

गणित

अध्याय-12: वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल



वृत्त का परिमाण

एक वृत्त के अनुदिश एक बार चलने में तय की गई दूरी उसका परिमाण होता है, जिसे प्रायः परिधि कहा जाता है। वृत्त की परिधि का उसके व्यास के साथ एक अचर अनुपात होता है। इस अचर अनुपात को एक यूनानी अक्षर π (जिसे 'पाई' पढ़ा जाता है) से व्यक्त किया जाता है। दूसरे शब्दों में,

$$\text{परिधि/व्यास} = \pi$$

$$\text{या परिधि} = \text{व्यास} \times \pi$$

$$= \pi \times 2r \text{ (जहाँ } r \text{ वृत्त की त्रिज्या है)}$$

$$= 2\pi r$$

नोट:

π का संख्यात्मक मान $22/7$ या 3.1416 प्रयोग किया जाता है।

वृत्त का क्षेत्रफल

वृत्त का क्षेत्रफल त्रिज्या के वर्ग का पाई गुना होता है ($A = \pi r^2$)। इस सूत्र का प्रयोग करते हुए उस वृत्त का क्षेत्रफल आसानी से ज्ञात कर सकते हैं जिसके व्यास या त्रिज्या दी गई हो।

उदाहरण

एक वृत्ताकार खेत पर रु 24 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय रु 5280 है। इस खेत की रु 0-50 प्रति वर्ग मीटर की दर से जुताई कराई जानी है। खेत की जुताई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$ लीजिए)

हल:

$$\text{बाड़ की लंबाई (मीटर में)} = \text{पूरा व्यय/दर} = 5280/24 = 220$$

$$\text{अतः खेत की परिधि} = 220 \text{ मीटर}$$

इसलिए यदि खेत की त्रिज्या r मीटर है, तो

$$2\pi r = 220$$

$$\text{या } 2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$$

$$\text{इसलिए, } r = \frac{(220 \times 7)}{(2 \times 22)} = 35$$

अर्थात् खेत की त्रिज्या 35 मीटर है।

$$\text{अतः खेत का क्षेत्रफल} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 35 \times 35 \text{ m}^2$$

$$\text{अब } 1 \text{ m}^2 \text{ खेत की जुताई का व्यय} = \text{रु } 0.50$$

$$\text{अतः खेत की जुताई कराने का कुल व्यय} = 22 \times 5 \times 35 \times 0.50 = \text{रु } 1925$$

दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 19 cm और 9 cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है।

$$\text{प्रथम वृत्त का परिमाण} = 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 19$$

$$\text{दूसरे वृत्त का परिमाण} = 2 \times \frac{22}{7} \times 9$$

$$\text{तीसरे वृत्त की परिधि} = 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 19 + 2 \times \frac{22}{7} \times 9 = 2 \times \frac{22}{7} \times (19 + 9)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 28$$

$$2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 28$$

$$\text{इसलिए, } r = 28 \text{ cm}$$

त्रिज्यखंड और वृत्तखंड

त्रिज्यखंड: एक वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो दो त्रिज्याओं और संगत चाप से घिरा (परिबद्ध) हो, उस वृत्त का एक त्रिज्यखंड कहलाता है।

त्रिज्यखण्ड और वृत्तखण्ड



वृत्तखंड: वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो एक जीवा और संगत चाप के बीच में परिवर्द्ध हो एक वृत्तखंड कहलाता है।

टिप्पणी

जब तक अन्यथा न कहा जाए, 'वृत्तखंड' और 'त्रिज्यखंड' लिखने से हमारा तात्पर्य क्रमशः लघु वृत्तखंड और लघु त्रिज्यखंड से होगा।

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

- त्रिज्यखंड की चाप की लम्बाई = $\theta / 360 \times 2\pi r$
- लघु त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\theta / 360 \times \pi r^2$

वृत्त का वह भाग है जो दो त्रिज्याओं एवं एक चाप से घिरा हो, वह त्रिज्यखंड कहलाता है



- वृत्तखंड की चाप की लम्बाई = $\theta / 360 \times 2\pi r$

मान लीजिए OAPB केंद्र O और त्रिज्या R वाले वृत्त का एक त्रिज्यखंड है। मान लीजिए $\angle AOB$ का अंशीय माप θ है।

आप जानते हैं कि एक वृत्त [वस्तुतः एक वृत्तीय क्षेत्र या चकती] का क्षेत्रफल πr^2 होता है।

एक तरीके से, हम इस वृत्तीय क्षेत्र को केंद्र व् पर 360° का कोण बनाने वाला (अंशीय माप 360) एक त्रिज्यखंड मान सकते हैं। फिर ऐकिक विधि का प्रयोग करके, हम त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल नीचे दर्शाए अनुसार ज्ञात कर सकते हैं:

जब केंद्र पर बने कोण का अंशीय माप 360 है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = πr^2

अतः, जब केंद्र पर बने कोण का अंशीय माप 1 है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\pi r^2/360$

इसलिए जब केंद्र पर बने कोण का अंशीय माप θ है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\pi r^2/360 \times \theta$

इस प्रकार, हम वृत्त के एक त्रिज्यखंड के क्षेत्रफल के लिए, निम्नलिखित संबंध (या सूत्र) प्राप्त करते हैं:

कोण θ वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\theta/360 \times \pi r^2$

जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है और θ त्रिज्यखंड का अंशों में कोण है।

त्रिज्यखंड के संगत चाप की लंबाई

अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है: क्या हम इस त्रिज्यखंड की संगत चाप APB की लंबाई ज्ञात कर सकते हैं। हाँ, हम ऐसा कर सकते हैं। पुनः, ऐकिक विधि का प्रयोग करने तथा संपूर्ण वृत्त (360° कोण वाले) की लंबाई $2\pi r$ लेने पर,

हम चाप APB की वांछित लंबाई $\theta/360 \times 2\pi r$ प्राप्त करते हैं।

अतः कोण θ वाले त्रिज्यखंड के संगत चाप की लंबाई = $\theta/360 \times 2\pi r$

त्रिज्या 4 cm वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 30° है। साथ ही, संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

दिया हुआ त्रिज्यखंड OAPB है।

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\theta/360 \times \pi r^2$

= $30/360 \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ cm}^2$

$$= 12.56/3 \text{ cm}^2 = 4.19 \text{ cm}^2$$

संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = πr^2 - त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल

$$= (3.14 \times 16 - 4.19) \text{ cm}^2$$

$$= 46.05 \text{ cm}^2 = 46.1 \text{ cm}^2$$

वृत्तखंड का क्षेत्रफल

आइए अब केंद्र और त्रिज्या वाले वृत्तखंड के क्षेत्रफल पर विचार करें। आप देख सकते हैं कि

वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$$= \text{त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} - \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= \theta/360 \times 2\pi r^2 - \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल}$$

दिए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि वृत्त की त्रिज्या 21 cm है और $\angle AOB = 120^\circ$ है। ($\pi = 22/7$ लीजिए)

$$\text{वृत्तखंड AYB का क्षेत्रफल} = \text{त्रिज्यखंड OAYB का क्षेत्रफल} - \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल (1)}$$

$$\text{अब, त्रिज्यखंड वृत्त का क्षेत्रफल} = 120/360 \times 22/7 \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 462 \text{ cm}^2 \text{ (2)}$$

ΔOAB का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए $OM \perp AB$ खींचिए।

ध्यान दीजिए कि $OA = OB$ है। अतः, RHS सर्वांगसमता से, $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ है।

इसलिए M जीवा AB का मध्य-बिंदु है तथा $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$ है।

मान लीजिए, $OM = x \text{ cm}$ है।

$$\text{इसलिए, } \Delta OMA \text{ से } OM/OA = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{या } x/21 = \frac{1}{2}$$

$$x = 21/2 \text{ cm}$$

अतः $OM = \frac{1}{2}$

साथ ही $AM/OA = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$

अतः $AM = 21\sqrt{3}/2 \text{ cm}$

इसलिए $AB = 2 AM = 21\sqrt{3} \text{ cm}$

अतः ΔOAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times OM = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times 21/2 \text{ cm}^2$

$= (441\sqrt{3})/4 \text{ cm}^2$ (3)

इसलिए वृत्तखंड का क्षेत्रफल $= \{462 - (441\sqrt{3})/4\} \text{ cm}^2$ (समीकरण 1, 2 और 3 से)

$= 21/4(88 - 21\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

समतल आकृतियों के संयोजनों के क्षेत्रफल

अभी तक हमने विभिन्न आकृतियों के क्षेत्रफल पृथक-पृथक रूप से ज्ञात किए हैं। अब समतल आकृतियों के कुछ संयोजनों के क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रयत्न करें। हमें इस प्रकार की आकृतियाँ दैनिक जीवन में तथा विभिन्न रोचक डिज़ाइनों के रूप में देखने को मिलती हैं। फूलों की क्यारियाँ, नालियों के ढक्कन, खिड़कियों के डिज़ाइन, मेज़ पोशों पर बने डिज़ाइन आदि ऐसी आकृतियों के कुछ उदाहरण हैं। इन आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रक्रिया को हम कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

एक वर्ग ABCD जिसकी एक भुजा का माप 14 Cm है। वर्ग के अन्दर भुजाओं को स्पर्श करते हुए चार वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हुए बनाए गए हैं वृत्तों को छोड़कर बचे हुए वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= 14 \times 14 \text{ cm}^2 = 196 \text{ cm}^2$

प्रत्येक वृत्त का व्यास $= 14/2 = 7 \text{ cm}$

इसलिए त्रिज्या $= 7/2 \text{ cm}$

अतः एक वृत्त का क्षेत्रफल $= 22/7 \times 7/2 \times 7/2 \text{ cm}^2$

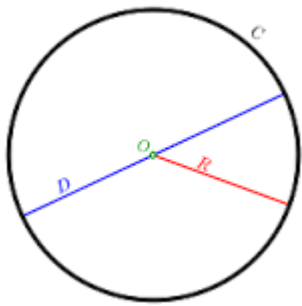
$$= 154/4 \text{ cm}^2$$

$$\text{इस प्रकार 4 वृत्तों का क्षेत्रफल} = 4 \times 154/4 \text{ cm}^2 = 154 \text{ cm}^2$$

$$\text{अतः वृत्तों को छोड़कर बचे हुए वर्ग का क्षेत्रफल} = (196 - 154) \text{ cm}^2$$

$$= 42 \text{ cm}^2$$

वृत्त की परिधि (circumference) - वृत्त की वक्रिय (curve) सीमा की लंबाई उसका परिमाण



● वृत्त की परिधि का उसके व्यास (diameter) के साथ एक अचर अनुपात (constant ratio) होता है, जिसे हम एक यूनानी अक्षर π (पाई) से दर्शाते हैं।

$$* \text{ परिधि/व्यास} = \pi$$

$$* \text{ परिधि} = \text{व्यास} \times \pi$$

या

$$* \text{ परिधि} = 2r \times \pi \quad (r \text{ वृत्त की त्रिज्या है})$$

या

$$* \text{ परिधि} = 2\pi r$$

● π एक अपरिमेय संख्या (irrational number) है, जिसका दशमलव प्रसार (decimal expansion) अनवसानी अनावृत्ति (non-terminating non recurring) है। फिर भी हम प्रश्नों को हल करने के लिए π का मान $22/7$ या 3.14 रखते हैं।

जब दो संयोजित आकृतियों (joint shapes) में से किसी एक या दोनों का क्षेत्रफल ज्ञात करना हो, तो -

- किसी आकृति के अभ्यंतर (interior) में अन्य आकृतियाँ संयोजित हैं, तो पहले बड़ी आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करके अभ्यंतर वाली आकृतियों का क्षेत्रफल घटाओ या अन्य संक्रिया (operation) करो जो कहा गया हो।
- आकृति को ध्यानपूर्वक देखो कि यह किस आकृति का भाग है।
- संयोजित आकृतियों में सम्बन्ध स्थापित करने का प्रयास करें, तभी कोई हल सम्भव है।

Example:

दो वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 19 cm और 9 cm हैं | उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है |

हल : पहले वृत्त की त्रिज्या $R = 19$ cm

दूसरे वृत्त की त्रिज्या $r = 9$ cm

नए वृत्त का परिमाण = पहले वृत्त का परिमाण + दूसरे वृत्त का परिमाण

$$\text{नए वृत्त का परिमाण} = 2\pi R_1 + 2\pi r_2$$

$$= 2\pi(R + r)$$

$$= 2\pi(19 + 9)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 28$$

$$= 2 \times 22 \times 4$$

$$= 176 \text{ cm}$$

दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 cm और 6 cm हैं | उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है |

हल : पहले वृत्त की त्रिज्या $R = 8$ cm

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

दूसरे वृत्त की त्रिज्या $r = 6 \text{ cm}$

नए वृत्त का परिमाण = पहले वृत्त का परिमाण + दूसरे वृत्त का परिमाण

$$\text{नए वृत्त का परिमाण} = \pi R^2 + \pi r^2$$

$$= \pi(R^2 + r^2)$$

$$= 2\pi(19 + 9)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 28$$

$$= 2 \times 22 \times 4$$

$$= 176 \text{ cm}$$

आकृति एक तीरंदाजी लक्ष्य को दर्शाती है, जिसमें केंद्र से बाहर की ओर पाँच क्षेत्र GOLD, RED, BLUE, BLACK और WHITE चिह्नित हैं, जिनसे अंक अर्जित किए जा सकते हैं। GOLD अंक वाले क्षेत्र का व्यास 21 cm है तथा प्रत्येक अन्य पट्टी 10.5 cm चौड़ी है। अंक प्राप्त कराने वाले इन पाँचों क्षेत्रों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल :

