गणित

अध्याय-12: रैखिक प्रोग्रामन

भूमिका (Introduction)

इस अध्याय में हम रैखिक असमिकाओं, निकाओं का वास्तविक जीवन की समस्याओं को हल करने में प्रयोग करेंगे।

उदाहरणार्थ- एक शोरूम में कार और मोटरसाइकिल के लिए केवल 120 वस्तुओं का स्थान है। शोरूम के मालिक के पास ₹6000,00,00 निवेश करने की क्षमता है। .. ___एक कार पर ₹400,000 और मोटर साइकिल ₹ 100,000 लागत आती है, शोरूम मालिक एक कार पर ₹ 25,000 और एक मोटर साइकिल पर ₹ 5,000 लाभ के रूप में कमाना चाहता है। वह कितनी कार और कितनी मोटरसाइकिल पर निवेश करना चाहता है ताकि उसे अधिकतम लाभ मिल सके। उक्त समस्या के हल के लिए माना उस शोरूम मालिक को x कार और y मोटरसाइकिल पर ₹ 6000,00,00 निवेश करना चाहिए।

$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 120$

$400,000\ x + 100,000y \leq 6000,00,00$

लाभ फलन p=25,000x+5,000y

उक्त समस्या का असमिकाओं का गणितीय रूपान्तरण किया गया है।

रैखिक प्रक्रमन की समस्या अभीष्ट ध्येय प्राप्त करने के लिए सीमित साधनों का दक्षतायुक्त प्रयोग करने से संबंध रखता है।

यहाँ दो चरों x और y में रैखिक प्रक्रमन की समस्याओं की आधारभूत संकल्पनाओं, इनके अनुप्रयोग, सीमाओं गणितीय रुपान्तरण, लाभ हल की ग्राफीय विधि का अध्ययन करेंगे।

रैखिक प्रोग्रामन (Linear Programming)

परिभाषाएँ

1. रैखिक प्रोग्रामन (Linear programming)- दिए गए रैखिक असमिकाओं (Linear inquations) जिन्हें व्यवरोध कहते हैं, को संतुष्ट करते हुए एक रैखिक फलन का सर्वोत्तम वांछित मान (अधिकतम या न्यूनतम) ज्ञात करने का एक विशेष प्रोग्राम निर्धारण करने की विधि रैखिक प्रोग्रामन कहलाती है।

2. रैखिक प्रोग्रामन समस्या (Linear programming problem)- यदि रैखिक फलन जो कि ऋणेत्तर चरों (Nonnegative) के रैखिक असमिकाओं के समूह द्वारा निर्धारित कुछ प्रतिबन्धों के अन्तर्गत हो, का सर्वोत्तम वांछित मान (अधिकतम या न्यूनतम) ज्ञात करने की समस्या रैखिक प्रोग्रामन समस्या कहलाती है। इसे संक्षेप में L.P.P. (एल.पी.पी.) कहते हैं।

3. इष्टतमीकरण समस्या (Optimization problem) व्यवहार की ऐसी समस्या जिसमें एक रैखिक फलन का रैखिक असमिकाओं को संतुष्ट करते हुए सर्वोत्तम वांछित (इष्टतमीकरण) (अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण) होता है, इष्टतमीकरण कहलाती है।

4. उद्देश्य फलन (Objective function)- ऐसे रैखिक फलन जिसका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण (इष्टतमीकरण) किया जाता है, रैखिक उद्देश्य फलन कहलाता है।

5. सुसंगत या हल क्षेत्र (Feasible region)- रैखिक प्रोग्रामन समस्या के सभी व्यवरोधों ऋणेत्तर चरों के व्यवरोधों सहित, निर्धारित उभयनिष्ठ क्षेत्र समस्या का सुसंगत क्षेत्र या हल क्षेत्र कहलाता है।

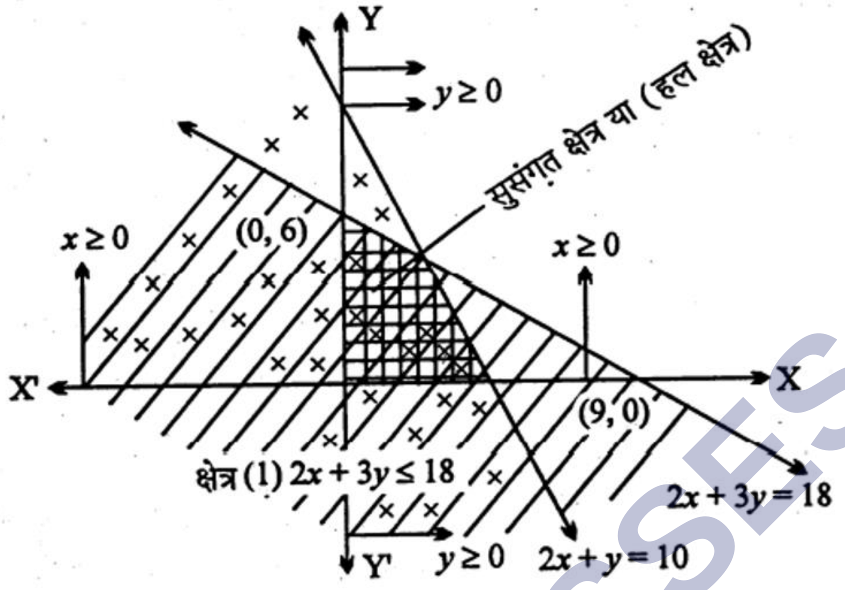
उदाहरणार्थ

$2x + 3y \leq 1818; 2x + y \leq 10; x \geq 0, y \geq 0$

उक्त ग्राफीय निरूपण में छायांकित क्षेत्र सुसंगत क्षेत्र या हल क्षेत्र दिखाया गया है।

रैखिक प्रोग्रामन समस्या का हल [Solution of LPP (Linear programming problem)]-
रैखिक प्रोग्रामन समस्या के दिए गए व्यवरोधों को संतुष्ट करने वाले चरों के मान का समूह (समुच्चय) रैखिक प्रोग्रामन समस्या का हल होता है।

टीप-उद्देश्य फलन, व्यवरोधों और ऋणेत्तर व्यवरोधों का समूह (समुच्चय) रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाते हैं।



रेखीय कार्य-योजना का अर्थ एवं उसका महत्व(Meaning of Linear Programming and its Significance)

कार्य-योजना का सामान्य अर्थ होता है, व्यक्ति अथवा फर्म द्वारा उत्पादन, विक्रय अथवा अन्य ऐसे ही कार्यों की रूपरेखा तैयार करना जिससे उपलब्ध साधनों का सक्षम एवं मितव्ययी उपयोग हो सके। उपलब्ध साधन सीमित होते हैं तथा उनके प्रयोग करने की दशायें भी सीमित होती हैं। उनके अनुकूलतम ढंग से प्रयोग को अपनाने के लिए पूर्व में कोई विशिष्ट प्रविधि नहीं थी।

रेखीय कार्य-योजना वह गणितीय प्रविधि है जिसके द्वारा सीमित एवं विशेष दशाओं से संसाधनों, जैसे-धन, वस्तु, जगह, समय तथा श्रम का अनुकूलतम उपयोग करके विशिष्ट उद्देश्य को प्राप्त किया जा सकता है।

उद्देश्य फलन (Objective Function) जिस रेखीय फलन (जैसे-P=25x+20y) का अनुकूलतम मान प्राप्त किया जाना है उसे ही उद्देश्य फलन कहते हैं।

अनुकूलतमीकरण (Optimization)

उददेश्य फलन के विभिन्न रूपों (जैसे-लाभ फलन, लागत फलन, परिवहन व्यय फलन आदि) को अधिकतम या न्यूनतम किया जाना होता है। यह उद्देश्य फलन की प्रकृति पर निर्भर करता है। लाभ फलन को अधिकतम तथा लागत फलन, परिवहन व्यय फलन को न्यूनतम किया जाना होता है। इस प्रक्रिया को ही अनुकूलतमीकरण या इष्टतमीकरण कहते हैं।

रेखीय प्रतिबन्ध या व्यवरोध (Linear Constraints)

उद्देश्य फलन के अनुकूलतम मान जिन प्रतिबन्धों के अन्तर्गत ज्ञात किये जाने होते हैं, उन्हें प्रतिबन्ध या व्यवरोध कहते हैं। ये एकघातीय व्यंजकों तथा सम्बन्ध चिह्न $\geq, \leq, <, =, >$ के द्वारा दर्शाये जाते हैं। एकघातीय होने के कारण इन्हें रेखीय प्रतिबन्ध कहते हैं। ये Z = ax + by के रूप में होते हैं।

अऋणात्मक प्रतिबन्ध (Non-negative Constraints)

चरों के मान किसी भी दशा में ऋणात्मक नहीं होते हैं। वे शून्य अथवा धनात्मक ही हो सकते हैं। इसे $x \geq 0; y \geq 0$ से दर्शाते हैं।

संभाव्य हल (Feasible Solution)

चरों के मानों का ऐसा समुच्चय जो सभी प्रतिबन्धों तथा अऋणात्मक प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करता है, एक सम्भाव्य हल कहलाता है। संभाव्य हल के उपसमुच्चयों के रूप में उद्देश्य फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम मान देने वाले समुच्चय होते हैं जो रेखीय कार्य योजना समस्या के अनुकूल हल कहलाते हैं। अनकल हल प्राप्त करने की विभिन्न विधियाँ हैं जिनमें से ग्राफीय । विधि का वर्णन आगे किया जायेगा।

L.P.P.के गणितीय सूत्र की विधि (Methodof Mathematical Formulation of L.P.P.)

निम्नलिखित क्रमिक पदों से L.P.P. (Linear Program__ming Problem) का गणितीय सूत्र ज्ञात किया जाता है

पद 1. अज्ञात राशियाँ कौन-सी हैं ? उन्हें x,y से निरूपित करते हैं।

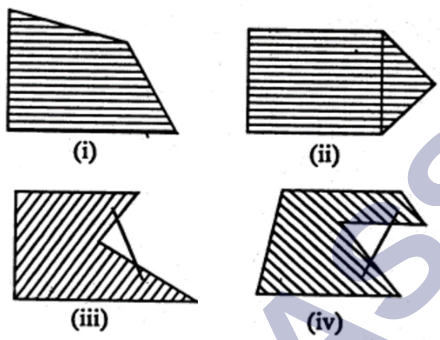
पद 2.x,y पर लागू होने वाले प्रतिबन्धों को प्रश्न में दी गई जानकारी के अनुसार रेखीय असमीकरणों के द्वारा व्यक्त करते हैं।

पद 3. उद्देश्य फलन को दिये गये चरों के रैखिक फलन के रूप में व्यक्त करते हैं।

पद 4. उद्देश्य फलन के इष्टतम मान को प्राप्त करने के लिए अऋणात्मक प्रतिबन्ध सहित सभी रेखीय प्रतिबन्धों को एक साथ लिखते हैं।

उत्तल बहुभुज (समुच्चय)[Convex Polygon (Set)]

रेखीय कार्य-योजना की अधिकांश समस्याओं में सुसंगत हल क्षेत्र प्रथम चतुर्थांश में एक बहुभुज होता है जो हमेशा उत्तल आकृति का होता है। उत्तल बहुभुज उसे कहते हैं जिसके दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड पूर्णतः बहुभुज में होती है।



उत्तल बहुभुजों के विभिन्न आकृतियों के समूह को उत्तल . बहुभुज समुच्चय कहते हैं।

इन चित्रों में (i) व (ii) उत्तल बहुभुज हैं जबकि (iii) व (iv) उत्तल बहुभुज नहीं हैं।

मूल बाह्यतम बिन्दु प्रमेय (Fundamental Extreme Point Theorem)

"रेखाओं की किसी संख्या के द्वारा परिबद्ध क्षेत्र में स्थित सभी बिन्दुओं में से, उद्देश्य फलन का अधिकतम (या न्यूनतम) मान क्षेत्र की सीमा पर स्थित शीर्षों में से केवल एक पर होता है।"

रेखीय कार्य-योजना समस्या को हल करनेकी ग्राफीय विधि (Graphical Method for Solving Linear Programming Problem)

एक रेखीय कार्य-योजना समस्या को हल करने की ग्राफीय विधि केवल उन समस्याओं के लिए लागू होती है जिनमें केवल 2 चर होते हैं। इसका कारण यह है कि हम एक ग्राफ को तीन विमाओं में नहीं खींच सकते हैं।

लेखाचित्र हल की निम्न दो विधियाँ हैं-

1. शीर्ष बिन्दु विधि (Corner Point Method)
2. सम-लाभ (Iso-profit) या सम-लागत विधि (Isocost Method)

(1) शीर्ष बिन्दु विधि के कार्यकारी नियम (Working Rules of Corner Point Method)

चरण 1. रेखीय कार्ययोजना प्रतिरूप को व्यवस्थित करते हैं।

चरण 2. निम्नानुसार प्रत्येक समस्या के ग्राफ की रचना करते हैं। प्रत्येक असमिका को एक समीकरण मानकर इसका लेखाचित्र खींचते हैं।

चरण 3. सम्भाव्य क्षेत्र अर्थात् वह स्थान जो सभी प्रतिबन्धों

को एक साथ सन्तुष्ट करता है, को प्राप्त करते हैं।

चरण 5. वक्र पर सीमा बिन्दुओं या शीर्ष बिन्दुओं को पढ़ते हैं या प्रतिबन्धित रेखीय समीकरणों में से एक बार में दो को लेकर उन्हें हल करते हैं।

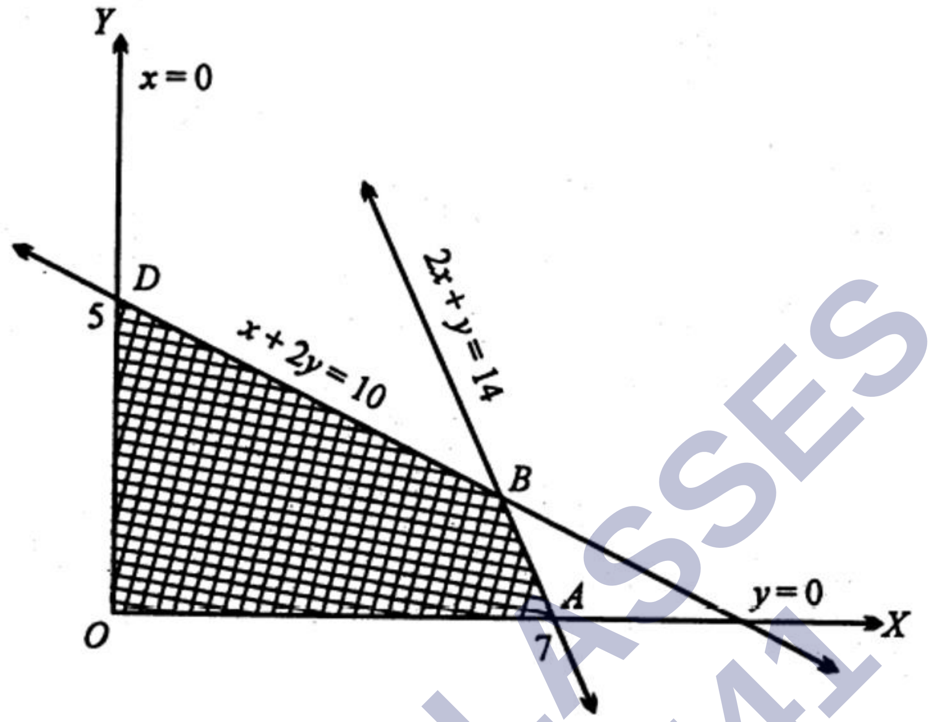
चरण 6. चरण IV में प्राप्त प्रत्येक बिन्दु पर उद्देश्य फलन के मान की गणना करते हैं। उद्देश्य फलन के सबसे बड़े मान या सबसे छोटे मान के संगत मानों का निकाय ही रेखीय कार्य योजना समस्या का हल है।

उदाहरण

फलन P=2x+3y का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जबकि प्रतिबन्ध निम्न हैं

$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 10; 2x + y \leq 14.$

हल : प्रतिबन्धों $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ के कारण अन्य रेखीय असमीकरणों के ग्राफ केवल प्रथम चतुर्थांश में प्राप्त करना है।



x+2y= 10 के लिए x और y के मानों की सारणी निम्न है-

X	0	10
Y	5	0

परीक्षण बिन्दु (0,0) के लिए $x + 2y \geq 10$ सत्य है क्योंकि $0 + 2x0 \leq 10$. अतः क्षेत्र मूलबिन्दु की ओर है।

2x+y= 14 के लिए और y के मानों की सारणी निम्न-

X	0	7
Y	14	0

मूलबिन्दु (0, 0) के लिए $2x + y \leq 14$ सत्य है क्योंकि $2(0) + 0 \leq 14$. अतः क्षेत्र मूलबिन्दु को शामिल करता है।

लेखाचित्र उभयनिष्ठ क्षेत्र रेखांकित में है जिसके शीर्षों OABD पर उद्देश्य फलन P=2x+3y के मान निम्न सारणी में दर्शाये गये हैं।

शीर्ष	उद्देश्य फलन P का मान
$O(0, 0)$	$P = 2(0) + 3(0) = 0$
$A(7, 0)$	$P = 2(7) + 3(0) = 14$
$B(6, 2)$	$P = 2(6) + 3(2) = 18$ (अधिकतम)
$D(0, 5)$	$P = 2(0) + 3(5) = 15$

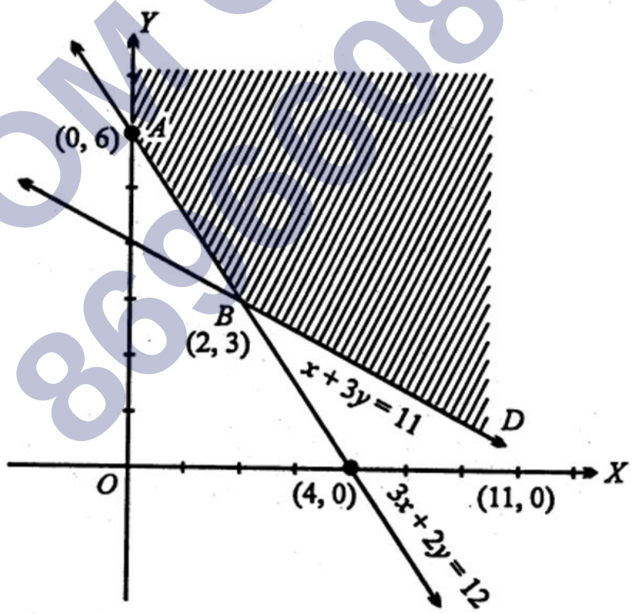
∴ P का अधिकतम मान 18 है जो बिन्दु B(6, 2) पर है, जिसके लिए x = 6,y = 2. उत्तर ।

उदाहरण 3. फलन P=x+y का रेखीय व्यवरोधों $3x + 2y \geq 12, x + 3y \geq 11, x \geq 0, y \geq 0$ के अन्तर्गत न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x \geq 0, y \geq 0$ के कारण अन्य व्यवरोधों के ग्राफ प्रथम चतुर्थांश में प्राप्त करते हैं। वे हैं

$3x + 2y \geq 12$ .....(1)

$x + 3y \geq 11$ .....(2)



(i) 3x+2y = 12 के लिए x और y के मानों की सारणी निम्न है-

X	0	4
Y	6	0

(ii) x+3y = 11 के लिए x और y के मानों की सारणी निम्न है-

X	11	2
Y	0	3

परीक्षण बिन्दु (0, 0) से दोनों असमीकरण सन्तुष्ट नहीं होते क्योंकि

$3(0) + 2(0) \geq 12$ असत्य है।

$0 + 3(0) \geq 11$ असत्य है।

अतएव संभाव्य क्षेत्र खुला क्षेत्र है, जिसके शीर्ष A, B, D हैं। उद्देश्य फलन की गणना मूल बाह्यतम बिन्दु प्रमेय के अनुसार अग्रांकित हैं

शीर्ष	फलन P
$A(0, 6)$	$P = 0 + 6 = 6$
$B(2, 3)$	$P = 2 + 3 = 5$
$D(11, 0)$	$P = 11 + 0 = 11$

अत: P का न्यूनतम मान 5 है जब x = 2,y =3.

