frac{5^5}{6^5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6\times5}{1\times2} \cdot \frac{5^4}{6^4 \cdot 6^2}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^5 \left[\frac{5}{6} + 1 + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^5 \left(\frac{5+6+3}{6}\right) = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

$$= \frac{35}{18} \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

प्रश्न 13 यह ज्ञात है कि किसी विशेष प्रकार की निर्मित वस्तुओं की संख्या में 10% खराब है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इस प्रकार की 12 वस्तुओं के यादृच्छिक प्रतिदर्श में से 9 खराब है।

उत्तर- यहाँ n = 12, r = 9

वस्तु के खराब निकलने की प्रायिकता

$$= 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

∴ ख़राब निकलने की प्रायिकता $q = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

∴ 12 वस्तुओं के यादृच्छिक प्रतिदर्श में से 9 ख़राब होने की प्रायिकता

$$= {}^{12}C_9 \cdot q^{12-9} \cdot p^9$$

$$= \frac{12\times10\times11}{3\times2} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^9$$

$$= \frac{220 \cdot 9^3}{10^{12}} = \frac{22 \cdot 9^3}{10^{11}}$$

प्रश्न 14 एक बॉक्स में 100 बल्ब है। जिसमें 10 त्रुटियुक्त हैं। 5 बल्ब के नमूने में से, किसी भी बल्ब के त्रुटियुक्त न होने की प्रायिकता है:

a. 10^{-1}

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

c. $\left(\frac{9}{10}\right)^5$

d. $\frac{9}{10}$

उत्तर-

c. $\left(\frac{9}{10}\right)^5$

हल: $p = \frac{1}{10}$

$q = \frac{9}{10}$

$n = 5 \; r = 0$

$$P(X = 0) = \left(\frac{9}{10}\right)^5$$

प्रश्न 15 एक छात्र की तैराक न होने प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है तब 5 छात्रों की तैराक होने की प्रायिकता है

a. ${}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$

b. $\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$

c. ${}^5C_1\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4$

d. इनमे से कोई भी नहीं

उत्तर-

a. ${}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$

हल: $p = \frac{4}{5}$

$q = \frac{1}{5}$

$n = 5, r = 4$

$P(X=4) = {}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)$

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 599-601)

प्रश्न 1 A और B इस प्रकार घटनाएँ है की P(A) ≠ 0.P (B|A) ज्ञांत कीजिये यदि

i. A, सम्मुच्य B का उपसमुच्चय है
ii. A ∩ B = ϕ

उत्तर-

i. A ⊂ B

$\Rightarrow A \cap B = A$ [∵ A, समुच्चय B का उपसमुच्चय है]

$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$

ii. $A \cap B = \phi P(A \cap B)$ अर्थात $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

$P(B \cap A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0.$

प्रश्न 2 एक दंपति के दो बच्चे हैं-

i. दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात हैं कि दोनों बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है।
ii. दोनों बच्चों के लड़की होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात है कि बड़ा बच्चा लड़की है।

उत्तर-

i. मान लीजिये लड़का होने की घटना क्रमश: A तथा B हो, और उन्हे B तथा G से व्यक्त करें, तब।,

घटना A = दोनों बच्चै लड़के है = {B, B}

B = दोनों बच्चो मै से काम-से-काम एक लड़का है = {BG, GB, BB}

∴ (A ∩ B) = {BB}

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ तथा } P(B) = \frac{3}{4}$$

$$\therefore P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ii. माना कि,

A = दोनों बच्चै लड़कियाँ है = {G, G}

B = बड़ा बच्चा लड़की है = {GG, GB}

A ∩ B = {GG}

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ तथा } P(B) = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\therefore P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{1}{4} \div \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 3 कल्पना कीजिए कि 5% पुरुषों और 0.25% महिलाओं के बाल सफेद है। एक सफेद बालों वाले व्यक्ति को याहच्छिक चुना गया है। इस व्यक्ति के पुरुष होने की प्रायिकता क्या है? यह मान लें कि पुरुषों और महिलाओं की संख्या समान है।

