गणित

अध्याय-11: रचनाएँ

रचनाएं

ज्यामितीय आकृतियों के निर्माण तथा उनसे सम्बन्धित नियमों का अध्ययन इस अध्याय के अंतर्गत विस्तार से समझाया गया है।

रेखाखंड का विभाजन

मान लीजिए कि एक रेखाखंड दिया है और आपको उसे एक दिए गए अनुपात, माना 3 : 2 में विभाजित करना है। आप इसकी लंबाई माप कर तथा दिए गए अनुपात के अनुसार एक बिंदु चिह्नित कर सकते हैं। परंतु यदि आपके पास इसे सही-सही मापने की कोई विधि न हो, तो आप इस बिंदु को कैसे प्राप्त करेंगे? इस प्रकार के बिंदु को प्राप्त करने के लिए, कई विधियाँ हैं।

एक रेखाखंड AB दिया है, हम इसको m : n के अनुपात में विभाजित करना चाहते हैं। प्रक्रिया को समझने में सहायता करने के लिए, हम m = 3 और n = 2 लेंगे।

रचना के चरण:

1. AB से न्यूनकोण बनाती कोई किरण AX खींचिए।
2. AX पर 5 (= m + n) बिंदु A_1, A_2, A_3, A_4 और A_5 इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ हो।
3. BA_5 को मिलाइए।
4. बिंदु A_3 (m = 3) से होकर जाने वाली A_5B के समांतर एक रेखा (A_3 पर $\angle AA_5B$ के बराबर कोण बनाकर) AB को एक बिंदु C पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए।

तब, AC : CB = 3 : 2 है।

यह विधि कैसे हमें अभीष्ट विभाजन देती है।

क्योंकि A_3C, A_5B के समांतर है,

अतः $AA_3/A_3A_5 = AC/CB$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा)

रचना से, $AA_3/A_3A = 3/2$ है।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि बिंदु C, AB को 3 : 2 अनुपात में विभाजित करता है।

एक दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की 5/3 हों (अर्थात् स्केल गुणक 5/3 है)।

एक त्रिभुज ABC दिया गया है। हमें एक त्रिभुज की रचना करनी है, जिसकी भुजाएँ Δ ABC की संगत भुजाओं की 5/3 हों।

रचना के चरण:

1. BC से शीर्ष A के दूसरी ओर न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए।

2. 5 (5/3 में 5 और 3 में से बड़ी संख्या) बिंदु B_1, B_2, B_3, B_4 और B_5, BX पर इस प्रकार अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3 = B_4B_5$ हो।

3. B_3 (तीसरा बिंदु, 5/3 में 5 और 3 में से छोटी संख्या) को C से मिलाइए और B_5 से होकर जाने वाली B_3C के समांतर एक रेखा, बढ़ाए गए रेखाखंड BC को C' पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए।

4. C' से होकर जाने वाली CA के समांतर एक रेखा, बढ़ाने पर रेखाखंड BA को A' पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए।

तब, A'BC' अभीष्ट त्रिभुज है।

रचना के औचित्य सिद्ध करने के लिए, ध्यान दीजिए

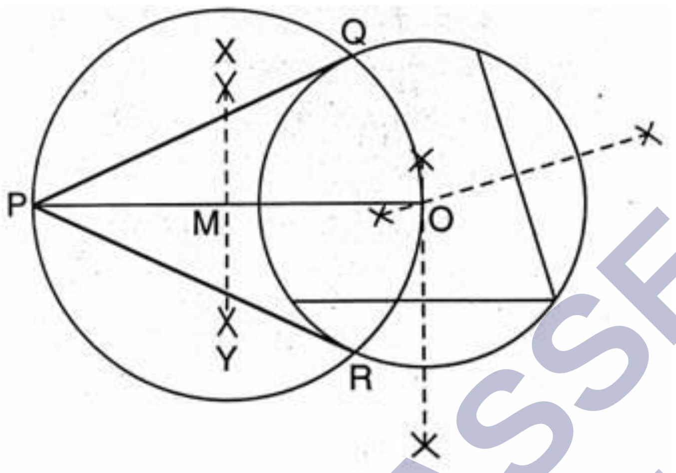
Δ ABC ~ Δ A'BC' (कोण कोण कोण नियम से)

इसलिए, AB/A'B = AC/A'C' = BC/BC' है।

परंतु $BC/BC' = BB_3/BB_5 = 3/5$ है।

इसलिए, BC'/BC = 5/3 है और इसीलिए A'B/AB = A'C'/AC = BC'/BC = 5/3 है।

किसी वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना



यदि कोई बिंदु वृत्त के अंदर स्थित है, तो इस बिंदु से जाने वाली वृत्त की कोई स्पर्श रेखा नहीं हो सकती है। परंतु यदि बिंदु वृत्त पर स्थित है, तो उस बिंदु पर वृत्त की एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है, जो उस बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है। अतः यदि आप वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा खींचना चाहते हैं, तो केवल उस बिंदु से जाने वाली त्रिज्या खींचिए और उसी बिंदु पर इसकी लंब रेखा खींचिए। तब, यही अभीष्ट स्पर्श रेखा होगी। आपने यह भी देखा है कि यदि बिंदु वृत्त के बाहर स्थित है, तो इस बिंदु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ होती हैं।

1. हमें एक वृत्त जिसका केंद्र O है तथा इसके बाहर एक बिंदु P दिए हुए हैं। हमें P से वृत्त पर दोनों स्पर्श रेखाएँ खींचनी हैं।

रचना के चरण

1. PO को मिलाइए और इसे समद्विभाजित करिए।

माना PO का मध्य बिंदु M है।

2. M को केंद्र मान कर तथा MO त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए। माना यह दिए गए वृत्त को Q और R पर प्रतिच्छेद करता है।

3. P को Q तथा R से मिलाइये।

तब, PQ और PR अभीष्ट दो स्पर्श रेखाएँ है।

आइए अब देखें कि इस रचना से हमें स्पर्श रेखाएँ किस प्रकार मिलती हैं। OQ को मिलाइए।

तब, ∠PQO अर्धवृत्त में बना एक कोण है और इसीलिए $\angle PQO = 90^0$ है।

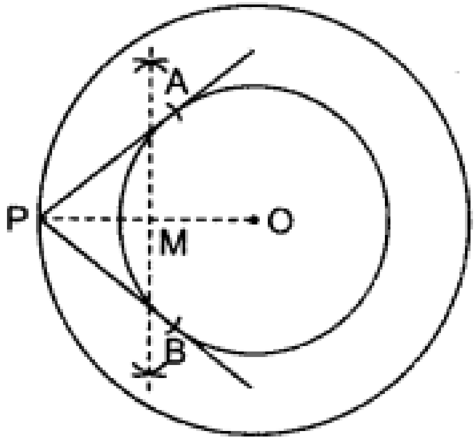
यहाँ हम कह सकते हैं कि $PQ \perp OQ$ है,

क्योंकि, OQ दिए वृत्त की त्रिज्या है, इसलिए PQ वृत्त की स्पर्श रेखा ही होगी। इसी प्रकार, PR भी वृत्त की स्पर्श रेखा है।

ध्यान देने योग्य बातें

यदि वृत्त का केंद्र नहीं दिया है, तो आप कोई दो असमांतर जीवाएँ लेकर तथा उनके लंब समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिंदु के रूप में केंद्र ज्ञात कर सकते हैं। इसके बाद, आप उपर्युक्त रूप से आगे बढ़ सकते हैं।

- **किसी रेखाखंड (line segment) को दिए गए अनुपात(2:5) में विभाजित करना : -**
    - पहले दी गई रेखा (AB) से न्यूनकोण (acute angle) बनाती हुई एक रेखा (AX) खींचो जिसकी लम्बाई दोनों अनुपातों के योग(2 + 5 = 7)के बराबर होनी चाहिए।
    - खींची गई रेखा(AX) पर दोनों अनुपातों के योग (7) के बराबर बिंदु अंकित करो(A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7) समान दूरियों पर (equidistant)I
    - खींची गई रेखा के अंतिम बिंदु (A7) को दी गई रेखा के बिंदु (B) से मिलाकर एक अन्य रेखा (BA7) खींचो।
    - दिए गए अनुपात (ratio) में से पहले अनुपात (2 = A2) से अन्य रेखा (BA7) के समांतर (parallel) एक रेखा खींचो और दी गई रेखा(AB) पर कोई बिंदु(C) अंकित करो।
    - दी गई रेखा अभीष्ट अनुपात में विभाजित हो गई है। (AB:BC = 2:5)



- **किसी रेखाखंड को दिए गए अनुपात (2:5) में विभाजित करना (वैकल्पिक विधि द्वारा)**
  - दिए गए रेखाखंड (AB) से न्यूनकोण (<BAX) बनाती हुई एक रेखा (AX) और दूसरा न्यूनकोण (<ABY) बनाती हुई अन्य रेखा (BY) खींचो।
  - पहले रेखाखंड (AX) पर पहले अनुपात (2) के बराबर, समान दूरियों पर बिंदु (A1, A2) अंकित करो।
  - दूसरे रेखाखंड (BY) पर दूसरे अनुपात (5) के बराबर, समान दूरियों पर बिंदु (B1, B2, B3, B4, B5) अंकित करो।
  - पहले रेखाखंड (AX) और दूसरे रेखाखंड (BY) के अंतिम बिंदुओं (A2 और B5) को मिलाओ।
  - रेखाखंड (A2B5) और दिए गए रेखाखंड (AB) के प्रतिच्छेद बिंदु (intersecting point) को (C) अंकित करो।
  - दी गई रेखा अभीष्ट अनुपात में विभाजित हो गई है। (AB:BC = 2:5)

• **स्केल गुणक (scale factor) -** दिए गए त्रिभुज और जिस त्रिभुज की रचना की जानी है उसकी भुजाओं (sides) के अनुपात को स्केल गुणक कहते हैं।

• **स्केल गुणक (2/3) के अनुसार दिए गए त्रिभुज (ABC) के समरूप (similar) त्रिभुज की रचना करना : -**

  - दिए गए त्रिभुज के आधार (base) (BC) से शीर्ष (vertice) (A) के दूसरी ओर न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण (ray) (BX) खींचो।
  - किरण (BX) पर 3 बिंदु (2/3 में 3 बड़ा है) समान दूरियों पर अंकित करो B1, B2, B3

- किरण के अंतिम बिंदु (B3) को आधार (BC) से मिलाकर रेखा (B3C) खींचो फिर रेखा (B3C) के समांतर बिंदु (B2) से (2/3 में 2 छोटा) एक रेखा (B2C') खींचो।
- बिंदु (C') से रेखा (CA) के समांतर एक रेखा (C'A') खींचो।
- Δ A'BC' ~ Δ ABC