उदाहरण

निम्न असमीकरणों द्वारा निर्धारित क्षेत्र को ग्राफ द्वारा दर्शाइए

$x \geq 0, y \geq 0, 2x + 5y \leq 16, 2x + y \leq 8.$

तथा P= 5x + 4y के अधिकतम मान हेतु xy के मान ज्ञात कीजिए।

हल : असमीकरणों $2x + 5y \leq 16$ .....(1)

एवं $2x + y \leq 8$ ......(2)

को निम्नानुसार लिखने पर,

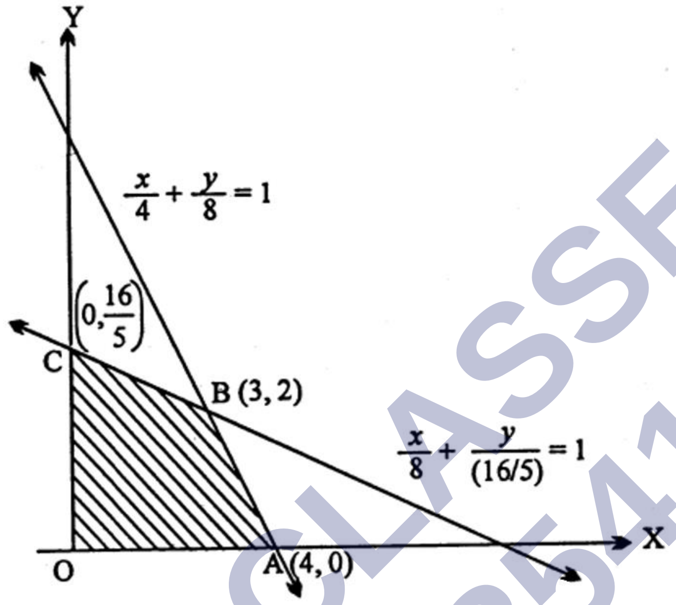
$\frac{2x}{16} + \frac{5y}{16} \leq 1$, [असमिका (1) से]

$\Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{\left(\frac{16}{5}\right)} \leq 1$ ...(3)

इसी प्रकार, $\frac{2x}{8}+\frac{y}{8}\leq 1$, असमिका (2) से]

$\Rightarrow \frac{x}{8}+\frac{y}{8}\leq 1$ ...(4)

क्षेत्र $x\geq 0$ एवं $y\geq 0$ के लिए असमीकरणों (3) एवं (4) का ग्राफीय निरूपण करने पर :



रेखाएँ $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1$

एवं $\frac{x}{8}+\frac{y}{(16/5)}=1$

एक-दूसरे को बिन्दु B(3,2) पर प्रतिच्छेदित करती है। अतः OABC रेखाओं द्वारा प्रतिबन्धित क्षेत्र है, जहाँ बिन्दु 0,A,B,C के निर्देशांक क्रमशः 00, 0), A(4,0), B(3, 2), c $\left(0,\frac{16}{5}\right)$

इन शीर्षो पर P= 5x+4y का मान निम्नानुसार प्राप्त होगा

शीर्ष बिन्दु	शीर्ष बिन्दु के निर्देशांक	$P=5x+4y$
O	(0, 0)	$P=5(0)+4(0)=0$
A	(4, 0)	$P=5(4)+4(0)=20$
B	(3, 2)	$P=5(3)+4(2)=23$
C	$\left(0,\frac{16}{5}\right)$	$P=5(0)+4\left(\frac{16}{5}\right)=\frac{64}{5}$

उपर्युक्त सारणी से P का अधिकतम मान बिन्दु B(3, 2) पर 23 प्राप्त होता है।

अतः x = 3 एवं y= 2 पर मान अधिकतम है। उत्तर

उदाहरण (Examples)

एक फर्नीचर व्यापारी मेज तथा कुर्सियों का व्यापार करता है। वह दुकान में 5000 रु. लगा सकता है। दुकान में कुल 60 नग रखने का स्थान है। उसे 250 रुपये में मेज तथा 50 रुपये में कुर्सी मिल रही है। मेज पर 50 रुपये व कुर्सी पर 15 रुपये लाभ मिलता है। यदि खरीदा गया सभी फर्नीचर बिक जाये, तो अधिकतम लाभ हेतु केवल रेखीय प्रतिबन्ध बनाओ।

हल: माना- मेजों की संख्या तथा y कुर्सियों की संख्या है तब स्पष्ट रूप से $x \geq 0$एवं$y \geq 0$. पुनः एक कुर्सी की कीमत 50 रुपये तथा एक मेज की कीमत 250 है एवं अधिकतम व्यय रु. 5000 है। तब,

$250x + 50y \leq 5000$ .....(1)

पुनः 60, मेज एवं कुर्सी रखने के लिए स्थान उपलब्ध है तब, $x + y \leq 60$ .....(2)

एक मेज को अधिकतम 50 रु. तथा कर्मी को अधिकतम 15 रु. के लाभ से बेचा जाता है तब अधिकतम लाभ

P= 50x+15y .....(3)

अतः अधिकतम लाभ के लिए उद्देश्य फलन

P= 50x+15y

के लिए असमिकाएँ निम्नानुसार होगी

$250x + 50y \leq 5000$

$x + y \leq 60$

$x \geq 0, y \geq 0$

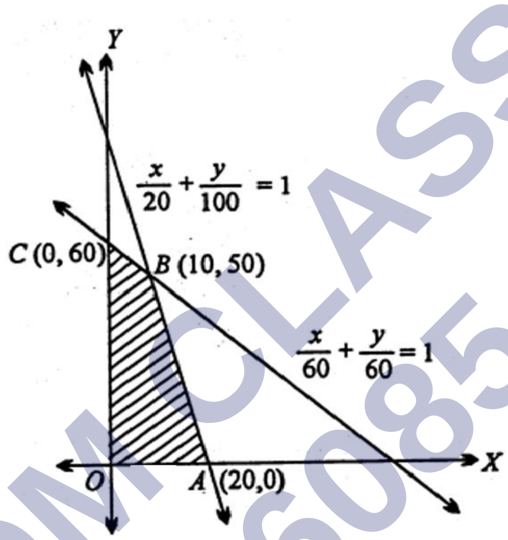
असमिकाओं को निम्नानुसार लिखने पर,

$$\frac{250x}{5000}+\frac{50y}{5000}\le 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{20}+\frac{y}{100}\le 1 \quad \ldots(4)$$

पुनः $$\frac{x}{60}+\frac{y}{60}\le 1 \quad \ldots(5)$$

असमिकाओं (4) एवं (5) के लिए $x \geq 0$ एवं $y \geq 0$ क्षेत्र में ग्राफीय निरूपण अग्रानुसार होगा



रेखाएँ $\frac{x}{20}+\frac{y}{100}=1$

एवं $\frac{x}{60}+\frac{y}{60}=1$

रेखाएँ एवं एक-दूसरे को बिन्दु B(10,50) पर प्रतिच्छेद करती हैं।

अत:$x \geq 0, y \geq 0$ एवं असमिकाओं से परिबद्ध क्षेत्र OABC होगा, जिसके शीर्ष के बिन्दु क्रमश: O,A,B,C एवं निर्देशांक 0(0,0),A(20,0), B(10,50),C(0,60) हैं। इन शीर्ष बिन्दुओं पर अधिकतम लाभ निम्न सारणी से प्राप्त होगा।

शीर्ष बिन्दु	शीर्ष बिन्दु के निर्देशांक	$P = 50x + 15y$
O	$(0, 0)$	$P = 50(0) + 15(0) = 0$
A	$(20, 0)$	$P = 50(20) + 15(0) = 1000$
B	$(10, 50)$	$P = 50(10) + 15(50) = 1250$ (अधिकतम)
C	$(0, 60)$	$P = 50(0) + 15(60) = 900$

सारणी से अधिकतम लाभ P = 1250 बिन्दु B(10, 50) अर्थात् x = 10,y = 50 पर प्राप्त होता है। अर्थात् मेजों की संख्या 10 तथा कुर्सियों की संख्या 50 होने पर अधिकतम लाभ प्राप्त होगा।

उदाहरण

एक फल विक्रेता सेबों व सन्तरों में 500 रु. विनियोजित करता है। उसके पास अधिक-से-अधिक 12 पेटियों को रखने का स्थान है। सन्तरेकी एक पेटी की कीमत 50 रु. है तथा सेब की एक पेटी की कीमत 25 रु. है। वह सन्तरों को 10 रु. प्रति पेटी के लाभ पर बेच सकता है तथा सेबों को 6 रु. प्रति पेटी के लाभ पर बेच सकता है। यह जानते हुए कि वह उन सभी फलों को बेच सकता है, जिन्हें वह खरीदता है, उसे अधिकतम लाभ कमाने के लिए सेब और सन्तरों की कितनी पेटियाँ खरीदनी चाहिए? उसका - अधिकतम लाभ क्या है?

हल : माना कि वह सन्तरे की x पेटियाँ और सेब की y पेटियाँ खरीदता है।

$\therefore x \geq 0, y \geq 0$ .....(1)

चूँकि वह अधिक-से-अधिक 12 पेटियाँ रख सकता है,

$\therefore x + y \leq 12$ .....(2)

संतरे की पेटियों की कीमत 50x रु.

तथा सेब की y पेटियों की कीमत = 25y रु.

उपलब्ध धन = 500 रु.

$\therefore 50x + 25y \leq 500$

या $2x + y \leq 20.....(3)$

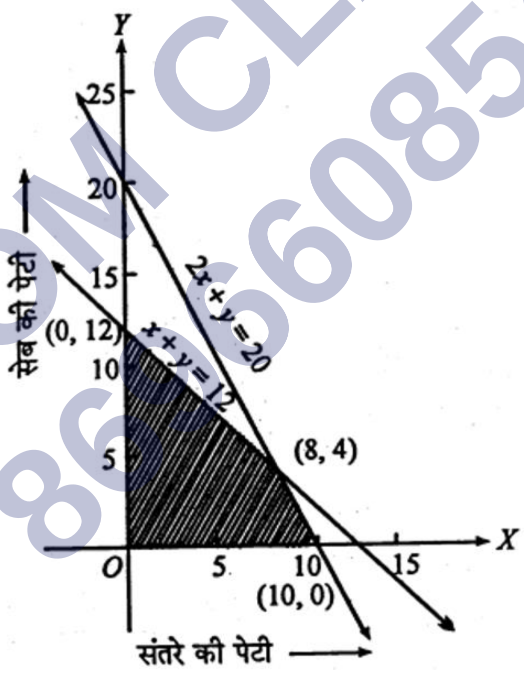
संतरे की पेटियों पर लाभ = 10x रु.

तथा सेब की y पेटियों पर लाभ = 6y रु.

अतः उद्देश्य फलन या लाभ P = 10x+6y .....(4)

इस प्रकार गणितीय दृष्टि से प्रतिबन्धों (1), (2) व (3) को ध्यान में रखते हुए P का अधिकतम मान निकालना है।

इसके लिए ग्राफ पेपर पर $x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 12, 2x + y \leq 20$ का आलेखन करते हैं।



चित्र में रेखांकित क्षेत्र सम्भाव्य क्षेत्र है।

सम्भाव्य क्षेत्र के शीर्ष बिन्दु (0,0), (10,0), (8, 4) और (0, 12) हैं। इसके किसी शीर्ष पर P का मान अधिकतम होगा।

शीर्ष	उद्देश्य फलन का मान
(0, 0)	$P = 10 \times 0 + 6 \times 0 = 0$
(10, 0)	$P = 10 \times 10 + 6 \times 0 = 100$
(8, 4)	$P = 10 \times 8 + 6 \times 4 = 104$ (अधिकतम)
(0, 12)	$P = 10 \times 0 + 6 \times 12 = 72$

अतःलाभ अधिकतम उस समय होगा जबकि वह सन्तरों की 8 पेटियाँ तथा सेब की 4 पेटियाँ खरीदता है। अधिकतम लाभ 104 रु. है।

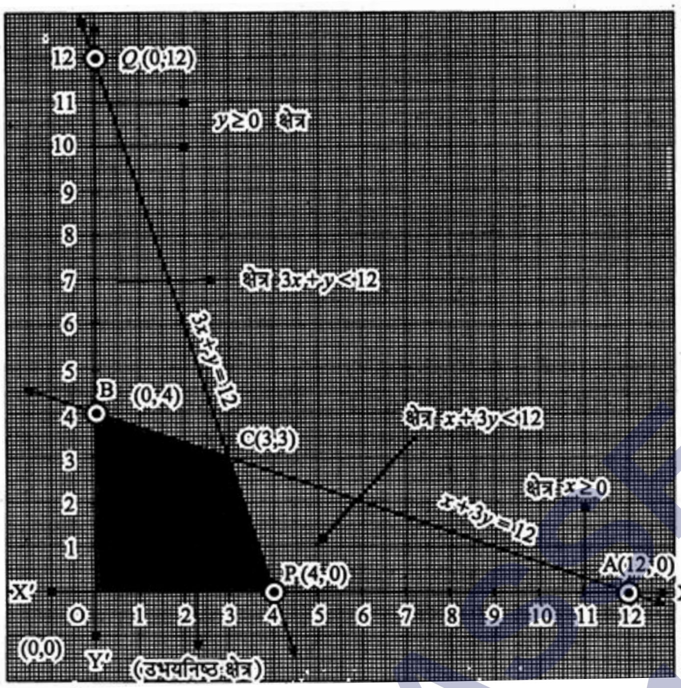
उदाहरण

एक कारखाने में टेनिस के रैकेट और क्रिकेट के बल्ले बनाये जाते हैं। यदि एक रैकेट के निर्माण में मशीन A पर एक घण्टा और मशीन B पर 3 घण्टे कार्य करना पड़ता है, जबकि बल्ले के निर्माण में 3 घंटे मशीन पर और 1 घंटा मशीन B पर कार्य करना पड़ता है। वह रैकेट पर ₹40 और बल्ले पर₹ 90 लाभ कमाता है। यदि प्रतिदिन मशीनों का अधिकतम उपयोग 12 घंटे किया जाये, तो कारखाने में कितने रैकेट और बल्ले बनाए जाएँ ताकि अधिकतम लाभ प्राप्त किया जा सके।

हल : माना कारखाने में x रैकेट और " बल्ले बनाया जाये ताकि अधिकतम लाभ प्राप्त हो। अतः प्रश्नानुसार लाभ फलन है।

P=40x + 90y, ...(1)

[∵ चूँकि रैकेट पर ₹ 40 और बल्ले पर ₹ 90 लाभ मिलता है।]



प्रश्नानुसार प्रतिदिन मशीनों पर अधिकतम 12 घंटे कार्य लिया जा सकता है।

$\therefore\ x + 3y \leq 12$ .....(2)

$3x + y \leq 12$ ....(3)

और $x \geq 0$ .....(4)

$y \geq 0$ .....(5)

अब $x + y \leq 12$ समी. (2) के ग्राफ हेतु x+3y=12 का ग्राफ खींचना है।

$$\frac{x}{12}+\frac{3y}{12}=1,\ \frac{x}{12}+\frac{y}{4}=1 \quad ...(2)$$

सरल रेखा (2) निर्देशांक अक्षों से 12 और 4 अन्त: खण्ड काटती है। अर्थात् 4(12,0) और B(0, 4) को प्लाट कर रेखा x+3y-12 का ग्राफ आसानी से प्राप्त हो जायेगा। इसी प्रकार 3x+y= 12 का ग्राफ हेतु

$$\frac{3x}{12}+\frac{y}{12}=1,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{12}=1$$

अतः P(4,0) और ((0, 12) को ग्राफ पेपर पर लेकर मिलाने से सरल रेखा 3x +y= 12 का ग्राफ आसानी से प्राप्त हो जायेगा।

(i) अब $x \geq 0, X$ -अक्ष पर के प्रत्येक बिन्दु और x>0, x-अक्ष के ऊपर के क्षेत्र हल समुच्चय होगा।

(ii) इसी प्रकार $y \geq 0$, Y-अक्ष पर के प्रत्येक बिन्दु और दायें ओर के क्षेत्र के प्रत्येक बिन्दु हल समुच्च होगा।

(iii) $x + 3y \geq 12$ का क्षेत्र सरल रेखा x+3y=12 पर का प्रत्येक बिन्दु और परीक्षण बिन्दु O(0,0) लेने पर $0 + 3x0 > 12 \Rightarrow 0 < 12$ सत्य है

अतः सरल रेखा x +3y= 12 के मूल बिन्दु की ओर का क्षेत्र $x + 3y \leq 12$ का हल समुच्चय है।

(iv) इसी प्रकार $3x + y \leq 12$ का क्षेत्र भी सरल रेखा 3x+y=12 का प्रत्येक बिन्दु के साथ मूल बिन्दु की ओर का क्षेत्र $3x + y \leq 12$ का हल समुच्चय होगा।

[क्योंकि $3x0 + 0 < 12 \Rightarrow 0$ सत्य है परीक्षण बिन्दु O(0,0) लेने पर]

(i) (ii) (iii) और (iv) व्याख्या से स्पष्ट है कि उक्त ग्राफ में उभयनिष्ठ क्षेत्र (छायांकित क्षेत्र OPCB) व्यवरोधों का हल समुच्चय होगा। जिसके शीर्ष बिन्दु 0(0,0), P(4,0), C(3, 3) और B(0, 4) हैं।

उभयनिष्ठ क्षेत्र (छायांकित क्षेत्रOPCB के संगत लाभ फलन का मान P= 40x+90y है।

उभयनिष्ठ क्षेत्र $OPCB$ के शीर्ष बिन्दु	शीर्ष बिन्दु के संगत लाभ फलन $P=40x+90y$
$O(0,0)$	$P=40\times0+90\times0$ $\Rightarrow P=0$
$P(4,0)$	$P=40\times4+90\times0$ $\Rightarrow P=$ ₹ 160
$C(3,3)$	$P=40\times3+90\times3$ $\Rightarrow P=120+270$ $\Rightarrow P=$ ₹ 390 अधिकतम
$B(0,4)$	$P=40\times0+90\times4$ $\Rightarrow P=0+360$ $\Rightarrow P=$ ₹ 360

उक्त सारणी से स्पष्ट है कि कारखाने में अधिकतम लाभ हेतु शीर्ष बिन्दु (3,3) के संगत अधिकतम लाभ

P = 40 x 3 + 90 x 3 = 120 + 270

⇒ P = ₹ 390 (अधिकतम लाभ) है। अत: कारखाने में 3 रैकेट और 3 बल्ले बनाना चाहिये।

टीप- 3x+y=12

x+3y=12 को हल कर प्रतिच्छेदी बिन्दु प्राप्त कर सकते हैं जो ग्राफ में प्रतिच्छेदी बिन्दु C(3,3) दिखाया गया है।

$3x+y=12$ और $x+3y=12$ से

$$\begin{array}{rcl} 3x+9y & = & 36 \\ - \quad - & & - \\ \hline -8y & = & -24 \\ y & = & 3 \end{array} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow x+3\times3=12 \\ &\Rightarrow x=12-9 \\ &\Rightarrow x=3 \end{aligned}$$

NCERT SOLUTIONS

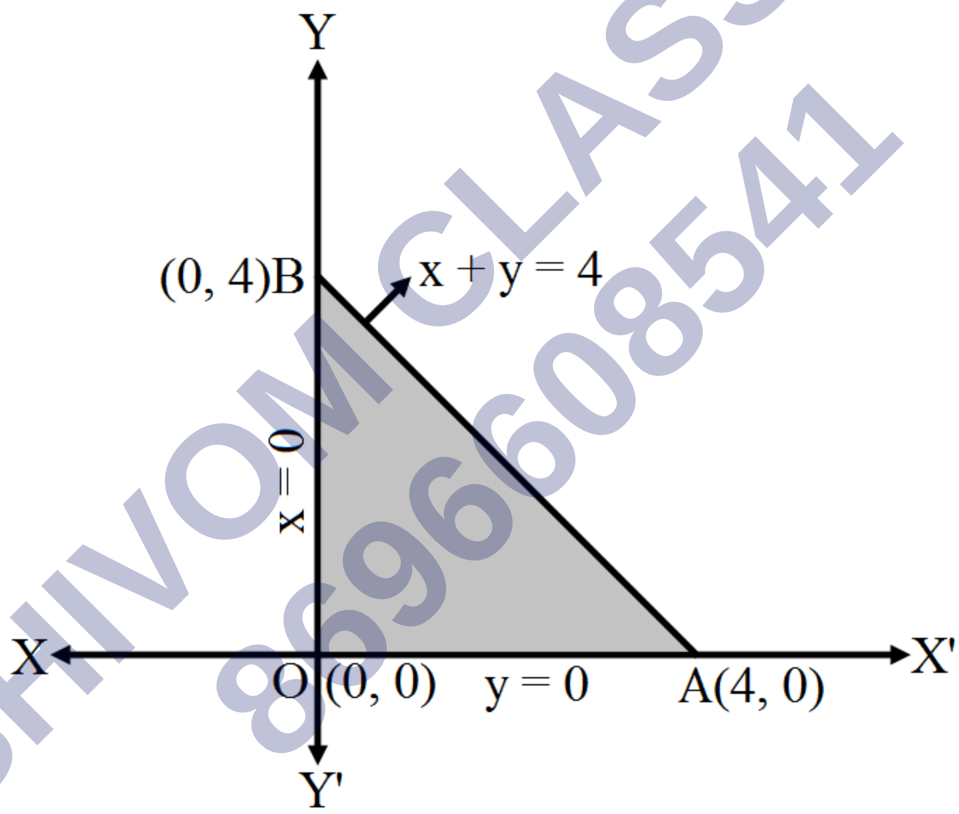
प्रश्नावली 12.1 (पृष्ठ संख्या 529)

प्रश्न 1 ग्राफिक विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्याओ को हल कीजिए-

निम्न अवरोधों के अंतर्गत Z = 3x + 4x + 4y का अधिकतमीकरण कीजिये

$x + y \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

उत्तर- दिए हुए असमीकरणों को समीकरणों में बदलने पर,



$x + y = 4$

$x = 0,\ y = 0$

अब हम उपरोक्त रेखाओं के आलेख खींचते है। संलग्न चित्र में सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) OAB परिबद्ध है। सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिन्दु O(0, 0) A(4, 0) B(0, 4) है।

अब हम कोनीय बिन्दुओं पर उद्देशीय फलन Z का मान ज्ञात करते हैं।

कोनीय बिन्दु	उददेशीय फलन Z = 5x + 3y का मान
O(0, 0)	0
A(4, 0)	12
B(0, 4)	16

अतः B(0, 4) पर Z अधिकतम है और अधिकतम मन है।

प्रश्न 2 ग्राफिक विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्याओ को हल कीजिए:

निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = -3x + 4y$ का न्यूनतमीकरण कीजिये

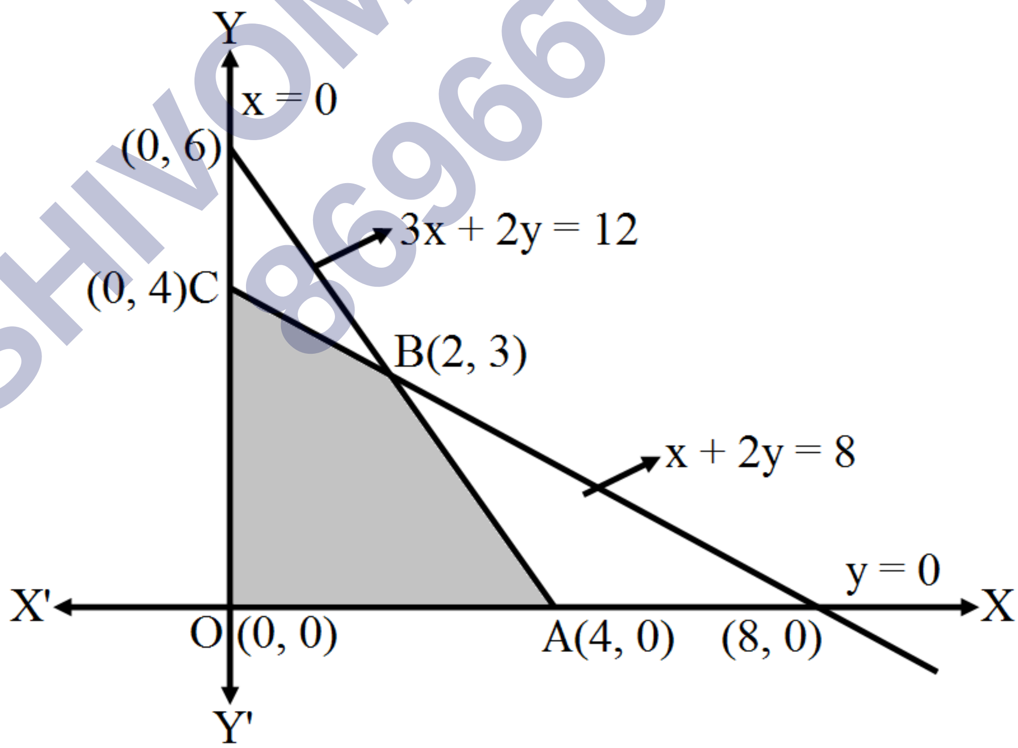
$X + 2y \leq 8,\ 3x + 2y \leq 12,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