उत्तर- मान लीजिए पुरुषों की संख्या समान है

घटना E_1 = पुरुष का होने,

E_2 = महिला का होना

A : सफेद बल का होना

$$\therefore P(E_1)\frac{1}{2}$$

$$P(E_2) = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{A}{E_1}\right) = 5\% = 0.05$$

$$P\left(\frac{A}{E_2}\right) = 0.25\% = 0.0025$$

अतः बेज प्रमेय से,

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2)P\left(\frac{A}{E_1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times 0.05}{\frac{1}{2}\times 0.05+\frac{1}{2}\times 0.0025}$$

$$= \frac{500}{500+2} = \frac{500}{525} = \frac{20}{21}.$$

प्रश्न 4 मान लीजिए कि 90% लोग दाहिने हाथ से काम करने वाले हैं। इसकी प्रायिकता क्या है कि 10 लोगों में से यादृच्छया चुने गए अधिक से अधिक 6 लोग दाहिने हाथ से काम करने वाले हो?

उत्तर-

$$= 90\% = 0.9 = \frac{9}{10}$$

$$\therefore q = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \text{ और } n = 10$$

P(अधिक-से-अधिक 6 लोग दाहिने हाथ से काम करते है)

= P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)

= 1 - [P(7) + P (8) + P(9) + P(10)]

$$= 1 - \left[{}^{10}C_7 \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(\frac{9}{10}\right)^7 + {}^{10}C_8 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^8 \right.$$

$$\left. + {}^{10}C_9 \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{9}{10}\right)^9 + {}^{10}C_{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \right]$$

$$= 1 - \sum_{r=7}^{10} {}^{10}C_r (0.+9)^r (0.1)^{10-r}$$

प्रश्न 5 एक कलश (पात्र) में 25 गेंदें हैं, जिनमें से 10 गेंदों पर चिह्न 'X' अंकित है और शेष 15 पर चिह 'Y'. अंकित है। कलश में से एक गेंद याद्दच्छया निकाली जाती है और उस पर ऑकत चिह्न को नोट (लिख) करके उसे कलश में प्रतिस्थापित कर दिया जाता है। यदि इस प्रकार से 6 गेंदें निकाली जाती हों, तो अग्रलिखित प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

i. सभी पर चिह्न 'X' अंकित हो।
ii. 2 से अधिक पर चिह्न 'Y' नहीं अंकित हो।
iii. कम से कम I गेंद पर चिह्न 'Y' अकित हो।
iv. 'X' तथा 'Y' चिह्नों से अंकित गेंदों की संख्याएँ समान हों।

'x' चिह से अंकित गेंदों की संख्या का माध्य भी ज़ात कीजिए।

उत्तर- कुल गेंदों की संख्या = 25

मान लीजिए घटना A और B गेंद पर X और Y की स्थिति को दर्शाता है।

यहाँ n = 6, गेंदे जो कलश से निकाली गई।

$$\therefore P(A) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \text{ तथा } P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

i. P (सभी पर चिन्ह X हो),

$$= P(X=6) = \left(\frac{2}{5}\right)^6$$

ii. घटना : 2 से अधिक गेंद पर Y अंकित न होने-

= {(6 X, 0Y), (5X, 1Y), (4X, 2Y)}

∴ P(दो से अधिक गेंदों पर Y अंकित न होना)

= P(6) + P(5) + P(4)

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^6 + {}^6C_5\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^5 + {}^6C_4\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left[\frac{4}{25} + \frac{6}{1} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{6\times5}{1\times2} \times \frac{9}{25}\right]$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left[\frac{4}{25} + \frac{36}{25} + \frac{135}{25}\right]$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^4 \frac{175}{25} = 7 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

iii. घटना : काम-से-कम एक गेंद पर Y अंकित हो।

= {(5X,Y), (4X,2Y), (3X,3Y), (2X,4Y), (LX,5Y), (0X,6Y)}

iv. घटना : X तथा Y चिंहों के अंकित गेंदों की संख्या समान हो।

P{(3X, 3y)}

$$P(3) = {}^6C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$= \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3} \times \frac{27}{25} \times \frac{8}{125}$$

$$= 20 \times \frac{27}{125} \times \frac{8}{125} \times \frac{864}{3125}$$

प्रश्न 6 एक बाधा दौड़ में एक प्रतियोगी को 10 बाधाएं पार करनी है इसकी प्रायिकता कि वह प्रत्येक बाधा को पार कर लेगा $\frac{5}{6}$ है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह 2 से कम बाधाओं को गिरा देगा (नहीं पार कर पाएगा)?