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

(i) गोल्ड की त्रिज्या $r = \frac{21}{2} = 10.5 \text{ cm}$

$$\text{GOLD का क्षेत्रफल} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$$

$$= \frac{11 \times 3 \times 21}{2}$$

$$= \frac{693}{2} = 346.5 \text{ cm}^2$$

(ii) RED के लिए $R = 21 \text{ cm}$ और $r = \frac{21}{2} \text{ cm}$

$$\text{RED का क्षेत्रफल} = \pi(R^2 - r^2)$$

$$= \frac{22}{7} \left[21^2 - \left(\frac{21}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{22}{7} [21^2 - 10.5^2]$$

$$= \frac{22}{7} (21 + 10.5) (21 - 10.5)$$

[चूँकि $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$$= \frac{22}{7} (31.5) (10.5)$$

$$= 22 \times 31.5 \times 1.5$$

$$\text{RED} = 1039.5 \text{ cm}^2$$

(iii) BLUE के लिए $R = 31.5$ cm और $r = 21$ cm

$$\begin{aligned} \text{BLUE का क्षेत्रफल} &= \pi(R^2 - r^2) \\ &= \frac{22}{7} [(31.5)^2 - (21)^2] \\ &= \frac{22}{7} (31.5 + 21) (31.5 - 21) \end{aligned}$$

[चूँकि $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$$\begin{aligned} &= \frac{22}{7} (52.5) (10.5) \\ &= 22 \times 52.5 \times 1.5 \end{aligned}$$

$$\text{BLUE} = 1732.5 \text{ cm}^2$$

(iv) BLACK के लिए $R = 42$ cm और $r = 31.5$ cm

$$\begin{aligned} \text{BLACK का क्षेत्रफल} &= \pi(R^2 - r^2) \\ &= \frac{22}{7} [(42)^2 - (31.5)^2] \\ &= \frac{22}{7} (42 + 31.5) (42 - 31.5) \end{aligned}$$

[चूँकि $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$$\begin{aligned} &= \frac{22}{7} (73.5) (10.5) \\ &= 22 \times 73.5 \times 1.5 \end{aligned}$$

$$\text{BLACK} = 2425.5 \text{ cm}^2$$

(iv) WHITE के लिए $R = 52.5$ cm और $r = 42$ cm

BLACK का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

$$= \frac{22}{7} [(52.5)^2 - (42)^2]$$

$$= \frac{22}{7} (52.5 + 42) (52.5 - 42)$$

[चूँकि $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$$= \frac{22}{7} (94.5) (10.5)$$

$$= 22 \times 94.5 \times 1.5$$

$$\text{WHITE} = 3118.5 \text{ cm}^2$$

किसी कार के प्रत्येक पहिये का व्यास 80 cm है | यदि यह कार 66 km प्रति घंटे की चाल से चाल रही है, तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाती है ?

हल :

पहिये का व्यास = 80 cm

पहिये की त्रिज्या (r) = 40 cm

कार की चाल = 66 km प्रति घंटा

$$= \frac{66 \times 1000}{60} \text{ m प्रति मिनट}$$

$$= 1100 \text{ m प्रति मिनट}$$

$$10 \text{ मिनट में तय दूरी} = 1100 \text{ m} \times 10$$

$$= 11000 \text{ m}$$

$$\text{अब, एक चक्कर में तय दूरी} = 2 \pi r$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 40$$

$$= \frac{1760}{7} \text{ cm}$$

$$\text{या} = \frac{1760}{700} \text{ m}$$

$$\text{अतः 10 मिनट में चक्करों की संख्या} = \frac{10 \text{ मिनट में तय दूरी}}{1 \text{ चक्कर में तय दूरी}}$$

$$= \frac{11000}{\frac{1760}{700}}$$

$$\text{या} = \frac{11000}{1} \times \frac{700}{1760} \text{ चक्कर}$$

$$\text{या} = \frac{1000}{1} \times \frac{700}{160}$$

$$\text{या} = \frac{100}{1} \times \frac{700}{16}$$

$$\text{या} = \frac{100}{1} \times \frac{700}{4 \times 4}$$

$$\text{या} = 25 \times 25 \times 7$$

$$\text{या} = 625 \times 7$$

$$\text{या} = 4375 \text{ चक्कर}$$

निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

यदि एक वृत्त का परिमाण और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है, तो उस वृत्त की त्रिज्या है :

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

(A) 2 मात्रक

(B) π मात्रक

(C) 4 मात्रक

(D) 7 मात्रक

हल : वृत्त का परिमाण और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर हैं -

$$\text{इसलिए } 2\pi r = \pi r^2$$

या $2 = r$ [दोनों पक्षों का सरलीकरण करने पर]

अतः वृत्त की त्रिज्या 2 मात्रक है।

उत्तर : (A) 2 मात्रक

6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है।

हल :

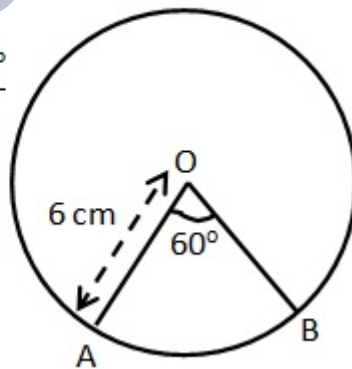
त्रिज्या (r) = 6 cm और कोण $\theta = 60^\circ$

$$\text{त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$$

$$\text{या} = \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 6 \times 60^\circ}{360^\circ}$$

$$\text{या} = \frac{22}{7} \times \frac{6}{1}$$

$$\text{या} = \frac{132}{7} \text{ cm}^2$$



एक वृत्त, के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 cm है।

हल :

परिधि = 22 cm

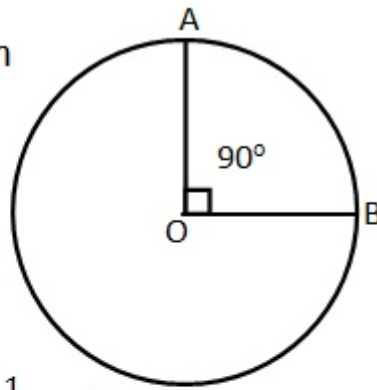
12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

या $2 \pi r = 22 \text{ cm}$

या $2 \times \frac{22}{7} \times r = 22 \text{ cm}$

या $r = 22 \times \frac{7}{2 \times 22}$

या $r = \frac{7}{2} \text{ cm}$



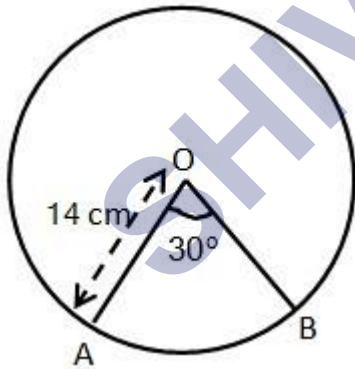
अब, चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \pi r^2$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= \frac{77}{8} \text{ cm}^2$$

एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14 cm है | इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :



त्रिज्या (r) = मिनट की सुई जिसकी लंबाई = 14 cm

घड़ी के सुई द्वारा 1 मिनट में बना कोण = $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$

इसलिए 5 मिनट में बना केन्द्रीय कोण $\theta = 6^\circ \times 5 = 30^\circ$

5 मिनट में रचित क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$

या $= \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14 \times 30^\circ}{360^\circ}$

या $= \frac{22}{1} \times \frac{2 \times 14}{12}$

या $= \frac{11}{1} \times \frac{14}{3} \text{ cm}^2$

या $= \frac{154}{3} \text{ cm}^2$

10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर समकोण अंतरित करती है। निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

- (i) संगत लघु वृत्तखंड (ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखंड

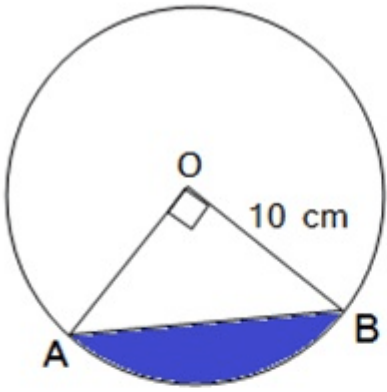
हल :

(i) संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

त्रिज्या (r) = 10 cm

$\theta = 90^\circ$

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल



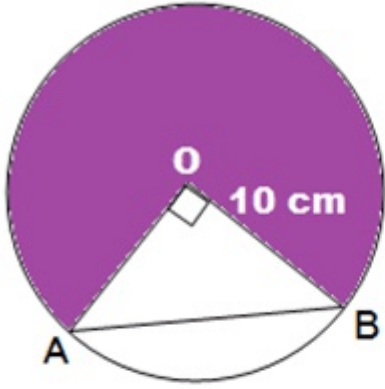
$$\text{संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

$$= \frac{3.14 \times 10 \times 10 \times 90}{360} - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 90^\circ$$

$$= \frac{314}{4} - 50$$

$$= 78.5 - 50 = 28.5 \text{ cm}^2$$

SHIVOM CLASSES
8696608541



(ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2(360 - \theta)}{360}$

$$= \frac{3.14 \times 10 \times 10 (360 - 90)}{360}$$

$$= \frac{314 \times (270)}{360}$$

$$= \frac{314 \times 3}{4}$$

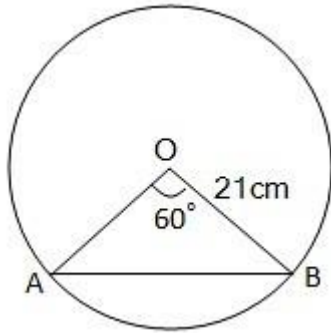
$$= 78.5 \times 3 = 235.5 \text{ cm}^2$$

त्रिज्या 21 cm वाले वृत्त का एक चाप केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए :

- (i) चाप की लंबाई
- (ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल
- (iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल

हल : त्रिज्या (r) = 21 cm

$$\theta = 60^\circ$$



$$(i) \text{ चाप की लंबाई} = \frac{\pi r \theta}{180} = \frac{\frac{22}{7} \times 21 \times 60}{180}$$

$$= \frac{22 \times 3}{3} = 22 \text{ cm}$$

(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360}$$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 60}{360}$$

$$= \frac{22 \times 3 \times 21}{6}$$

$$= 11 \times 21$$

$$= 231 \text{ cm}^2$$

(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 60}{360} - \frac{1}{2} 21 \times 21 \times \sin 60^\circ$$

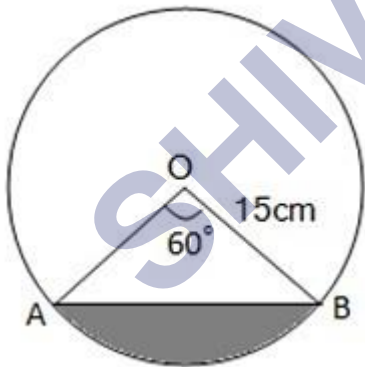
$$= \left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4} \right) \text{ cm}^2 \quad \left[\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

15 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती है। और दीर्घ वृत्तखंडों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए और $\sqrt{3} = 1.73$)

हल : त्रिज्या (r) = 15cm

$$\theta = 60^\circ$$



(i) संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

$$= \frac{3.14 \times 15 \times 15 \times 60}{360} - \frac{1}{2} 15 \times 15 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{3.14 \times 15 \times 15}{6} - \frac{225\sqrt{3}}{4}$$

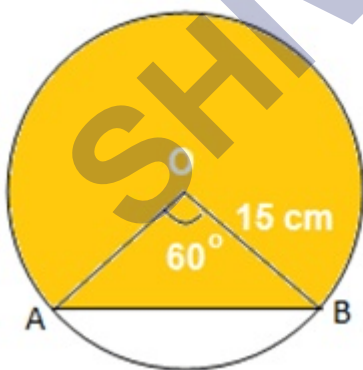
$$= \frac{3.14 \times 5 \times 15}{2} - \frac{225 \times 1.73}{4}$$

$$= 1.57 \times 75 - \frac{389.25}{4}$$

$$= 117.75 - 97.3125$$

$$= 20.4375 \text{ cm}^2$$

(ii) संगत दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल



12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

संगत दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$$= \text{वृत्त का क्षेत्रफल} - \text{लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल}$$

$$= \pi r^2 - \text{लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल}$$

$$= 3.14 \times 15 \times 15 \text{ cm}^2 - 20.4375 \text{ cm}^2$$

$$= 706.5 \text{ cm}^2 - 20.4375 \text{ cm}^2$$

$$= 686.0625 \text{ cm}^2$$

त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

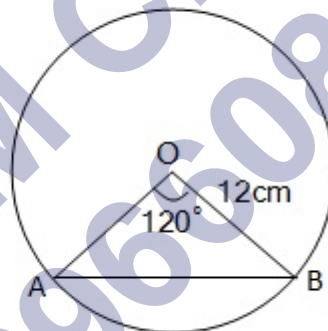
($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए और $\sqrt{3} = 1.73$)

हल : त्रिज्या (r) = 12 cm

$$\theta = 120^\circ$$

संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$$= \text{संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} - \text{त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल}$$



12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \\
 &= \frac{3.14 \times 12 \times 12 \times 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} 12 \times 12 \times \sin 120^\circ \\
 &= \frac{3.14 \times 12 \times 12}{3} - \frac{72\sqrt{3}}{2} \\
 &= 3.14 \times 4 \times 12 - 36\sqrt{3} \\
 &= 150.72 - 62.28 \\
 &= 88.44 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

15 m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को 5 m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है (देखिए आकृति 12.11) | ज्ञात कीजिए :

- (i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा चार सकता है ।
 (ii) चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5 m लंबी रस्सी के स्थान पर 10 m लंबी रस्सी से बाँध दिया जाए । ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)



हल : बाँधी गई रस्सी की लम्बाई (r) = 5 m

$\theta = 90^\circ$ [वर्ग का प्रत्येक कोण]

(i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा चार सकता है

$$\text{बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360}$$

$$= \frac{3.14 \times 5 \times 5 \times 90^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{3.14 \times 25}{4}$$

$$= \frac{78.5}{4}$$

$$= 19.625 \text{ m}^2$$

(ii) घोड़े द्वारा चरे जा सकने वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल जब रस्सी की लंबाई 10 m हो -

$$\text{त्रिज्या (r)} = 10 \text{ m}, \theta = 90^\circ$$

$$\text{बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360}$$

$$= \frac{3.14 \times 10 \times 10 \times 90^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{314}{4}$$

$$= 78.5 \text{ m}^2$$

चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि

$$= 78.5 - 19.625$$

$$= 58.875 \text{ m}^2$$

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

एक वृताकार ब्रूच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35 mm है। तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करता है जैसाकि आकृति 12.12 में दर्शाया गया है। तो ज्ञात कीजिए :



- कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई
- ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

हल : वृताकार ब्रूच का व्यास = 35 mm और त्रिज्या (r) = $\frac{35}{2}$ mm

$$\text{व्यासों की संख्या} = 5 \text{ और } \theta = \frac{360}{10} = 36^\circ$$

- कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई

$$= 5 \times \text{व्यास की लंबाई} + \text{वृत्त की परिधि}$$

$$= 5 \times 35 + 2\pi r$$

$$= 175 + 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2}$$

$$= 175 + 22 \times 5$$

$$= 175 + 110$$

$$= 285 \text{ mm}$$

$$(ii) \text{ ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360}$$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times 36^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2}}{10}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{11 \times 5 \times 35}{20}$$

$$= \frac{385}{4} \text{ mm}^2$$

एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं (देखिए आकृति 12.13)। छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : त्रिज्या (r) = 45 cm और $\theta = \frac{360}{8} = 45^\circ$

दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= \frac{22 \times 45 \times 45 \times 45^\circ}{7 \times 360^\circ}$$

$$= \frac{22 \times 45 \times 45}{7 \times 8} = \frac{22275}{28} \text{ cm}^2$$

किसी कार के दो वाइपर (wipers) हैं, परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पट्टी की लंबाई 25 cm है और 115° के कोण तक घूम कर सफाई कर सकता है। पट्टियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ़ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए।

हल : वाइपर की लम्बाई = त्रिज्या (r) = 25 cm और $\theta = 115^\circ$

दोनों वाइपर द्वारा साफ किए गए क्षेत्र का क्षेत्रफल = $2 \left(\frac{\pi r^2 \theta}{360} \right)$

$$= 2 \left(\frac{22 \times 25 \times 25 \times 115^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{158125}{252} \right)$$

$$= \frac{158125}{126} \text{ cm}^2$$

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस (light house) 80° कोण वाले एक त्रिज्यखंड में 16.5 km की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके।

हल : त्रिज्यखंड की त्रिज्या = 16.5 km और $\theta = 80^\circ$

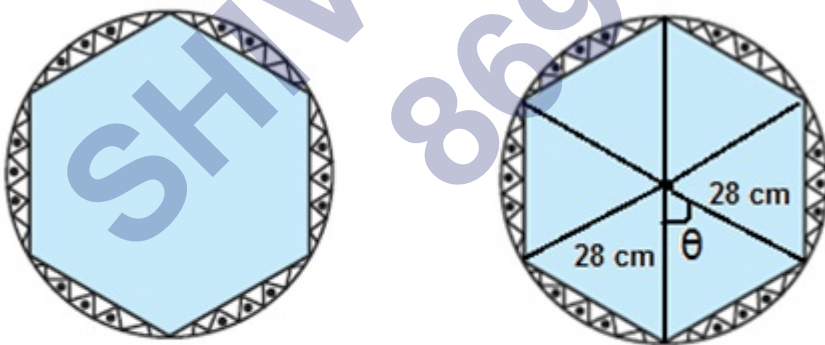
$$\text{इस प्रकार बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360}$$

$$= \frac{3.14 \times 16.5 \times 16.5 \times 80^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{3.14 \times 16.5 \times 16.5 \times 2}{9}$$

$$= 189.97 \text{ km}^2$$

एक गोल मेज़पोश पर छः समान डिजाइन बने हुए हैं जैसाकि आकृति 12.14 में दर्शाया गया है। यदि मेज़पोश की त्रिज्या 28 cm है, तो 0.35 ₹. प्रति वर्ग सेंटीमीटर की दर से इन डिजाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए।



हल : मेज़पोश की त्रिज्या = 28 cm

$$\text{एक त्रिज्यखंड में अंतरित कोण } \theta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$\begin{aligned}
 \text{इस प्रकार बने छः डिजाइनों का क्षेत्रफल} &= 6 \left(\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \right) \\
 &= 6 \left(\frac{22 \times 28 \times 28 \times 60^\circ}{7 \times 360^\circ} - \frac{1}{2} 28 \times 28 \times \sin 60^\circ \right) \\
 &= 6 \left(\frac{22 \times 4 \times 28}{6} - 14 \times 28 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= 6 \left(\frac{2464}{6} - \frac{392\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= 6 \left(\frac{2464}{6} - \frac{1176\sqrt{3}}{6} \right) \\
 &= 6 \left(\frac{2464 - 1176\sqrt{3}}{6} \right) \\
 &= 2464 - 1176 \times 1.7 \\
 &= 2464 - 1999.2 \\
 &= 464.8 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 12.1 (पृष्ठ संख्या 247-248)

प्रश्न 1 दो वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 19cm और 9cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है।

उत्तर-

पहले वृत्त की त्रिज्या $R = 19\text{cm}$

दूसरे वृत्त की त्रिज्या $r = 9\text{cm}$

नए वृत्त का परिमाण = पहले वृत्त का परिमाण + दूसरे वृत्त का परिमाण,

$$\text{नए वृत्त का परिमाण} = 2\pi R + 2\pi r$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi(R + r) \\
 &= 2\pi(19 + 9) \\
 &= 2 \times \frac{22}{7} \times 28 \\
 &= 2 \times 22 \times 4 \\
 &= 176\text{cm}
 \end{aligned}$$

प्रश्न 2 दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8cm और 6cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

उत्तर-

पहले वृत्त की त्रिज्या $R = 8\text{cm}$

दूसरे वृत्त की त्रिज्या $r = 6\text{cm}$

नए वृत्त का परिमाण = पहले वृत्त का परिमाण + दूसरे वृत्त का परिमाण

$$\text{नए वृत्त का परिमाण} = \pi R^2 + \pi r^2$$

$$= 2\pi(R^2 + r^2)$$

$$= 2\pi(64 + 36)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 100$$

$$= 628.5\text{cm}$$

प्रश्न 3 आकृति 12.3 एक तीरंदाजी लक्ष्य को दर्शाती है, जिसमें केंद्र से बाहर की ओर पाँच क्षेत्र GOLD, RED, BLUE, BLACK और WHITE चिह्नित हैं, जिनसे अंक अर्जित किए जा सकते हैं। GOLD अंक वाले क्षेत्र का व्यास 21cm है। तथा प्रत्येक अन्य पट्टी 10.5cm चौड़ी है। अंक प्राप्त कराने वाले इन पाँचों क्षेत्रों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

i. गोल्ड की त्रिज्या $r = \frac{21}{2} = 10.5\text{cm}$

$$\begin{aligned} \text{GOLD का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \\ &= \frac{11 \times 3 \times 21}{2} \\ &= \frac{693}{2} = 346.5\text{cm}^2 \end{aligned}$$

ii. RED के लिए $R = 21$ और $r = \frac{21}{2}\text{cm}$

$$\begin{aligned} \text{RED का क्षेत्रफल} &= \pi (R^2 - r^2) \\ &= \frac{22}{7} \left[21^2 - \left(\frac{21}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{22}{7} [21^2 - 10.5^2] \\ &= \frac{22}{7} (21 + 10.5)(21 - 10.5) \\ &= \frac{22}{7} (31.5)(10.5) \\ &= \frac{22}{7} (31.5)(10.5) \\ \text{RED} &= 1039.5\text{cm}^2 \end{aligned}$$

iii. BLUE के लिए $R = 31.5\text{cm}$ और $r = 21\text{cm}$

$$\text{BLUE का क्षेत्रफल} = \pi(R^2 - r^2)$$

$$= \frac{22}{7} [(31.5)^2 - (21)^2]$$

$$= \frac{22}{7} (31.5 + 21)(31.5 - 21)$$

$$[\text{चूँकि } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$

$$= \frac{22}{7} (52.5)(10.5)$$

$$= 22 \times 52.5 \times 1.5$$

$$\text{BLUE} = 1732.5\text{cm}^2$$

iv. BLACK के लिए $R = 42$ और $r = 31.5\text{cm}$

$$\text{BLACK का क्षेत्रफल} = \pi(R^2 - r^2)$$

$$= \frac{22}{7} [(42)^2 - (31.5)^2]$$

$$= \frac{22}{7} (42 + 31.5)(42 - 31.5)$$

$$[\text{चूँकि } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$

$$= \frac{22}{7} (73.5)(10.5)$$

$$= 22 \times 73.5 \times 1.5$$

$$\text{BLACK} = 2425.5\text{cm}^2$$

v. WHITE के लिए $R = 52.5\text{cm}$ और $r = 42\text{cm}$

$$\text{WHITE का क्षेत्रफल} = \pi(R^2 - r^2)$$

$$= \frac{22}{7} [(52.5)^2 - (42)^2]$$

$$= \frac{22}{7} (52.5 + 42)(52.5 - 42)$$

$$[\text{चूँकि } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$

$$= \frac{22}{7} (94.5)(10.5)$$

$$= 22 \times 94.5 \times 1.5$$

$$\text{WHITE} = 3118.5\text{cm}^2$$

प्रश्न 4 किसी कार के प्रत्येक पहिये का व्यास 80cm है। यदि यह कार 66km प्रति घंटे की चाल से चाल रही है, तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाती है?

उत्तर-

$$\text{पहिये का व्यास} = 80\text{cm}$$

$$\text{पहिये की त्रिज्या (r)} = 40\text{cm}$$

$$\text{कार की चाल} = 66\text{km प्रति घंटा}$$

$$= \frac{66 \times 1000}{60} \text{m प्रति मिनट}$$

$$= 1100\text{m प्रति मिनट}$$

$$10 \text{ मिनट में तय दूरी} = 1100\text{m} \times 10$$

$$= 11000\text{m}$$

$$\text{अब, एक चक्कर में तय दूरी} = 2\pi r$$

$$= 2 \frac{22}{7} \times 40$$

$$= \frac{1760}{7} \text{ cm}$$

$$\text{या} = \frac{1760}{700} \text{ m}$$

$$\text{अतः 10 मिनट में चक्करों की संख्या} = \frac{10 \text{ मिनट में तय दूरी}}{1 \text{ चक्कर में तय दूरी}}$$

$$= \frac{11000}{\frac{1760}{700}}$$

$$= \frac{11000}{1} \times \frac{700}{1760} \text{ चक्कर}$$

$$= \frac{1000}{1} \times \frac{700}{1760}$$

$$= \frac{100}{1} \times \frac{700}{160}$$

$$= \frac{100}{1} \times \frac{700}{4 \times 4}$$

$$= 25 \times 25 \times 7$$

$$= 625 \times 7$$

$$= 4375 \text{ चक्कर}$$

प्रश्न 5 निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए-

यदि एक वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है, तो उस वृत्त की त्रिज्या है।

1. 2 मात्रक
2. π मात्रक
3. 4 मात्रक
4. 7 मात्रक

उत्तर-

- a. 2 मात्रक

हल-

वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर हैं-

$$\text{इसलिए } 2\pi r = \pi r^2$$

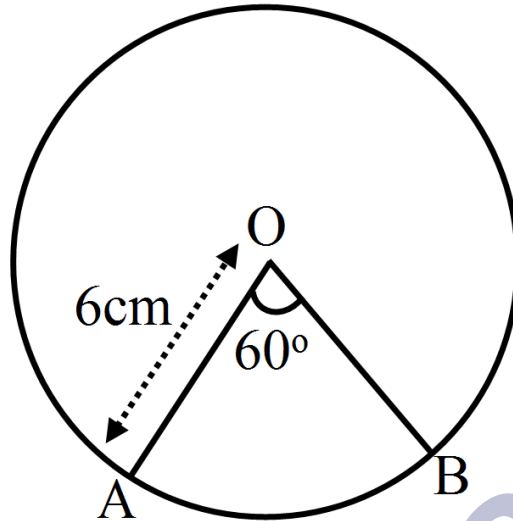
या $2 = r$ [दोनों पक्षों का सरलीकरण करने पर]

अतः वृत्त की त्रिज्या 2 मात्रक है।

प्रश्नावली 12.2 (पृष्ठ संख्या 252-253)

प्रश्न 1 6cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है।

उत्तर-



त्रिज्या (r) = 6cm और कोण $\theta = 60^\circ$

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$

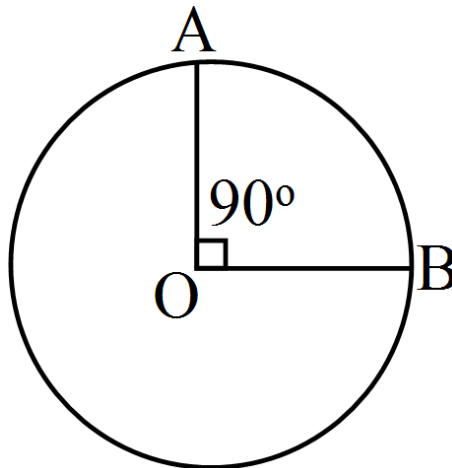
$$= \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 660^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{6}{1}$$

$$= \frac{132}{7} \text{ cm}^2$$

प्रश्न 2 एक वृत्त, के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22cm है।

उत्तर-



12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

$$\text{परिधि} = 22\text{cm}$$

$$\text{या } 2\pi r = 22\text{cm}$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 22\text{cm}$$

$$r = 22 \times \frac{7}{2 \times 22}$$

$$r = \frac{7}{2}\text{cm}$$

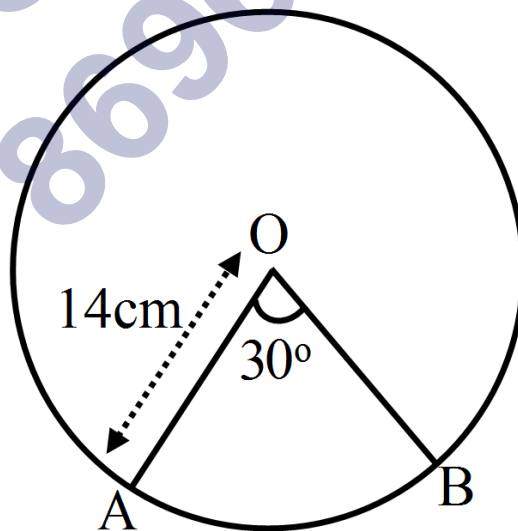
$$\text{अब, चतुर्थांश का क्षेत्रफल} = \frac{1}{4}\pi r^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= \frac{77}{8}\text{cm}^2$$