उत्तर- सर्वप्रथम हम रेखाओ $x + 2y = 8$ ....(i)

$3x + 2y = 12$ .....(ii)

$x = 0$ ....(iii)

$y = 0$ ....(iv)



का आलेख खींचते हैं।

स्पष्ट हैं की सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) OABC परिबद्ध हैं। सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिन्दु O(0, 0) A (4, 0), B(2, 3) और C(0, 4) हैं।

अब हम कोनिय बिन्दुओ पर उद्देशीय फलन Z का मान ज्ञात करते है।

कोनीय बिन्दु	**उददेशीय फलन Z = 3x + 4y का मान**
O(0, 0)	0
A(4, 0)	-12 न्यूनतम
B(2, 3)	6
C(0, 4)	16

अतः कोनिय बिन्दु A(4, 0) पर Z का न्यूनतम मान = -12

प्रश्न 3 ग्राफिक विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्याओ को हल कीजिए:

निम्न अवरोधों के अंतर्गत Z = 5x + 3y का अधिकतमीकरण कीजिये:

$3x + 3y \le 15,\ 5x + 2y \le 10,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

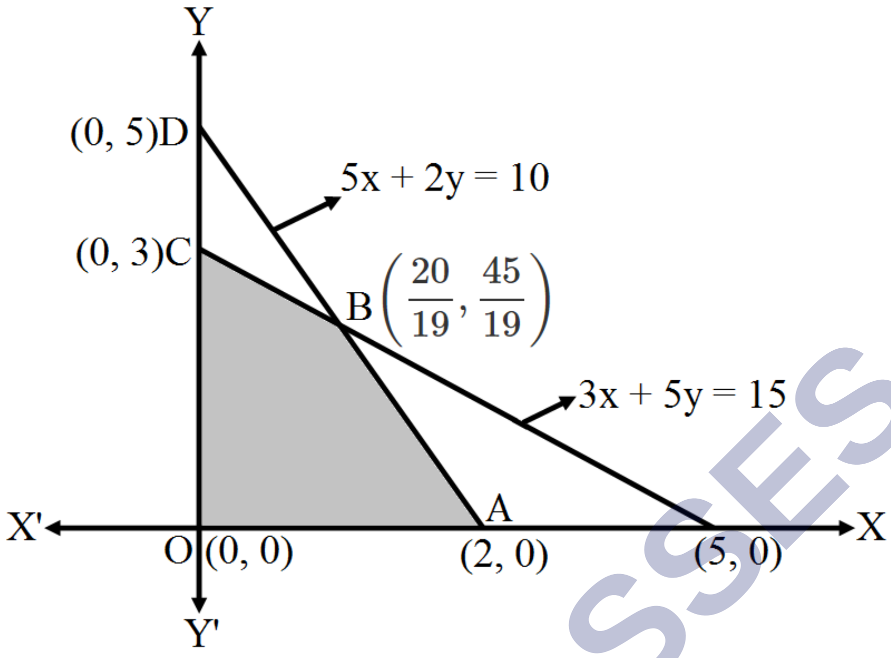
उत्तर- सर्वप्रथम हम रेखओं,

$3x + 5y = 15$ ....(i)

$5x + 2y = 10$ ....(ii)

$x = 0,$ ....(iii)

$y = 0$ ....(iv)



का आलेख खींचते हैं।

स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) OABC परिबद्ध है।

सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिन्दु O(0,0), A(2,0), B O(0,0),A(2,0),B $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$,C(0,3)

अब हम कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान ज्ञात करते हैं।

कोनीय बिन्दु	उददेशीय फलन Z = 5x + 3y का मान
O(0,0)	0
A(2,0)	10
B $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$	$\frac{235}{19}$ अधिकतम
C(0,3)	9

अत: कोनीय बिन्दु $B\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ पर Z का अधिकतम मान $= \frac{235}{19}$ हैं।

प्रश्न 4 ग्राफिक विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्याओ को हल कीजिए:

निम्न अवरोधों के अंतर्गत Z = -3x + 5y का न्यूनतमीकरण कीजिये:

x + 3y ≥ 3, x + y ≥ 2, x, y ≥ 0

उत्तर- सर्वप्रथम हम रेखाओं

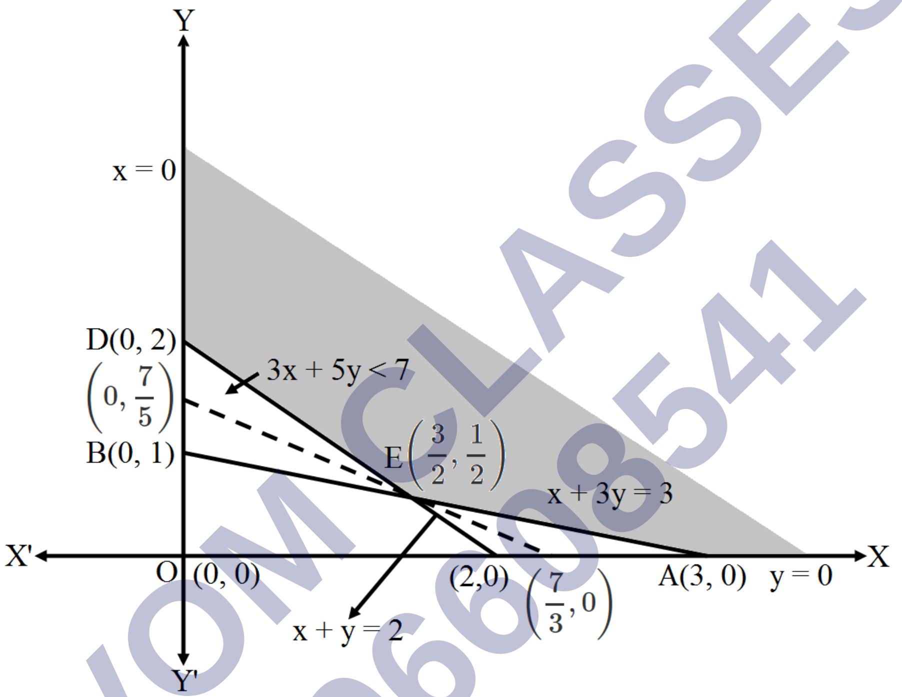
x + 3y = 3 .....(i)

x + y = 2 .....(ii)

x = 0 .....(iii)

y = 0 .....(iv)

का आलेख खींचते हैं।



स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) AED अपरिबद्ध है।

कोनीय बिन्दु

$A(3,0), E\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), D(0,2)$ है।

कोनीय बिन्दु	उददेशीय फलन Z = 3x + 5y का मान
A(3,0)	9
$E\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$	7 न्यूनतम
D(0,2)	10

Z का न्यूनतम मान = 7 जोकि बिन्दु $E\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ है।

लेकिन क्षेत्र अपरिबद्ध है। अतः Z का यह मान न्यूनतम हो सकता है और नहीं भी।

अतः हम असमीका 3x + 5y < 7 ....(v) का आलेख खींचते है।

क्योंकि आलेख (v) व सुसंगत क्षेत्र में कोई भी बिन्दु उभयनिष्ट नहीं है।

इसलिए Z का न्यूनतम मान 7 पर है।

प्रश्न 5 ग्राफिक विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्याओ को हल कीजिए:

निम्न अवरोधों के अंतर्गत Z = 3x + 2y का अधिकतमीकरण कीजिये:

x + 2y ≤ 10 ; 3y + y ≤ 15 ; x, y ≥ 0;

उत्तर- सर्वप्रथम निम्नलिखित रेखाओं

x + 2y = 10 .....(i)

3x + y = 15 .....(ii)

x = 0 .....(iii)

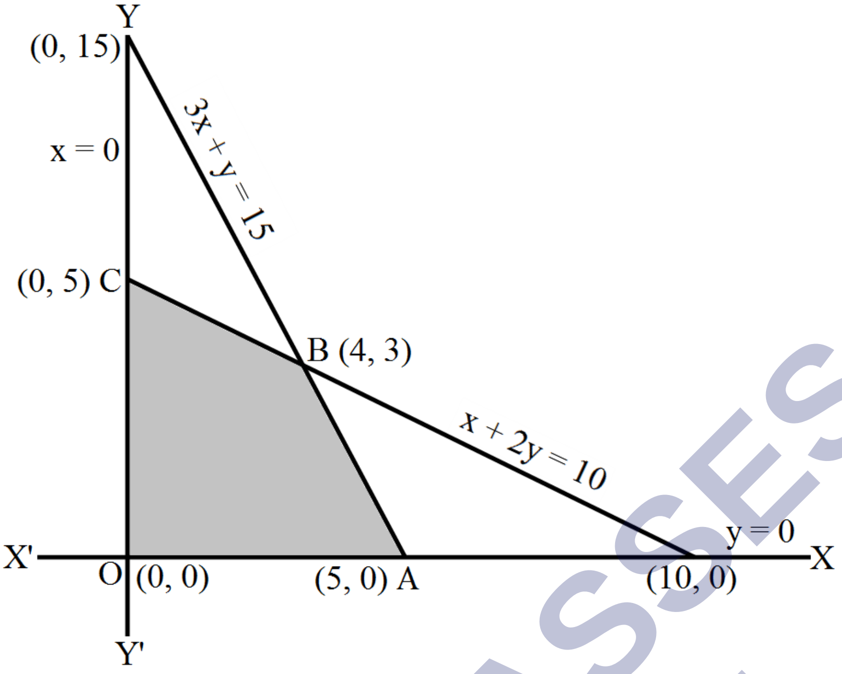
y = 0 .....(iv)

के आलेख खींचते हैं।

स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र OABC (छायांकित) परिबद्ध है।

जिसके कोनीय बिन्दु O(0, 0), A(5,0), B(4, 3), C(0, 5) हैं।

अब हम कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान ज्ञात करते हैं।



कोनीय बिन्दु	उददेशीय फलन Z = 3x + 2y का मान
O(0,0)	0
A(5, 0)	15
B(4, 3)	18 अधिकतम
C(0, 5)	10

Z का अधिकतम मान कोनीय बिन्दु B(4, 3) पर है जोकि 18 है।

प्रश्न 6 ग्राफिक विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्याओ को हल कीजिए:

निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिये:

$2x + y \geq 3$; $x + 2y \geq 6$; $x, y \geq 0$

उत्तर- सर्वप्रथम निम्नलिखित रेखाओं,

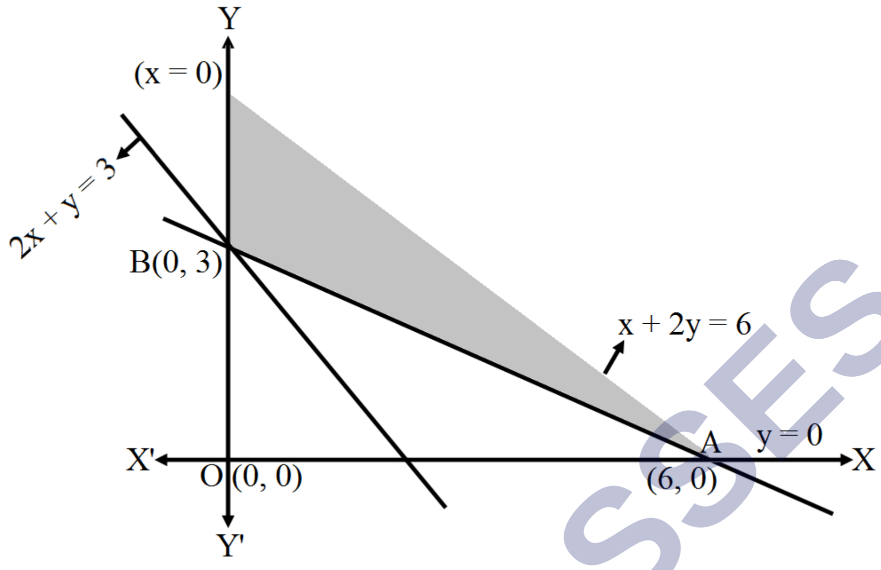
$2x + y = 3$ .....(i)

$x + 2y = 6$ .....(ii)

$x = 0$, ...(iii)

$y = 0$ .....(iv)

के आलेख खींचते हैं।



स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) अपरिबद्ध है।

जिसके कोनीय बिन्दु A(6, 0), B(0, 3) हैं।

अब हम कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान ज्ञात करते हैं।

कोनीय बिन्दु	उददेशीय फलन Z = x + 2y का मान
A(6, 0)	6 न्यूनतम
B(0, 3)	6 न्यूनतम

∴ बिन्दु A व B दोनों पर Z का न्यूनतम मान 6 है। अतः A व B को मिलाने वाली रेखा के प्रत्येक बिन्दु पर Z का मान न्यूनतम होगा।

प्रश्न 7 दिखाइए कि Z का न्यूनतम मान दो बिन्दुओं से अधिक बिन्दुओं पर घटित होता है।

निम्न अवरोधों के अंतर्गत Z = 5x + 10y का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिये:

$x + 2y \le 120,\ x + y \ge 60,\ x - 2y \ge 0,\ x, y \ge 0$

उत्तर- सर्वप्रथम हम निम्नलिखित रेखाओं,

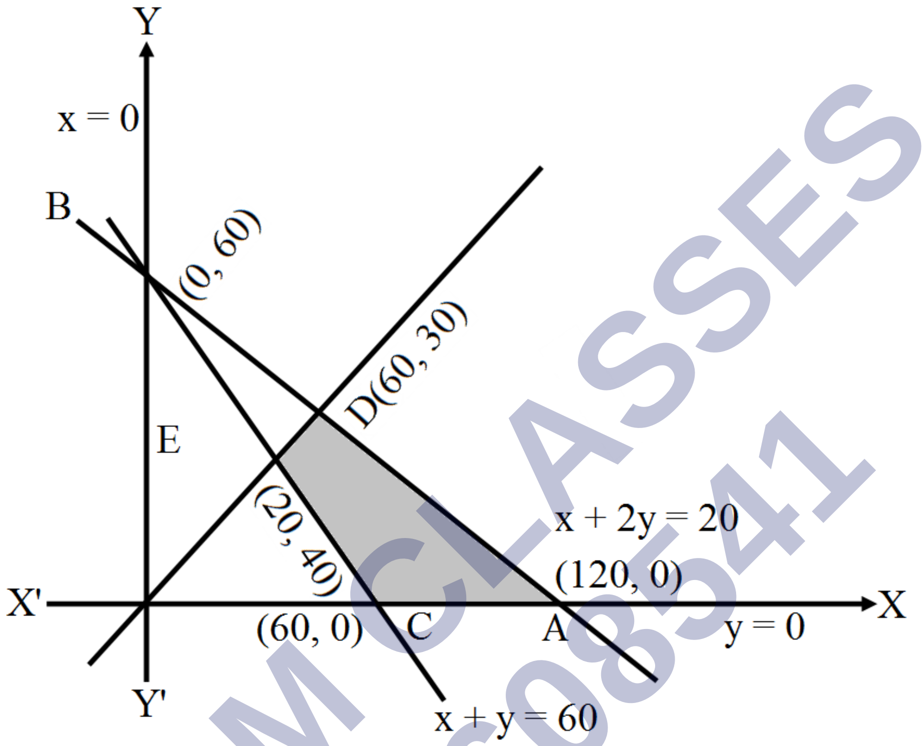
x + 2y = 120 .....(i)

x + y = 60 .....(ii)

x - 2y = 0 .....(iii)

x = 0 .....(iv)

y = 0 .....(v)



के आलेख खींचते हैं। स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) ADEC परिबद्ध है। जिसके कोनीय बिन्दु हैं A(120, 0), D(60, 30), E(20, 40), C(60, 0) कोनीय बिन्दुओं पर उद्देशीय फलन Z का मान ज्ञात करते हैं।

कोनीय बिन्दु	उददेशीय फलन Z = 5x + 10y का मान
A(120, 0)	600 अधिकतम
D(60, 30)	600
E(20, 40)	500
C(60, 0)	300 न्यूनतम

अत: C(60, 0) पर Z का न्यूनतम मान 300 है और A(120, 0) और D(60, 30) पर Z का अधिकतम मान 600 है अर्थात् AD के प्रत्येक बिन्दु पर Z का अधिकतम मान 600 है।

प्रश्न 8 दिखाइए कि Z का न्यूनतम मान दो बिन्दुओं से अधिक बिन्दुओं पर घटित होता है।

निम्न अवरोधों के अंतर्गत Z = x + 2y का अधिकतमीकरण कीजिये:

$x + 2y \geq 100,\ 2y - y \leq 0,\ 2x + y \leq 200;\ x,y \geq 0$

उत्तर- सर्वप्रथम हम रेखाओं,

$x + 2y = 100$ .....(i)

$2x - y = 0$ .....(ii)

$2x + y = 200$ .....(iii)

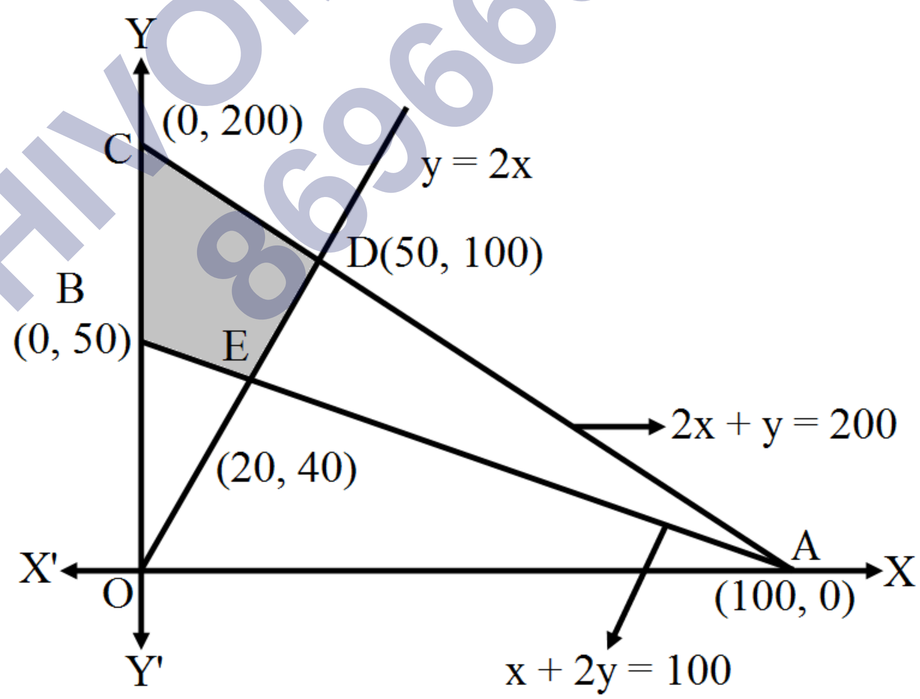
$x = 0$, ...(iv)

$y = 0$ .....(v)

के आलेख खींचते हैं।

स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) BCDE है जोकि परिबद्ध है। जिसके कोनीय बिन्दु B(0, 50), C(0, 200), D(50, 100) और E(20, 40) हैं।

अब हम कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान ज्ञात करते हैं।



अतः बिन्दु (0, 200) पर अधिकतम मान 400 है। तथा बिन्दु B(0, 50) व E(20, 40) पर Z का न्यूनतम मान 100 है।

अर्थात् (0, 50) और (20, 40) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के प्रत्येक बिन्दु पर Z का न्यूनतम मान 100 है।

कोनीय बिन्दु	उददेशीय फलन $Z = x + 2y$ का मान
B(0, 50)	100
C(0, 200)	400 अधिकतम
D(50, 100)	250
E(20, 40)	100 न्यूनतम

प्रश्न 9 दिखाइए कि Z का न्यूनतम मान दो बिन्दुओं से अधिक बिन्दुओं पर घटित होता है।

निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = -x + 2y$ का अधिकतमीकरण कीजिये:

$x \geq 3,\ x + y \geq 5,\ x + 2y \geq 6,\ y \geq 0$

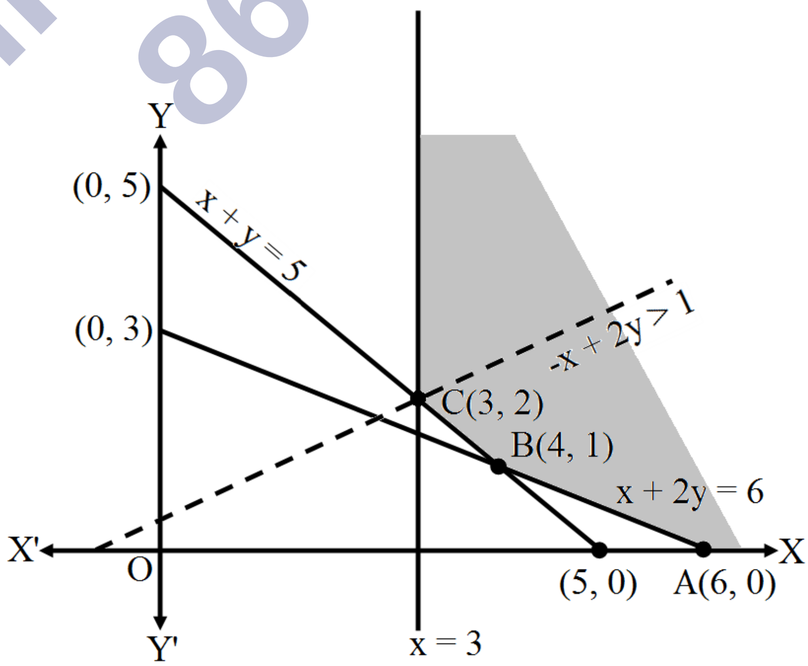
उत्तर- सर्वप्रथम हम रेखाओं,

$x = 3$ .....(i)

$x + y = 5$ .....(ii)

$x + 2y = 6$ .....(iii)

$y = 0$ .....(iv)



के आलेख खींचते हैं।

स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) अपरिबद्ध है। जिसके कोनीय बिन्दु A(6, 0), B(4, 1) और C(3, 2) हैं।