उत्तर- दिये गए कुल बढ़ाओ की संख्याओं की संख्या = 10

मान लीजिये बाधा को पर करने की प्रायिकता $q = \frac{5}{6}$

अतः बाधा को पर न करने की प्रायिकता $p = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

∴ P(दो से काम बाधाओं को न पर करना)

$$= P(10) + P(9)$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + {}^{10}10_9\left(\frac{5}{6}\right)^9\Big|\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^9\left[\frac{5}{6} + 10 \times \frac{1}{6}\right] = \left(\frac{5}{6}\right)^9 \times \frac{15}{6}$$

$$= \frac{5}{2} \times \left(\frac{5}{9}\right)^9 = \frac{5^{10}}{2 \times 6^9}$$

प्रश्न 7 एक पासे को बार-बार तब तक उछाला जाता है जब तक कि उस पर 6 का अंक तीन बार प्राप्त नहीं हो जाता। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर तीसरा 6 का अंक उसे छठी बार उछालने पर प्राप्त होता है।

उत्तर- पासे की उछाल में पासे पर 6 न आने कि प्रायिकता

$$= \frac{1}{6} \text{ अर्थात } P = \frac{1}{6}$$

∴ पासे पर 6 न आने की प्रायिकता $(q) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

P(पासें पर 5 उछालों पर 2 बार 6 और 3 न आना)

$$= {}^5V_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

P(छटी बार में 6 आना)

$$= {}^5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{10 \times 5^3}{6^6} = \frac{1250}{46656}$$

$$= \frac{625}{23328}$$

प्रश्न 8 यदि एक लीप वर्ष को यादृच्छया चुना गया हो तो इसकी क्या प्रायिकता है कि उस वर्ष में 53 मंगलवार होंगे?

उत्तर- एक लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं। इसमें 52 पूर्ण सप्ताह हैं और 2 दिन शेष रहते हैं। इन दोनों दिनों को इस प्रकार लिखा जा सकता है-

(सोमवार, मंगलवार), (मंगलवार, बुधवार), (बुधवार, बृहस्पतिवार), (बृहस्पतिवार, शुक्रवार), (शुक्रवार, शनिवार) (शनिवार, रविवार), (रविवार, सोमवार)

इस प्रकार के कुल समूहों की संख्या = 7

इनमें से मंगलवार दो बार आता है। यानी (सोमवार, मंगलवार), (मंगलवार, बुधवार)

अत: लीप वर्ष में 53 मंगलवार आने की प्रायिकता

$$= \frac{2}{7}$$

प्रश्न 9 एक प्रयोग के सफल होने का संयोग उसके असफल होने से दो गुना है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि अगले छः परीक्षणों में कम से कम 4 सफल होंगे।

उत्तर- मान लीजिए सफल होने की प्रायिकता P है और असफल होने की प्रायिकता q हो, तब

P = 2q = 2(1 - p) = 2 - 2p

या $3P = 2$ या $P = \frac{2}{3}$, और $q = \frac{1}{3}$

P(अगली 6 परीक्षणों में कम-से-कम 4 सफल है)

$$= P(4) + P(5) + P(6)$$

$$= {}^6C_4\, q^2p^4 + {}^6C_5\, qp^5 + p^6$$

$$= \frac{6\times5}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \frac{6}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left[\frac{6\times5}{2} \times \frac{1}{9} + \frac{6}{1} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right]$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left[\frac{15}{9} + \frac{12}{9} + \frac{4}{9}\right] = \frac{31}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

प्रश्न 10 एक व्यक्ति एक न्याय्य सिक्के को कितनी बार उछाले कि कम से कम एक चित की प्रायिकता 90% से अधिक हो?