प्रश्न 3 एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14cm है। इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



त्रिज्या (r) = मिनट की सुई जिसकी लंबाई = 14cm

घड़ी की सुई द्वारा 1 मिनट में बना कोण = $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$

इसलिए 5 मिनट में बना केन्द्रीय कोण $\theta = 6^\circ \times 5 = 30^\circ$

5 मिनट में रचित क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14 \times 30^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{22}{1} \times \frac{2 \times 14}{12}$$

$$= \frac{11}{1} \times \frac{14}{3} \text{ cm}^2$$

$$= \frac{154}{3} \text{ cm}^2$$

प्रश्न 4 10cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर समकोण अंतरित करती है। निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए-

- i. संगत लघु वृत्तखंड,
- ii. संगत दीर्घ त्रिज्यखंड

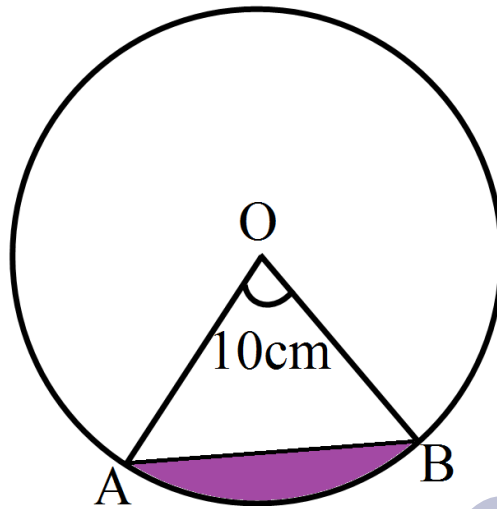
($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

उत्तर-

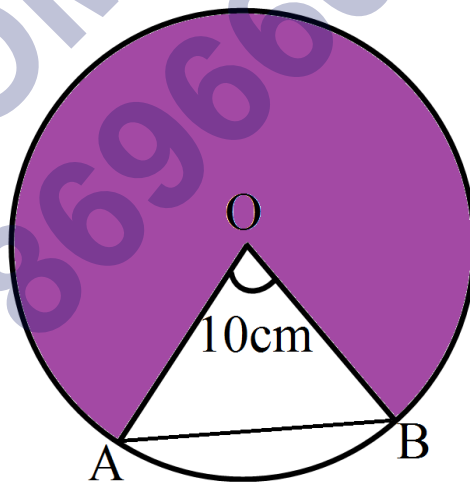
- i. संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल-

त्रिज्या (r) = 10cm

$\theta = 90^\circ$



$$\begin{aligned}
 \text{संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \\
 &= \frac{3.14 \times 10 \times 10 \times 90}{360} - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 90^\circ \\
 &= \frac{314}{4} - 50 \\
 &= 78.5 - 50 = 28.5 \text{cm}^2
 \end{aligned}$$



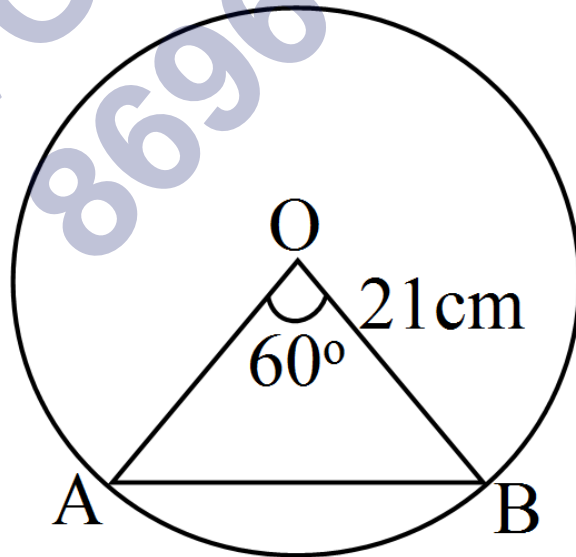
$$\begin{aligned}
 \text{ii. संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 (360 - \theta)}{360} \\
 &= \frac{3.14 \times 10 \times 10 (360 - 90)}{360} \\
 &= \frac{314 \times (270)}{360} \\
 &= \frac{314 \times 3}{4} \\
 &= 78.5 \times 3 = 235.5 \text{cm}^2
 \end{aligned}$$

प्रश्न 5 त्रिज्या 21cm वाले वृत्त का एक चाप केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए:

- चाप की लंबाई।
- चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल।
- संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल।

उत्तर- त्रिज्या (r) = 21cm

$$\theta = 60^\circ$$



$$\begin{aligned} \text{i. चाप की लंबाई} &= \frac{\pi r \theta}{180} = \frac{\frac{22}{7} \times 21 \times 60}{180} \\ &= \frac{22 \times 3}{3} = 22 \text{cm} \end{aligned}$$

ii. चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल-

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} \\ &= \frac{\frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 60}{360} \\ &= \frac{22 \times 3 \times 21}{6} \\ &= 11 \times 21 \\ &= 231 \text{cm}^2 \end{aligned}$$

iii. संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल-

= संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \\ &= \frac{\frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 60}{360} - \frac{1}{2} 21 \times 21 \times \sin 60^\circ \\ &= \left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4} \right) \text{cm}^2 \left[\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \end{aligned}$$

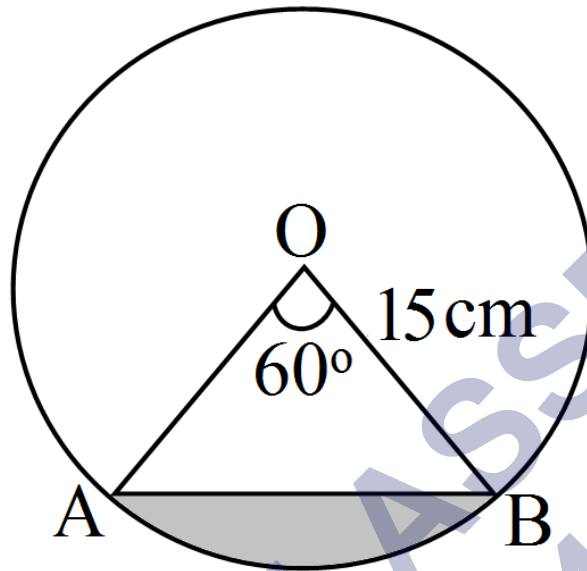
प्रश्न 6 15cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती है। और दीर्घ वृत्तखंडों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए और $\sqrt{3} = 1.73$)

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

उत्तर- त्रिज्या (r) = 15cm

$\theta = 60^\circ$



i. संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल-

= संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

$$= \frac{3.14 \times 15 \times 15 \times 60}{360} - \frac{1}{2} 15 \times 15 \times \sin 60^\circ$$

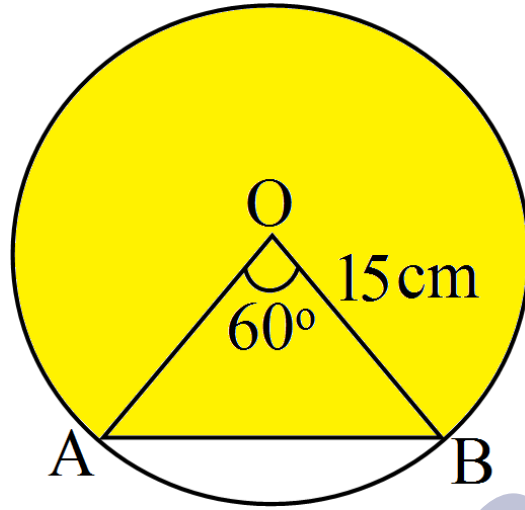
$$= \frac{3.14 \times 5 \times 15}{2} - \frac{225 \times 1.73}{4}$$

$$= 1.57 \times 75 - \frac{389.25}{4}$$

$$= 117.75 - 97.3125$$

$$= 20.4375 \text{cm}^2$$

ii. संगत दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल-



संगत दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल,

= वृत्त का क्षेत्रफल - लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= πr^2 - लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= $3.14 \times 15 \times 15 \text{cm}^2 - 20.4375 \text{cm}^2$

= $706.5 \text{cm}^2 - 20.4375 \text{cm}^2$

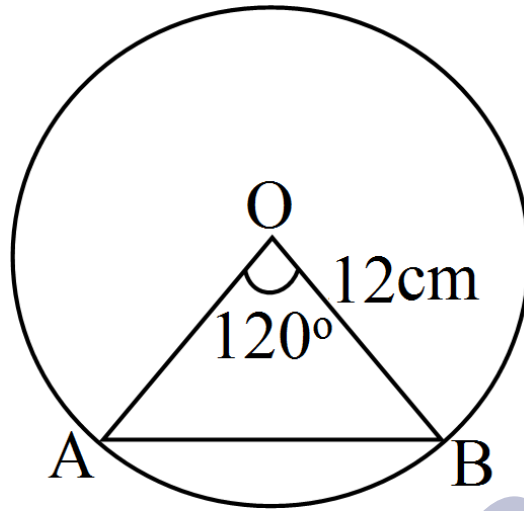
= 686.0625cm^2

प्रश्न 7 त्रिज्या 12cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए।)

उत्तर- त्रिज्या (r) = 12cm

$\theta = 120^\circ$



संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल-

= संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल,

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

$$= \frac{3.14 \times 12 \times 12 \times 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} 12 \times 12 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{3.14 \times 12 \times 12}{3} - \frac{72\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3.14 \times 4 \times 12 - 36\sqrt{3}$$

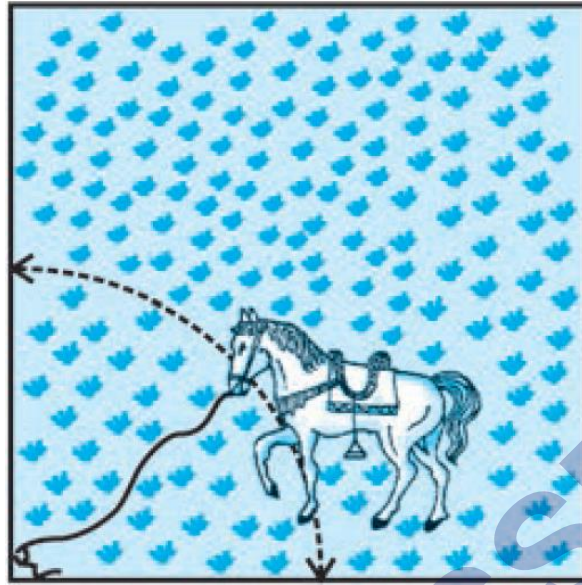
$$= 150.72 - 62.28$$

$$= 88.44 \text{cm}^2$$

प्रश्न 8 15m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को 5m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है (देखिए आकृति)। ज्ञात कीजिए।

- मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा चार सकता है।
- चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5m लंबी रस्सी के स्थान पर 10m लंबी रस्सी से बाँध दिया जाए।

($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)



उत्तर-

बाँधी गई रस्सी की लम्बाई (r) = 5m

$\theta = 90^\circ$ [वर्ग का प्रत्येक कोण]

i. मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा चर सकता है।

$$\text{बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360}$$

$$= \frac{3.14 \times 5 \times 5 \times 90^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{3.174 \times 25}{4}$$

$$= \frac{78.5}{4}$$

$$= 19.625\text{m}^2$$

ii. घोड़े द्वारा चरे जा सकने वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल जब रस्सी की लंबाई 10m हो-

$$\text{त्रिज्या (r)} = 10\text{m}, \theta = 90^\circ$$

$$\text{बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360}$$

$$= \frac{3.14 \times 10 \times 10 \times 10 \times 90^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{314}{4}$$

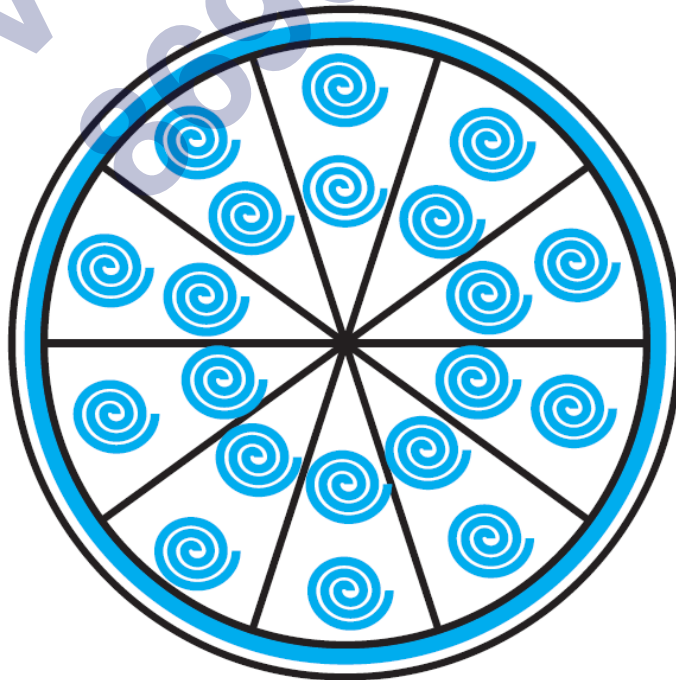
$$= 78.5\text{m}^2$$

चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि-

$$= 78.5 - 19.625$$

$$= 58.875\text{m}^2$$

प्रश्न 9 एक वृताकार ब्रुच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35mm है। तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करता है जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। तो ज्ञात कीजिए।



- i. कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई।
- ii. ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल।