अब हम कोनीय बिन्दु पर Z का मान ज्ञात करते हैं।

कोनीय बिन्दु	**उददेशीय फलन Z = -x + 2y का मान**
A(6, 0)	-6
B(4, 1)	-2
C(3, 2)	1 अधिकतम

सारणी से स्पष्ट है कि Z का अधिकतम मान बिन्दु (3, 2) पर है। परन्तु चूंकि क्षेत्र अपरिबद्ध है अतः Z का यह मान अधिकतम हो सकता हैं और नहीं भी।

यह ज्ञात करने के लिए असमिका $-x + 2y > 1$ ....(v) का आलेख खींचते हैं। आलेख द्वारा प्राप्त खुले अर्द्धतल व सुसंगत क्षेत्र में उभयनिष्ठ बिन्दु हैं। अतः Z का कोई अधिकतम मान सम्भव नहीं है।

प्रश्न 10 दिखाइए कि Z का न्यूनतम मान दो बिन्दुओं से अधिक बिन्दुओं पर घटित होता है।

निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = x + y$ का अधिकतमीकरण कीजिये:

$x - y \leq -1$, $-x + y \leq 0$, $x, y \geq 0$

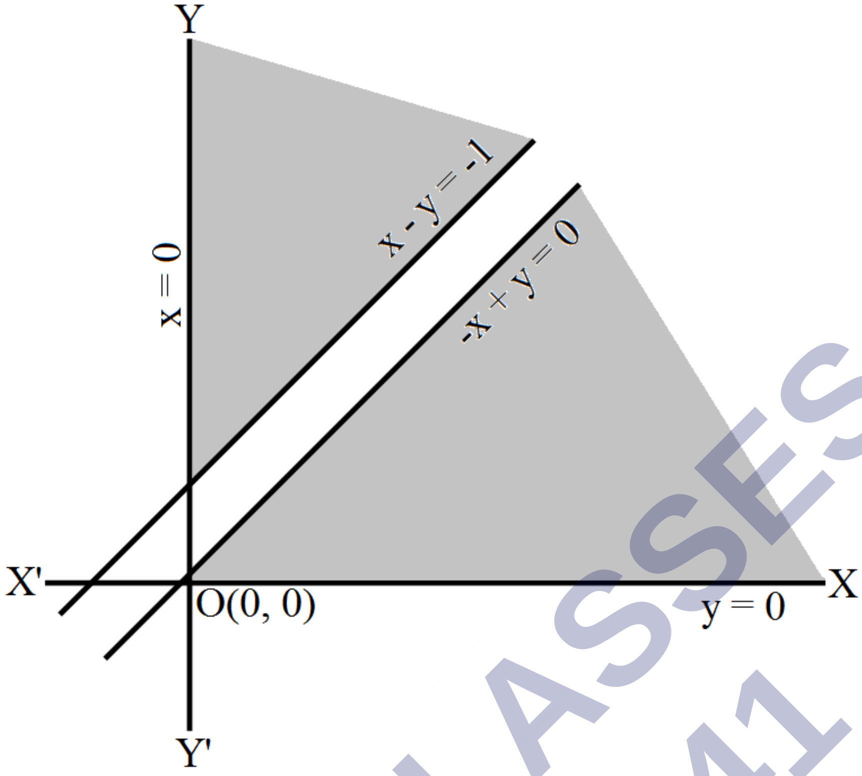
उत्तर- सर्वप्रथम हम निम्नलिखित रेखाओं

$x - y = 1$ .....(i)

$-x + y = 0$ .....(ii)

$x = 0$ .....(iii),

$y = 0$ .....(iv)



के आलेख खींचते हैं।

संलग्न चित्र से हम देखते हैं कि ऐसा कोई बिन्दु नहीं है जो। सभी अवरोधों को एक साथ सन्तुष्ट करे। अत: इस समस्या का कोई सुसंगत हल नहीं है।

प्रश्नावली 12.2 (पृष्ठ संख्या 534-536)

प्रश्न 1 रेशम के दो प्रकार के भोज्य P और Q को इस प्रकार मिलाना चाहती है कि मिश्रण में विटामिन अवयवों में 8 मात्रक विटामिन A तथा 11 मात्रक विटामिन B हों। भोज्य P की लागत Rs. 60/ किग्रा और भोज्य Q की लागत Rs. 80 किग्रा है। भोज्य P में 3 मात्रक/ किग्रा विटामिन A और 5 मात्रक/ किग्रा विटामिन B है जबकि भोज्य Q में 4 मात्रक/ किग्रा विटामिन A और 2 मात्रक/ किग्रा विटामिन B है। मिश्रण की न्यूनतम लागत ज्ञात कीजिए। हल- माना मिश्रण में x किग्रा भोज्य P का और y किग्रा भोज्य B का है। हम प्रदत्त आँकड़ों से निम्न सारणी बनाते हैं।

उत्तर-

स्त्रोत (Resources)	भोज्य पदार्थ		आयश्यकता (मात्रकों में)
	p(x)	Q(y)	

विटामिन A (मात्रक/ किग्रा)	3	4	8
विटामिन B (मात्रक/ किग्रा)	5	2	11
लागत (Rs./ किग्रा)	60	80	

क्योंकि विटामिन A की न्यूनतम आवश्यकता 8 मात्रक है।

$3x + 4y \geq 8$

इसी प्रकार, विटामिन B की आवश्यकता 11 मात्रक है।

$5x + 2y \geq 11$

जबकि,

$x \geq 20,\ y \geq 0$

1 किग्रा भोज्य P का क्रय मूल्य = Rs. 60

1 किग्रा भोज्य Q का क्रय मूल्य = Rs. 80

x किग्रा भोज्य P और y किग्रा भोज्य Q की कुल लागत Z = 60x + 80y अतः समस्या को गणितीय रूप में निम्नलिखित रूप से व्यक्त किया जा सकता है निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत

$3x + 42 \geq 8$ ...(i)

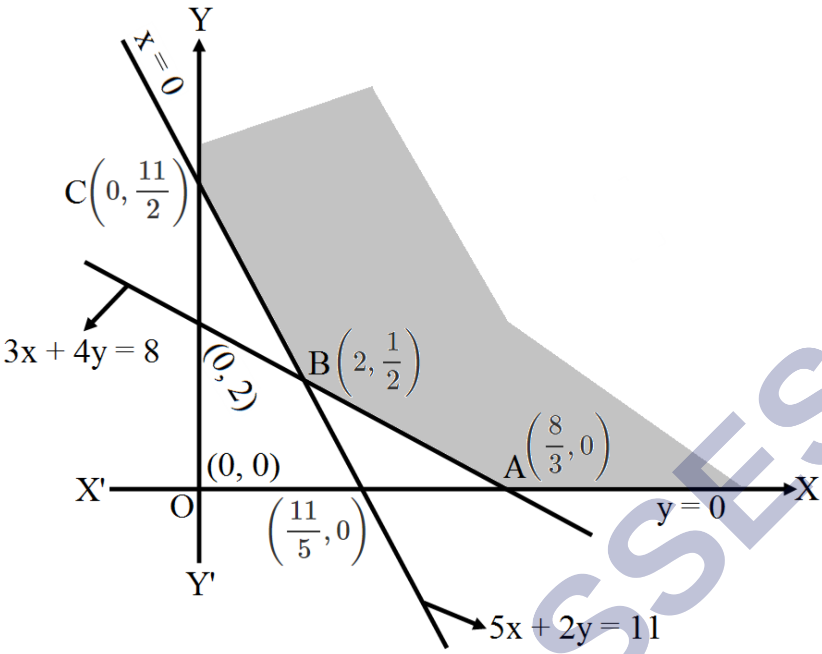
$5x + 2y \geq 11$ ...(ii)

$x \geq 0,\ y \geq 0$ ...(iii)

Z = 60x + 80y का न्यूनतमीकरण कीजिए।

अब इन असमिकाओ को समीकरणों में बदलकर इनके आलेख खींचते है। रेखाएं

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 8 \\ 5x + 2y &= 11 \end{aligned}\right] \text{ बिन्दु } B\left(2, \frac{1}{2}\right) \text{ पर मिलता है।}$$



चित्र से स्पष्ट है की सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है और इसके कोनीय बिन्दु

$A\left(\frac{8}{3}, 0\right), \left(2, \frac{1}{2}\right), C\left(0, \frac{11}{2}\right)$ है।

कोनिया बिन्दुओ पर Z का मान ज्ञात करते है-

कोनीय बिन्दु	Z का संगत मान Z = 60x + 80y
$A\left(\frac{8}{3}, 0\right)$	160 (न्यूनतम)
$\left(2, \frac{1}{2}\right)$	160 (न्यूनतम)
$C\left(0, \frac{11}{2}\right)$	440

अतः न्यूनतम लागत है = Rs. 160

जबकि $x = 2, y = \frac{1}{2}$ या $x = \frac{8}{3}, y = 0$

क्योंकि न्यूनतम लागत A और B पर है। इसलिए यह रेखा AB के प्रत्येक बिन्दु पर है।

पुनः क्योंकि 60x + 80y < 160

अर्थात 3x + 4y < 8 का सुसंगत क्षेत्र से कोई भी उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं है।

अतः न्यूनतम मूल्य Z = Rs. 160, AB है।

प्रश्न 2 एक प्रकार के केक को 200 ग्राम आटा तथा 25 ग्राम वसा (Fat) की आवश्यकता होती है। तथा दूसरी प्रकार के केक के लिए 100 ग्राम आटा तथा 50 ग्राम वसा की आवश्यकता होती है। केकों की अधिकतम संख्या बताओं जो 5 किलो आटे तथा 1 किलो वसा से बना सकते हैं, यह मान लिया गया है कि केकों को बनाने के लिए अन्य पदार्थों की कमी नहीं रहेगी।

उत्तर- माना पहली प्रकार के केक x हैं और दूसरी प्रकार के केक y हैं।

दिये गये आँकड़ों से निम्न सारणी बनाते हैं-

	केकों की संख्या	**आटे की आवश्यकता (ग्राम में)**	**वसा की आवश्यकता (ग्राम में)**
I	x	200x	25y
II	y	100y	50y
कुल	x + y	5000	1000

दी गई शर्तों के अनुसार, समस्या को इस प्रकार लिख सकते हैं।

व्यवरोधों $200x + 100y \le 5000$

अर्थात् $2x + y \le 50$ ...(i)

और $25x + 50y \le 1000$

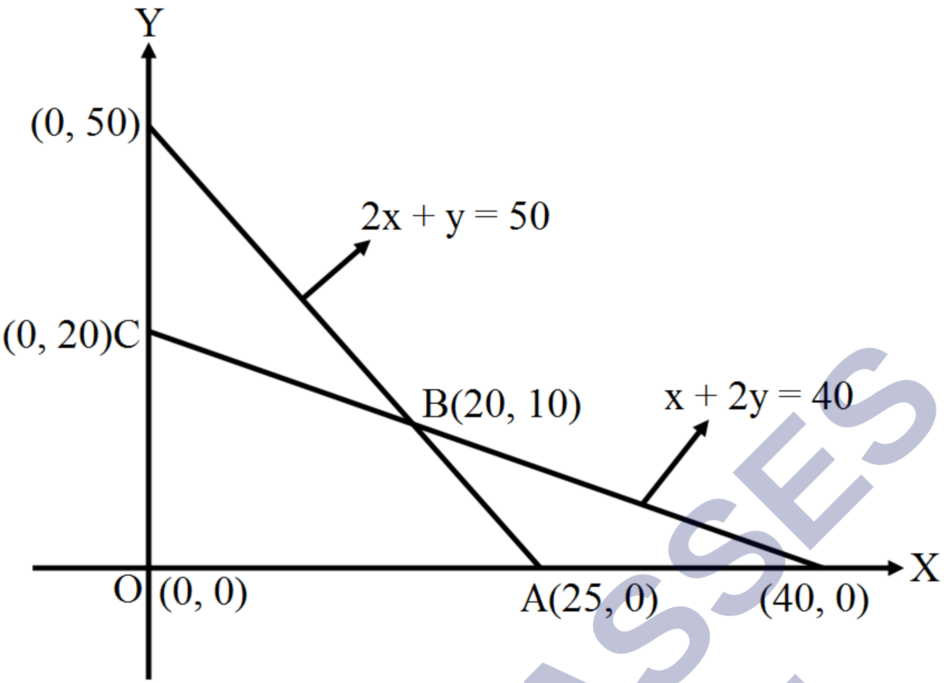
अर्थात् $x + 20y \le 40$ ...(ii)

तथा $x \ge 0$ ...(iii)

$x \ge 0$ ...(iv)

के अन्तर्गत $Z = x + y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

उपरोक्त असमिकाओं की संगत समीकरणों की रेखाओं के आलेख खींचते हैं। चित्र से स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र OABC (परिबद्ध) है। जिसके कोनीय बिन्दु O(0, 0), A(25, 0), B(20, 10) और C(0, 20) हैं।



अब हम कोनीय बिन्दुओ पर Z का मान ज्ञात करते है।

कोनीय बिन्दु	Z का संगत मान Z = x + y
O(0, 0)	0
A(25, 0)	25
B(20, 10)	30 अधिकतम
C(0, 20)	20

चूँकि B(20, 10) पर Z अधिकतम है अर्थात 20 केक एक प्रकार के और 10 केक दूसरे प्रकार के बनाने होंगे, केको की अधिकतम संख्या = 30 है।

प्रश्न 3 एक कारखाने में टेनिस के रैकेट तथा क्रिकेट के बल्ले बनते हैं। एक टेनिस रैकेट बनाने के लिए 1.5 घण्टा यांत्रिक समय तथा 3 घण्टे शिल्पकार का समय लगता है। एक किक्रेट बल्ले को तैयार करने में 3 घण्टे यांत्रिक समय तथा 1 घण्टा शिल्पकार का समय लगता है। एक दिन में कारखाने में विभिन्न यंत्रों पर उपलब्ध यांत्रिक समय के 42 घण्टे और शिल्पकार समय के 24 घण्टे से अधिक नहीं हैं।

1. रैकेटों और बल्लों को कितनी संख्या में बनाया जाए ताकि कारखाना पूरी क्षमता से कार्य करें?

2. यदि रैकेट और बल्ले पर लाभ क्रमशः Rs. 20 तथा Rs. 10 हों, तो कारखाने का अधिकतम लाभ ज्ञात कीजिए यदि कारखाना पूरी क्षमता से कार्य करे।

उत्तर-

1. माना रैकेट बनाने की संख्या = x और बल्ले बनाने की संख्या = y दिये गये आँकड़ों से निम्न सारणी बनाते है।

आइटम	यांत्रिक समय	शिल्पकार का समय
रैकेट (x)	1.5	3
बल्ले (y)	3	1
कुल समय उपलब्ध		

इसलिए हम इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या को इस प्रकार लिख सकते हैं। $Z = x + y$ का अधिकतम मान निकालें।

जबकि $1.5x + 3y \leq 42$

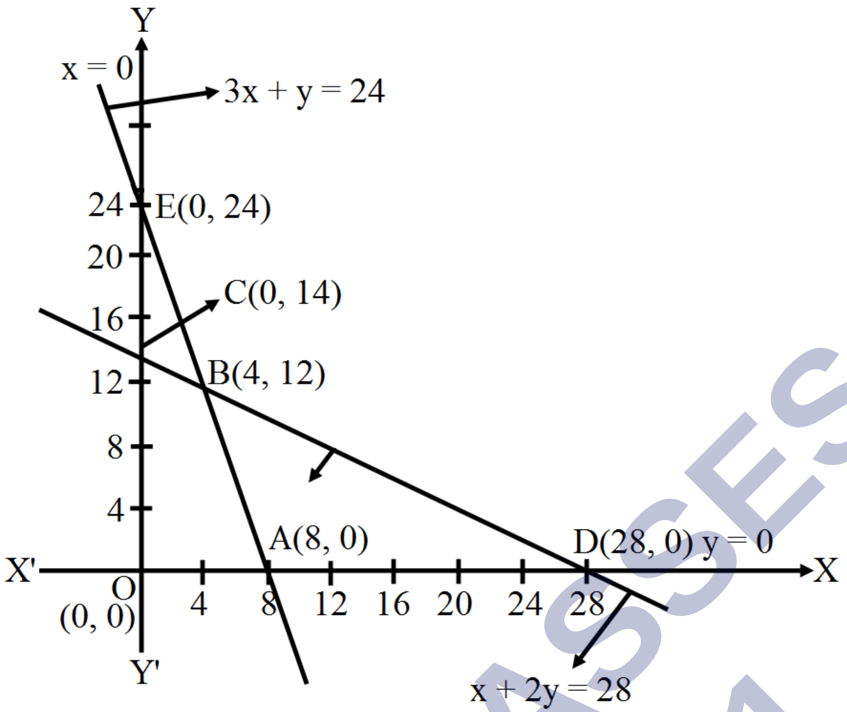
अर्थात $x + 2y \leq 28$ ...(i)

$3x + y \leq 24$ ...(ii)

$x \geq 0$ ...(iii)

$y \geq 0$ ...(iv)

उपरोक्त असमिकाओं के संगत समीकरणों में बदलकर आलेख खींचते हैं।



चित्र से स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र OABC (छायांकित) परिबद्ध है। जिसके कोनीय बिन्दु O(0, 0), A(8, 0), B(4, 12), C(0, 14) हैं।

अब हम कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान ज्ञात करते हैं।

कोनीय बिन्दु	**Z का संगत मान Z = x + y**
O(0, 0)	0
A(8, 0)	8
B(4, 12)	16 अधिकतम
C(0, 14)	14

चूंकि B(4, 12) पर Z अधिकतम है।

इसलिए रैकेट की संख्या = 4 बल्लों की संख्या = 12

लाभ फलन P = 20x + 10y लाभ अधिकतम है जब x = 4, y = 12

अधिकतम लाभ = 20 × 4 + 10 × 12 = 80 + 120 = Rs. 200

प्रश्न 4 एक निर्माणकर्ता नट और बोल्ट का निर्माण करता है। एक पैकेट नटों में निर्माण में मशीन A पर एक घण्टा और मशीन B पर 3 घण्टे काम करना पड़ता है, जबकि एक पैकेट बोल्ट के निर्माण

में 3 घण्टे मशीन A पर और 1 घण्टा मशीन B पर काम करना पड़ता है। वह नटों से Rs. 17.50 प्रति पैकेट और बोल्टों पर Rs. 7.00 प्रति पैकेट लाभ कमाता है। यदि प्रतिदिन मशीनों का अधिकतम उपयोग 12 घण्टे किया जाए तो प्रत्येक (नट और बोल्ट) के कितने पैकेट उत्पादित किए जाएँ ताकि अधिकतम लाभ कमाया जा सके।

उत्तर- माना निर्माणकर्ता नट के x पैकेट तथा बोल्ट के y पैकेटों का निर्माण करता है।

तो निर्माणकर्ता को लाभ Z = Rs. $(17.5x + 7y)$

अत: स्पष्ट है कि $x \geq 0, y \geq 0$

अब दिये गये आँकड़ों से निम्न सारणी बनाते हैं।

	नट x	**बोल्ड y**	**अधिकतम उपयोग**
मशीन A	1	3	12
मशीन B	3	1	12
लाभ प्रति पैकेट	17.50	7.0	

अत: निम्न व्यवरोध प्राप्त होते हैं।

$x + 3y \leq 12$ मशीन A के लिए

$3x + y \leq 12$ मशीन B के लिए

अत: गणितीय समस्या का सूत्रीकरण निम्नलिखित है।

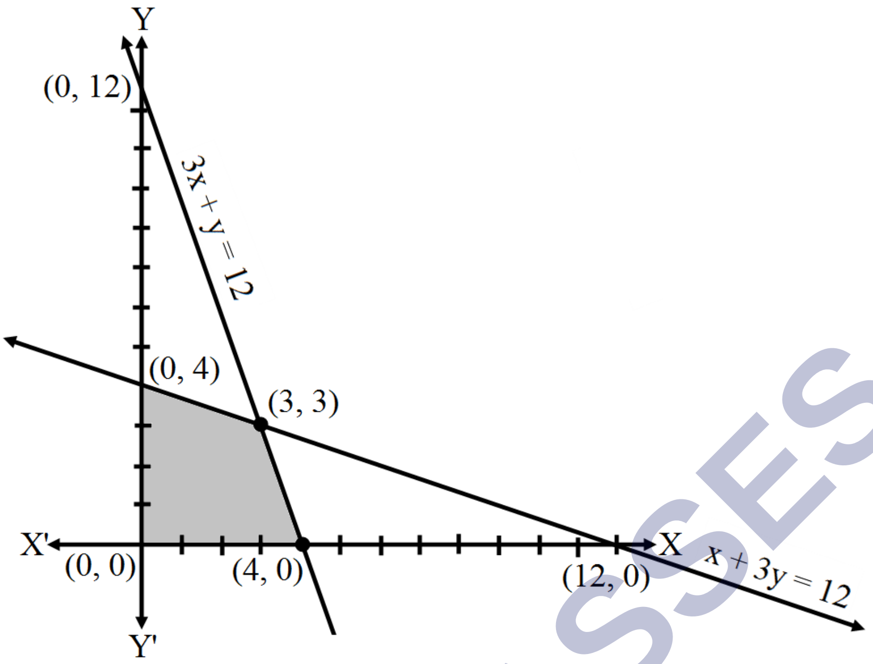
Z = Rs. $(17.5x + 7y)$ का अधिकतमीकरण कीजिए जबकि निम्नलिखित व्यवरोध हैं।

$x + 3y \leq 12$...(i)

$3x + y \leq 12$ ...(ii)

$x \geq 0, y \geq 0$ ...(iii)

असमिकाओं (i) से (iii) तक के आलेखों द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र चित्र में दर्शाया गया है।



स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध है।

अब हम कोनीय बिन्दुओं (0, 0), (4, 0), (3, 3) और (0, 4) पर Z का मान ज्ञात करते हैं।

कोनिया बिन्दु	**Z = Rs. (17.5x + 7y)**
(0, 0)	0
(4, 0)	70
(3, 3)	73.5 अधिकतम
(0, 0)	28

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि बिन्दु (3, 3) पर Z का मान अधिकतम Rs. 73.5 है।

अतः निर्माणकर्ता को 3 बोल्ट के पैकेट व 3 नटों के पैकेटों का निर्माण करना चाहिए ताकि अधिकतम लाभ Rs. 73.5 हो।