उत्तर- मान लीजिए सिक्के को n बार उछाला जाता है

अतः एक सिक्के को उछलने पर चित आने की प्रायिकता $(\mathrm{p}) = \frac{1}{2}$

तथा एक सिक्के को उछलने पर चित न आने की प्रायिकता $(\mathrm{q}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

n सिक्के को उछलने पर कोई भी चित न आने की प्रायिकता $= \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}}$

तथा कम-से-कम एक चित आने की प्रायिकता $= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}}$

दिया गया है: $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}} > 90\%$

$\therefore 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}} > 0.9$

या $\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}} \leq 1 - 0.9 = 0.1$

या $\mathrm{n} \geq 4$

प्रश्न 11 एक खेल में किसी व्यक्ति को एक न्याय्य पासे को उछालने के बाद छ: प्रकट होने पर एक रुपया मिलता है और अन्य कोई संख्या प्रकट होने पर वह एक रुपया हार जाता है। एक व्यक्ति यह निर्णय लेता है, कि वह पासे को तीन बार फेंकेगा लेकिन जब भी छः प्राप्त होगा वह खेलना छोड़ देगा। उसके द्वारा जीती/ हारी गई राशि की प्रत्याशा ज्ञात कीजिए।

उत्तर- एक सिक्के को उछाले जाने पर 6 आने की प्रायिकता $(\mathrm{P}) = \frac{1}{6}$

और 6 न आने की प्रायिकता

$$(\mathrm{q}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

i. यदि पहली उछाल में 6 आने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

ii. यदि पहली उछाल में 6 न आए परन्तु दुसरी उछाल में 6 आए, तो प्रायिकता,

$$= \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{36}$$

iii. पहली दोनों उछालो में 6 न आए परन्तु तीसरी उछाल में 6 आए, तो प्रायिकता,

$$= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

पहली बार में 6 आने पर उसे 1 रुपये मिलते है।

दुसरी बार 6 आने -1 + 1 = 0 रुपये मिलते है।

तीसरी बार में 6 आने पर -1 - 1 + 1= -1 रुपया मिलता है 1 रुपये की हानि होती है।

∴ प्रायिकता बंटन इस प्रकार है-

X	1	0	−1
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{21}{216}$

प्रत्याशा $= 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{36} + (-1) \times \frac{25}{216}$

$$= \frac{1}{6} - \frac{25}{216} = \frac{36-25}{216} = \frac{11}{216}$$

∴ उसके द्वारा जीती गई राशि की प्रत्याशा $= \frac{11}{216}$

प्रश्न 12 मान लीजिए हमारे पास A, B, C और D बक्से हैं जिसमें रखी संगमरमर की लाल, सफेद और काली टुकड़ियों का विवरण निम्न तरीके से है यादृच्छया एक बॉक्स चुना जाता है तथा इससे एक टुकड़ा निकाला जाता है। यदि टुकड़ा लाल हो तो इसे बॉक्स A बॉक्स B, बॉक्स C से निकाले जाने की क्या प्रायिकता है?

बॉक्स	**संगमरमर की टुकड़ियों का रंग**		
	लाल	**सफ़ेद**	**काला**
A	1	6	3

B	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

उत्तर-

दिये गए 4 बॉक्स मे से एक बॉक्स चुने जाने की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$

अर्थात $P(E) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$

मान लीजिये A घटना लाल रंग की टुकड़ी निकलना है, बॉक्स A में कुल 10 टुकडियाँ है जिनमे 1 लाल है।

$$\therefore P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{1}{10}$$

इसी प्रकार,

$$P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{6}{10}$$

$$P\left(\frac{A}{E_3}\right) = \frac{8}{10}$$

और $P\left(\frac{A}{E_4}\right) = 0$

$\therefore$ बैज प्रमेय से,

$$P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{P(E)_1 P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E)_1 P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E)_2 P\left(\frac{A}{E_2}\right) + P(E)_3 P\left(\frac{A}{E_3}\right) + P(E)_4 P\left(\frac{A}{E_4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{4} \times 0}$$

$$= \frac{1}{1+6+8} = \frac{1}{15}$$

पुनः बैज प्रमेय से,

$$P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{P(E)_1 P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E)_1 P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E)_2 P\left(\frac{A}{E_2}\right) + P(E)_3 P\left(\frac{A}{E_3}\right) + P(E)_4 P\left(\frac{A}{E_4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{8}{10}+\frac{1}{4}\times 0}$$