● वृत्त (circle) के बाहर स्थित किसी बिंदु (L) से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं (tangent line) की रचना करना : -

- दिए गए बिंदु (L) को वृत्त के केंद्र (O) से मिलाओ और OL को समद्विभाजित (bisect) करो।
- OL के मध्य बिंदु (midpoint) (S) को केंद्र (center) और OS को त्रिज्या (radius) मानकर एक अन्य वृत्त की रचना (construction) करो और प्रतिच्छेद बिंदुओं के नाम लिखो (P और Q)
- दिए गए बिंदु (L) को बिंदुओं (P और Q) से मिलाओ।
- LP और LQ अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

Example:

7.6 cm लंबा एक रेखाखंड खींचिए और इसे 5: 8 अनुपात में विभाजित कीजिए | दोनों को मापिए

हल: रचना के पद

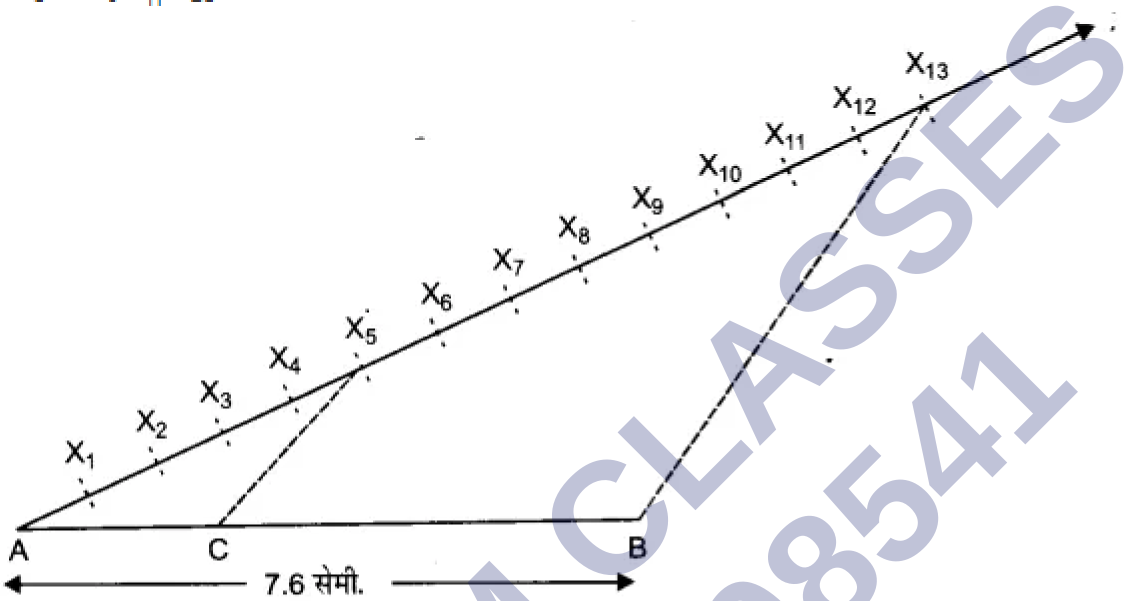
I. एक रेखाखंड AB = 7.6 सेमी खींचो।

II. एक किरण AX खींचो जो AB के साथ एक न्यून कोण बनाए।

III. किरण AX पर (8 + 5) = 13 समान खंड काटो और उन्हें $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots, X_{13}$ से अंकित करो।

IV. X_{13} को B से मिलाओ।

V. X_5 से $X_6C \parallel X_{13}B$ खींचो जो AB को C पर मिले।



इस प्रकार बिन्दु C रेखाखंड AB को 5 : 8 अनुपात में विभाजित करता है।
दोनों रेखाखंडों को मापने पर, हमें प्राप्त होता है AC = 4.7 सेमी., BC = 2.9 सेमी

इस प्रकार बिन्दु C रेखाखंड AB को 5 : 8 अनुपात में विभाजित करता है।
दोनों रेखाखंडों को मापने पर, हमें प्राप्त होता है AC = 4.7 सेमी., BC = 2.9 सेमी

सत्यापन: ΔABX_{13} और ΔACX_5 में हमें प्राप्त होता है:

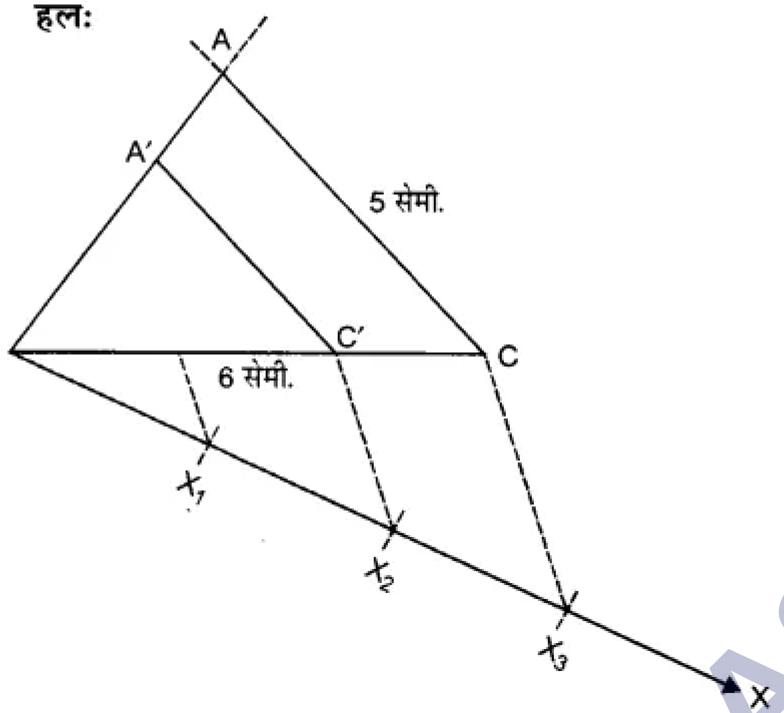
$$C_5 \parallel B_{13}$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{CB} = \frac{A_5}{X_5X_{13}} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \quad AC : CB = 5 : 8.$$

4cm, 5cm और 6cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की 2/3 गुनी हों।

हलः



रचना के पद

I. एक ΔABC की रचना इस प्रकार करो कि BC = 6 सेमी, AC = 5 सेमी और AB = 4 समी है।

II. एक किरण BX इस प्रकार खींचो की $\angle CBX$ एक न्यून कोण हो।

III. BX पर तीन बिन्दु X_1, X_2, और X_3 इस प्रकार अंकित करो कि

$BX_1 = X_1 X_2 = X_2 X_3$

IV. X_3 और C को मिलाओ।

V. X_2 से एक रेखा X_3C के समान्तर खींचो जो BC को C पर काटे।
VI. C से एक रेखा CA के समान्तर खींचो जो BA को A' पर मिले।
इस प्रकार अभिष्ठ त्रिभुज ABC' है।
सत्यापनः रचना से हमें प्राप्त होता है किः

$$X_3C \parallel X_2C' \Rightarrow \frac{BX_2}{X_2X_3} = \frac{BC'}{C'C}$$

$$\text{परन्तु} \quad \frac{BX_2}{X_2X_3} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{BC'}{C'C} = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C'C}{BC'} = \frac{1}{2}$$

दोनों ओर 1 जोड़ने पर

$$\frac{C'C}{BC'} + 1 = \frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C'C + BC'}{BC'} = \frac{1+2}{2} \Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{3}{2}$$

अब, $\Delta BC'A'$ और ΔBCA में,

$$CA \parallel C'A'$$

AA समरूपता से, हमें प्राप्त होता है:

$$\Delta BC'A' \sim \Delta BCA$$

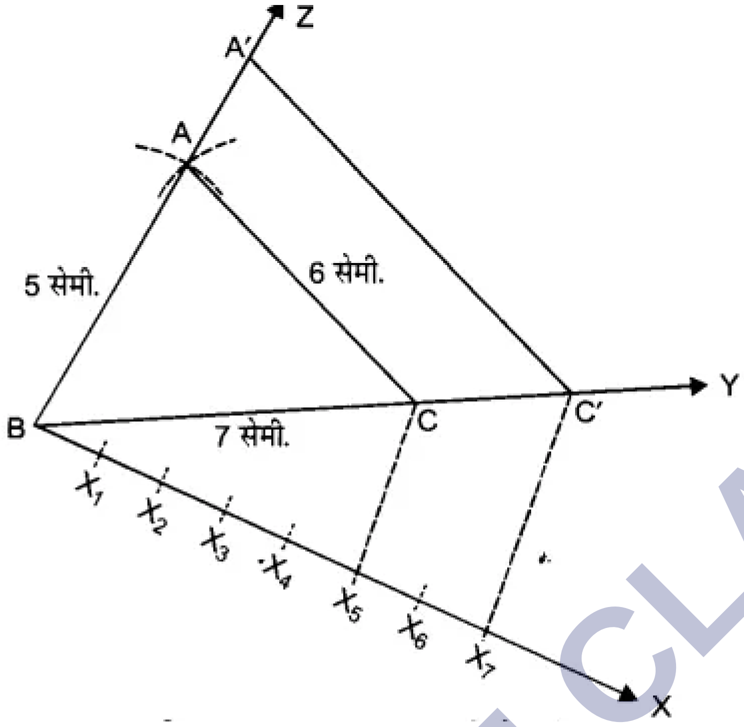
$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \quad \left[\text{प्रत्येक} = \frac{2}{3}\right]$$

5 cm, 6cm और 7cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की 7/5 गुनी हो|

हलः

रचना के पद

I. एक त्रिभुज ABC की रचना इस प्रकार कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी., BC = 7 सेमी. और AC = 6 सेमी. है।



II. एक किरण BX इस प्रकार खींचो की ∠CBX एक न्यून कोण हो।

III. BX पर 7 बिन्दु $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots, X_7$ अंकित करो।

IV. X_5 और C को मिलाओ।

V. बिन्दु X_7 से $X_5C \parallel X_7C'$ खींचो जो BC (बढ़ाने पर) को C पर काटे।

VI. C' से CA के समान्तर एक रेखा खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A' पर काटे।

इस प्रकार ΔABC अभीष्ठ त्रिभुज है।

सत्यापनः रचना से, हमें प्राप्त होता है कि

$C'A' \parallel CA$

AA' समरूपता से हमें प्राप्त होता है:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \text{ तथा } X_7C' \parallel X_5C$$

[रचना द्वारा]

$$\therefore \quad \Delta BX_7C' \sim \Delta BX_5C \Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{BX_5}{BX_7}$$

$$\therefore \quad \frac{BX_5}{BX_7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7} \text{ or } \frac{BC'}{BC} = \frac{7}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{7}{5}.$$