प्रश्न 5 एक कारखाने में दो प्रकार के पेंच A और B बनते हैं। प्रत्येक के निर्माण में दो मशीनों के प्रयोग की आवश्यकता होती है, जिसमें एक स्वचालित और दूसरी हस्तचालित है। एक पैकेट पेंच के निर्माण में 4 मिनट स्वचालित और 6 मिनट हस्तचालित मशीन, तथा एक पैकेट पेंच B के निर्माण में 6 मिनट स्वचालित और 3 मिनट हस्तचालित मशीन का कार्य होता है। प्रत्येक मशीन किसी भी दिन के लिए अधिकतम 4 घण्टे काम के लिए उपलब्ध है। निर्माता पेंच A के प्रत्येक पैकेट पर 37 और पेंच B के प्रत्येक पैकेट पर Rs. 10 का लाभ कमाता है। यह मानते हुए कि कारखाने

में निर्मित सभी पेंचों के पैकेट बिक जाते हैं, ज्ञात कीजिए कि प्रतिदिन कितने पैकेट विभिन्न पेंचों के बनाए जाएँ जिससे लाभ अधिकतम हो तथा अधिकतम लाभ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना पेंच A की संख्या = x और पेंच B की संख्या = y

तब प्रदत्त आँकड़ों से निम्नलिखित सारणी बनाते हैं।

पेंच	स्वचालित मशीन	हस्तचालित मशीन पर समय (मिनट में)	लाभ
A	4	6	7
B	6	3	10
समय उपलब्ध (मिनट में)	240	240	

अतः दी गई समस्या का गणितीय निरूपण इस प्रकार है।

$Z = 7x + 10y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। जबकि

$4x + 6y \leq 240 \Rightarrow 2x + 3y \leq 120$ ...(i)

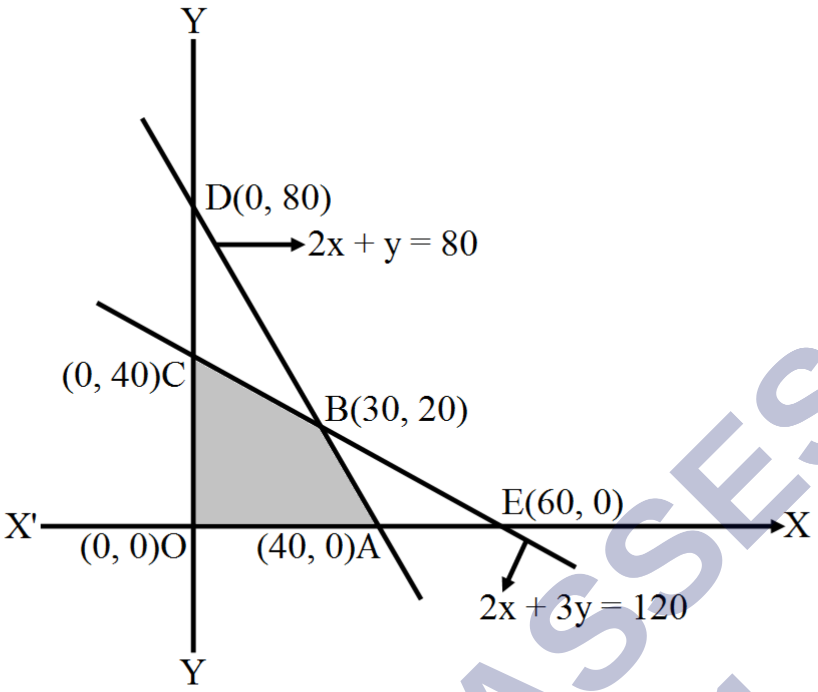
$6x + 3y \leq 240 \Rightarrow 2x + y \leq 80$ ...(ii)

$x \geq 0$ ...(iii)

$y \leq 0$ ...(iv)

उपरोक्त असमिकाओं के संगत समिकाओं के आलेख खींचते हैं।

चित्र से स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र OABCD (छायाँकित) परिबद्ध है।



कोनीय बिन्दु हैं O(0, 0), A(40, 0), B(30, 20), C(0, 40)

अब कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान ज्ञात करते हैं।

कोनीय बिन्दु	**Z का संगत मान Z = 7x + 10y**
O(0, 0)	0
A(40, 0)	280
B(30, 20)	410 अधिकतम
C(0, 40)	400

अत: B(30, 20) पर लाभ अधिकतम है।

∴ पेंच A की संख्या = 30 और पेंच B की संख्या = 20

अधिकतम लाभ = Rs. 410

प्रश्न 6 एक कुटीर उद्योग निर्माता कम्पनी पैडेस्टल लैंप और लकड़ी के शेड बनाती है। प्रत्येक के निर्माण में एक रगड़ने/ काटने और एक स्प्रेयर की आवश्यकता पड़ती है। एक लैंप के निर्माण में 2 घण्टे रगड़ने/ काटने और 3 घण्टे स्प्रेयर की आवश्यकता होती है, जबकि एक शेड के निर्माण में 1 घण्टा रगड़ने/ काटने और 2 घण्टे स्प्रेयर की आवश्यकता होती है। स्प्रेयर की मशीन प्रतिदिन अधिकतम 20 घण्टे और रगड़ने/ काटने की मशीन प्रतिदिन अधिकतम 12 घण्टे के लिए उपलब्ध

है। एक लैंप की बिक्री पर Rs. 5 और एक शेड की बिक्री पर Rs. 3 का लाभ होता है। यह मानते हुए कि सभी निर्मित लैंप और शेड बिक जाते हैं, तो बताइए वह निर्माण की प्रतिदिन कैसी योजना बनाए कि लाभ अधिकतम हो?

उत्तर- पैडेस्टेल लैंप की संख्या = x और लकड़ी के शेड की संख्या = y

दिये गये आँकड़ों से निम्न सारणी बनाते हैं।

	रगड़ने/ काटने	स्प्रेयर	लाभ
पेडेस्टेल	2	3	Rs. 5
लकड़ी के शेड	1	2	Rs. 3
समय उपलब्ध (घण्टे में)	12	20	

दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय निरूपण इस प्रकार है-

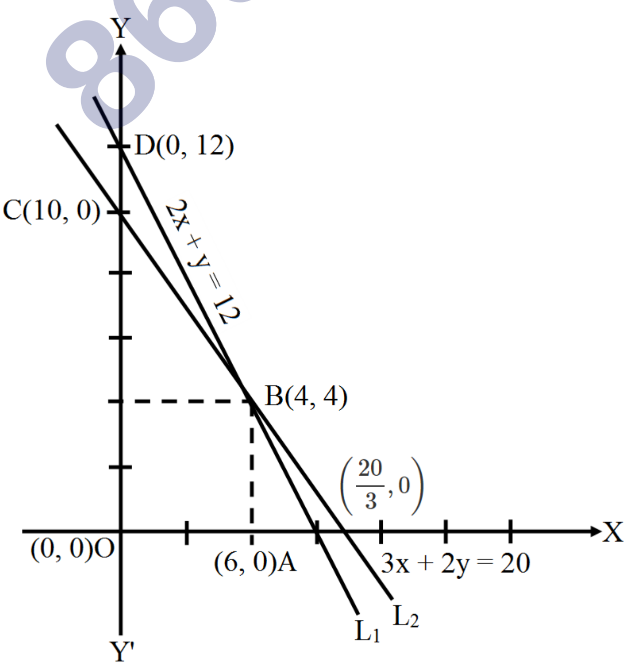
$Z = 5 + 3y$ का अधिकतम मान निकालिए-

जबकि $2x + y \leq 12$ ...(i)

$3x + 2y \leq 20$ ...(ii)

$x \geq 0$ ...(iii)

$y \leq 0$ ...(iv)



उपरोक्त असमिकाओं के संगत समिकाओं का आलेख खींचते हैं। चित्र से स्पष्ट है कि संगत क्षेत्र OABC (छायांकित)परिबद्ध है जिसके कोनीय बिन्दु O(0, 0), A(6, 0),B(4, 4), C(10, 10) हैं।

अब हम इन कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान ज्ञात करते हैं।

कोनीय बिन्दु	**Z का संगत मान Z = 5x + 3y**
O(0, 0)	0
A(6, 0)	30
B(4, 0)	32 अधिकतम
C(0, 10)	30

अत: B(4, 4) पर Z = 32 अधिकतम है।

इसलिए पैडेस्टेल लैंप की संख्या = 4, लकड़ी के शेड की संख्या = 4

प्रश्न 7 एक कम्पनी प्लाईवुड के अनूठे स्मृति चिह्न का निर्माण करती है। A प्रकार के प्रति स्मृति चिह्न के निर्माण में 5 मिनट काटने और 10 मिनट जोड़ने में लगते हैं। B प्रकार के प्रति स्मृति चिह्न के लिए 8 मिनट काटने और 8 मिनट जोड़ने में लगते हैं। दिया गया है कि काटने के कुल समय 3 घण्टे 20 मिनट तथा जोड़ने के लिए 4 घण्टे उपलब्ध हैं। प्रत्येक A प्रकार के स्मृति चिह्न पर Rs 5 और प्रत्येक B प्रकार के स्मृति चिह्न पर Rs. 6 का लाभ होना है। ज्ञात कीजिए कि लाभ के अधिकतमीकरण के लिए प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने स्मृति चिह्नों का कम्पनी द्वारा निर्माण होना चाहिए?

उत्तर- माना A प्रकार के स्मृति चिह्न = x और B प्रकार के स्मृति चिह्न = y

दिये गये आँकड़ों से निम्नलिखित सारणी बनाते हैं-

आइटम	**काटना**	**जोड़ना**	**लाभ**
A प्रकार का	5	10	5
B प्रकार का	8	8	6
समय उपलब्ध	3 घण्टे 20 मिनट = 200 मिनट	4 घण्टे = 240 मिनट	

अतः उपरोक्त रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय निरूपण इस प्रकार होगा-

Z = 5x + 6y का अधिकतम मान निकालिए।

जबकि 5x + 8y ≤ 200 ...(i)

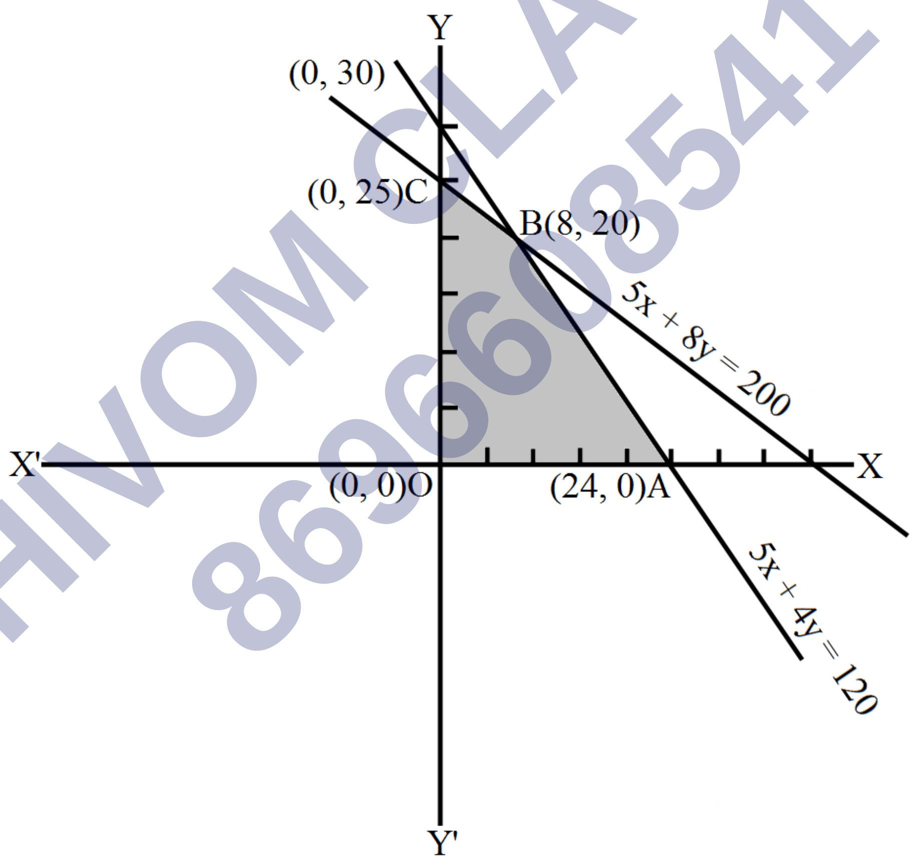
10x + 8y ≤ 240

5x + 43 ≤ 120 ...(ii)

x ≥ 0 ...(iii)

y ≤ 0 ...(iv)

उपरोक्त असमिकाओं के संगत समिकाओं के आलेख खींचते हैं।



चित्र से स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) OABC परिबद्ध है।

कोनीय बिन्दु O(0, 0), A(24, 0), B(8, 20), C(0, 25) हैं।

इन कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान ज्ञात करते हैं-

कोनिय बिन्दु	Z का संगत मान Z = 5x + 6y
O(0, 0)	0.
A(24, 0)	120
B(8, 20)	160 अधिकतम
C(0, 25)	150

अत: Z का अधिकतम मान 160 बिन्दु B(8, 20) पर है।

∴ अधिकतम लाभ के लिए टाइप 3 के स्मृति चिह्न = 8 और B टाइप के = 20

प्रश्न 8 एक सौदागर दो प्रकार के निजी कम्प्यूटर एक डेस्कटॉप नमूना और दूसरा पोर्टेबल नमूना, जिनकी कीमतें क्रमशः Rs. 25000 और Rs. 40000 होगी, बेचने की योजना बनाता है। वह अनुमान लगाता है कि कम्प्यूटरों की कुल मासिक माँग 250 नगों से अधिक नहीं होगी। प्रत्येक प्रकार के कम्प्यूटरों के नगों की संख्या ज्ञात कीजिए जिसे सौदागर अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए संग्रह करें यदि उसके पास निवेश के लिए 70 लाख से अधिक नहीं है और डेस्कटॉप नमूने पर उसका लाभ Rs. 4500 और पोर्टेबल नमूने पर Rs. 5000 लाभ हो।

उत्तर- माना डेस्कटॉप नमूना कम्प्यूटर की संख्या = x

और पोर्टेबल नमूना कम्प्यूटर की संख्या = y

एक कम्प्यूटर पर लागत और लाभ निम्नलिखित है-

कम्प्यूटर	लागत	लाभ
डेस्कटॉप	25000	4500
पोटेंबल	40000	5000

अतः उपरोक्त रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय निरूपण इस प्रकार होगा-

Z = 4500x + 5000y का अधिकतम मान निकालिए।

जबकि x + y ≤ 250 ...(i)

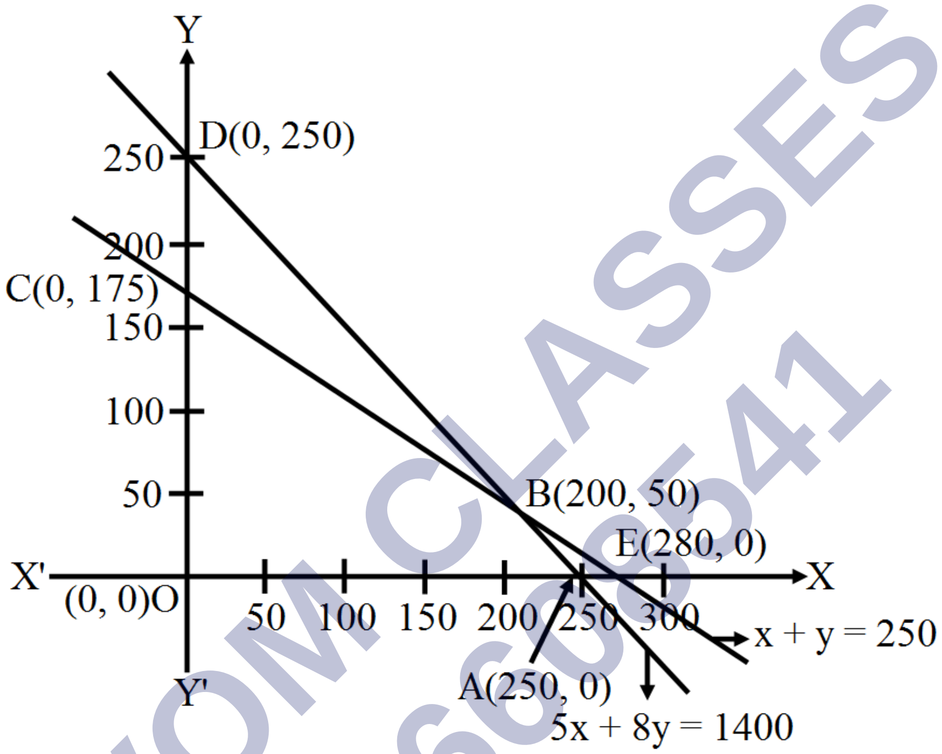
25000x + 40000y ≤ 7000000

$5x + 8y \leq 1400$ ...(ii)

$x > 0$ ...(iii)

$y > 0$ ...(iv)

उपरोक्त असमिकाओं के संगत समिकाओं के आलेख खींचते हैं।



स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) OABC परिबद्ध है।

जिसके कोनीय बिन्दु O(0, 0), A(250, 0), B(200, 50), C(0, 175) हैं।

अब हम Z का इन कोनीय बिन्दुओं पर मान ज्ञात करते हैं-

कोनीय बिन्दु	Z का संगत मान $Z = 4500x + 5000y$
O(0, 0)	0
A(250, 0)	1125000
B(200, 50)	1150000 अधिकतम
C(0, 175)	875000

अत: B(200, 50) पर Z अधिकतम है, इसलिए अधिकतम लाभ के लिए डेस्कटॉप कम्प्यूटर 200 और पोर्टेबल कम्प्यूटर 50 होंगे।

प्रश्न 9 एक भोज्य पदार्थ में कम से कम 80 मात्रक विटामिन A और 100 मात्रक खनिज होना चाहिए। दो प्रकार के भोज्य F_1 और F_2 उपलब्ध हैं। भोज्य F_1 की लागत Rs. 4 प्रति मात्रक और F_2 की लागत Rs. 6 प्रति मात्रक है। भोज्य F_1 की एक इकाई में कम-से-कम 3 मात्रक विटामिन A और 4 मात्रक खनिज हैं। F_2 की प्रति इकाई में कम-से-कम 6 मात्रक विटामिन A और 3 मात्रक खनिज हैं। इसको एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए। उस आहार का न्यूनतम मूल्य ज्ञात कीजिए जिसमें इन दो भोज्यों का मिश्रण है और उसमें न्यूनतम पोषक तत्त्व है।

उत्तर- माना भोज्य पदार्थ में भोज्य F_1 की x इकाई तथा भोज्य F_2 की y इकाई का मिश्रण होता है।

तब रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय रूप होगा।

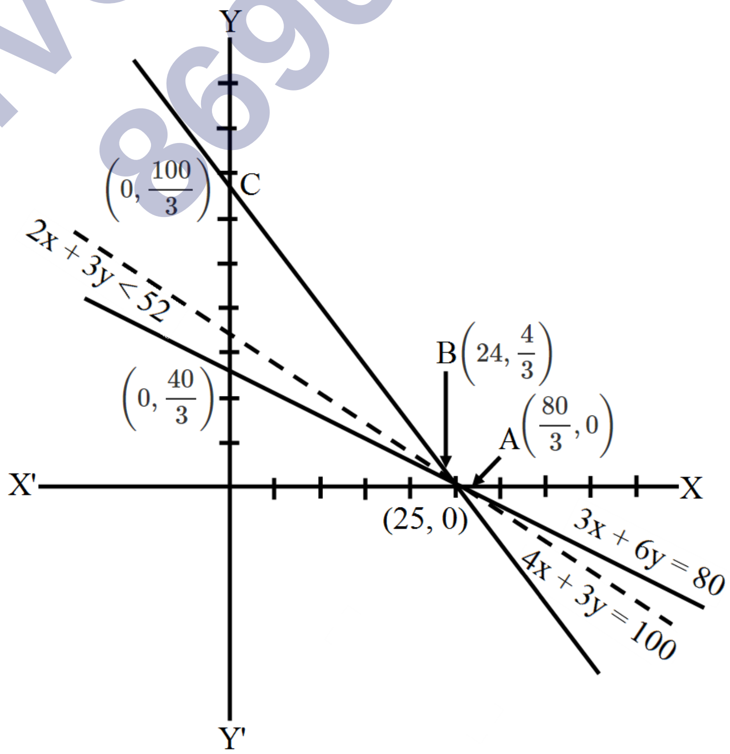
$Z = 4x + 6y$ (लागत फलन)

जबकि $3x + 6y \le 80$ (विटामिन A व्यवरोध)

$4x + 3y \le 100$ (विटामिन B व्यवरोध)

$x, y \le 0$ (ऋणेत्तर व्यवरोध)

उपरोक्त असमिकाओं के संगत समिकाओं के आलेख खींचते हैं-



चित्र से स्पष्ट है कि सुसंगत क्षेत्र ABC है जोकि अपरिबद्ध है। इसके कोनीय बिन्दु

$A\left(\frac{80}{3}, 0\right), B\left(24, \frac{4}{3}\right)$ z और $\left(0, \frac{100}{3}\right)$ है।

अब प्रत्येक कोनीय बिन्दु पर Z की गणना करते है-

कोनीय बिन्दु	Z का संगत मान Z = 4x + 6y
$A\left(\frac{80}{3}, 0\right)$	3203
$B\left(24, \frac{4}{3}\right)$	104
$C\left(0, \frac{100}{3}\right)$	200

Z का न्यूनतम मान 104 है जो कि बिन्दु

$\left(24, \frac{4}{3}\right)$ पर है। परन्तु चूँकि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है।

अतः हम $4x + 6y < 104$ अर्थात् $2x + 3y < 52$ का आलेख खींचते हैं।

हम देखते हैं कि $2x + 3y < 52$ द्वारा निरूपित खुले अर्द्धतल और सुसंगत क्षेत्र का कोई उभयनिष्ठ हल नहीं है।

अतः Z का न्यूनतम मान 104 है।

प्रश्न 10 दो प्रकार के उर्वरक F_1 अं F_2 हैं। F_1 में 10% नाइट्रोजन तथा 6% फॉस्फोरिक अम्ल है तथा F_2 में 5% नाइट्रोजन तथा 10% फॉस्फोरिक अम्ल है। मिट्टी की स्थितियों का परीक्षण करने के पश्चात् एक किसान पाता है कि उसे अपनी फसल के लिए 14 किग्रा नाइट्रोजन और 14 किग्रा फॉस्फोरिक अम्ल की आवश्यकता है। यदि F_1 की कीमत Rs. 6/ किग्रा और F_2 की कीमत Rs. 5/ किग्रा है, प्रत्येक प्रकार का कितना उर्वरक उपयोग के लिए चाहिए ताकि न्यूनतम मूल्य पर वाँछित पोषक तत्त्व मिल सके। न्यूनतम लागत क्या है?