$$= \frac{6}{1+6+8} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

तथा बैज प्रमेय से

$$P\left(\frac{A}{E_3}\right) = \frac{P(E)_1 P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E)_1 P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E)_2 P\left(\frac{A}{E_2}\right) + P(E)_3 P\left(\frac{A}{E_3}\right) + P(E)_4 P\left(\frac{A}{E_4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{8}{10}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{8}{10}+\frac{1}{4}\times 0}$$

$$= \frac{8}{1+6+8} = \frac{8}{15}$$

अतः लाल रंग की टुकडी बॉक्स A, बॉक्स B, बॉक्स C से चुने जाने की प्रायिकता क्रमशः

$\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ और $\frac{8}{15}$ है।

प्रश्न 13 मान लीजिए किसी रोगी को दिल का दौरा पड़ने का संयोग 40% है। यह मान लिया जाता है कि ध्यान ओर योग विधि दिल का दौरा पड़ने के खतरे को 30% कम कर देता है और दवा द्वारा खतरे को 25% कम किया जा सकता है। किसी भी समय रोगी इन दोनों में से किसी एक विकल्प का चयन करता है। यह दिया गया है कि उपरोक्त विकल्पों से किसी एक का चुनाव करने वाले रोगियों से यादृच्छया चुना गया रोगी दिल के दौरे से ग्रसित हो जाता है। रोगी द्वारा ध्यान और योग विधि का उपयोग किए जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान लीजिये घटना E_1, E_2 तथा E क्रमशः ध्यान व् योग से लाभ की घटना, दवा द्वारा इलाज की घटना और दिल का दौरा पड़ने की घटनाएँ हो, तब

$$P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_2) = \frac{1}{2}, P(E) = 40\% = 0.4$$

दिया है कि ध्यान व् योग से दिल का दौरा पड़ने का खतरा 30% कम हो जाता है

अर्थात दिल का दौरा 70% खतरा है

या $\frac{E}{E_1}$ = ध्यान व योग से दिल का पड़ता है

$$\therefore P\left(\frac{E}{E_1}\right) = 0.40 \times 7.0 = 0.28$$

तथा दवा द्वारा दिल का दौरा पड़ने का 25% खतरा काम हो जाता है

अर्थात दवा द्वारा दिल का दौरा पड़ने से खतरा 75% है

$$\therefore P\left(\frac{E}{E_2}\right) = 0.4 \times 0.75 = 0.30$$

इस प्रकार $P(E)_1 = \frac{1}{2}, P(E)_2 = \frac{1}{2}$

$$P\left(\frac{E}{E_1}\right) = 0.28, P\left(\frac{E}{E_2}\right) = 0.30$$

अतः बैज प्रमेय से,

$$P\left(\frac{E_1}{E}\right) = \frac{PE_1P\left(\frac{E}{E_1}\right)}{PE_1P\left(\frac{E}{E_1}\right)+PE_2P\left(\frac{E}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times0.28}{\frac{1}{2}\times0.28+\frac{1}{2}\times0.30} = \frac{28}{28+30}$$

$$= \frac{28}{58} = \frac{14}{29}$$

प्रश्न 14 यदि 2 कोटि के एक सारणिक के सभी अवयव शून्य या एक हो तो सारणिक का धनात्मक मान होने की क्या प्रायिकता हैं। (मान लीजिए की सारणिक के प्रत्येक अवयव स्वतंत्र रूप से चुने जा सकते हैं तथा प्रत्येक की चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।)

उत्तर- चूँकि 2 कोटि के एक सारणिक मै अवयवों की संख्या = 4

∴ सारणिकों द्वारा बनी संख्या 24 = 16

जिसके धनात्मक सरणिक केवल

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ और } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

इस प्रकार उपरोक्त सरणी के प्रत्येक अवयव को चुनने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}$$

प्रश्न 15 एक इलेक्ट्रॉनिक एसेंबली के दो सहायक निकाय A और B हैं। पूर्ववर्ती निरीक्षण द्वारा निम्न प्रायिकताएँ ज़ात है:

P(A के असफल होने की) = 0.2

P(B के अकेले असफल होने की) = 0.15

P(A और B के असफल होने की) = 0.15

तो प्रायिकता ज़ानत कीजिए:

i. P(A असफल B असफल हो चुकी हो)
ii. P(A के अकेले असफल होने की)