आधार 8cm तथा ऊँचाई 4cm के एक समद्विबाहू त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ इस समद्विबाहू त्रिभुज की संगत भुजाओं की 1,1/2 गुनी हों।

हल:

रचना के पद

I. BC = 8 सेमी खींचो।

II. BC का लम्ब समद्विभाजक खींचो जो BC को D पर काटे।

III. उक्त लम्ब पर एक बिन्दु A इस प्रकार अंकित करो कि DA = 4 सेमी.

IV. AB और AC को मिलाओ। इस प्रकार ΔABC वांछित समद्विबाहु A है।

V. अब, एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि ∠X एक न्यून कोण हो।

VI. BX पर तीन बिन्दु X_1, X_2, X_3 इस प्रकार अंकित करो कि:

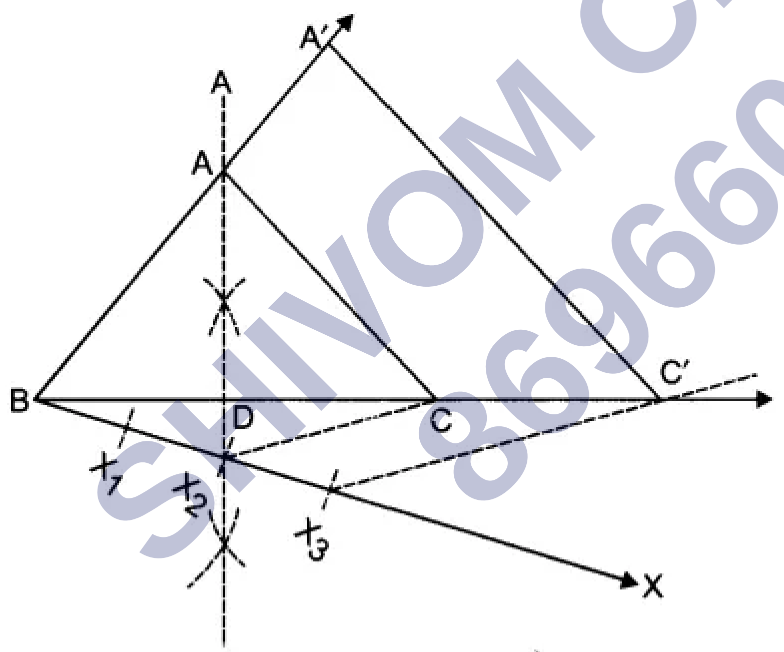
$BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3$

VII. X_2 और C को मिलाओ।

VIII. X_3 से एक रेखा B2C के समान्तर खींचो जो BC (बढ़ाने पर) को C पर काटे।

IX. C' से एक रेखा CA के समान्तर खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A' पर काटे।

इस प्रकार ΔA'B'C' अभीष्ठ त्रिभुज है।



सत्यापन: हमें प्राप्त है कि:

$C'A' \parallel CA$ **[रचना से]**

$\therefore$ AA समरूपता से, $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$

$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC'}$$

चूँकि, $X_3C' \mid X_2C$ **[रचना से]**

$$\Rightarrow \quad \Delta BX_3C' \sim \Delta BX_2C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC'}{BC} = \frac{BX_3}{BX_2} \quad \textbf{[By BTP]}$$

परन्तु $$\frac{BX_3}{BX_2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{2}$$

इस प्रकार, $$\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{2}$$

एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें BC = 6 cm, AB = 5 cm और angle = 60o हो | फिर एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की 3/4 गुनी हों|

हलः

रचना के पद

I. एक त्रिभुज ABC की रचना इस प्रकार करो कि: BC = 6 सेमी, AB = 5 सेमी और $\angle ABC = 60°$.

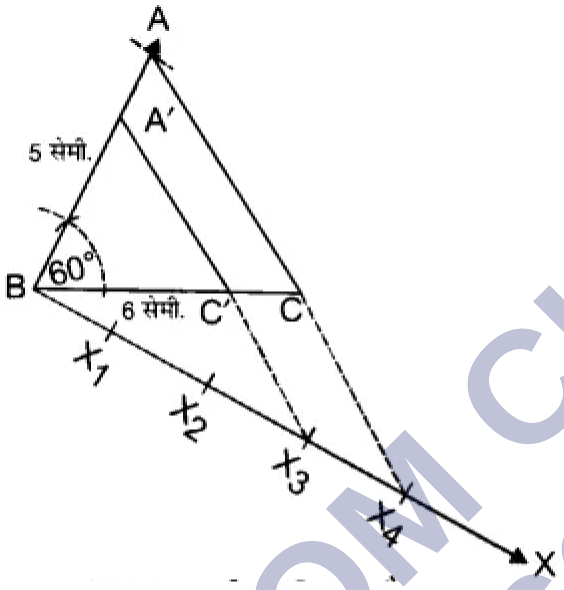
II. एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि $\angle CBX$ एक न्यून कोण हो।

III. BX पर चार बिन्दु X_1, X_2, X_3 और X_4 इस प्रकार अंकित करो कि $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4$

IV. X_4C को मिलाओ।

V. $X_3C' \parallel X_4C$ खींचो जो कि BC को C' पर काटे।

VI. एक अन्य रेखा C' से CA के समान्तर खींचो जो BA को A' पर काटे।



इस प्रकार $\Delta A'BC'$ अभीष्ठ त्रिभुज है।

सत्यापनः रचना से हमें प्राप्त है कि:

$$X_4C \parallel X_3C' \qquad \text{[BPT प्रमेय से]}$$

$$\therefore \quad \frac{BX_3}{BX_4} = \frac{BC'}{BC} \quad \text{परन्तु} \quad \frac{BX_3}{BX_4} = \frac{3}{4}$$

[रचना से]

$$\Rightarrow \quad \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4} \qquad ...(1)$$

अब, हमें प्राप्त है कि:

$$CA \parallel C'A' \qquad \text{[रचना से]}$$

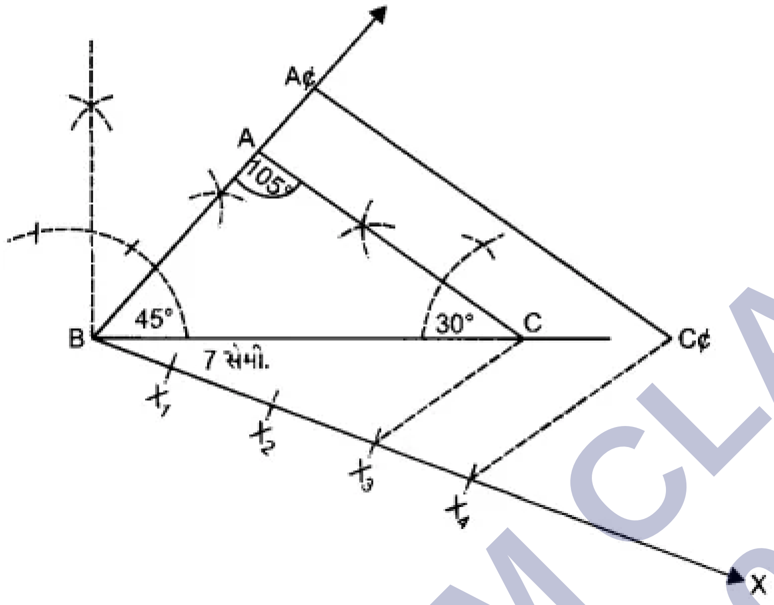
$$\therefore \quad \Delta BC'A' \sim \Delta BCA \qquad \text{[AA समरूपता से]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}. \qquad \text{[(1) से]}$$

एक त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें BC = 7 cm, angle B = 45° , angle A = 105° हो| फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की 4/3 गुनी हों |

हल:

रचना के पद



I. एक ΔABC की रचना इस प्रकार करो कि BC = 7 सेमी, ∠B = 45° और ∠A = 105° हो।

II. एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि ∠CBX एक न्यून कोण हो।

III. BX पर चार बिन्दु X_1, X_2, X_3 और X_4 इस प्रकार अंकित करो कि:

$BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4$ हो।

IV. X_3 और C को मिलाओ।

V. $X_4C' \parallel X_3C$ इस प्रकार खींचो कि C', BC (बढ़ाने पर) को मिले।

VI. C' से CA के समान्तर एक रेखा खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A' पर मिले।

इस प्रकार ΔABC अभीष्ठ त्रिभुज है।

सत्यापन: रचना से हमें प्राप्त है कि:

$$C'A' \parallel CA$$

$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ [AA समरूपता से]

$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \quad ...(1)$$

पुनः रचना से,

$$X_4C' \parallel X_3C$$

$\therefore$ $\Delta BX_4C' \sim \Delta BX_3C$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC'}{BC} = \frac{BX_4}{BX_3}$$

परन्तु $\frac{BX_4}{BX_3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{4}{3}$ ...(2)

(1) और (2) से, हमें प्राप्त है कि:

$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{4}{3}$$

एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ (कर्ण के अतिरिक्त) 4 cm तथा 3 cm लंबाई की हों। फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की 5/3 गुनी हों।

हल: रचना के पद

I. एक ΔABC की रचना इस प्रकार करो कि $\angle B = 90°$, $BC = 4$ सेमी और $BA = 3$ सेमी हो।

II. एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि $\angle CBX$ एक न्यनू कोण हो।

III. BX पर पाँच बिन्दु X_1, X_2, X_3, X_4 और X_5

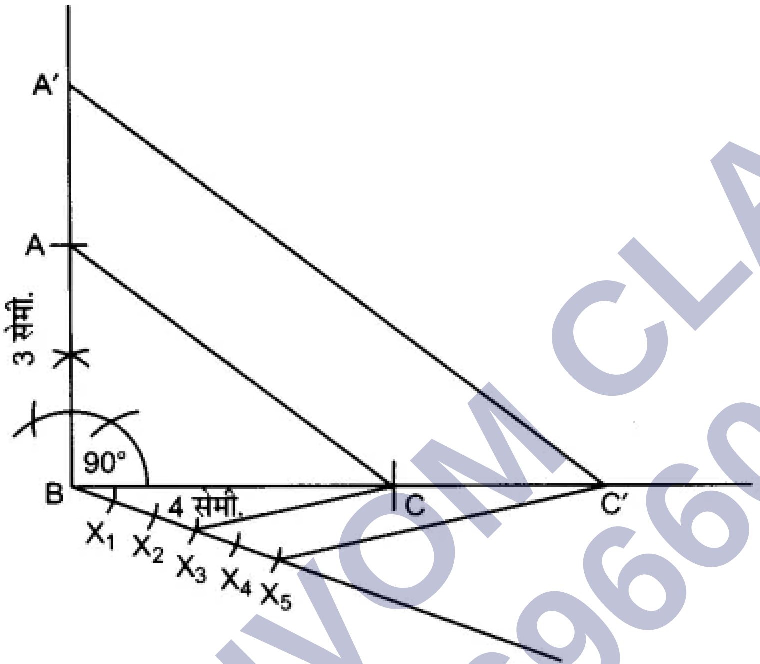
इस प्रकार खींचो कि: $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4 = X_4X_5$ हो।