उत्तर- माना उर्वरक $F_1 = x$ किग्रा और उर्वरक $F_2 = y$ किग्रा

दिये गये आँकड़ों से निम्नलिखित सारणी बनाते हैं-

उर्वरक	नाइट्रोजन	फॉस्फोरिक अम्ल	लागत

F_1	10%	6%	Rs. 6 /किग्रा
F_2	5%	10%	Rs. 5 /किग्रा
न्यूनतम आवश्यकता	14 /किग्रा	14 /किग्रा	

इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय रूप इस प्रकार होगा।

Z = 6x + 5y का न्यूनतम मान निकालिये

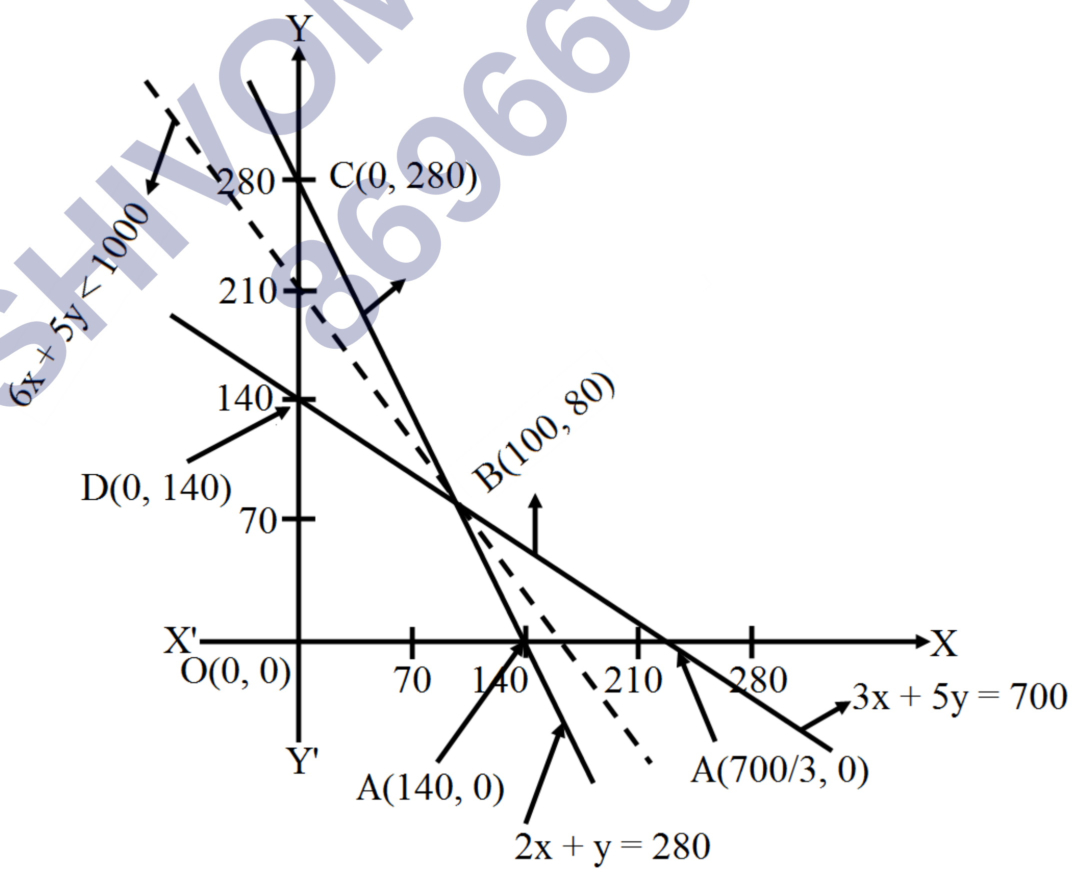
जबकि $\frac{10}{100}x + \frac{5}{100}y \geq 14$ या $2x + y \geq 280$

$$\frac{6}{100}x + \frac{10}{100}y \geq 14$$

$$\Rightarrow 3x + 5y \geq 700$$

$$\Rightarrow x, y \geq 0$$

उपरोक्त असमिकाओ के संगत समिकाओ के आलेख खींचते है-



स्पष्ट कि सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) ABC अपरिबद्ध है।

जिसके कोनीय बिन्दु

$$A\left(\frac{700}{3}, 0\right), B(100, 80), C(0, 280) \text{ है।}$$

अब हम कोनीय बिन्दुओं पर Z का मान ज्ञात करते है।

कोनीय बिन्दु	Z का संगत मान Z = 6x + 5y
$A\left(\frac{700}{3}, 0\right)$	1400
B(100,80)	1000
C(0,280)	1400

B(100, 80) पर न्यूनतम लागत Rs. 1000 है।

क्योकि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है इसीलिए Z का न्यूनतम मान 1000 हो सकता है या नहीं भी हो सकता।

इसलिए हम असमिका 6x + 5y < 1000 का आलेख खींचते हैं।

क्योंकि इस असमिका द्वारा निरूपित खुले अर्द्धतल और सुसंगत क्षेत्र में कोई भी बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है।

जबकि उर्वरक F_1, 100 किग्रा तथा उर्वरक F_2, 80 किग्रा मिलाया जाता है।

प्रश्न 11 निम्नलिखित असमीकरणो निकाय 2x + y ≤ 10, x + 3y ≤ 15, x, y ≥ 0 से निर्धारित सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिन्दु (0, 0), (5, 0), (3, 4) और (0, 5) है। माना कि Z = px + qy जहाँ p, q > 0, p तथा q के लिए निम्नलिखित में कौन प्रतिबद्ध उचित है ताकि Z का अधिकतम (3, 0) और (0, 5) दोनों पर घटित होता है।

a. p = q
b. p = 2q

c. $p = 3q$

d. $q = 3p$

उत्तर-

d. $q = 3p$

हल-

बिन्दु (3, 4) और (0, 5) रखने पर,

बिन्दु (3, 4) पर, $Z = 3p + 4q$

बिन्दु (3, 5) पर, $Z = 0 + 5q = 5q$

$\because$ दोनों ही अधिकतम मान है।

$\therefore 3p + 4q = 5q$

या $3p = 5q - 4q = q$

अतः विकल्प (D) सही है।

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 542-544)

प्रश्न 1 एक आहारविद् दो भोज्यों P और ए का उपयोग करते हुए एक विशेष आहार तैयार करता है। भोज्य P का प्रत्येक पैकेट (जिसमें 30 ग्राम अंतर्विष्ट है) में कैल्शियम के 12 मात्रक लौह तत्व के 4 मात्रक, कोलेस्ट्रोल के 6 मात्रक और विटामिन A के 6 मात्रक अंतर्विष्ट हैं जबकि उसी मात्रा के भोज्य के पैकेट में कैल्शियम तत्व के 3 मात्रक, लौह तत्व के 20 मात्रक, कोलेस्ट्रोल के 4 मात्रक और विटामिन A के 3 मात्रक अंतर्विष्ट है। आहार में कम से कम 240 मात्रक कैल्शियम, लौह तत्व के कम से कम 460 मात्रक, और कोलेस्ट्रोल के अधिक से अधिक 300 मात्रक अपेक्षित हैं। प्रत्येक भोज्य के कितने पैकेटों का उपयोग किया जाए ताकि आहार में विटामिन A की मात्रा का न्यूनतम किया जा सके। आहार में विटामिन A की मात्रा का अधिकतमीकरण करने के लिए प्रत्येक भोज्य के कितने पैकेटों का उपयोग होना चाहिए ? आहार में विटामिन A की अधिकतम मात्रा क्या है?

उत्तर- मान लीजिये x पैकेट भोज्य A के और y पैकेट भोज्य B के ख़रीदे गए।

इनका विवरण निचे तालिका में दिया गया है-

भोज्य	पैकेटों की संख्या	कैल्शियम	लौह	कोलेस्ट्रोल	विटामिन A
P	x	12 मात्रक	4 मात्रक	6 मात्रक	6 मात्रक
Q	y	3 मात्रक	20 मात्रक	4 मात्रक	3 मात्रक
न्यूनतम आवश्यकता		240 मात्रक	460 मात्रक	300 मात्रक अधिकतम	Z

उद्देश्य फलन $Z = 6x + 3y$ का अधिकतमीकरण अवरोध है।

$12x + 3y \geq 240$, $4x + 20y \geq 460$

$6x + 4y \leq 300$, $x, y \geq 0$

या $4x + y \geq 80$, $x + 5y \geq 115$

$3x + 2y \leq 150$, $x, y \geq 0$

i. $4x + y \geq 80$ का क्षेत्र-

रेखा $x + 5y = 115$, बिन्दु C(115, 0), D(0, 23) से होकर जाती है।

$x + 5y \geq 115$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 80$ जो सत्य नहीं है।

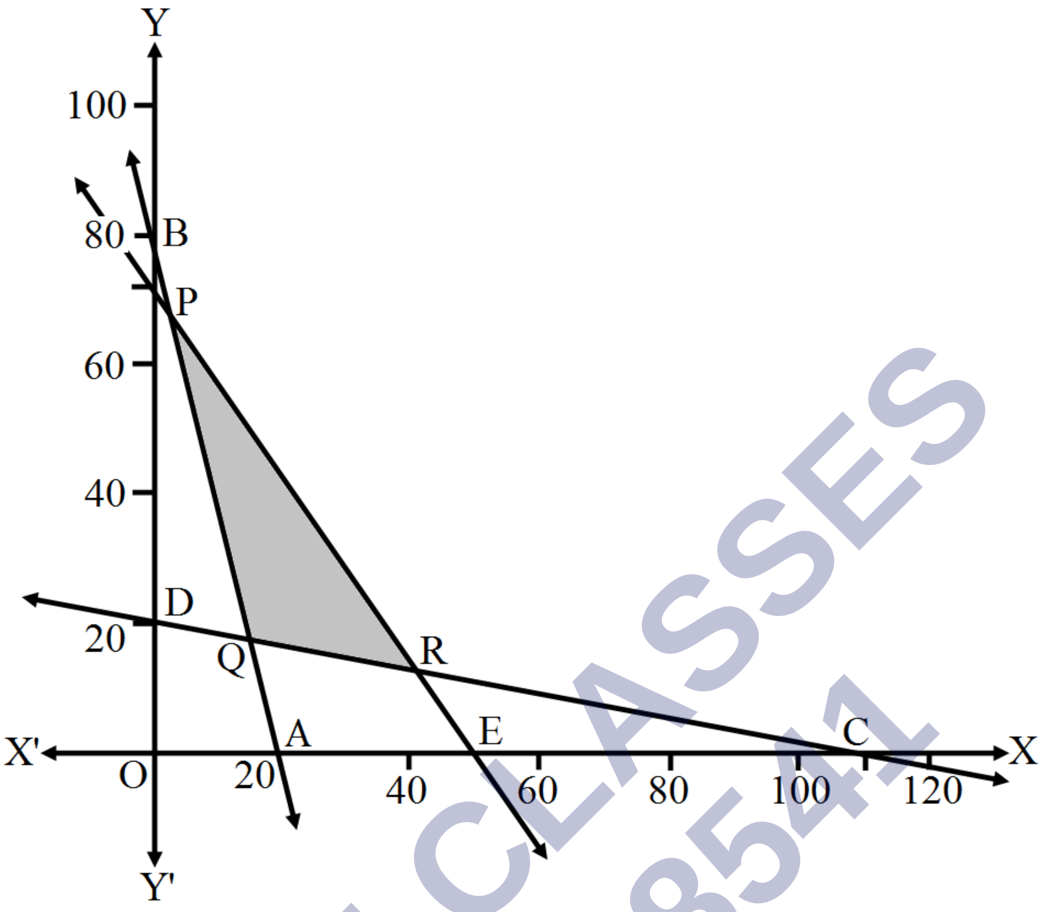
अर्थात $4x + y \geq 80$ रेखा AB पर तथा उसके ऊपर का क्षेत्र है।

ii. $x + 5y \geq 115$ का क्षेत्र-

रेखा $x + 5y = 115$, बिन्दु C(115, 0), D(0, 23) से होकर जाती है।

$x + 5y \geq 115$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 115$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात $x + 5y \geq 115$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा CD पर है या उसके ऊपर है।



iii. $3x + 2y \leq 150$ का क्षेत्र-

रेखा $3x + 2y = 150$, बिन्दु E(50, 0), F(0, 75) से होकर जाती है।

$3x + 2y \leq 150$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा EF पर है या उसके निचे है।

iv. $x \geq 0$ के क्षेत्र बिन्दु y अक्ष पर और उसके दायी और है।

v. $y \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु x अक्ष पर और उसके ऊपर है।

vi. रेखा $4x + y = 80$, $x + 5y = 115$ बिन्दु Q(15, 20) पर कटती है।

vii. रेखा $x + 5y = 115$, $3x + 2y = 150$ बिन्दु R(40, 15) पर कटती है।

viii. रेखा $4x + y = 80$, $3x + 2y = 150$ बिन्दु P(2, 72) पर कटती है।

समस्या का सुसंगत क्षेत्र PQR है।

अर्थात कोनीय बिन्दु है P(2, 72), Q(15, 20) तथा R(40, 15) अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्न सारणी के अनुसार ज़ात करेंगे-

कोनीय बिन्दु	Z संगत मान $Z = 6x + 3y$

P(2, 72)	228
Q(15, 20)	150
R(40, 15)	285 (अधिकतम)

इस प्रकार विटामिन की अधिकतम मात्रा 285 मात्रक है जब भोज्य P के 40 पैकेट और भोज्य Q के 15 पैकेट ख़रीदे जाएं।

प्रश्न 2 एक किसान दो प्रकार के चारे P और Q को मिलाता (मिश्रण) है। P प्रकार के चारे, जिसका मूल्य Rs. 250 प्रति थैला जोकि पोषक तत्व A के 3 मात्रक, तत्व B के 2.5 मात्रक और तत्व C के 2 मात्रक रखता है जबकि Q प्रकार का चारा जिसका मूल्य Rs. 200 प्रति थैला है, पोषक तत्व A का 1.5 मात्रक, तत्व B का 11.25 मात्रक और तत्व C के तीन मात्रक रखता है। पोषक तत्वों A, B, और C की न्यूनतम आवश्यकताएँ क्रमशः 18 मात्रक, 45 मात्रक और 24 मात्रक हैं। प्रत्येक प्रकार के थैलों की संख्या ज्ञात कीजिए ताकि मिश्रण के प्रत्येक थैले का मूल्य न्यूनतम हो? मिश्रण के प्रत्येक थैले का न्यूनतम मूल्य क्या है?

उत्तर- मान लीजिये x थैले P प्रकार के चारे के और y थैले Q प्रकार के चारे के मिलाए जाते है।

इसका विवरण निचे सारणी में दिया है-

चारे के प्रकार	**थैलो की संख्या**	**तत्व A (मात्रक में)**	**तत्व B (मात्रक में)**	**तत्व C (मात्रक में)**	**मूल्य**
P	x	3	2.5	2	Rs. 250
Q	y	1.5	11.25	3	Rs. 200
न्यूनतम आवश्यकता		18	45	24	

उद्धेश्य फलन, $Z = 250x + 200y$ का न्यूनतमीकरण है-

अवरोध है: $x + 1.5y \geq 18$, $2.5x + 11.25y \geq 45$, $2x + 3y \geq 24$, और $x, y \geq 0$

या $2x + y \geq 12$, $2x + 9y \geq 36$, $2x + 3y \geq 24$, $x,y \geq 0$

i. $2x + y \geq 12$ का क्षेत्र-

रेखा $2x + y = 12$, बिन्दु $A(6, 0)$, $B(0, 12)$ से होकर जाती है।

$2x + y \geq 12$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 12$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात $2x + y \geq 12$ के क्षेत्र बिन्दु AB या उसके ऊपर है।

ii. $2x + 9y \geq 36$ का क्षेत्र-

रेखा $2x + 9y = 36$ बिन्दु $C(18, 0)$, $D(0, 4)$ से होकर जाती है।

$2x + 9y \geq 36$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 36$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात $2x + 9y \geq 36$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा CD पर या उसके ऊपर स्थित है।

iii. $2x + 3y \geq 24$ का क्षेत्र-

रेखा $2x + 3y = 24$ बिन्दु $E(12, 0)$, $F(0, 8)$ से होकर जाती है।

$2x + 3y \geq 24$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 24$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात $2x + 3y \geq 24$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा EF पर उसके ऊपर स्थित है।

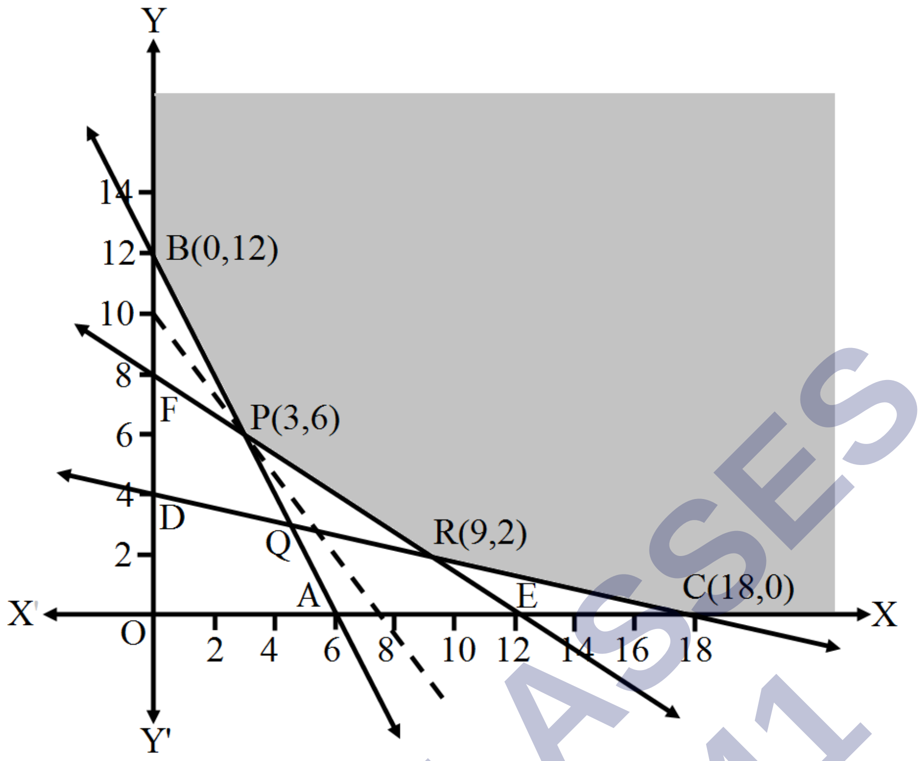
iv. $x \geq 0$ के क्षेत्र बिन्दु y अक्ष पर और उसके दायी और है।

v. $y \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु x अक्ष पर और उसके ऊपर है।

vi. रेखा $2x + y = 12$, और $2x + 3y = 24$ बिन्दु $P(3, 6)$ पर कटती है।

vii. रेखा $2x + 9y = 36$, और $2x + 3y = 24$ बिन्दु $R(9, 2)$ पर कटती है।

इस प्रकार समस्या का सुसंगत क्षेत्र YBPRCX है।



अर्थात कोनीय बिन्दु है B(0, 12), P(3, 6), R(9, 2) तथा C(18, 0) अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्न सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे-

कोनीय बिन्दु	**Z संगत मान Z = 250x + 200y**
B(0, 12)	2400
P(3, 6)	1950 (न्यूनतम)
R(9, 2)	2650
C(18, 0)	4500

अतः Z का न्यूनतम मान 1950 तथा P प्रकार के 3 और Q प्रकार के 6 थैले मिलाए है।

प्रश्न 3 एक आहारविद् दो प्रकार के भोज्यों X और Y को इस प्रकार मिलाना चाहता है कि मिश्रण में विटामिन A, की कम से कम 10 मात्रक, विटामिन B की कम से कम 12 मात्रक और विटामिन C की 8 मात्रक हों 1 किग्रा भोज्यों में विटामिनों की मात्रा निम्नलिखित सारणी में दी गई है।

भोज्य	**विटामिन A**	**विटामिन B**	**विटामिन C**
X	1	2	3

Y	2	2	1

भोज्य x के 1 किग्रा का मूल्य Rs. 16 और भोज्य y के 1 किग्रा का मूल्य Rs. 20 है। वांछित आहार के लिए मिश्रण का न्यूनतम मूल्य ज्ञात कीजिए।

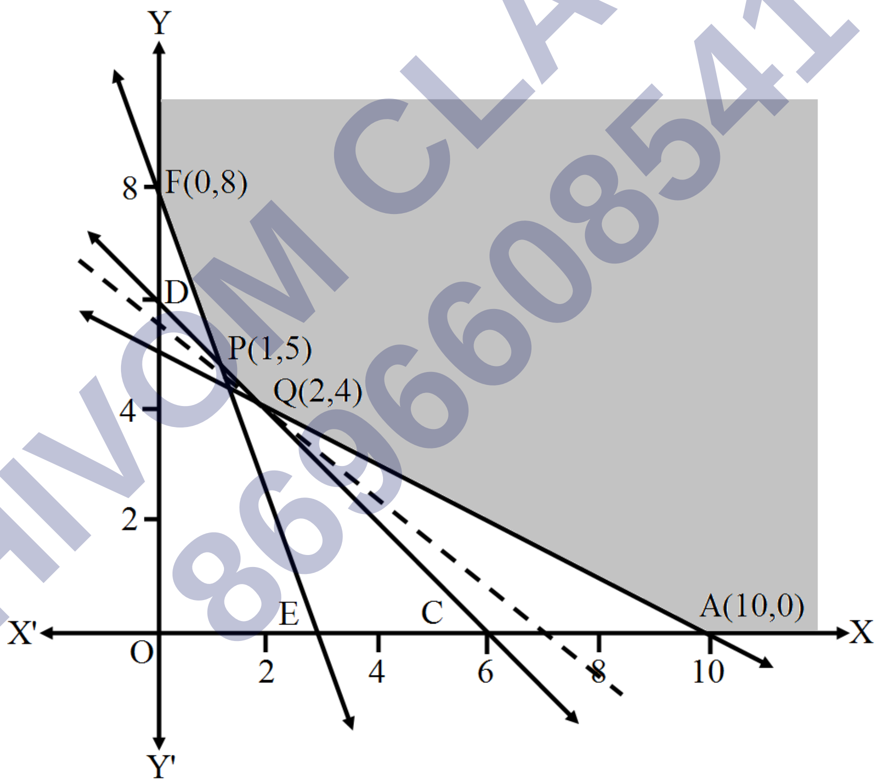
उत्तर- मान लीजिये x किग्रा भोज्य X का और y किग्रा भोज्य Y का मिश्रण बनाया जाता है।