उत्तर- मान लीजिए घटना A और B के असफल होने को क्रमशः A', B' से व्यक्त किया गया है

प्रश्नानुसार P(A)' = 0.2

P(A और B के असफल होना) = P(A' ∩ B') = 0.15

P(B के अकेले असफल होना) = P(B') - P(A' ∩ B') = 0.15

या P(B') - 0.15 = 0.15

∴ P(B') = 0.15 + 0.15 = 0.30

i. $A\left(\frac{A'}{B'}\right) = \frac{P(A'\cap B')}{P(B')}$

$= \frac{0.15}{0.30} = \frac{1}{2} = 0.5$

ii. P(A अकेले असफल होता है)

= P(A अकेले ही)

$= P(A') - P(A' \cap B)$

$= 0.2 - 0.15 = 0.05$

प्रश्न 16 थैले 1 मै 3 लाल तथा 4 काली गेंदे है तथा थैला 11 में 4 लाल और 5 काली गेंदे है एक गेंद को थैला 1 से थैले 2 में स्थानान्तरित किया जाता है और तब एक गेंद थैला 2 से निकाली जाती है निकाली गई गेंद लाल रंग की है स्थानान्तरित गेंद की काली होने की प्रायिकता ज्ञांत कीजिए-

उत्तर- थैले 1 में 3 लाल और 4 काली गेंदे है

तथा थैले 2 मै 4 लाल और 5 काली गेंद है

मान लीजिए घटना E_1 तथा E_2 थैले 1 से लाल गेंद और गेंद काली गेंद निकालने की हा, तब

$\therefore PE_1 = \frac{3}{7}, P(E)_2 = \frac{4}{7}$

घटना A लाल रंग की गेंद निकलना

एक लाल गेंद थैले 1 से निकाल कर 2 में रख दी गई इस प्रकार थैले 2 में 5 लाल और 5 काली गेंदे हो गई

$$\therefore P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{5}{10}$$

एक काली गेंद थाले 1 से निकालकर थैला 2 मै रख दी इस प्रकार दूसरे थैले में 4 लाल और 6 काली गेंद है

$$\therefore P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{4}{10}$$

बेज प्रमेय से,

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2)P\left(\frac{A}{E_1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}}{\frac{3}{7}\times\frac{5}{10}+\frac{4}{7}\times\frac{4}{10}}$$

$$= \frac{16}{15+16} = \frac{16}{31}$$

प्रश्न 17 निम्नलिखित प्रश्नो के सही उत्तर का चुनाव कीजिए:

यदि A और B दो ऐसी घटनाएँ है की $P(A) \neq 0, P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$ तब:

a. $A \subset B$

b. $B \subset A$

c. $B = \phi$

d. $A = \phi$

उत्तर-

a. A⊂B

हल:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{B(A)} = 1$$

जहाँ $A \subset B, A \cap B = P(A)$

$$(A \cap B) = P(A)$$

प्रश्न 18 निम्नलिखित प्रश्नो के सही उत्तर का चुनाव कीजिए-

यदि $P\left(\frac{A}{B}\right) > P(A)$, तब निम्न में से कौन सही है?

a. $P\left(\frac{B}{A}\right) < P(B)$

b. $P(A \cap B) < P(A) \cdot (B)$

c. $P\left(\frac{B}{A}\right) > P(B)$

d. $P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)$

उत्तर-

c. $P\left(\frac{B}{A}\right) > P(B)$

हल:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) > A$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A)$$

$$\therefore P(A \cap B) > P(A).P(B)$$

या $$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} > P(B)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{B}{A}\right) > P(B)$$

प्रश्न 19 निम्नलिखित प्रश्नो के सही उत्तर का चुनाव कीजिए:

यदि A और B ऐसी दो घटनाएँ है की P(A) + P(B) - P(A और B) = P(A) तब

a. $P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$

b. $P\left(\frac{A}{B}\right) = 1$

c. $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0$

d. $P\left(\frac{A}{B}\right) = 0$

उत्तर-

b. $P\left(\frac{A}{B}\right) = 1$

हल:

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A)$$

$$\Rightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0$$

या $P(A \cap B) = P(B)$

या $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1$

या $P\left(\frac{A}{B}\right) = 1$