IV. X_3 और C को मिलाओ।

V. X_5 से X_3C के समान्तर एक रेखा खींचो जो BC को बढ़ाने पर C' पर काटे।

VI. एक अन्य रेखा C' से CA के समान्तर खींचो जो BA को बढ़ाने पर A' पर मिले।।

इस प्रकार $\Delta A'B'C'$ अभीष्ठ त्रिभुज है।



सत्यापन: रचना से, हमें प्राप्त है कि:

$C'A' \parallel CA$

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ [AA समरूपता से]

$\Rightarrow \quad \dfrac{A'B}{AB} = \dfrac{A'C}{AC} = \dfrac{BC'}{BC}$ ...(1)

पुन: $X_5C' \parallel X_3C$ [रचना से]

$\therefore \quad \Delta BX_5C' \sim \Delta BX_3C$

$\Rightarrow \quad \dfrac{BC'}{BC} = \dfrac{BX_5}{BX_3}$

परन्तु $\dfrac{BX_5}{BX_3} = \dfrac{5}{3}$ ...(2)

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है :

$\dfrac{A'B}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{BC'}{BC} = \dfrac{5}{3}$

6 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए | केंद्र से 10 cm दूरी स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए और उनकी लंबाइयाँ मापिए |

हल:

रचना के पद

I. एक बिन्दु 0 अंकित करो।

II. केन्द्र O और त्रिज्या 6 सेमी से एक वृत्त खींचो।

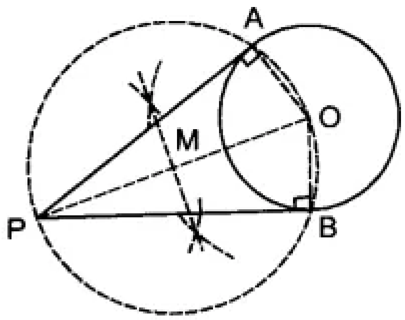
III. केन्द्र से 10 सेमी की दूरी पर एक बिन्दु P अंकित करो।

IV. O और P को मिलाओ।

V. OP को M पर समद्विभाजित करो।

VI. बिन्दु M को केन्द्र लेकर MO या MP के समान त्रिज्या से एक वृत्त खींचो जो दिए गये वृत्त को A और B पर काटे।

VII. PA और PB को मिलाओ। इस प्रकार, PA और PB दो अभिष्ठ स्पर्श रेखाएँ हैं। मापने पर, PA = PB = 9.6 सेमी.



सत्यापन: OA और OB को मिलाओ चूँकि OP एक व्यास है।

$\angle OAP = 90°$; $\angle OBP = 90°$ [अर्धवृत्त में बने कोण]

पुन: OA और OB एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

PA और PB वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ है।

4 cm त्रिज्या के एक वृत्त पर 6 cm त्रिज्या के एक सकेंद्रीय वृत्त के किसी बिन्दु से एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए और उसकी लंबाई मापिए | परिकलन से इस माप की जाँच भी कीजिए |

हलः

रचना के पद

I. 4 सेमी और 6 सेमी त्रिज्या के दो वृत्त एक ही केन्द्र O से खींचो।

II. बड़े वृत्त पर एक बिन्दु P अंकित करो।

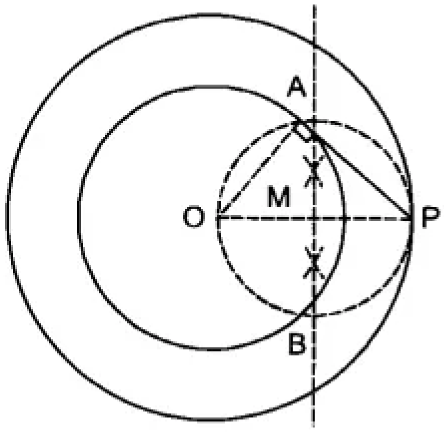
III. O और P को मिलाओ।

IV. OP का लम्ब समद्विभाजक M ज्ञात करो।

V. Mको केन्द्र और OM या PM के समान त्रिज्या से एक वृत्त खींचो जो छोटे वृत्त को A और B पर काटे।

VI. A और P को मिलाइए।

इस प्रकार PA अभीष्ठ स्पर्श रेखा है। मापने पर, PA = 4.5 सेमी



सत्यापनः O और A को मिलाओ।

$\angle PAO = 90°$ [अर्धवृत्त में बना कोण]

$PA \perp OA$

OA, छोटे वृत्त की त्रिज्या है।

छोटे वृत्त पर PA एक स्पर्श रेखा है।

3 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए | इसके किसी भी बढाए गए व्यास पर केंद्र से 7 cm की दूरी पर स्थित दो बिन्दु P और Q लीजिए | इन दोनों बिन्दुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए |

हल:

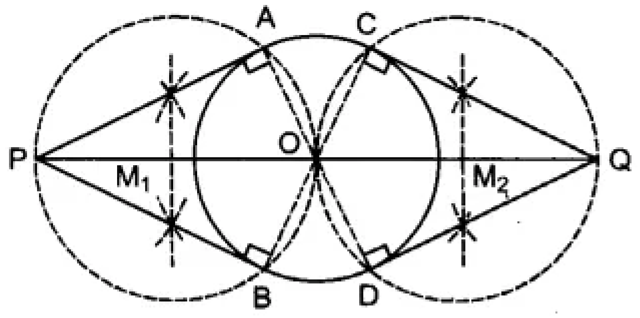
रचना के पद

I. केन्द्र O और त्रिज्या 3 सेमी का एक वृत्त खींचो।

II. उक्त वृत्त के व्यास को बढ़ाकर, इस पर दो बिन्दु P और 9 इस प्रकार अंकित कीजिए कि:

OP = OQ = 7 सेमी

III. OP और OQ के मध्य बिन्दु क्रमश: M1 और M2 ज्ञात कीजिए।



IV. M_1 को केन्द्र व M_1P को त्रिज्या मानकर एक वृत्त खींचो जो वृत्त को A और B पर काटे।

V. PA और PB को मिलाओ। PA और PB अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

VI. अब OQ के मध्य बिन्दु M_2 और M_2O के समान त्रिज्या लेकर वृत्त खींचो जो दिए गये वृत्त को C और D पर काटे।

VII. OC और OD को मिलाओ। इस प्रकार OQ और QD अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

सत्यापन: OA को मिलाओ।

$\angle OAP = 90°$

PA $\perp$ OA

PA एक स्पर्श रेखा है।

इस प्रकार, PB $\perp$OA

PB एक स्पर्श रेखा है।

अब, OC को मिलाने पर

$\angle OCQ = 90°$

QC $\perp$ OC

QC एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, QD $\perp$ OC = QD एक स्पर्श रेखा है।

5 cm त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो पार्ष रेखाएँ खींचिए, जो परस्पर 60° के कोण पर झुकी हों।

हलः

रचना के पद

I. केन्द्र O और त्रिज्या = 5 सेमी से दिये गये वृत्त की रचना करो।

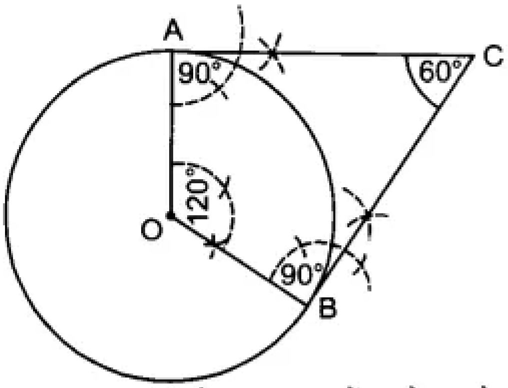
II. $\angle AOB = 120^\circ$ बनाओ।

III. बिन्दु A से OA पर एक लम्ब खींचो।

IV. B से एक लम्ब OB पर खींचो।

V. उक्त लम्बों को C पर मिलने दो।

इस प्रकार CA तथा CB वृत्त की अभीष्ठ स्पर्श रेखाएँ है, जो परस्पर 60° पर झुकी हुई हैं।



सत्यापनः चतुर्भुज OACB में, कोण-योग-गुण से

$120^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ACB = 360^\circ$

$\Rightarrow 300^\circ + \angle ACB = 360^\circ$

$\Rightarrow \angle ACB = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$

8 cm लंबा एक रेखाखंड AB खींचिए | A को केंद्र मान कर 4 cm त्रिज्या का एक वृत्त तथा B को केंद्र लेकर 3 cm त्रिज्या का एक अन्य वृत्त खींचिए | प्रत्येक वृत्त पर दूसरे वृत्त के केंद्र से स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए |

हलः

रचना के पद

I. A और B को मिलाओ।

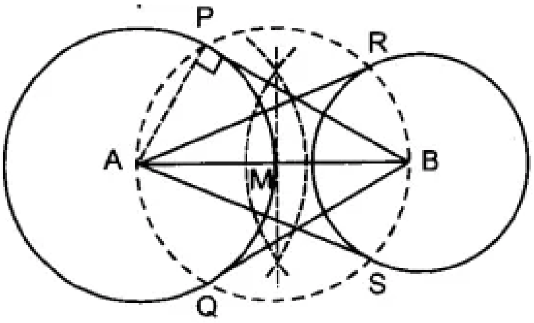
II. AB का लम्बसमद्विभाजक ज्ञात करो। माना AB का मध्य बिन्दु M है।

III. केन्द्र M और त्रिज्या = MA या MB लेकर एक वृत्त खींचो जो केन्द्र A वाले वृत्त को P और Q पर काटे, तथा केन्द्र B वाले वृत्त को R और S पर काटे।

IV. BP और BQ को मिलाओ। इस प्रकार, BP तथा BQ केन्द्र A वाले वृत्त पर B से अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ है।

V. अब, RA और SA को मिलाओ।

इस प्रकार, केन्द्र B वाले वृत्त पर A से स्पर्श रेखाएँ RA तथा SA हैं।



सत्यापनः A और P को मिलाने पर,

$\angle APB = 90°$

$BP \perp AP$

परन्तु AP, केन्द्र A वाले वृत्त की त्रिज्या है।

केन्द्र A वाले वृत्त पर AP एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, BQ भी केन्द्र A वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा है। केन्द्र B वाले वृत्त पर भी उक्त प्रकार से AR और AS स्पर्श रेखाएँ हैं।