उत्तर-

$$\text{वृत्ताकार ब्रूच का व्यास} = 35\text{mm और त्रिज्या (r)} = \frac{35}{2}\text{mm}$$

$$\text{व्यासों की संख्या} = 5 \text{ और } \theta = \frac{360}{10} = 36^\circ$$

- i. कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई-

$$= 5 \times \text{व्यास की लंबाई} + \text{वृत्त की परिधि}$$

$$= 5 \times 35\pi r$$

$$= 175 + 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2}$$

$$= 175 + 22 \times 5$$

$$= 175 + 110$$

$$= 285\text{mm}$$

- ii. ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times 36^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2}}{10}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{11 \times 5 \times 35}{20}$$

$$= \frac{385}{4}\text{mm}^2$$

प्रश्न 10 एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं (देखिए आकृति)। छतरी को 45cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

$$\text{त्रिज्या (r)} = 45\text{cm और } \theta = \frac{360}{8} = 45^\circ$$

$$\text{दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360}$$

$$= \frac{22 \times 45 \times 45 \times 45^\circ}{7 \times 360^\circ}$$

$$= \frac{22 \times 45 \times 45}{7 \times 8} = \frac{22275}{28} \text{ cm}^2$$

प्रश्न 11 किसी कार के दो वाइपर (wipers) हैं, परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पट्टी की लंबाई 25cm है और 115° के कोण तक घूम कर सफाई कर सकता है। पट्टियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ़ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\text{वाइपर की लंबाई} = \text{त्रिज्या (r)} = 25\text{cm और } \theta = 115^\circ$$

$$\text{दोनों वाइपर द्वारा साफ़ किए गए क्षेत्र का क्षेत्रफल} = 2 \left(\frac{\pi r^2 \theta}{360} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left(\frac{22 \times 25 \times 25 \times 115^\circ}{360^\circ} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{158125}{252} \right) \\
 &= \frac{158125}{126} \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

प्रश्न 12 जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस (light house) 80° कोण वाले एक त्रिज्यखंड में 16.5km की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके।

($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

उत्तर-

त्रिज्यखंड की त्रिज्या = 16.5km और $\theta = 80^\circ$

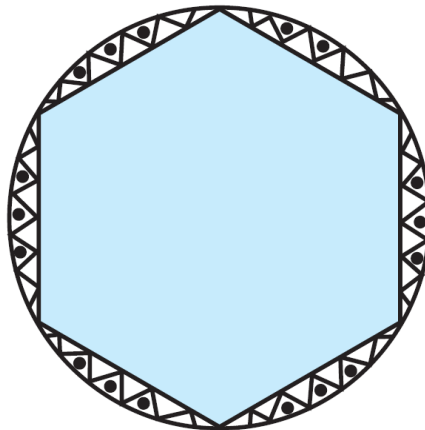
इस प्रकार बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= \frac{3.14 \times 16.5 \times 16.5 \times 80^\circ}{360^\circ}$$

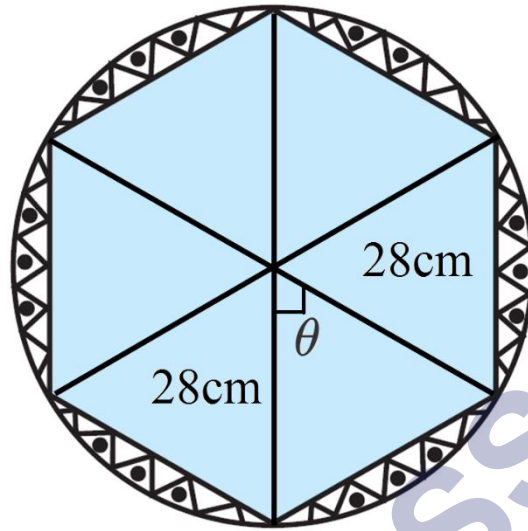
$$= \frac{3.14 \times 16.5 \times 16.5 \times 2}{9}$$

$$= 189.97 \text{ km}^2$$

प्रश्न 13 एक गोल मेज़पोश पर छः समान डिज़ाइन बने हुए हैं जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। यदि मेज़पोश की त्रिज्या 28cm है, तो 0.35 रू. प्रति वर्ग सेंटीमीटर की दर से इन डिज़ाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए।



उत्तर-



मेंजपोश की त्रिज्या = 28cm,

एक त्रिज्यखंड में अंतरित कोण $\theta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

इस प्रकार बने छः डिजाइनों क्षेत्रफल = $6 \left(\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \right)$

$$= 6 \left(\frac{22 \times 28 \times 28 \times 60^\circ}{7 \times 360^\circ} - \frac{1}{2} 28 \times 28 \times \sin 60^\circ \right)$$

$$= 6 \left(\frac{22 \times 4 \times 28}{6} - 14 \times 28 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 6 \left(\frac{2464}{6} - \frac{392\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 6 \left(\frac{2464}{6} - \frac{1176\sqrt{3}}{6} \right)$$

$$= 6 \left(\frac{2464 - 1176\sqrt{3}}{6} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 62464 - 1175 \times 1.7 \\
 &= 2464 - 1999.2 \\
 &= 464.8\text{cm}^2
 \end{aligned}$$

प्रश्न 14 निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए:

त्रिज्या R वाले के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसका कोण p° है, निम्नलिखित है-

- $\frac{P}{180} \times 2\pi R$
- $\frac{P}{180} \times \pi R^2$
- $\frac{P}{360} \times 2\pi R$
- $\frac{P}{720} \times 2\pi R^2$

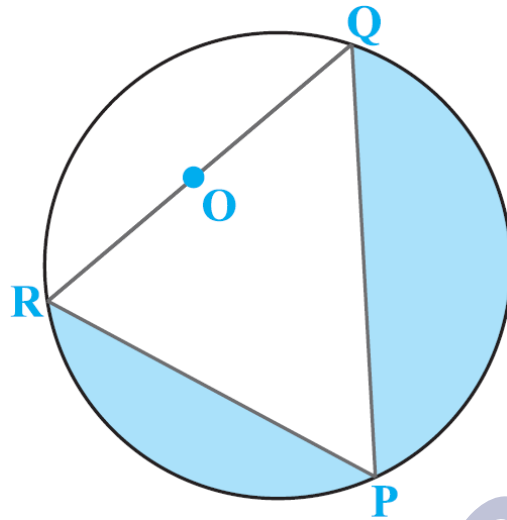
उत्तर-

- $\frac{P}{720} \times 2\pi R^2$

प्रश्नावली 12.3 (पृष्ठ संख्या 257-261)

प्रश्न 1 (जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए।)

आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि $PQ = 24\text{cm.}$, $PR = 7\text{cm.}$ तथा O वृत्त का केंद्र है।



उत्तर-

चूँकि O, वृत्त का केंद्र है।

∴ QOR एक व्यास है।

⇒ $\angle RPQ = 90^\circ$ [अर्धवृत्त में बना कोण]

समकोण $\triangle RPQ$, हमें प्राप्त होता है-

$$RQ^2 = PQ^2 + PR^2$$

$$\Rightarrow RQ^2 = 24^2 + 7^2$$

$$= 576 + 49 = 625$$

$$\Rightarrow RQ = \sqrt{625} = 25$$

$$\therefore \text{क्षेत्रफल, } (\triangle RPQ) = \frac{1}{2} PQ \times RP$$

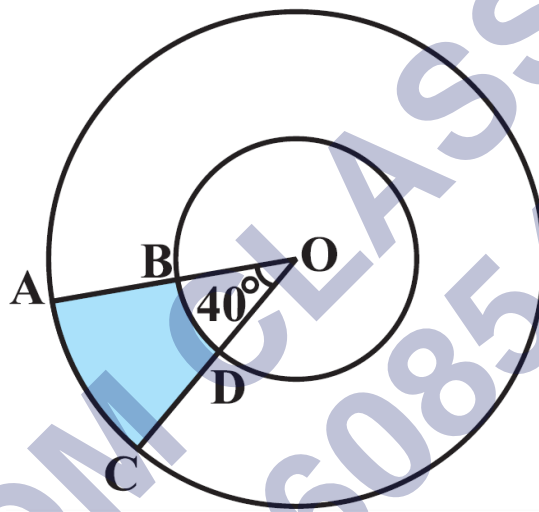
$$= \frac{1}{2} \times 24 \times 7 \text{cm}^2$$

$$= 12 \times 7 \text{cm}^2 = 84 \text{cm}^2$$

अब, अर्धवृत्त का क्षेत्रफल,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2} \\
 &= \frac{11 \times 625}{7 \times 4} \text{ cm}^2 \\
 &= \frac{6875}{28} \text{ cm}^2 = 245.54 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

प्रश्न 2 आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केंद्र O वाले दोनों सकेन्द्रीय वृत्तों की त्रियाँ क्रमशः 7cm और 14cm हैं। तथा $\angle AOC = 40^\circ$ है।



उत्तर-

बाह्यवृत्त की त्रिज्या = 14cm,

यहाँ $\theta = 40^\circ$

$\therefore 40^\circ$ कोण वाले त्रिज्यखंड AOC का क्षेत्रफल,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{40}{360} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \text{ cm}^2 \\
 &= \frac{1}{9} \times 22 \times 2 \times 14 \text{ cm}^2 = \frac{616}{9} \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

भीतर वृत्त की त्रिज्या = 7cm,

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

यहाँ भी $\theta = 40^\circ$

\therefore BOD त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल,

$$\frac{40}{360} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{cm}^2$$

अब छायांकित भाग का क्षेत्रफल-

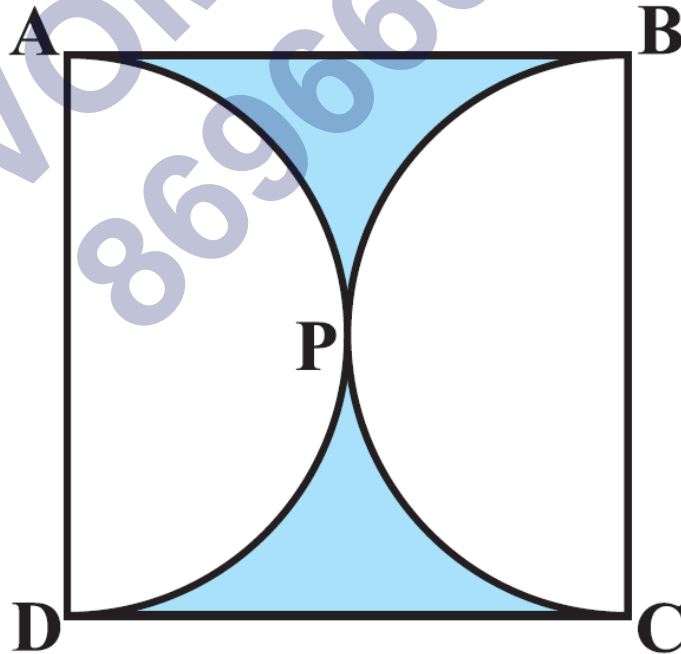
= (त्रिज्यखंड AOC का क्षेत्रफल) - (त्रिज्यखंड BOD का क्षेत्रफल)

$$= \frac{616}{9} - \frac{154}{9} \text{cm}^2$$

$$= \frac{1}{9} [616 - 154] \text{cm}^2 = \frac{1}{2} \times 462 \text{cm}^2$$

$$= \frac{1}{3} \times 154 \text{cm}^2$$

प्रश्न 3 आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि ABCD भुजा 14cm का एक वर्ग है तथा APD और BPC दो अर्धवृत्त हैं।



उत्तर-

वर्ग की भुजा = 14cm,

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

$$= 14 \times 14\text{cm}^2$$

$$= 196\text{cm}^2$$

अब, वृत्त का व्यास = वर्ग की भुजा = 14cm.

$$\Rightarrow \text{वृत्त की भुजा} = \frac{14}{2} = 7\text{cm}$$

∴ अर्धवृत्त APD का क्षेत्रफल-

$$= \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7\text{cm}^2$$

$$= 77\text{cm}^2$$

$$\text{इसी अर्धवृत्त BPC का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7\text{cm}^2$$

$$= 77\text{cm}^2$$

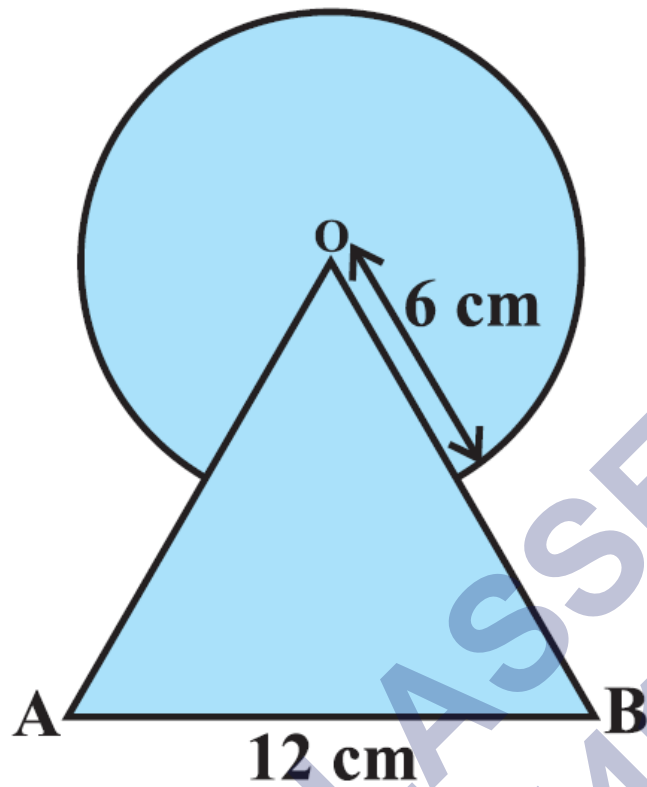
अब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल-

$$= [\text{वर्ग का क्षेत्रफल}] - [(\text{अर्धवृत्त APD का क्षेत्रफल}) + (\text{अर्धवृत्त BPC का क्षेत्रफल})]$$

$$= 196\text{cm}^2 - [77 + 77]\text{cm}^2$$

$$= 196\text{cm}^2 - 154\text{cm}^2 = 42\text{cm}^2$$

प्रश्न 4 आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ भुजा 12cm. वाले एक समबाहु त्रिभुज OAB के शीर्ष O को केंद्र मान कर 6cm. त्रिज्या वाला एक वृत्तीय चाप खींचा गया है।