भोज्य X लागत Rs. 16 प्रति किलो ग्राम और भोज्य Y की लागत Rs. 20 प्रति किलो ग्राम है।

अतः उद्देश्य फलन, $Z = 16x + 20y$

अवरोध है: $x + 2y \geq 10$, $2x + 2y \geq 12$, $3x + y \geq 8$, $x,y \geq 0$

i. $x + 2y \geq 10$ का क्षेत्र-



रेखा $x + 2y = 10$ बिन्दु A(10, 0), B(0, 5) से होकर जाती है।

$x + 2y \geq 10$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $y \geq 6$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात $x + 2y \geq 10$ रेखा AB पर है या उसके ऊपर है।

ii. $2x + 2y \geq 12$ या $x + y \geq 6$ का क्षेत्र-

रेखा $x + y = 6$, बिन्दु C(6, 0), D(0, 6) से होकर जाती है।

$x + y \geq 6$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 6$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात $x + y \geq 6$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा CD पर है या उसके ऊपर है।

iii. $3x + y \geq 8$ का क्षेत्र-

रेखा $3x + y = 8$, बिन्दु E(83,0),F(0,8)से होकर जाती है।

$3x + y \geq 8$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 8$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात $3x + y \geq 8$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा EF पर है या उसके ऊपर है।

iv. $x \geq 0$ के क्षेत्र बिन्दु y अक्ष पर और उसकी दायी और है।

v. $y \geq 0$ के क्षेत्र बिन्दु x अक्ष पर है और उसके ऊपर है।

vi. रेखा $x + y = 6$ और $3x + y = 8$ बिन्दु P(1, 5) पर कटती है।

vii. रेखा $x + 2y = 10$ और $x + y = 6$ बिन्दु Q(2, 4) पर कटती है।

समस्या का सुसंगत क्षेत्र YFPQAX है।

अर्थात कोनीय बिन्दु है F(0, 8), P(1, 5), Q(2, 4) तथा A(10, 0) अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्न सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे-

कोनीय बिन्दु	**Z संगत मान $Z = 6x + 3y$**
F(0, 8)	160
P(1, 5)	116
Q(2, 4)	112 (न्यूनतम)
A(10, 0)	160

Z का न्यूनतम मान RS. 112 है। परन्तु सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है।

$\therefore$ $16x + 20y < 112$ या $4x + 5y < 28$ को देखने पर हम पाते है की इसका कोई भी बिन्दु सुसंगत क्षेत्र के साथ उभयनिष्ठ नहीं है।

अतः Z का न्यूनतम मान Rs. 112 है जिसके लिए भोज्य X के 2 किग्रा और Y का 4 किग्रा मिश्रण बनाना चाहिए।

प्रश्न 4 एक निर्माता दो प्रकार के खिलौने A और B बनाता है। इस उद्देश्य के लिए निर्माण में तीन मशीनों की आवश्यकता पड़ती है और प्रत्येक प्रकार के खिलौने के निर्माण के लिए लगा समय (मिनटों में) निम्नलिखित है।

खिलौने प्रकार	**मशीन**		
	I	**II**	**III**
A	12	18	6
B	6	0	9

प्रत्येक मशीन अधिकतम 6 घंटे प्रतिदिन के लिए उपलब्ध है। यदि A प्रकार के खिलौने की बिक्री पर Rs. 7.50 लाभ और B प्रकार के खिलौने पर Rs. 5 का लाभ हो तो दर्शाइए कि अधिकतम लाभ कमाने के लिए प्रतिदिन A प्रकार के 15 खिलौने और B प्रकार 30 खिलौने निर्मित होने चाहिए।

उत्तर- मान लीजिये A प्रकार के x और B प्रकार के y खिलौने बनाते है।

अतः उद्देश्य फलन, $Z = 7.5x + 5y$

अवरोध $12x + 6y \leq 360, 18x \leq 360, 6x + 9y \leq 360, x, y \geq 0$

या $2x + y \leq 60, x \leq 20, 2x + 3y \leq 120, x, y \geq 0$

i. $2x + y \leq 60$ का क्षेत्र-

   रेखा $2x + y = 60$, बिन्दु A(30, 0), B(0, 60) से होकर जाती है।

   $2x + y \leq 60$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \leq 60$ जो सत्य है।

   अर्थात $2x + y \leq 60$ रेखा AB पर है य उसके है।

ii. $x \leq 20$ के बिन्दु $x = 0$ और $x = 20$ के बिच में स्थित है।

iii. $2x + 3y \leq 120$ का क्षेत्र-

   रेखा $2x + 3y = 120$, बिन्दु C(60, 0), D(0, 40) से होकर जाती है।

$x + 3y \le 120$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \le 120$ जो सत्य है।

अर्थात $2x + 3y \le 120$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा CD पर या उसके निचे स्थित है।

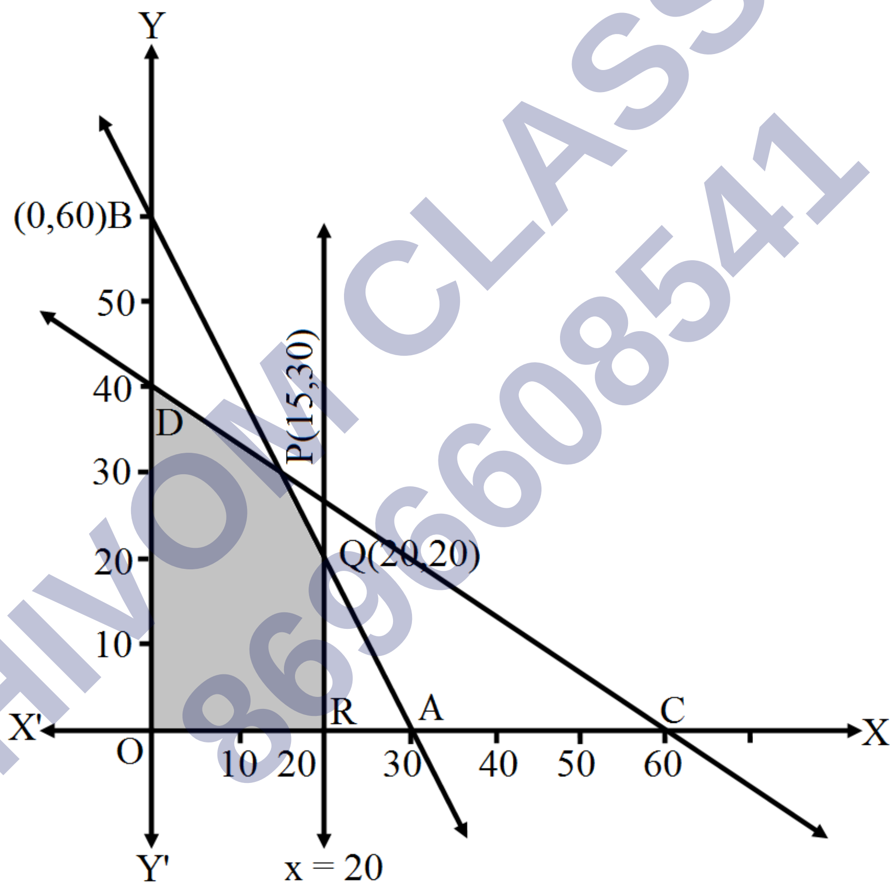
iv. $x \ge 0$ के क्षेत्र बिन्दु y अक्ष पर और उसके दायी और है।

v. $y \ge 0$ क्षेत्र के बिन्दु x अक्ष पर और उसके ऊपर है।

vi. रेखा $2x + y = 60$ और $2x + 3y = 120$ बिन्दु P(15, 30) कटती है।

vii. रेखा $x = 20$ रेखा AB : $2x + y = 60$ और Q(20, 20) कटती है।

इस प्रकार समस्या का सुसंगत क्षेत्र ODPQR छायांकित किया गया है।



अर्थात कोनीय बिन्दु है D(0, 40), P(15, 30), Q(20, 20) तथा R(20, 0) अब इन बिन्दुओ पर Z का मान निम्न सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे-

कोनीय बिन्दु	Z संगत मान $Z = 7.5x + 5y$
D(0, 40)	200
P(15, 30)	262.50 (अधिकतम)

Q(20, 20)	250
R(20, 0)	150

स्पष्ट है अधिकतम लाभ लाभ Rs. 262.50 तब तब होगा यदि 15 खिलौने A प्रकार के और 30 खिलौने B प्रकार के बनाए जाएँ।

प्रश्न 5 एक हवाई जहाज अधिकतम 200 यात्रियों को यात्रा करा सकता है। प्रत्येक प्रथम श्रेणी के टिकट पर Rs. 1000 और सस्ते श्रेणी के टिकट पर Rs. 600 का लाभ कमाया जा सकता है। एयरलाइन कम से कम 20 सीटें प्रथम श्रेणी के लिए आरक्षित करती है। तथापि प्रथम श्रेणी की अपेक्षा कम से कम 4 गुने यात्री सस्ती श्रेणी के टिकट से यात्रा करने को वरीयता देते हैं। ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने टिकट बेचे जाएँ ताकि लाभ का अधिकतमीकरण हो? अधिकतम लाभ कितना है?

उत्तर- मान लीजिए प्रथम श्रेणी के x यात्री सस्ती श्रेणी के y यात्री यात्रा करते है।

प्रथम श्रेणी के एक यात्री से Rs. 1000 का और सस्ती श्रेणी यात्री से Rs. 600 का लाभ होता है।

उद्देश्य फलन, $Z = 1000x + 600y$

अवरोध है: $x \geq 20$, $x + y \geq 200$, $y \geq 4x$, $x, y, \geq 0$

i. $x + y \leq 200$ का क्षेत्र-

रेखा $x + y = 200$ बिन्दु $(200, 0)$, $(0, 200)$ से होकर जाती है।

$x + y \leq 200$ में $x = 0$, $y = 0$ रखने पर $0 \leq 200$ जो सत्य है।

अर्थात $x + y \leq 200$ क्षेत्र बिन्दु रेखा $x + y = 200$ पर और उसके निचे है।

ii. $x \geq 20$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा $x = 20$ पर और उसके दायी और है।

iii. $y \geq 4x$ का क्षेत्र-

रेखा $y = 4x$, मूल बिन्दु $(0, 0)$ और $B(40, 160)$ से होकर जाती है।

$y - 4x \geq 0$ में $x = 0$, $y = 40$ रखने पर $40 \geq 0$ जो सत्य है।

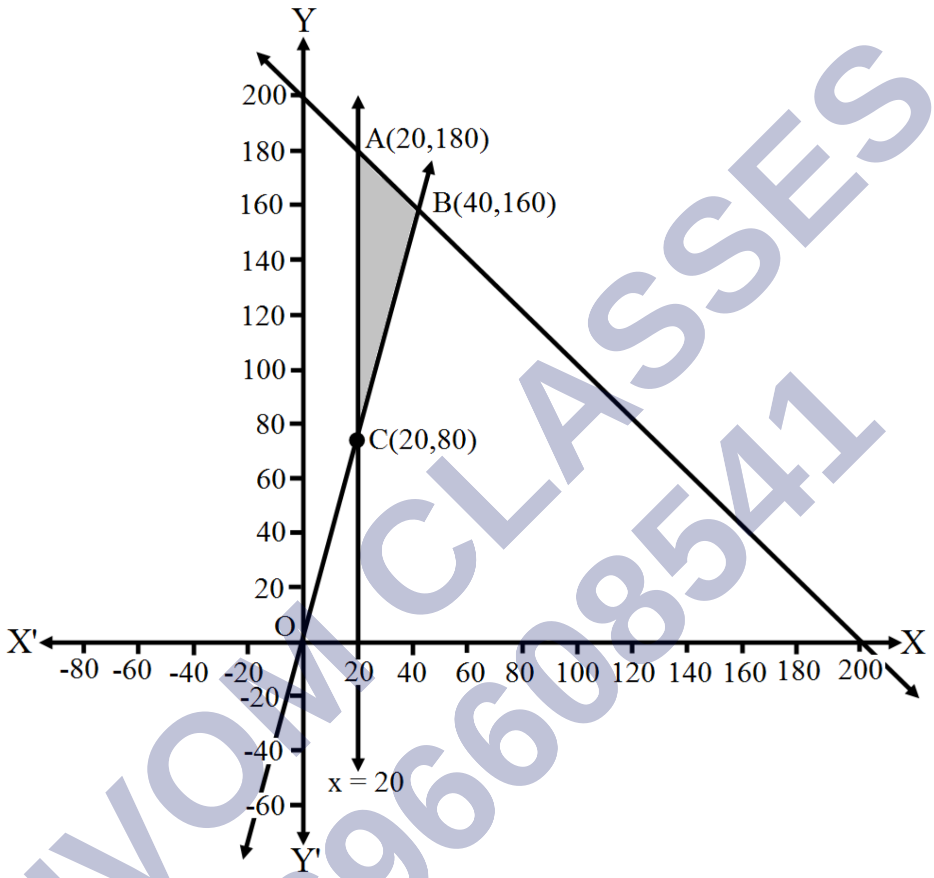
अर्थात $y - 4x$ के क्षेत्र बिन्दु OB पर या उसके है।

iv. $x \geq 0$ के क्षेत्र बिन्दु y अक्ष पर और उसके दायी और है।

v. $y \geq 0$ के क्षेत्र बिन्दु x अक्ष पर और उसके ऊपर है।

vi. रेखा $x = 20$ और $y = 4x$ बिन्दु C(20, 80) पर कटती है।

vii. रेखा $y = 4x$ और $x + y = 200$ बिन्दु B(40, 160) पर कटती है।



viii. रेखा $x = 20$ और $x + y = 200$ बिन्दु A(20, 180) पर कटती है।

इस प्रकार समस्या का सुसंगत क्षेत्र ABC है जिसे छायांकित किया है।

अर्थात कोनीय बिन्दु है A(20, 180), B(40, 160), तथा C(20, 80) अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्न सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे-

कोनीय बिन्दु	**Z संगत मान $Z = 1000x + 600y$**
A(20, 180)	128000
B(40, 160)	136000 (अधिकतम)
C(20, 80)	68000

अतः अधिकतम लाभ Rs. 1,36,000 पाने के लिए 40 यात्री प्रथम श्रेणी और 160 सस्ती श्रेणी में होने चाहिए।

प्रश्न 6 दो अन्न भंडारों A और B की भंडारण क्षमता क्रमश: 100 क्विंटल और 50 क्विंटल है। उन्हें तीन राशन की दुकानों D, E और F पर अन्न उपलब्ध कराना पड़ता है, जिनकी आवश्यकताएँ क्रमश: 60, 50, और 40 क्विंटल हैं। भंडारों से दुकानों को प्रति क्विंटल परिवहन व्यय निम्न सारणी के अनुसार है-

प्रति क्विंटल परिवहन व्यय (रुपयों में)		
को/ से	**A**	**B**
D	6	4
E	3	2
F	2.50	3

परिवहन व्यय के न्यूनतमीकरण के लिए आपूर्ति का परिवहन कैसे किया जाए? न्यूनतम परिवहन मूल्य क्या है?

उत्तर- मान लीजिए भण्डारण A से D दुकान पर x क्विंटल भण्डारण और E को y क्विंटल भेजा जाता है। भण्डारण A में कुल 100 क्विंटल की भण्डारण क्षमता है।

∵ A से F दुकान को 100 - (x + y) क्विंटल भंडार भेजा जाता है।

∴ D दुकान में कुल 60 क्विंटल अन्न भंडार भेजा जा सकता है। तथा भंडार B से दुकान D में 60 - x भंडार भेजा गया है।

∴ B से दुकान E को 50 - y भंडार भेजा गया है।

चूँकि भंडार B में कुल 50 क्विंटल भंडार क्षमता है।

अर्थात B से दुकान में F में - (60 - x + 50 - y) = x + y - 50 भंडार भेजा गया।

भंडार A और B में दुकान, D, E, F को भेजा गे भंडार निम्न प्रकार है-

दुकान/ भंडार	**A**	**B**

D	x	60 - x
E	y	50 - y
F	100 - x - y	50 - (60 - x) - (50 - y) = x + y - 60

अवरोध है: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $100 - x - y \geq 0$, $x + y \leq 100$

$60 - x \geq 0$ या x 60, $50 - y \geq 0$ या $y \geq 60$

$x + y - 60 \geq 0$ या $x + y \geq 60$

कुल परिवहन व्यय-

$= 6x + 3y + 2.5\ (100 - x - y) + 4(60 - x) + 2(50 - y) + 3(x + y - 60)$

$= 6x + 3y + 250 - 2.5y + 240 - 4x + 100 - 2y + 3x + 3y - 180$

$= 2.5x + 1.5y + 410$

i. $x \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु y अक्ष पर और उसकी दायी और है।

ii. $y \geq 0$ क्षेत्र के बिन्दु x अक्ष पर उसके ऊपर है।

iii. $x + y \geq 100$ का क्षेत्र-

रेखा $x + y = 100$ बिन्दु (100, 0) और (0, 100) से होकर जाती है।

$x + y \geq 100$ में $x = 0$, $y = 0$ रखने पर $0 \geq 100$ जो सत्य है।

अर्थात $x + y \leq 100$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा $x + y = 100$ या उसके निचे है।

iv. $x \leq 60$ का क्षेत्र $x = 60$ पर और इसके बायीं और है।

v. $x \leq 50$ के क्षेत्र बिन्दु $y = 50$ पर और उसके निचे है।

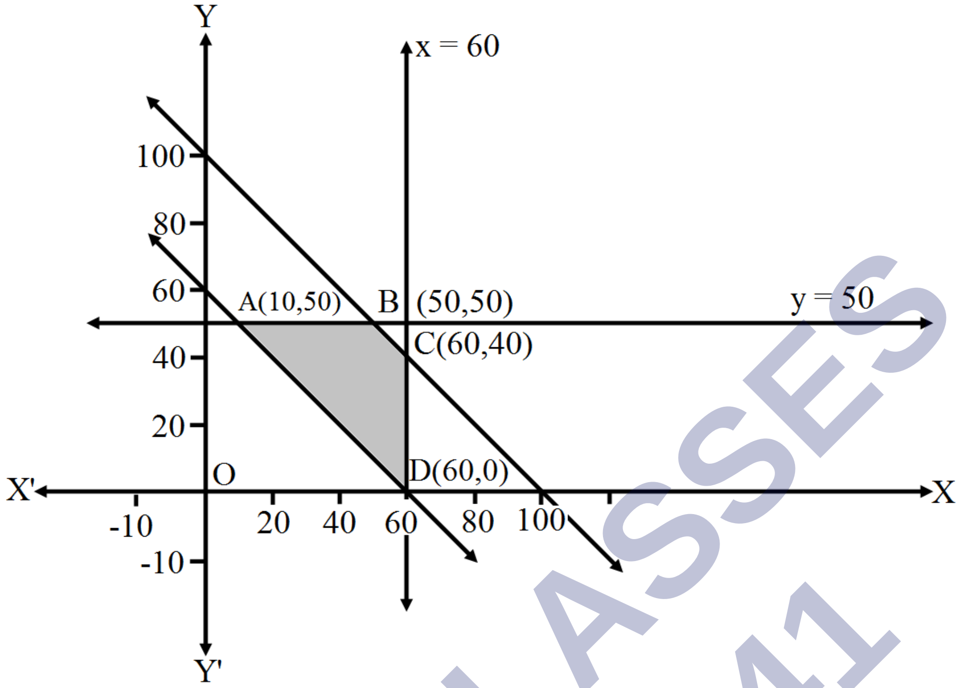
vi. $x + y \geq 60$ का क्षेत्र-

रेखा $x + y = 60$ बिन्दु (60, 0), (0, 60) से होकर जाती है।

$x + y \geq 60$ में $x = 0$, $y = 0$ रखने पर $0 \geq 60$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात $x + y \geq 60$ के क्षेत्र बिन्दु $x + y = 60$ पर और उसके ऊपर है।

इस प्रकार इस समस्या का सुसंगत क्षेत्र ABCD है।



a. रेखा y = 50 और x + y = 60 बिन्दु A(10, 50) पर कटती है।

b. रेखा x + y = 100 और y = 50 बिन्दु B(50, 50) पर कटती है।

c. रेखा x + y = 100 और x = 60 बिन्दु C(60, 40) पर कटती है।

d. रेखा x = 60 और x + y = 60 बिन्दु D(60, 0) पर कटती है।

अर्थात कोनीय बिन्दु है A(10, 50), B(50, 50), C(60, 40) तथा D(60, 0) अब इन बिन्दुओ पर Z का मान निम्नांकित सारणी के अनुसार ज़ात करेंगे-

कोनीय बिन्दु	**Z का संगत मान Z = 2.5x + 1.5y + 410**
A(10, 50)	510 (न्यूनतम)
B(50, 50)	610
C(60, 40)	620
D(60, 0)	560

Z का न्यूनतम मान है Rs. 100 जब भंडार A से दुकान D पर 10 क्विंटल और दुकान E को 50 क्विंटल भंडार भेजा गया।

अतः भंडार A से दुकान D, E, F को क्रमशः 10, 50, 40 क्विंटल और भंडार B से दुकान D, E, F को क्रमशः 50, 0, 0 क्विंटल भंडार भेजने से न्यूनतम परिवहन व्यय Rs. 510 होगा।

प्रश्न 7 एक तेल कारखाने में दो डिपो A तथा B हैं, जिनकी क्षमताएँ क्रमश: 7000 लिटर और 4000 लिटर की हैं। कारखाने द्वारा तीन पेट्रोल पंपों D, E और F के लिए आपूर्ति करनी है, जिनकी आवश्यकताएँ क्रमशः 4500 लिटर, 3000 लिटर और 3500 लिटर की है। डिपो से पेट्रोल पंपों की दूरियाँ (km में) निम्नांकित सारणी के अनुसार है:

दूरियाँ (km में)		
को/ से	**A**	**B**
D	7	3
E	6	4
F	3	2

यह मानते हुए कि परिवहन व्यय प्रति 10 लिटर पर प्रति किलोमीटर 1 रुपया है, ज़ात कीजिए कि कैसी आपूर्ति योजना अपनाई जाए, जिससे परिवहन व्यय का न्यूनतमीकरण हो जाए? न्यूनतम व्यय क्या है?