माना ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें AB = 6 cm, BC cm तथा angle =B = 90° है | B से AC पर BD लंब है | बिन्दुओं B,C,D से होकर जाने वाला एक वृत्त खींचा गया है | A से इस वृत्त प[पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए |

हलः रचना के पद

I. AB = 6 सेमी, BC = 8 सेमी तथा $\angle B = 90°$ मापों से ΔABC की रचना करो।

II. $BD \perp AC$ खींचो।

III. B, C और D से होकर एक वृत्त खींचो।

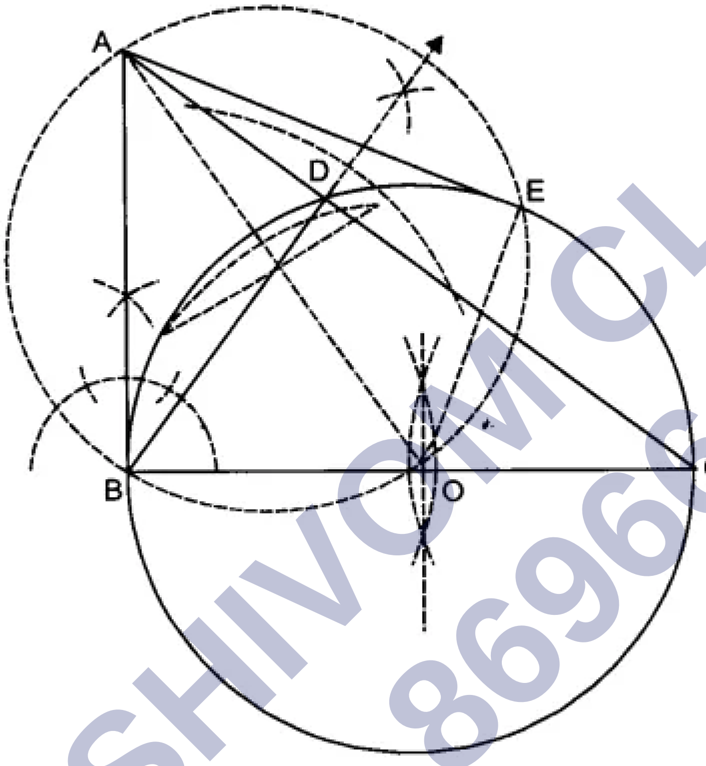
IV. AO को मिलाओ।

V. AO को M पर समद्विभाजित करो।

VI. केन्द्र M और त्रिज्या MA लेकर एक वृत्त खींचो जो दिये गये वृत्त को B और E पर काटता है।

VII. AB और AE को मिलाओ।

इस प्रकार बिन्दु A से दिए गये वृत्त पर AB और AE स्पर्श रेखाएँ हैं।



सत्यापनः OE को मिलाने पर,

$\angle AEO = 90°$ [अर्धवृत्त में बनी कोण]

$AE \perp OE$

परन्तु OE, दिए गये वृत्त की एक त्रिज्या है।

AE वृत्त की एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, AB भी दिए गये वृत्त की एक स्पर्श रेखा है।

किसी चूड़ी की सहायता से एक वृत्त खींचिए | वृत्त के बाहर एक बिन्दुओं लीजिए | इस बबिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए |

हल: रचना के पद

I. चूड़ी की सहायता से दिए गये वृत्त की रचना करो।

II. दिए गये वृत्त में दो असमान्तर जीवाएँ PQ और RS खींचो।

III. P और RS के लम्बसमद्विभाजक खींचो जो परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करे। इस प्रकार बिन्दु O दिए गये वृत्त का केन्द्र है।

IV. दिए गये वृत्त के बाहर एक बिन्दु P लो।

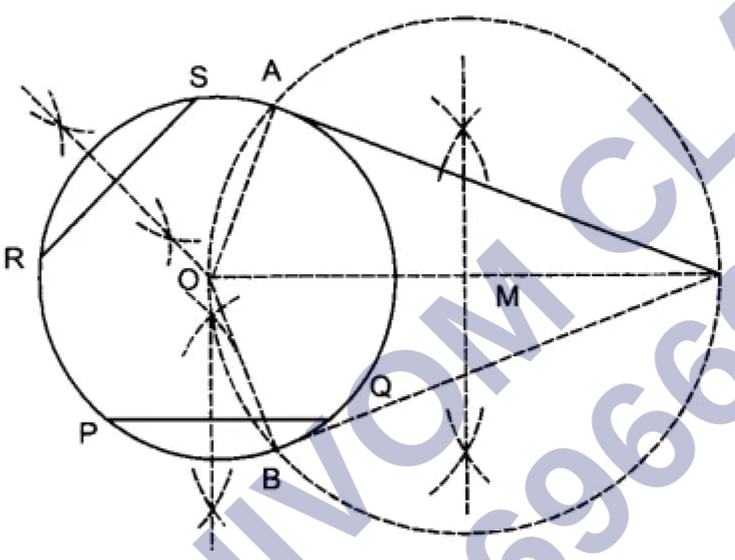
V. OP को मिलाओ।

VI. OP का मध्य बिन्दु M अंकित करो।

VII. केन्द्र M और त्रिज्या-OM से एक वृत्त खींचो, जो दिए गये वृत्त को A और B पर काटे।।

VIII. PA और PB को मिलाओ।

इस प्रकार PA और PB स्पर्श रेखाएँ हैं।



सत्यापन: OA और OB को मिलाने पर,

$\angle OAP = 90°, \angle OBP = 90°$ [अर्धवृत्त में बने कोण]

$PA \perp OA$ तथा $PB \perp OB$

PA, दिए गये वृत्त पर एक स्पर्श रेखा है तथा PB, दिए गये वृत्त पर दूसरी स्पर्श रेखा है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 11.1 (पृष्ठ संख्या 242)

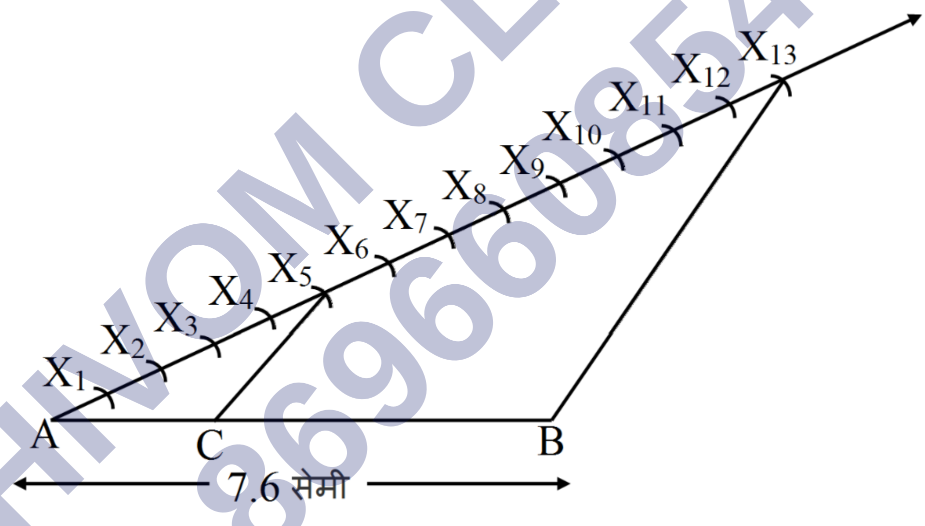
प्रश्न 1 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

7.6 सेमी लंबा एक रेखाखंड खींचिए और इसे 5 : 8 अनुपात में विभाजित कीजिए। दोनों भागों को मापिए।

उत्तर-

रचना के पद

i. एक रेखाखंड AB = 7.6 सेमी खींचो।
ii. एक किरण AX खींचो जो AB के साथ एक न्यून कोण बनाए।
iii. किरण AX पर (8 + 5) = 13 समान खंड काटो और उन्हें X_1, X_2, X_3, X_4, ..., X_{13} से अंकित करो।
iv. X_{13} को B से मिलाओ।
v. X_5 से $X_6C \parallel X_{13}B$ खींचो जो AB को C पर मिले।



इस प्रकार बिन्दु C रेखाखंड AB को 5 : 8 अनुपात में विभाजित करता है।

दोनों रेखाखंडों को मापने पर, हमें प्राप्त होता है AC = 4.7 सेमी., BC = 2.9 सेमी

सत्यापन △ABX13 और △ACX5 में हमें प्राप्त होता है।

$C_5 || B_{13}$

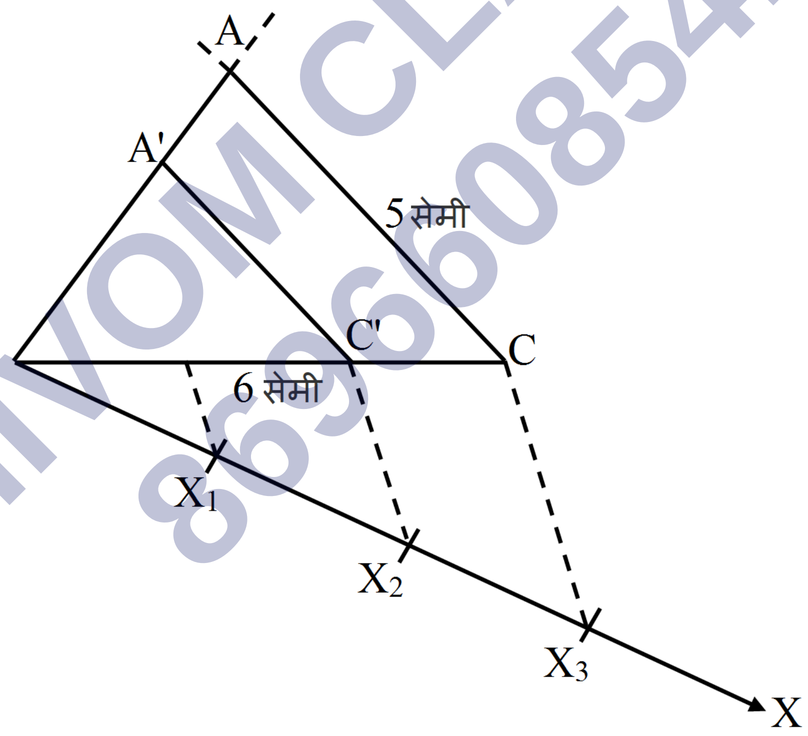
$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{A_5}{X_5X_{13}} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow AC : CB = 5 : 8$$