उत्तर-

वृत्त की त्रिज्या (r) = 6cm

\therefore 6cm त्रिज्या के वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \text{cm}^2$$

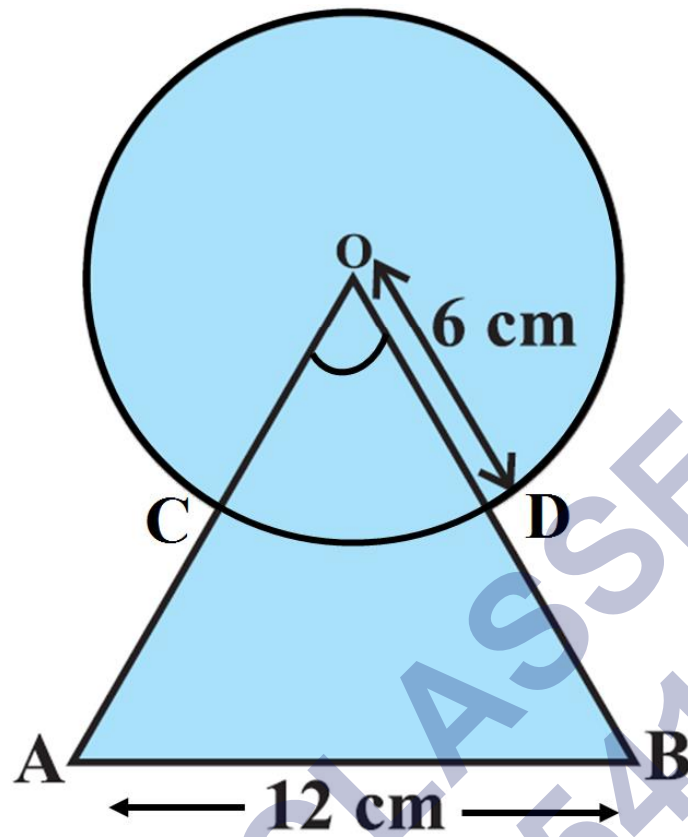
$$= \frac{792}{7} \text{cm}^2$$

12cm भुजा वाले समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल-

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12 \times 12 \text{cm}^2$$

$$= 36\sqrt{3} \text{cm}^2$$

[\therefore समबाहु \triangle का प्रत्येक कोण = 60°]



$$\therefore \angle AOB = 60^\circ$$

\therefore त्रिज्यखंड COD का क्षेत्रफल-

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 = \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{22 \times 6}{7} \text{ cm} = \frac{132}{7} \text{ cm}^2$$

अब, छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल-

$$= [\text{वृत्त का क्षेत्रफल}] + [\text{समबाहु } \triangle \text{ का क्षेत्रफल}]$$

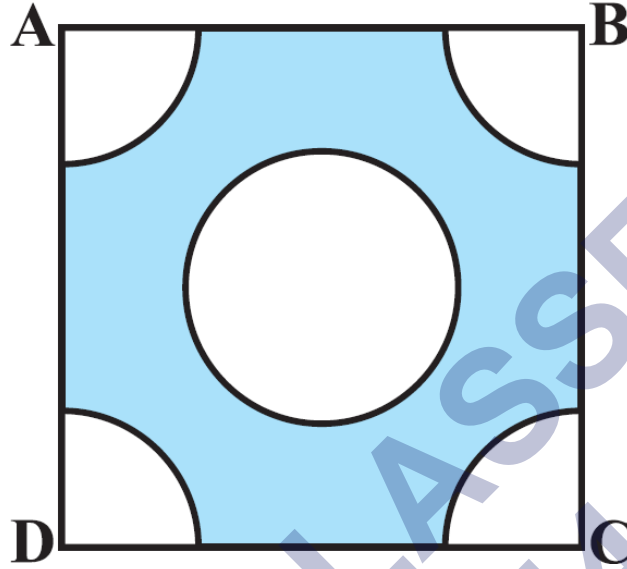
$$- [\text{त्रिज्यखंड COD का क्षेत्रफल}]$$

$$= \frac{792}{7} \text{ cm}^2 + 36\sqrt{3} \text{ cm}^2 - \frac{132}{7} \text{ cm}^2$$

$$= \left[\frac{660}{7} + 36\sqrt{3} \right] \text{ cm}^2$$

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

प्रश्न 5 भुजा 4cm वाले एक वर्ग के प्रत्येक कोने से 1cm त्रिज्या वाले वृत्त का एक चतुर्थांश काटा गया है तथा बीच में 2cm व्यास का एक वृत्त भी काटा गया है, जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। वर्ग के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

वर्ग की भुजा = 4cm

∴ वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = $4 \times 4\text{cm}^2$

= 16cm^2

चूँकि वर्ग के प्रत्येक कोने पर एक वृत्त का चतुर्थांश काटा गया है।

∴ त्रिज्या (एक चतुर्थांश वृत्त की) = 1cm

∴ 1 चतुर्थांश वृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 1 \times 1 \text{cm}^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \text{cm}^2$$

$$\therefore 4 \text{ चतुर्थांश वृत्त का क्षेत्रफल } 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{4} \text{cm}^2$$

$$= \frac{22}{7} \text{cm}^2$$

बीच के वृत्त का व्यास = 2cm

बीच के वृत्त का त्रिज्या = 1cm

छायांकित भाग का क्षेत्रफल-

$$= [\text{वर्ग ABCD का क्षेत्रफल}]$$

$$- [(\text{वृत्त 4 चतुर्थांशों का क्षेत्रफल}) + (\text{बीच के वृत्त का क्षेत्रफल})]$$

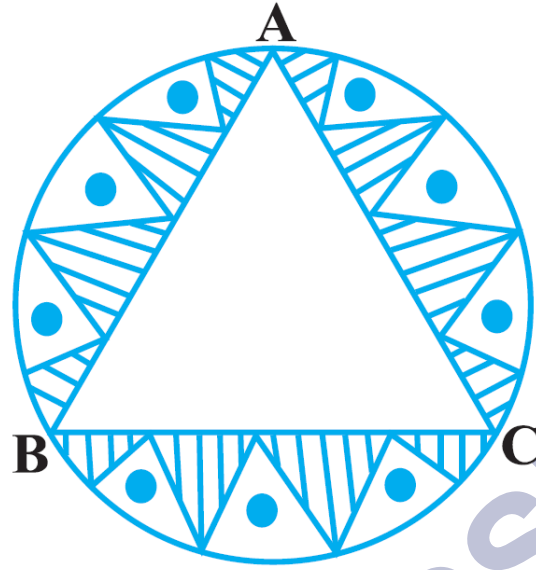
$$= [16\text{cm}^2] - \left[\left(\frac{22}{7} + \frac{22}{7} \right) \right] \text{cm}^2$$

$$= 16\text{cm}^2 - 2 \times \frac{22}{7} \text{cm}^2$$

$$= 16\text{cm}^2 - \frac{44}{7} \text{cm}^2$$

$$= \frac{112-44}{7} \text{cm}^2 = \frac{68}{7} \text{cm}^2$$

प्रश्न 6 एक वृत्ताकार मेज़पोश, जिसकी त्रिज्या 32cm है, में बीच में एक समबाहु त्रिभुज ABC छोड़ते हुए एक डिज़ाइन बना हुआ है, जैसाकि आकृति में दिखाया गया है। इस डिज़ाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

त्रिज्या $r = 32\text{cm}$ वाले वृत्त का क्षेत्रफल πr^2

$$= \frac{22}{7} \times 32 \times 32\text{cm}^2$$

$$= \frac{22528}{7}\text{cm}^2$$

चूँकि O वृत्त का केंद्र है,

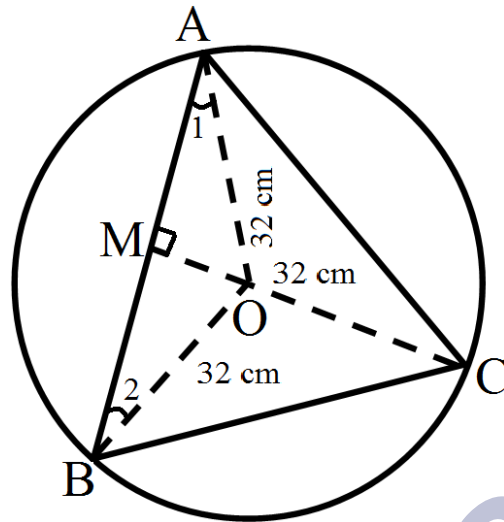
$$AO = OB = OC = 32\text{cm}$$

$$\Rightarrow \angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = 120^\circ$$

अब, $\triangle AOB$ में,

$$\angle 1 = 30^\circ \because \angle 1 + \angle 2 = 60^\circ$$

$$\text{तथा } OA = OB \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$$



यदि $OM \perp AB$ हो, तो

$$\frac{OM}{OA} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow OM = OA \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow OM = 32 \times \frac{1}{2} = 16\text{cm} \dots (1)$$

तथा $\frac{AM}{AO} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$AM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AO = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 32$$

$$\Rightarrow 2AM = AB$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 32 \right) = 32\sqrt{3}\text{cm} \dots (2)$$

अब, (1) और (2) से,

$$\triangle AOB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times OM \times AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 32\sqrt{3}\text{cm}^2$$

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

$$= 256\sqrt{3}\text{cm}^2$$

चूँकि $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल = $3 \times [\triangle AOB \text{ का क्षेत्रफल}]$

$$= 3 \times 256 \times \sqrt{3}\text{cm}^2$$

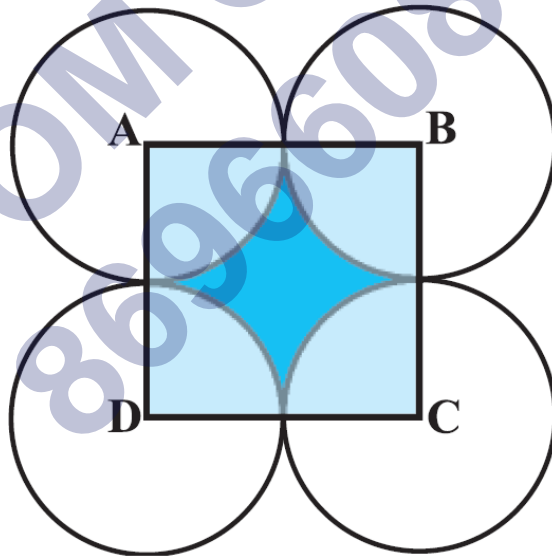
$$= 768\sqrt{3}\text{cm}^2$$

अब, डिजाइन का क्षेत्रफल-

$$= [\text{वृत्त का क्षेत्रफल}] - [\text{समबाहु } \triangle \text{ का क्षेत्रफल}]$$

$$= \left[\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3} \right] \text{cm}^2$$

प्रश्न 7 आकृति में, ABCD भुजा 14cm वाला एक वर्ग है। A, B, C और D को केंद्र मानकर, चार वृत्त इस प्रकार खींचे गए हैं कि प्रत्येक वृत्त तीन शेष वृत्तों में से दो वृत्तों को बाह्य रूप से स्पर्श करता है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

चूँकि वर्ग ABCD की भुजा = 14cm

$$\therefore \text{वर्ग ABCD का क्षेत्रफल} = 14 \times 14\text{cm}^2 = 196\text{cm}^2$$

चूँकि एक वृत्त की त्रिज्या = $\frac{14}{2} = 7\text{cm}$

अब, एक ऐसे त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसकी त्रिज्या 7cm और कोण $\theta = 90^\circ$

$$= \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7\text{cm}^2 = \frac{11 \times 2}{2}\text{cm}^2$$

$$\therefore \text{ऐसे 4 त्रिज्यखंडों का क्षेत्रफल} = 4 \times \left[\frac{11 \times 7}{2} \right] \text{cm}^2 = 2 \times 11 \times 7\text{cm}^2 = 154\text{cm}^2$$

$$\therefore \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = [\text{वर्ग ABCD का क्षेत्रफल}] - [4 \text{ त्रिज्यखंडों का क्षेत्रफल}]$$

$$= 196\text{cm}^2 - 154\text{cm}^2 = 42\text{cm}^2$$

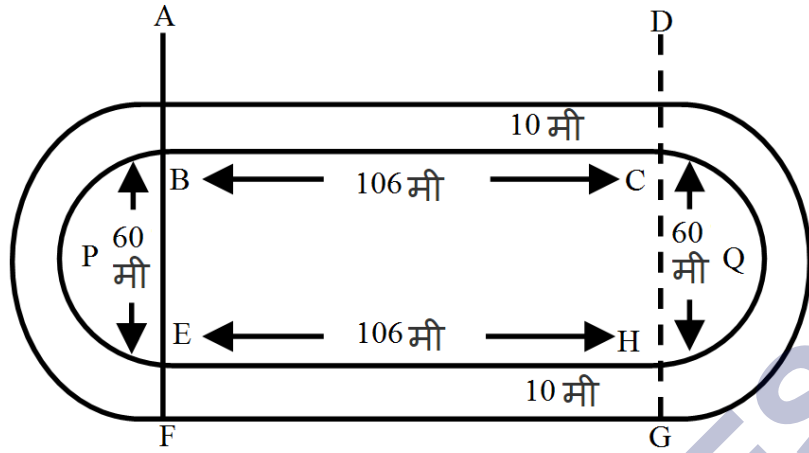
प्रश्न 8 आकृति एक दौड़ने का पथ (racing track) दर्शाती है, जिसके बाएँ और दाएँ सिरे अर्धवृत्ताकार हैं।



दोनों आंतरिक समांतर रेखाखंडों के बीच की दूरी 60m है तथा इनमें से प्रत्येक रेखाखंड 106m लंबा है। यदि यह पथ 10m चौड़ा है, तो ज्ञात कीजिए।

- पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने में चली गई दूरी।
- पथ का क्षेत्रफल।