उत्तर- मान लीजिये डिपो A से D पेट्रोल पम्प के x लीटर और E पम्प के y लीटर तेल की आपूर्ति होती है।

डिपो A की कुल क्षमता 7000 लीटर है।

अत: C A पेट्रोल पम्प F के 7000 - (x + y) लीटर तेल की आपूर्ति करता है।

अर्थात $7000-(x+y) \geq 0$ अर्थात $x+y \leq 7000$

पेट्रोल पम्प D की माँग 4500 लीटर तेल की है।

∴ डिपो B से 4500 - x लोटर तेल की आपूर्ति होतीf है।

अर्थात $4500=x \geq 0$ या $x \leq 4500$

पेट्रोल पम्प E को 3000 लीटर तेल की आवश्यकता है।

∴ डिपो B पेट्रोल पम्प E को 3000 - y लीटर तेल आपूर्ति करता है।

अर्थात $3000-y\geq 0$ या $y\leq 3000$

पेट्रोल पम्प F को 3500 लीटर तेल की आवश्यकता है।

∴ F को डिपो B पेट्रोल पम्प F को 3500 - (7000 - x - y)

= -3500 + x + y लीटर की आपूर्ति होती है।

अर्थात $=-3500+x+y\geq 0$ या $x+y\geq 3500$

∴ इस समस्या में अवरोध निम्न प्रकार है-

$x+y\leq 7000, x\leq 4500, y\leq 3000, x+y\geq 3500, x, y\geq 0$

परिवहन व्यय प्रति 10 लीटर प्रति किलोमीटर Rs. 1 है।

अर्थात परिवहन व्यय प्रति लीटर प्रति किलोमीटर Rs. 0.1 है।

परिवहन व्यय जानने के लिए निम्न सारणी की सहायता लेने पर

पेट्रोल पम्प	डिपो	व्यय प्रति लीटर (रूपये में)		आपूर्ति (लीटर में)	
		A	B	A	B
D		0.7	0.3	x	45 - x
E		0.6	0.4	y	3000 - y
F		0.3	0.2	7000 - x - y	x + y - 3500

परिवहन व्यय-

$Z = 0.7x + 0.6y + 0.3(7000 - x - y) + 0.3(4500 - x) + 0.4(3000 - y) + 0.2(x + y - 3500)$

$= 0.3x + 0.1y + 3950$

अब उद्देश्य फलन Z का न्यूनतमीकरण करना है-

i. $x + y \leq 7000$ का क्षेत्र-

रेखा $x + y = 7000$, बिन्दु $A(7000, 0)$ $B(0, 7000)$ से हो जाती है।

$x + y \geq 7000$ में $x = 0$, $y = 0$ रखने पर $0 \leq 7000$ जो सत्य है।

अर्थात $x + y \leq 7000$ रेखा $x + y$ 7000 पर और उसके नीचे का क्षेत्र है।

ii. $x \leq 4500$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा $x = 4500$ पर और उसके नीचे का क्षेत्र है।

iii. $y \leq 3000$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा $y = 3000$ पर और उसके निचे है।

iv. $x + y \leq 3500$ का क्षेत्र-

रेखा $x + y = 3500$, बिन्दु $(3500, 0)$ $B(0, 3500)$ से हो जाती है।

$x + y \leq 3500$ में $x = 0$, $y = 0$ रखने पर $0 \geq 3500$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात $x + y \geq 3000$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा $x + y = 3500$ पर है या उसके ऊपर है।

v. $x \geq 0$ के क्षेत्र बिन्दु y अक्ष पर है और उसके उपर है।

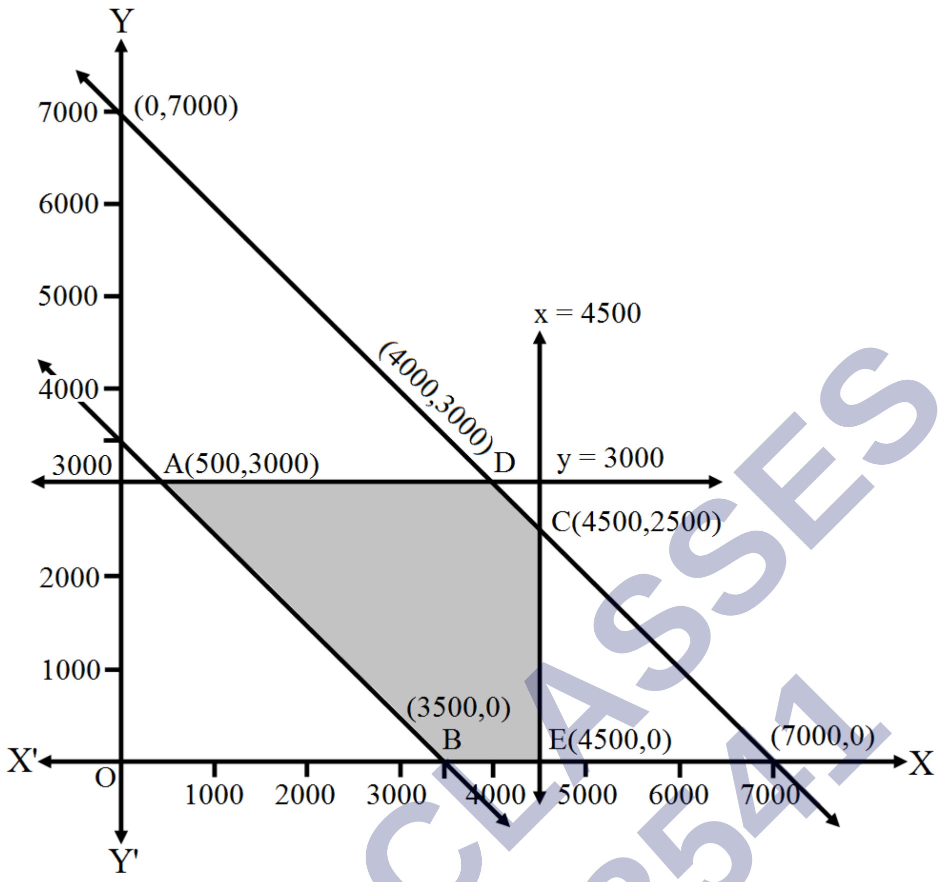
vi. $x \geq 0$ के क्षेत्र बिंदु x अक्ष पर है और उसके ऊपर है।

vii. $x + y = 3500$ रेखा $x = 4500$ और $y = 3000$ से क्रमशः $B(3500, 0)$ और $A(500, 3000)$ पर मिलती है।

viii. $x + y = 7000$ रेखा $x = 4500$ और $y = 3000$ से क्रमसः $C(4500, 2500)$ और $D(4000, 3000)$ मिलती है।

ix. रेखा $x = 4500$, x अक्ष पर $E(4500, 0)$ पर मिलती है।

इस प्रकार समस्या का सुसंगत क्षेत्र ABECD है।



अर्थात कोनीय बिन्दु है A(500, 3000), B(3500, 0), E(4500, 0), C(4500, 2500) तथा D(4000, 3000) अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्न सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे-

कोनीय बिन्दु	**Z का संगत मान Z = 0.3x + 0.1y + 3950**
A(500, 3000)	4400 (न्यूनतम)
B(3500, 0)	5000
E(4500, 0)	53000
C(4500, 2500)	5550
D(4000, 3000)	5450

अतः परिवहन व्यय Rs. 4400 न्यूनतम है डिपो A पेट्रोल पम्प D, E, F को क्रमशः 500, 3000, 3500 लीटर तेल की आपूर्ति करे और डिपो B पेट्रोल पम्प D, E, F को 4000, 0, 0 लीटर तेल की सप्लाई करे।

प्रश्न 8 एक फल उत्पादक अपने बाग में दो प्रकार के खादों P ब्रांड और Q ब्रांड का उपयोग कर सकता है। मिश्रण के प्रत्येक थैले में नाइट्रोजन, फास्फोरिक अम्ल, पोटाश और क्लोरीन की मात्रा

(किग्रा में) सारणी में दिया गया है। परीक्षण संकेत देते है कि बाग को कम से कम 250 किग्रा फास्फोरिक अम्ल, कम से कम 270 किग्रा पोटाश और क्लोरीन की अधिक से अधिक 310 किग्रा की आवश्यकता है।

यदि उत्पादक बाग के लिए मिलाई जाने वाली नाइट्रोजन की मात्रा का न्यूनतमीकरण करना चाहता है तथा, प्रत्येक मिश्रण के कितने थैलों का उपयोग होना चाहिए? मिलाई जाने वाली नाइट्रोजन की निम्नतम मात्रा क्या है? यह मानते हुए कि परिवहन व्यय प्रति 10 लिटर पर प्रति किलोमीटर 1 रुपया है, ज्ञात कीजिए कि कैसी आपूर्ति योजना अपनाई जाए, जिससे परिवहन व्यय का न्यूनतमीकरण हो जाए? न्यूनतम व्यय क्या है?

किलोग्राम प्रति थैला		
	ब्रांड P	**ब्रांड Q**
नाइट्रोज़न	3	3.5
फास्फोरिक अम्ल	1	2
पोटाश	3	1.5
क्लोरीन	1.5	2

उत्तर- माना कि ब्रांड P के x थैले और ब्रांड Q के y थैले मिलाए जाते है।

इन थैलो में नाइट्रोजन मात्रा = $3x + 3.5y$

∴ उद्देश्य फलन $Z = 3x + 3.5y$ का मान न्यूनतम करना है।

मिश्रण में फास्फोरिक अम्ल मात्रा = $(x + 2y)$ किग्रा.

या $x + 2y \geq 240$

मिश्रण में पोटेश मात्रा = $3x + 1.5y$

या $1.5x + 1.5y \leq 270$

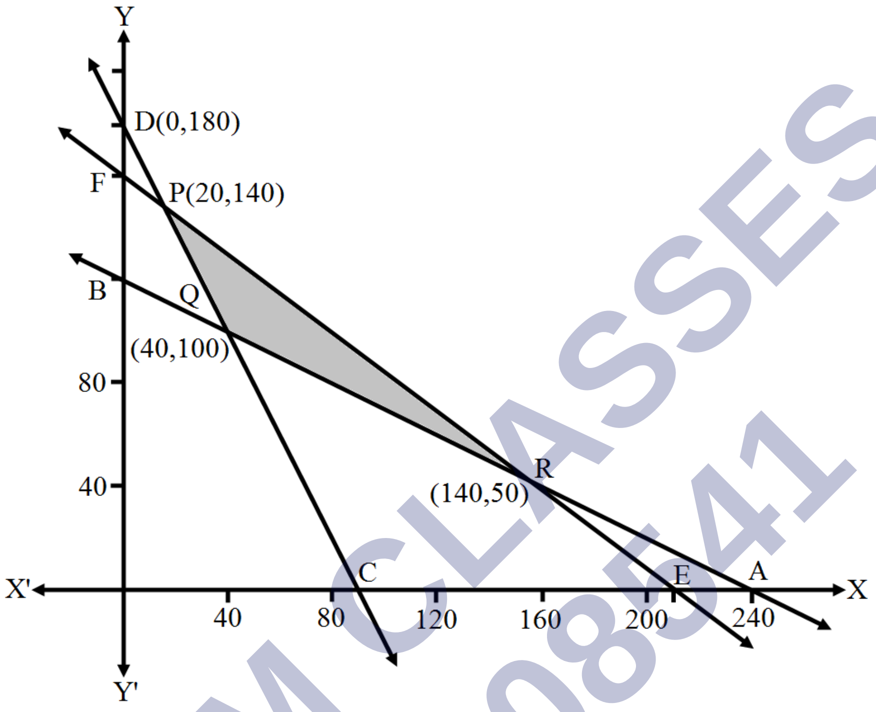
मिश्रण में क्लोरीन मात्रा = $1.5x + 2y$

या $1.5x + 2y \leq 310$

समस्या में अवरोध इस प्रकार है-

$x + 2y \geq 240, 3x + 1.5y \geq 270,$

$1.5x + 2y \geq 310,\ x,\ y \geq 0$



i. $x + 2y \geq 240$ का क्षेत्र-

रेखा $x + 2y = 240$ बिन्दु A(240, 0), B(0, 120) से होकर जाती है।

$x + 2y \geq 270$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 240$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात $x + 2y \geq 240$ के क्षेत्र बिन्दु AB पर और उसके ऊपर है।

ii. $3x + 1.5y \leq 270$ का क्षेत्र-

रेखा $3x + 1.5y = 270$ बिंदु C(90, 0) और D(0, 180) से होकर जाती है।

$3x + 1.5y \geq 270$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 270$ जो सत्य नहीं है।

अर्थात $3x + 1.5y \geq 270$ के क्षेत्र बिन्दु CD पर या उसके ऊपर है।

iii. $1.5x + 2y \geq 310$ का क्षेत्र-

रेखा $1.5x + 2y = 310$ बिंदु $E\left(206\frac{2}{3}, 0\right)$ और F(0, 155) से होकर जाती है।

$1.5x + 2y \geq 310$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 310$ जो सत्य है।

अर्थात $1.5x + 2y \leq 310$ के क्षेत्र बिन्दु EF पर पर या उसके नीचे है।

iv. $x \geq 0$के क्षेत्र बिन्दु रेखा y अक्ष पर उसके दायी और है।

v. $y \geq 0$ के क्षेत्र बिन्दु रेखा x पर उसके ऊपर है।

vi. $x + 2y = 240$ और $3x + 1.5y = 270$ बिन्दु Q(40, 100) पर मिलती है।

vii. $x + 2y = 240$ तथा $1.5x + 2y = 310$ बिन्दु R(140, 50) पर मिलती है।

viii. $3x + 1.5y = 270$ और $1.5x + 2y = 310$ बिन्दु P(20, 140) पर मिलती है।

इस प्रकार समस्या का सुसंगत क्षेत्र PQR है।

अर्थात कोनीय बिन्दु है P(20, 140), Q(40, 100) तथा R(140, 50) अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्न सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे-

कोनीय बिन्दु	**Z का संगत मान Z = 3x + 3.5y**
P(20, 140)	550
Q(40, 100)	470 (न्यूनतम)
R(140, 50)	595

अतः P प्रकार के 40 थैले और Q प्रकार के 100 थैले पर Z का मान न्यूनतम है।

नाइट्रोजन की न्यूनतम मात्रा 470 किग्रा है।

प्रश्न 9 यदि उत्पादक बाग में मिलाई जाने वाली नाइट्रोजन की मात्रा का अधिकतमीकरण चाहता है तो मिश्रण के कितने थैलों को मिलाया जाना चाहिए? मिलाई जाने वाली नाइट्रोजन की अधिकतम मात्रा क्या है?

किलोग्राम प्रति थैला

	ब्रांड P	ब्रांड Q
नाइट्रोज़न	3	3.5
फास्फोरिक अम्ल	1	2
पोटाश	3	1.5
क्लोरीन	1.5	2

उत्तर- हम पाते है कि बिन्दु R(140, 50) पर Z अधिकतम है।

अतः P प्रकार 140 थैले और Q प्रकार के 50 थैले पर Z का मान अधिकतम है।

नाइट्रोजन की अधिकतम मात्रा 595 है।

प्रश्न 10 एक खिलौना कंपनी, A और B दो प्रकार की गुड़ियों का निर्माण करती है। मार्किट परीक्षणों तथा उपलब्ध संसाधनों से संकेत मिलता है कि सम्मिलित उत्पादन स्तर प्रति सप्ताह 1200 गुड़ियों से अधिक नहीं होना चाहिए और B प्रकार की गुड़ियों की अधिक से अधिक माँग A प्रकार की गुड़ियों की आधी है। इसके अतिरिक्त A प्रकार की गुड़ियों का उत्पादन स्तर दूसरे प्रकार की गुड़ियों के उत्पादन स्तर के तीन गुने से 600 नग अधिक है। यदि कंपनी A और B प्रत्येक गुड़िया पर क्रमश: Rs. 12 और Rs. 16 का लाभ कमाती है, लाभ का अधिकतमीकरण करने के लिए प्रत्येक के कितने नगों का साप्ताहिक उत्पादन करना चाहिए।

उत्तर- मान लीजिये कम्पनी A प्रकार की x तथा B प्रकार की y गुड़ियो का उत्पादन करती है।

कम्पनी को A प्रकार की गुढ़ियो पर Rs. 12 और B प्रकार की गुड़िया पर Rs. 16 का लाभ होता है।

कुल लाभ = $12x + 16y$

उद्देश्य फलन $Z = 12x + 16y$

दोनों प्रकार की गुड़ियो का अधिकतम उत्पादन = 1200

$\therefore x + y \leq 1200$ ...(i)

A प्रकार की गुड़ियो का उत्पादन B प्रकार की गुड़िया 3 गुने अधिक 600 गुड़िया अधिक है।

या $x - 3y \le 600$ ...(ii)

B प्रकार की गुड़ियो की माँग अधिक-से-अधिक A प्रकार की गुड़ियो से आधी है।

या $y \ge \frac{x}{2}$ ...(iii)

इस प्रकार ये अवरोध है-

$x + y \le 1200$, $x - 3y \le 600$,

$= y \ge \frac{x}{2}$, $x, y \ge 0$

i. $x + y \le 1200$ का क्षेत्र-

   रेखा $x + y = 1200$ बिन्दु A(1200, 0) और B(0, 1200) से होकर जाती है।

   $x + y \le 1200$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \le 1200$ जो सत्य है।

   अर्थात $x + y \le 1200$ क्षेत्र बिन्दु AB पर और उसके नीचे है।

ii. $x - 3y \le 600$ का क्षेत्र-

   रेखा $x - 3y = 600$ बिन्दु C(600, 0), D(0, - 200) से होकर जाती है।

   $x - 3y \le 600$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \le 600$ जो सत्य है।

   अर्थात $x + 3y \le 600$ रेखा CD पर और मूल बिन्दु की और है अर्थात CD के ऊपर है।

iii. $y \ge \frac{x}{2}$ या $x - 2y \ge 0$ का क्षेत्र-

   रेखा $x - 2y = 0$ मूल बिन्दु O और P(800, 400) से होकर जाती है।

   $x - 2y \ge 0$ में $x = 200, y = 0$ रखने पर $200 \ge 0$ जो सत्य है।

   अर्थात $x - 2y \ge 0$ के क्षेत्र बिन्दु OP पर और बिन्दु (200, 0) को और है।

   या इसका क्षेत्र OP के नीचे है।

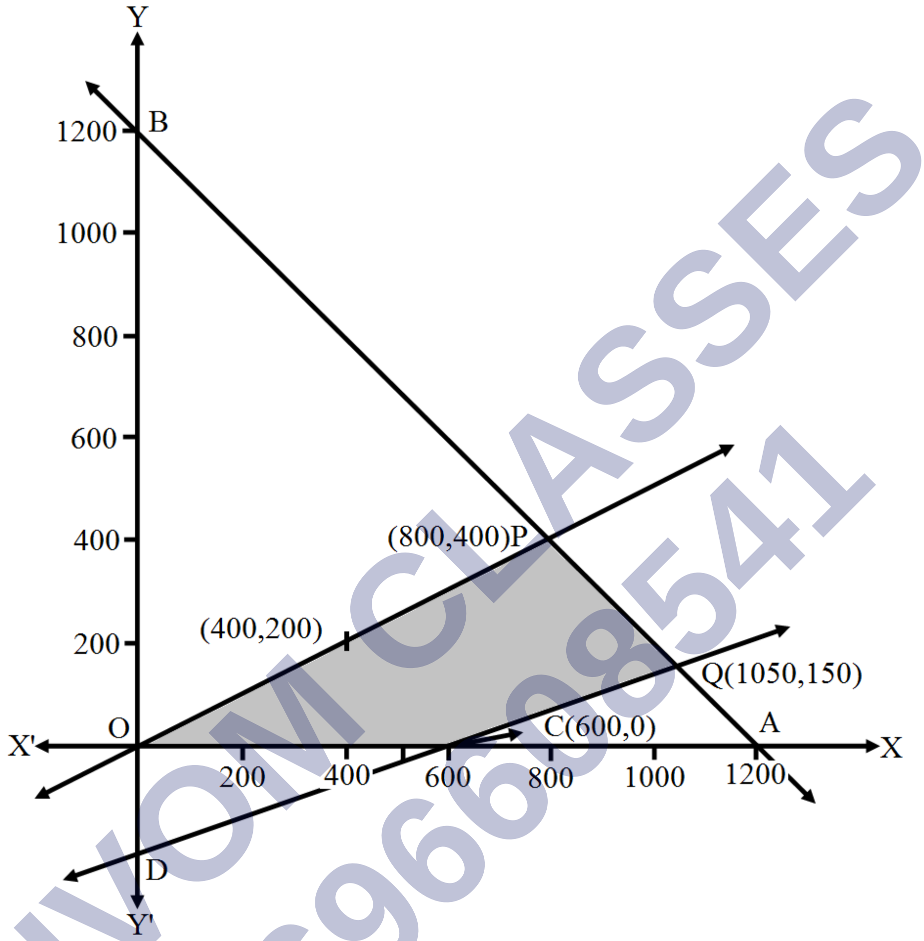
iv. $x \ge 0$ के क्षेत्र बिन्दु y अक्ष पर और उसके दायी और है।

v. $y \ge 0$ के क्षेत्र बिन्दु x और उसके ऊपर है।

vi. रेखा $x + y = 1200$ और $x = 2y$ बिन्दु P(800, 400) पर मिलती है।

vii. रेखा $x - 3y = 600$ और $x + y = 1200$ बिन्दु Q(1050, 150) पर मिलती है।

इस प्रकार समस्या का सुसंगत क्षेत्र OPQC छायांकित है।



अर्थात कोनीय बिन्दु है P(800, 400), Q(1050, 150) तथा C(600, 0) अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्न सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे-

कोनीय बिन्दु	**Z का संगत मान $Z = 12x + 16y$**
P(800, 400)	16000 अधिकतम
Q(1050, 150)	15000
C(600, 0)	7200

अधिकतम लाभ Rs. 16000 जो $x = 800$, $y = 400$ पर होता है।

अतः अधिकतम लाभ Rs. 16000 पाने के लिए A प्रकार को 800 और B प्रकार की 400 गुड़ियो का उत्पादन करना चाहिए।