प्रश्न 2 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

4 सेमी 5 सेमी और 6 सेमी भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{2}{3}$ गुनी हों।

उत्तर-



रचना के पद

i. एक △ABC की रचना इस प्रकार करो कि BC = 6 सेमी, AC = 5 सेमी और AB = 4 सेमी है।
ii. एक किरण BX इस प्रकार खींचो की ∠CBX एक न्यून कोण हो।

iii. BX पर तीन बिन्दु X_1, X_2, और X_3 इस प्रकार अंकित करो कि $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3$

iv. X_3 और C को मिलाओ।

v. X_2 से एक रेखा X_3C के समान्तर खींचो जो BC को C पर काटे।

vi. C से एक रेखा CA के समान्तर खींचो जो BA को A' पर मिले।

इस प्रकार अभिष्ठ त्रिभुज ABC' है।

सत्यापनः रचना से हमें प्राप्त होता है किः

$$X_3C || X_3C$$

$$\Rightarrow \frac{BX_2}{X_2X_3} = \frac{BC'}{C'C}$$

परन्तु $\Rightarrow \frac{BX_2}{X_2X_3} = \frac{2}{1} = \frac{BC'}{C'C} = \frac{2}{1}$

$$\Rightarrow \frac{C'C}{BC'} = \frac{1}{2}$$

दोनों और 1 जोड़ने पर

$$\frac{C'C}{BC} + 1 = \frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{C'C+BC'}{BC'} = \frac{1+2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{3}{2}$$

अब $\triangle BC'A'$ और $\triangle BCA$ में

$$CA || C'A'$$

AA समरूपता से हमें प्राप्त हुआ है।

$$\triangle BC'A' \sim \triangle BCA$$

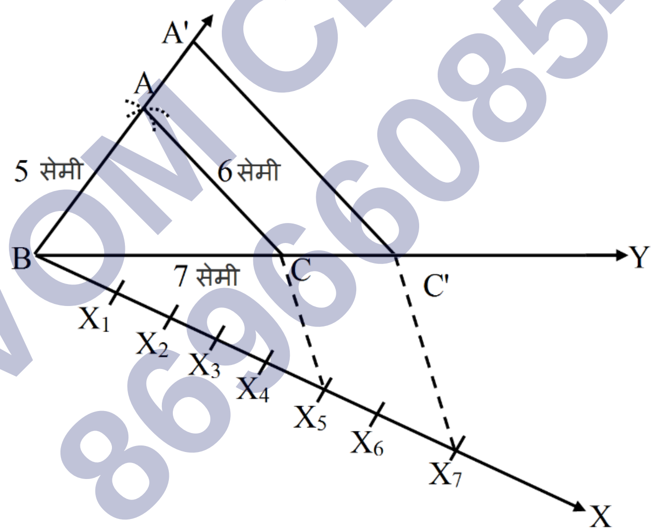
$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC}$$

प्रत्येक $= \frac{2}{3}$

प्रश्न 3 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

5 सेमी, 6 सेमी और 7 सेमी भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{7}{5}$ गुनी हो।

उत्तर-



i. एक त्रिभुज ABC की रचना इस प्रकार कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी., BC = 7 सेमी. और AC = 6 सेमी. है।
ii. एक किरण BX इस प्रकार खींचो की ∠CBX एक न्यून कोण हो।
iii. BX पर 7 बिन्दु $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots, X_7$ अंकित करो।
iv. X_5 और C को मिलाओ।
v. बिन्दु X_7 से $X_5C \parallel X_7C'$ खींचो जो BC (बढ़ाने पर) को C पर काटे।

vi. C' से CA के समान्तर एक रेखा खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A' पर काटे।

इस प्रकार $\triangle ABC$ अभीष्ट त्रिभुज है।

सत्यापन: रचना से, हमें प्राप्त होता है कि C'A' || CA AA' समरूपता से हमें प्राप्त होता है:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C}{AC} = \frac{BC'}{BC} \text{ तथा } X_7C' || X_5C$$

[रचना द्वारा]

$$\therefore \triangle BX_7C' \sim \triangle BX_5C$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{BX_5}{BX_7}$$

$$\therefore \frac{BX_5}{BX_7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7} = \frac{BC'}{BC} = \frac{7}{5}$$

$$\therefore \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{7}{5}$$

प्रश्न 4 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

आधार 8 सेमी तथा ऊँचाई 4 सेमी के एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ इस समद्विबाहु त्रिभुज की संगत भुजाओं की $1\frac{1}{2}$ गुनी हों।

उत्तर-

रचना के पद

i. BC = 8 सेमी खींचो।

ii. BC का लम्ब समद्विभाजक खींचो जो BC को D पर काटे।

iii. उक्त लम्ब पर एक बिन्दु A इस प्रकार अंकित करो कि DA = 4 सेमी.

iv. AB और AC को मिलाओ। इस प्रकार $\triangle ABC$ वांछित समद्विबाहु A है।

v. अब, एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि $\angle X$ एक न्यून कोण हो।

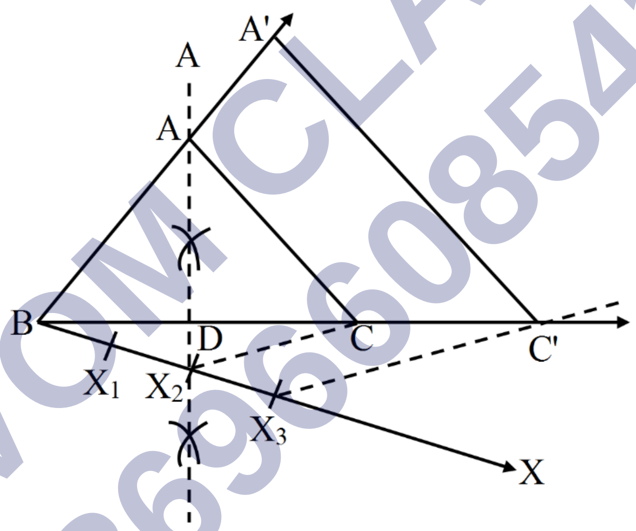
vi. इस प्रकार$_3$, X_2, X_1 पर तीन बिन्दु XBX अंकित करो कि:

$_3X_2 = X_2X_1 = X_1BX$

vii. X_2 और C को मिलाओ।

viii. X_3 से एक रेखा B2C के समान्तर खींचो जो BC (बढ़ाने पर) को C पर काटे।

ix. C' से एक रेखा CA के समान्तर खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A' पर काटे। इस प्रकार $\triangle A'B'C'$ अभीष्ठ त्रिभुज है।



सत्यापन: हमें प्राप्त है की:

$C'A'||CA$ [रचना से]

$\therefore$ AA अमरूपता से $\triangle ABC \sim \triangle A'BC'$

$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C}{AC} = \frac{BC'}{BC'}$$

चूँकि $X_3C'|X_2C$ [रचना से]

$$\Rightarrow \triangle BX_3C' \sim \triangle BX_2C$$

$$\Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{BX_3}{BX_2}$$

$$\text{परन्तु} = \frac{BX_3}{BX_2} = \frac{3}{2}$$

$$= \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{2}$$

$$\text{इस प्रकार } \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{2}$$

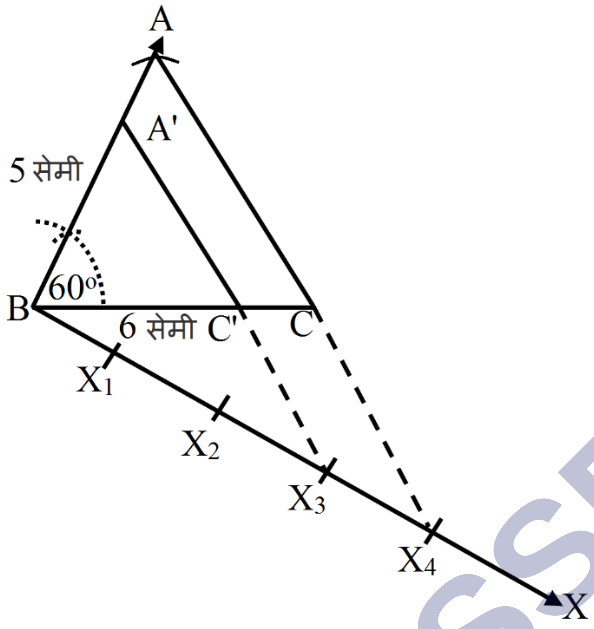
प्रश्न 5 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें BC = 6 सेमी, AB = 5 सेमी और ∠ABC = 60° हो| फिर एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ त्रिभुज △ABC की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ गुनी हों।

उत्तर-

रचना के पद

i. एक त्रिभुज ABC की रचना इस प्रकार करो कि: BC = 6 सेमी, AB = 5 सेमी और ∠ABC = 60°.
ii. एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि ∠CBX एक न्यून कोण हो।
iii. BX पर चार बिन्दु X_1, X_2, X_3 और X_4 इस प्रकार अंकित करो कि $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4$
iv. X_4C को मिलाओ।
v. $X_3C' \parallel X_4C$ खींचो जो कि BC को C’ पर काटे।
vi. एक अन्य रेखा C’ से CA के समान्तर खींचो जो BA को A’ पर काटे।



इस प्रकार $\triangle A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज है।

सत्यापन: रचना से हमें प्राप्त है की:

$X_4C || X_3C'$ [BPTप्रमेय से]

$\therefore \frac{BX_3}{BX_4} = \frac{BC'}{BC}$ परन्तु $\frac{BX_3}{BX_4} = \frac{3}{4}$ [रचना से]

$\Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4} \ldots (i)$

अब हमें प्राप्त है की:

$CA || C'A'$ [रचना से]

$\therefore \triangle BC'A' \sim \triangle BCA$ [AA समरूपता से]

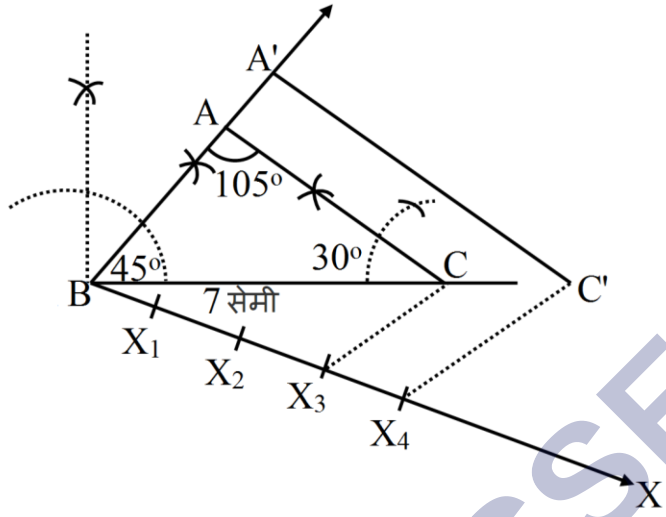
$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$ [(1)से]