उत्तर-



i. पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर की दूरी-

$$\begin{aligned}
 &= BC + EH + \widehat{BPE} + \widehat{CQH} \\
 &= 106\text{m} + 106\text{m} + \frac{1}{6}(2\pi r) + \frac{1}{2}(2\pi r) \\
 &= 212\text{m} + \frac{1}{2} \left(2 \times \frac{22}{7} \times 30 \right) + \frac{1}{2} \left(2 \times \frac{22}{7} \times 30 \right) \left[\because r = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} \times 60 = 30\text{m} \right] \\
 &= 212\text{m} + \frac{1320}{7}\text{m} = \frac{2804}{7}\text{m}
 \end{aligned}$$

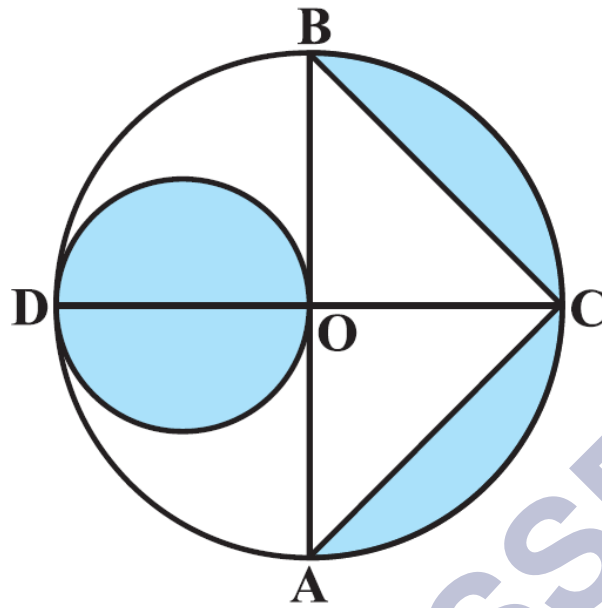
ii. अब, पथ का क्षेत्रफल = छायांकित भाग का क्षेत्रफल-

$$\begin{aligned}
 &= [\text{आयत ABCD का क्षेत्रफल}] + [\text{आयत EFGH का क्षेत्रफल}] + 2[(\text{प्रत्येक } 40\text{cm त्रिज्या वाले दो अर्धवृत्तों का क्षेत्रफल}) \\
 &\quad - (\text{प्रत्येक } 30\text{cm त्रिज्या वाले दो अर्धवृत्तों का क्षेत्रफल})]
 \end{aligned}$$

\therefore पथ का क्षेत्रफल-

$$\begin{aligned}
 &= (106 \times 10\text{m}^2) + (106 \times 10\text{m}^2) + 2 \left[\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (40)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (30)^2 \right] \text{m}^2 \\
 &= 1060\text{m}^2 + 1060\text{m}^2 - 2 \left[\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} (40^2 - 30^2) \right] \text{m}^2 \\
 &= 2120\text{m}^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} [(40 + 30) \times (40 - 30)] \text{m}^2 \\
 &= 2120\text{m}^2 + \frac{22}{7} \times 70 \times 10\text{m}^2 = 2120\text{m}^2 + 2200\text{m}^2 = 4320\text{m}^2
 \end{aligned}$$

प्रश्न 9 आकृति में, AB और CD केंद्र O वाले एक वृत्त के दो परस्पर लंब व्यास हैं। तथा OD छोटे वृत्त को व्यास है। यदि OA = 7cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

चूँकि O, वृत्त का केन्द्र है-

$$OA = 7\text{cm}$$

$$\Rightarrow AB = 2 OA = 2 \times 7 = 14\text{cm}$$

$$OC = OA = 7\text{cm}$$

चूँकि AB और CD परस्पर लम्ब है $\Rightarrow OC \perp AB$

$$\therefore \text{क्षेत्रफल } (\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times OC = \frac{1}{2} \times 14\text{cm} \times 7\text{cm} = 49\text{cm}^2$$

$$\text{पुनः } OD = OA = 7\text{cm}$$

$$\therefore \text{छोटे वृत्त की त्रिज्या} = \frac{1}{2} (OD) = \frac{1}{2} \times 7 = \frac{7}{2}\text{cm}$$

$$\Rightarrow \text{छोटे वृत्त का क्षेत्रफल} = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\text{cm}^2 = \frac{11 \times 7}{2} = \frac{77}{2}\text{cm}^2$$

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

$$\text{अब, बड़े वृत्त की त्रिज्या} = \frac{14}{2} \text{ cm} = 7 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{बड़े अर्धवृत्त OABC क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \left(\frac{22}{7} \times 7 \times 7 \right) \text{ cm}^2 = \frac{11 \times 7 \times 7}{7} \text{ cm}^2$$

$$= 11 \times 7 \text{ cm}^2 = 77 \text{ cm}^2$$

\therefore छायांकित भाग का क्षेत्रफल-

$$= [\text{छोटे वृत्त का क्षेत्रफल}] + [\text{बड़े अर्धवृत्त OABC का क्षेत्रफल}] - [\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}]$$

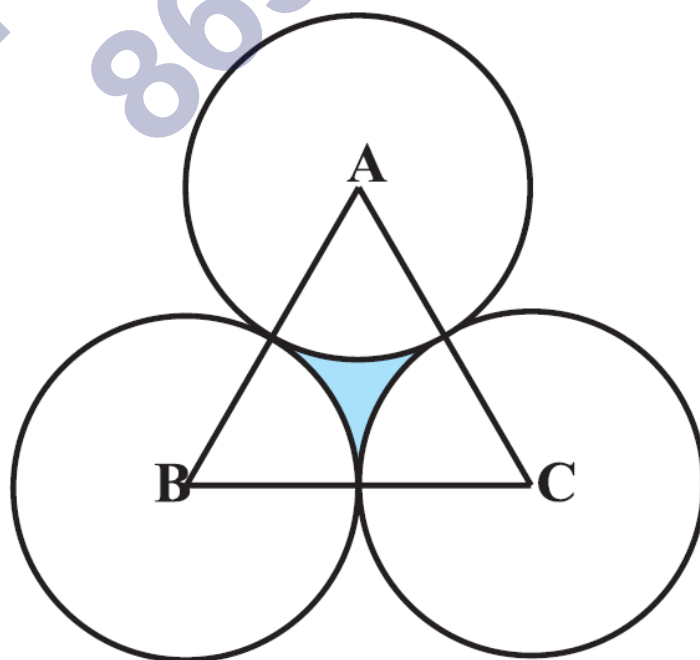
$$= \left[\frac{77}{2} \text{ cm}^2 \right] + [77 \text{ cm}^2] - [49 \text{ cm}^2]$$

$$= \frac{77+154-98}{2} \text{ cm}^2 = \frac{231-98}{2} \text{ cm}^2$$

$$= \frac{133}{2} \text{ cm}^2 = 66.5 \text{ cm}^2$$

प्रश्न 10 एक समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 17320.5 cm^2 है। इस त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष को केंद्र मानकर त्रिभुज की भुजा के आधे के बराबर की त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जाता है (देखिए आकृति)। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73205$ लीजिए।)



उत्तर-

चूँकि समबाहु $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल = 17320.5cm^2 [ज्ञात है]

और एक समबाहु \triangle का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ का (भुजा) 2

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा) 2 = 17320.5 [$\because \sqrt{3} = 1.73205$ (दिया है)]

$\Rightarrow \frac{1.73205}{4}$ (भुजा) 2 = $17320.5 \Rightarrow \frac{173205}{400000}$ (भुजा) 2 = $\frac{173205}{10}$

\Rightarrow (भुजा) 2 = $\frac{173205}{10} \times \frac{400000}{173205} = 40000$

\Rightarrow (भुजा) 2 = $(200)^2 \Rightarrow$ भुजा = 200cm

\Rightarrow प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या = $\frac{200}{2} = 100\text{cm}$

चूँकि एक समबाहु \triangle का प्रत्येक कोण 60° होती है।

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

\therefore [उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसमें कोण 60° और त्रिज्या 100cm]

= $\frac{60}{360} \times \frac{314}{100} \times 100 \times 100\text{cm}^2$

= $\frac{1}{3} \times \frac{314}{100} \times 100 \times 100\text{cm}^2 = \frac{15700}{3}\text{cm}^2$

चूँकि तीनों त्रिज्यखंड समान है-

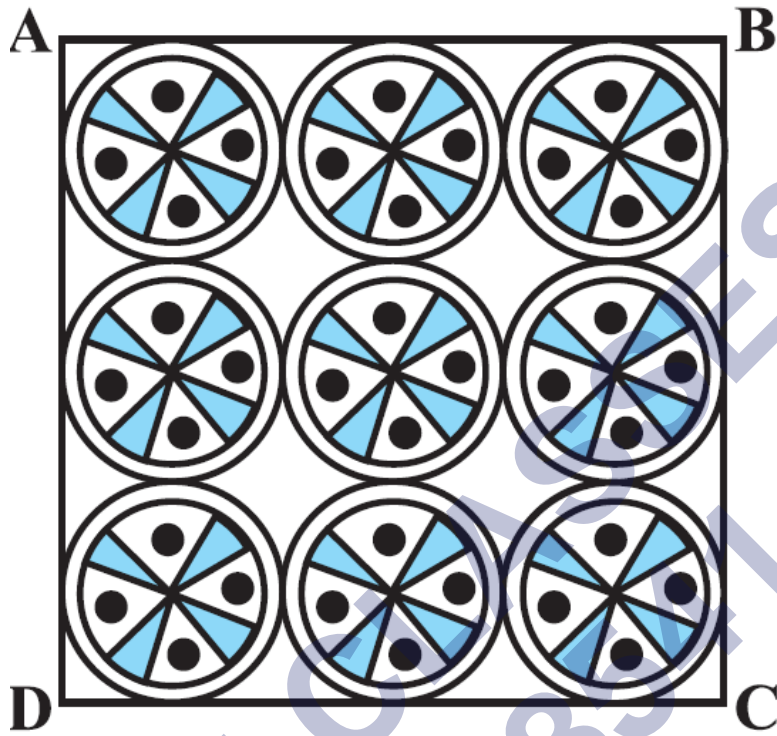
\therefore 3 समान त्रिज्यखंडों का क्षेत्रफल = $3 \times \frac{15700}{3}\text{cm}^2 = 15700\text{cm}^2$

अब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल = [समबाहु \triangle का क्षेत्रफल] - [3 समान त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल]

= $[17320.5\text{cm}^2] - [15700\text{cm}^2] = 1620.5\text{cm}^2$

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

प्रश्न 11 एक वर्गाकार रूमाल पर, नौ वृत्ताकार डिजाइन बने हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7cm है (देखिए आकृति)। रूमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

चूँकि वृत्त परस्पर बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं-

$$\therefore \text{वर्ग की भुजा} = 3 \times (\text{वृत्त का व्यास})$$

$$= 3 \times (7 \times 2)\text{cm}$$

$$[\because \text{व्यास} = 2 \times 7\text{cm}]$$

$$= 3 \times 14 = 42\text{cm}$$

चूँकि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा \times भुजा

$$\therefore \text{वर्ग ABCD का क्षेत्रफल} = (42 \times 42)\text{cm}^2 = 1764\text{cm}^2$$

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

$$\text{अब, एक वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{cm}^2 = 154 \text{cm}^2$$

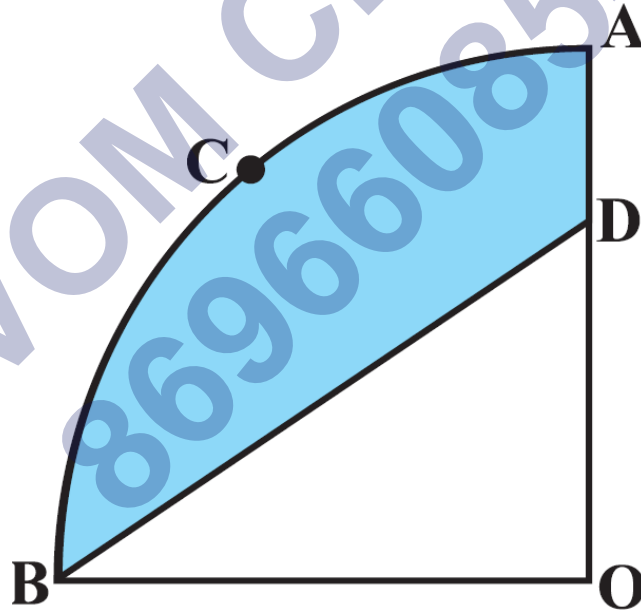
चूँकि डिजाइन में 9 एक समान वृत्त है-

$$\therefore 9 \text{ वृत्तों का क्षेत्रफल} = 9 \times 154 \text{cm}^2 = 1386 \text{cm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{अब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= [\text{वर्ग का क्षेत्रफल}] - [9 \text{ समान वृत्तों का क्षेत्रफल}] \\ &= 1764 \text{cm}^2 - 1386 \text{cm}^2 = 378 \text{cm}^2 \end{aligned}$$

प्रश्न 12 आकृति में, OACB केंद्र O और त्रिज्या 3.5cm वाले एक वृत्त को चतुर्थांश है। यदि OD = 2cm है, तो । निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए-

- चतुर्थांश OACB
- छायांकित भाग।



उत्तर-

यहाँ, वृत्त का केन्द्र O और त्रिज्या 3.5cm है-

$$\therefore \text{वृत्त के चतुर्थांश OACB का क्षेत्रफल} = \frac{1}{4} \pi r^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \times \text{cm}^2$$

$$= \frac{11}{2} \times \frac{35}{20} \text{cm}^2 = \frac{11 \times 7}{8} \text{cm}^2 = \frac{77}{8} \text{cm}^2$$

$$\text{अब, क्षेत्रफल } (\triangle BOD) = \frac{1}{2} \times OB \times OD = \frac{1}{2} \times 3.5 \times 2 \text{cm}^2$$