प्रश्न 6 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

एक त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें BC = 7cm, ∠B = 45°, ∠A = 150° हो| फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की $\frac{4}{3}$ गुनी हो।

उत्तर-

रचना के पद



i. एक $\triangle ABC$ की रचना इस प्रकार करो कि $BC = 7$ सेमी, $\angle B = 45°$ और $\angle A = 105°$ हो।

ii. एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि $\angle CBX$ एक न्यून कोण हो।

iii. BX पर चार बिन्दु X_1, X_2, X_3 और X_4 इस प्रकार अंकित करो किः $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4$ हो।

iv. X_3 और C को मिलाओ।

v. $X_4C' \parallel X_3C$ इस प्रकार खींचो कि C', BC (बढ़ाने पर) को मिले।

vi. C' से CA के समान्तर एक रेखा खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A' पर मिले।

इस प्रकार $\triangle ABC$ अभीष्ठ त्रिभुज है।

सत्यापनः रचना से हमें प्राप्त है किः

$$C'A' \| CA$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'BC' \text{ [AA समरूपता से]}$$

$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \quad \ldots . (i)$$

पुनः रचना से,

$$X_4C'||X_3C$$

$$\therefore \triangle BX_4C' \sim \triangle BX_3C$$

$$\Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{BX_4}{BX_3}$$

परन्तु $\frac{BX_4}{BX_3} = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{4}{3} \ldots . (ii)$$

(1) और (2) से, हमें प्राप्त है की:

$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{4}{3}$$

प्रश्न 7 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ (कर्ण के अतिरिक्त) 4 सेमी तथा 3 सेमी लंबाई की हों | फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ गुनी हों|

उत्तर-

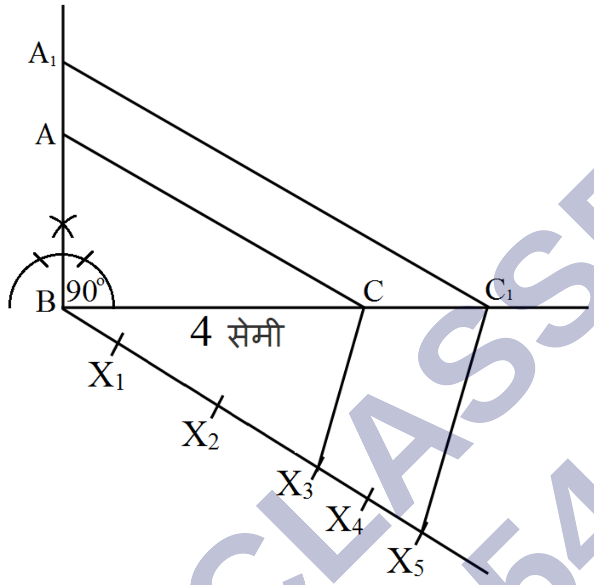
रचना के पद

i. एक △ABC की रचना इस प्रकार करो कि ∠B = 90°, BC = 4 सेमी और BA = 3 सेमी हो।
ii. एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि ∠CBX एक न्यनू कोण हो।
iii. BX पर पाँच बिन्दु X_1, X_2, X_3, X_4 और X_5 इस प्रकार खींचो कि: $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4 = X_4X_5$ हो।
iv. X_3 और C को मिलाओ।

v. X_5 से X_3C के समान्तर एक रेखा खींचो जो BC को बढ़ाने पर C' पर काटे।

vi. एक अन्य रेखा C' से CA के समान्तर खींचो जो BA को बढ़ाने पर A' पर मिले।।

इस प्रकार $\triangle A'B'C'$ अभीष्ठ त्रिभुज है।



सत्यापन: रचना से हमें प्राप्त है किः

$$C'A'||CA$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'BC'$$ [AA समरूपता से]

$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \ldots . (i)$$

पुनः $X_5C'||X_3C$ रचना से,

$$\therefore \triangle BX_5C' \sim \triangle BX_3C$$

$$\Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{BX_5}{BX_3}$$

परन्तु $\frac{BX_5}{BX_3} = \frac{5}{3} \ldots (ii)$

(1) और (2) से, हमें प्राप्त है की:

$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$$

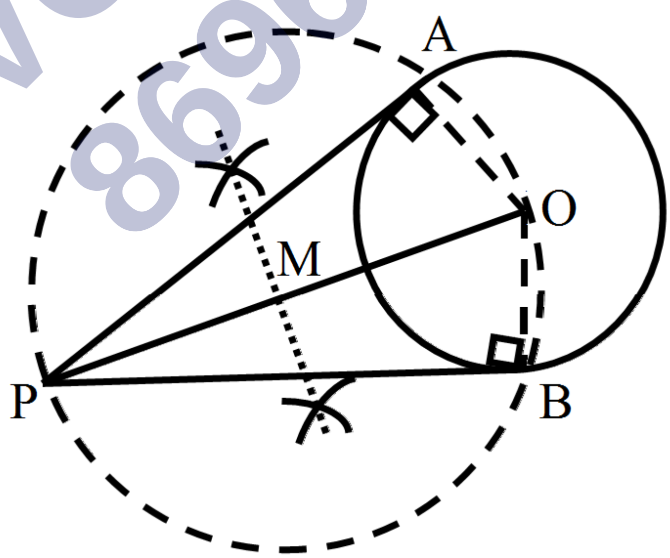
प्रश्नावली 11.2 (पृष्ठ संख्या 244)

प्रश्न 1 6 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। केंद्र से 10 सेमी दूरी स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए और उनकी लंबाइयाँ मापिए।

उत्तर-

रचना के पद:

i. एक बिन्दु O अंकित करो।
ii. केन्द्र O और त्रिज्या 6 सेमी से एक वृत्त खींचो।
iii. केन्द्र से 10 सेमी की दूरी पर एक बिन्दु P अंकित करो।
iv. O और P को मिलाओ।
v. OP को M पर समद्विभाजित करो।
vi. बिन्दु M को केन्द्र लेकर MO या MP के समान त्रिज्या से एक वृत्त खींचो जो दिए गये वृत्त को A और B पर काटे।
vii. PA और PB को मिलाओ। इस प्रकार, PA और PB दो अभिष्ठ स्पर्श रेखाएँ हैं। मापने पर, PA = PB = 9.6 सेमी.



सत्यापनः OA और OB को मिलाओ चूँकि OP एक व्यास है।

$\angle OAP = 90°$; $\angle OBP = 90°$ [अर्धवृत्त में बने कोण]

पुनः OA और OB एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

PA और PB वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ है।

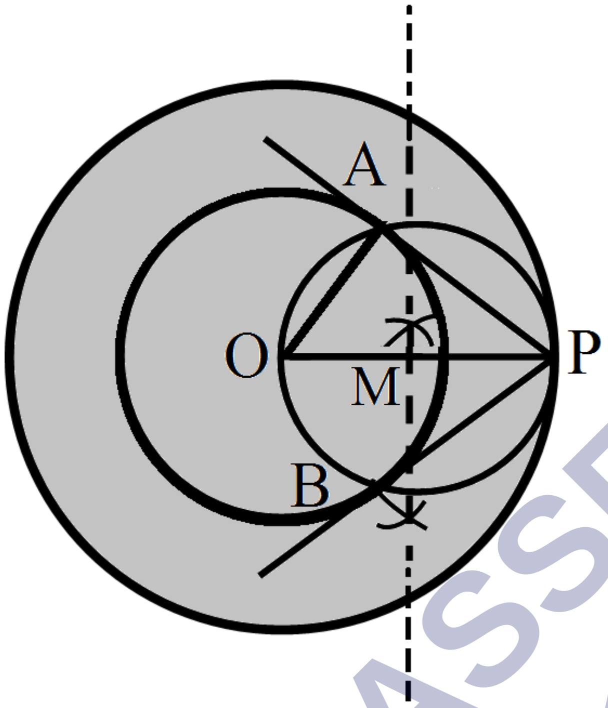
प्रश्न 2 4 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त पर 6 सेमी त्रिज्या के एक सकेंद्रीय वृत्त के किसी बिन्दु से एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए और उसकी लंबाई मापिए। परिकलन से इस माप की जाँच भी कीजिए।

उत्तर-

रचना के पद:

i. 4 सेमी और 6 सेमी त्रिज्या के दो वृत्त एक ही केन्द्र O से खींचो।
ii. बड़े वृत्त पर एक बिन्दु P अंकित करो।
iii. O और P को मिलाओ।
iv. OP का लम्ब समद्विभाजक M ज्ञात करो।
v. Mको केन्द्र और OM या PM के समान त्रिज्या से एक वृत्त खींचो जो छोटे वृत्त को A और B पर काटे।
vi. A और P को मिलाइए।

इस प्रकार PA अभीष्ट स्पर्श रेखा है। मापने पर, PA = 4.5 सेमी



सत्यापन: O और A को मिलाओ

∠PAO = 90° [अर्धवृत्त में बना कोण]

PA⊥OA

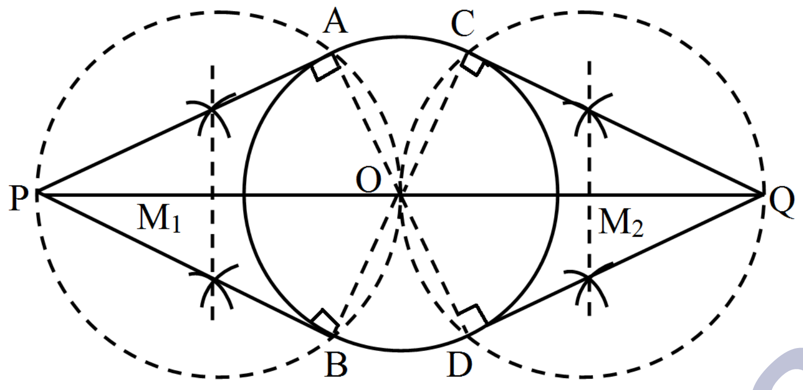
OA, छोटे वृत्त की त्रिज्या है।

छोटे वृत्त पर PA एक स्पर्श रेखा है।

प्रश्न 3 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसके किसी भी बढाए गए व्यास पर केंद्र से 7 सेमी की दूरी पर स्थित दो बिन्दु P और Q लीजिए। इन दोनों बिन्दुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