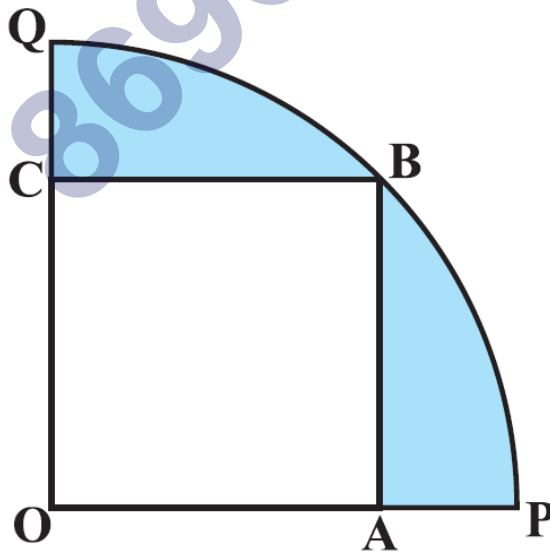
$$= \frac{1}{2} \times \frac{35}{10} \times 2 \text{cm}^2 = \frac{7}{2} \text{cm}^2$$

$$\text{अब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = [\text{वृत्त के चतुर्थांश OACB का क्षेत्रफल}] - [\triangle BOD \text{ का क्षेत्रफल}]$$

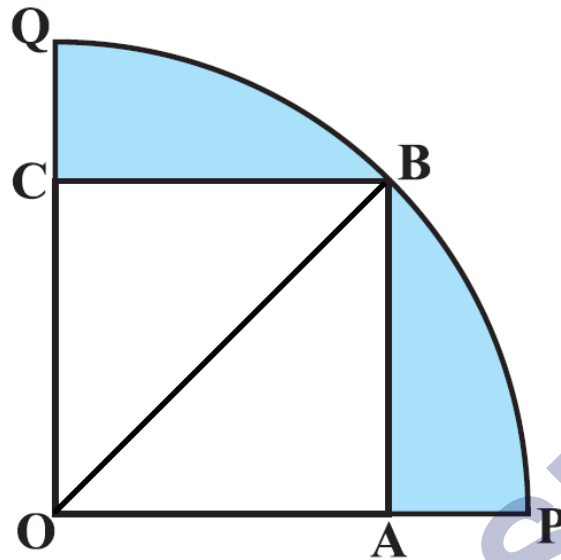
$$= \left(\frac{77}{8} - \frac{7}{2} \right) \text{cm}^2 = \frac{77-28}{8} \text{cm}^2 = \frac{49}{8} \text{cm}^2$$

प्रश्न 13 आकृति में, एक चतुर्थांश OPBQ के अंतर्गत एक वर्ग OABC बना हुआ है। यदि OA = 20cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$ लीजिए।)



उत्तर-



OABC एक वर्ग है और भुजा OA = 20cm

$$\begin{aligned} \therefore OB^2 &= OA^2 + AB^2 \\ &= [20^2 + 20^2] = [400 + 400] = [800] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{800} = 2\sqrt{2}\text{cm}$$

इस प्रकार, वृत्त की त्रिज्या = $20\sqrt{2}\text{cm}$

अब, वृत्त के चतुर्थांश OPBQ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \pi r^2$

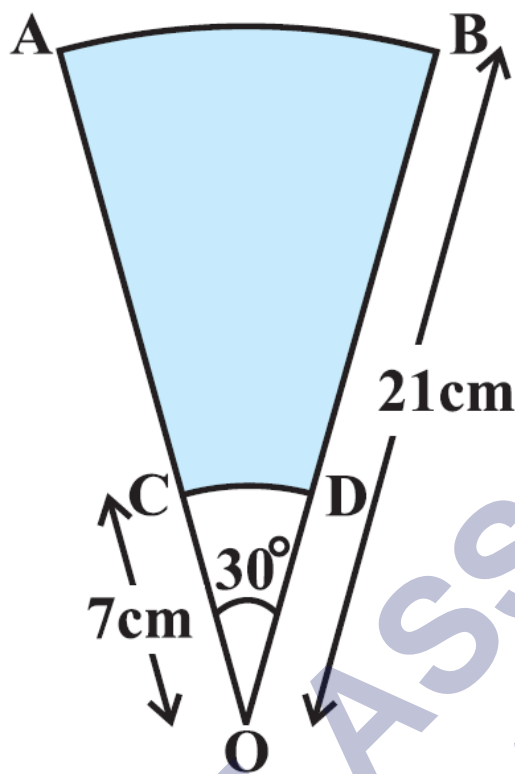
$$= \frac{1}{4} \times \frac{314}{100} \times 800\text{cm}^2$$

$$= 314 \times 2 = 628\text{cm}^2$$

वर्ग OABC का क्षेत्रफल = $20 \times 20\text{cm}^2 = 400\text{cm}^2$

$$\therefore \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = 628\text{cm}^2 - 400\text{cm}^2 = 228\text{cm}^2$$

प्रश्न 14 AB और CD केंद्र O तथा त्रिज्याओं 21cm और 7cm वाले दो संकेन्द्रीय वृत्तों के क्रमशः दो चाप हैं (देखिए आकृति)। यदि $\angle AOB = 30^\circ$ है, तो छायांकित भाग को क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

बड़े वृत्त की त्रिज्या (R) = 21cm

त्रिज्यखंड का कोण $\theta = 320^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore \text{त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल} &= \frac{30}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{cm}^2 \\ &= \frac{11 \times 21}{2} \text{cm}^2 = \frac{231}{2} \text{cm}^2 \end{aligned}$$

छोटे वृत्त की त्रिज्या (r) = 7cm

चूँकि त्रिज्यखंड का कोण = 30°

12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

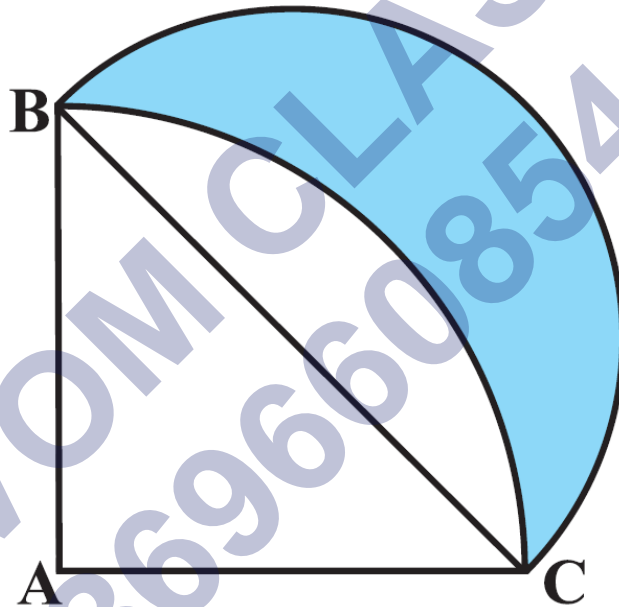
$$\therefore \text{त्रिज्यखंड COD का क्षेत्रफल} = \frac{30}{360} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{cm}^2 = \frac{77}{6} \text{cm}^2$$

$$\therefore \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = [\text{त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल}] - [\text{त्रिज्यखंड COD का क्षेत्रफल}]$$

$$= \left[\frac{231}{2} \text{cm}^2 \right] - \left[\frac{77}{6} \text{cm}^2 \right]$$

$$= \frac{693-77}{6} \text{cm}^2 = \frac{616}{6} \text{cm}^2 = \frac{308}{3} \text{cm}^2$$

प्रश्न 15 आकृति में, ABC त्रिज्या 14cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है तथा BC को व्यास मान कर एक अर्धवृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

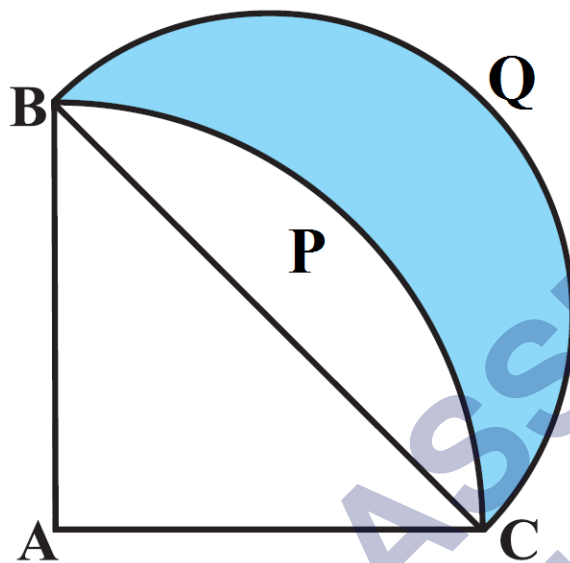
वृत्त के चतुर्थांश की त्रिज्या = 14cm

$$\therefore \text{चतुर्थांश ABPC का क्षेत्रफल} = \left[\frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \right] \text{cm}^2 \left[\frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \text{ का प्रयोग करने पर} \right]$$

$$= 22 \times 7 \text{cm}^2 = 154 \text{cm}^2$$

चूँकि समकोण $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल-

$$\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{लम्ब}$$



$$= \frac{1}{2} \times 14 \times 14 \text{cm}^2 = 98 \text{cm}^2$$

$$\therefore \text{अर्धवृत्त BPC} = 154 \text{cm}^2 - 98 \text{cm}^2 = 56 \text{cm}^2$$

$$\text{समकोण } \triangle ABC \text{ में, } AC^2 + AB^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow 14^2 + 14^2 = BC^2 \Rightarrow 196 + 196 = BC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = 392 \Rightarrow BC = 14\sqrt{2} \text{cm}$$

$$\therefore \text{अर्धवृत्त BQC की त्रिज्या} = \frac{14\sqrt{2}}{2} \text{cm} = 7\sqrt{2} \text{cm}$$

$$\therefore \text{अर्धवृत्त BQC का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (7\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{2} \times 7\sqrt{2} = 11 \times \sqrt{2} \times 7 \times \sqrt{2} \text{cm}^2$$

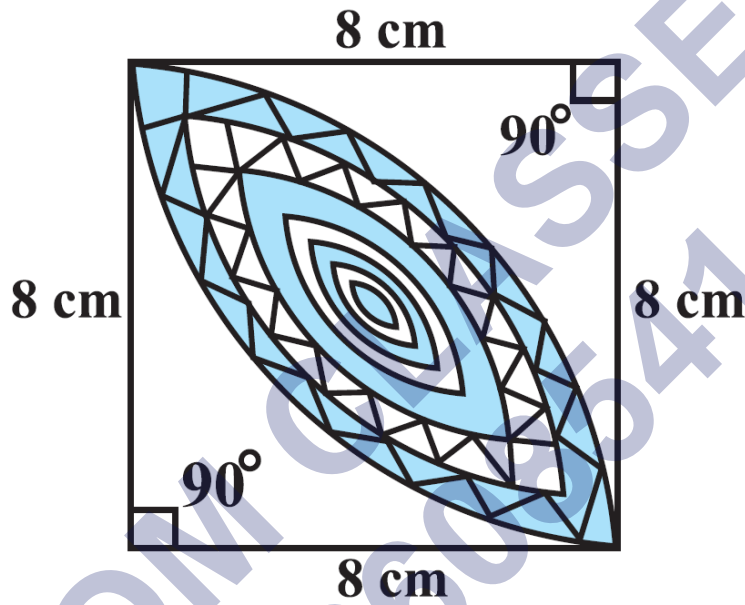
12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

$$= 11 \times 7 \times 2 \text{cm}^2 = 154 \text{cm}^2$$

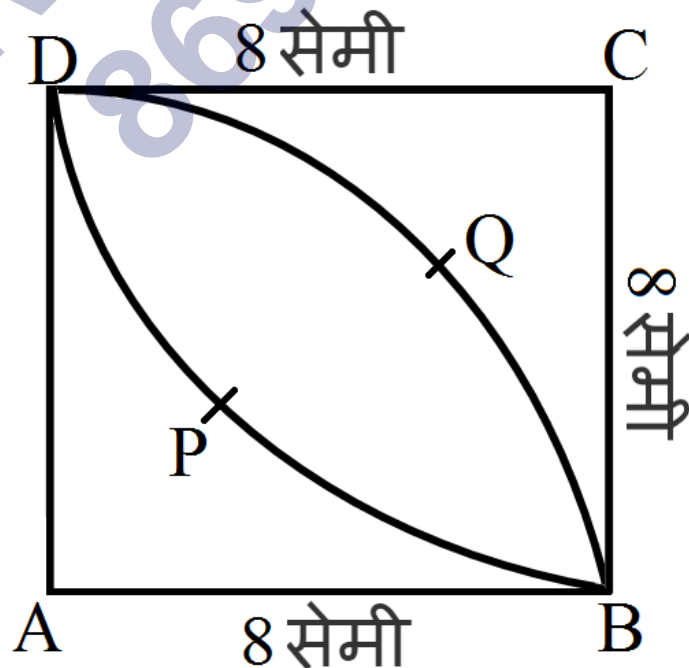
अब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल = [अर्धवृत्त BQC का क्षेत्रफल] - [अर्धवृत्त BPC का क्षेत्रफल]

$$154 \text{cm}^2 - 56 \text{cm}^2 = 98 \text{cm}^2$$

प्रश्न 16 आकृति में, छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो 8cm त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों के चतुर्थांशों के बीच उभयनिष्ठ है।



उत्तर-



12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

भुजा = 8cm,

∴ वर्ग (ABCD) का क्षेत्रफल = $8 \times 8\text{cm}^2 = 64\text{cm}^2$

अब, चतुर्थांश ADQB की त्रिज्या = 8cm

∴ चतुर्थांश ADQB क्षेत्रफल = $\frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 8^2\text{cm}^2$

= $\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 64\text{cm}^2 = \frac{22 \times 16}{7}\text{cm}^2$

इसी प्रकार,

चतुर्थांश BPDC का क्षेत्रफल = $\frac{22 \times 16}{7}\text{cm}^2$

दोनों चतुर्थांशों के क्षेत्रफल का योग = $2 \left[\frac{22 \times 16}{7} \right]\text{cm}^2 = \frac{704}{7}\text{cm}^2$

अब, डिजाइन का क्षेत्रफल = [दोनों चतुर्थांशों के क्षेत्रफलों का योग]

-[वर्ग ABCD का क्षेत्रफल]

= $\frac{704}{7}\text{cm}^2 - 64\text{cm}^2$

= $\frac{704-448}{7}\text{cm}^2 = \frac{256}{7}\text{cm}^2$