उत्तर-

रचना के पद:



i. केन्द्र O और त्रिज्या 3 सेमी का एक वृत्त खींचो।

ii. उक्त वृत्त के व्यास को बढ़ाकर, इस पर दो बिन्दु P और 9 इस प्रकार अंकित कीजिए कि: OP = OQ = 7 सेमी

iii. OP और OQ के मध्य बिन्दु क्रमश: M_1 और M_2 ज्ञात कीजिए।

iv. M_1 को केन्द्र व M_1P को त्रिज्या मानकर एक वृत्त खींचो जो वृत्त को A और B पर काटे।

v. PA और PB को मिलाओ। PA और PB अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

vi. अब OQ के मध्य बिन्दु M_2 और M_2O के समान त्रिज्या लेकर वृत्त खींचो जो दिए गये वृत्त को C और D पर काटे

vii. OC और OD को मिलाओ। इस प्रकार OQ और QD अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

सत्यापनः OA को मिलाओ

$$\angle OAP = 90^\circ$$

$$PA \perp OA$$

PA एक स्पर्श रेखा है।

इस प्रकार, $PB \perp OA$

PB एक स्पर्श रेखा है।

अब, OC को मिलाने पर

$$\angle OCQ = 90^\circ$$

$$QC \perp OC$$

QC एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, $QD \perp OC = QD$ एक स्पर्श रेखा है।

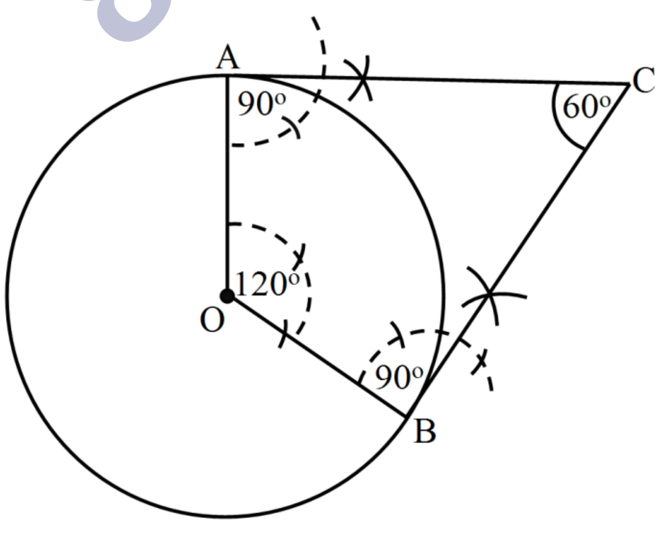
प्रश्न 4 5 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए, जो परस्पर 60° के कोण पर झुकी हों।

उत्तर-

रचना के पद:

i. केन्द्र O और त्रिज्या = 5 सेमी से दिये गये वृत्त की रचना करो।
ii. ∠AOB = 120° बनाओ।
iii. बिन्दु A से OA पर एक लम्ब खींचो।
iv. B से एक लम्ब OB पर खींचो।
v. उक्त लम्बों को C पर मिलने दो।

इस प्रकार CA तथा CB वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ है, जो परस्पर 60° पर झुकी हुई हैं।



सत्यापनः चतुभुर्ज OACB में, कोण-योग-गुण से

$$120^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ACB = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 300^\circ + \angle ACB = 360^\circ$$

$$\Rightarrow ACB = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$$

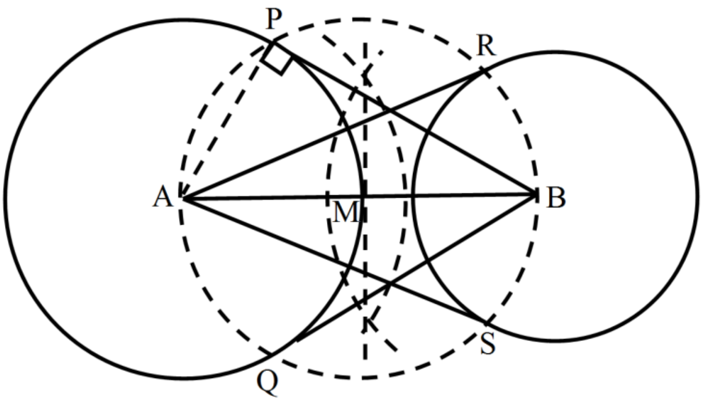
प्रश्न 5 8 सेमी लंबा एक रेखाखंड AB खींचिए। A को केंद्र मान कर 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त तथा B को केंद्र लेकर 3 सेमी त्रिज्या का एक अन्य वृत्त खींचिए। प्रत्येक वृत्त पर दूसरे वृत्त के केंद्र से स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।

उत्तर-

रचना के पद:

i. A और B को मिलाओ।
ii. AB का लम्बसमद्विभाजक ज्ञात करो। माना AB का मध्य बिन्दु M है।
iii. केन्द्र M और त्रिज्या = MA या MB लेकर एक वृत्त खींचो जो केन्द्र A वाले वृत्त को P और Q पर काटे, तथा केन्द्र B वाले वृत्त को R और S पर काटे।
iv. BP और BQ को मिलाओ। इस प्रकार, BP तथा BQ केन्द्र A वाले वृत्त पर B से अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ है।
v. अब, RA और SA को मिलाओ।

इस प्रकार, केन्द्र B वाले वृत्त पर A से स्पर्श रेखाएँ RA तथा SA हैं।



सत्यापन: A और P को मिलाने पर,

$\angle APB = 90°$

$BP \perp AP$

परन्तु AP, केन्द्र A वाले वृत्त की त्रिज्या है।

केन्द्र A वाले वृत्त पर AP एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, BQ भी केन्द्र A वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा है। केन्द्र B वाले वृत्त पर भी उक्त प्रकार से AR और AS स्पर्श रेखाएँ हैं।

प्रश्न 6 माना ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें AB = 6 सेमी, BC सेमी तथा $\angle B = 90°$ है। B से AC पर BD लंब है। बिन्दुओं B, C, D से होकर जाने वाला एक वृत्त खींचा गया है। A से इस वृत्त पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

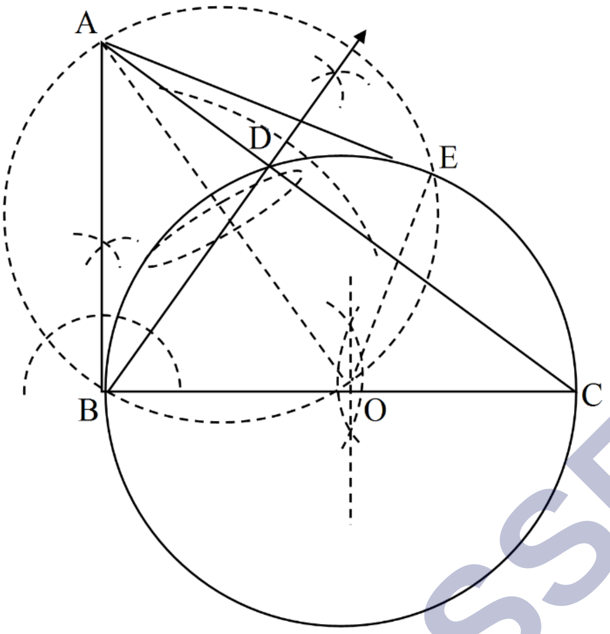
उत्तर-

रचना के पद:

AB = 6 सेमी, BC = 8 सेमी तथा $\angle B = 90°$ मापों से $\triangle ABC$ की रचना करो।

i. $BD \perp AC$ खींचो।
ii. B, C और D से होकर एक वृत्त खींचो।
iii. AO को मिलाओ।
iv. AO को M पर समद्विभाजित करो।
v. केन्द्र M और त्रिज्या MA लेकर एक वृत्त खींचो जो दिये गये वृत्त को B और E पर काटता है।
vi. AB और AE को मिलाओ।

इस प्रकार बिन्दु A से दिए गये वृत्त पर AB और AE स्पर्श रेखाएँ हैं।



सत्यापनः OE को मिलाने पर,

$\angle AEO = 90°$ [अर्धवृत्त में बनी कोण]

$AE \perp OE$

परन्तु OE, दिए गये वृत्त की एक त्रिज्या है।

AE वृत्त की एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, AB भी दिए गये वृत्त की एक स्पर्श रेखा है।

प्रश्न 7 किसी चूड़ी की सहायता से एक वृत्त खींचिए। वृत्त के बाहर एक बिन्दु लीजिए। इस बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।

उत्तर-

रचना के पद:

i. चूड़ी की सहायता से दिए गये वृत्त की रचना करो।
ii. दिए गये वृत्त में दो असमान्तर जीवाएँ PQ और RS खींचो।

iii. P और RS के लम्बसमद्विभाजक खींचो जो परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करे। इस प्रकार बिन्दु O दिए गये वृत्त का केन्द्र है।

iv. दिए गये वृत्त के बाहर एक बिन्दु P लो।

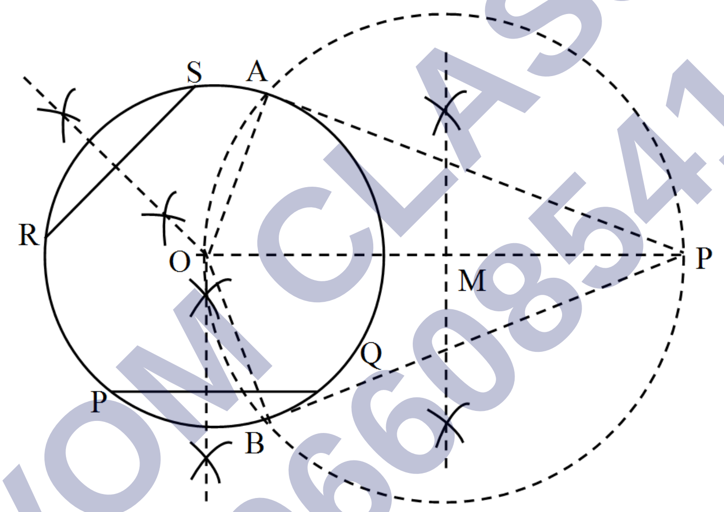
v. OP को मिलाओ।

vi. OP का मध्य बिन्दु M अंकित करो।

vii. केन्द्र M और त्रिज्या-OM से एक वृत्त खींचो, जो दिए गये वृत्त को A और B पर काटे।।

viii. PA और PB को मिलाओ।

इस प्रकार PA और PB स्पर्श रेखाएँ हैं।



सत्यापनः OA और OB को मिलाने पर,

$\angle OAP = 90°$, $\angle OBP = 90°$ [अर्धवृत्त में बने कोण]

$PA \perp OA$ तथा $PB \perp OB$

PA, दिए गये वृत्त पर एक स्पर्श रेखा है तथा PB, दिए गये वृत्त पर दूसरी स्पर्श रेखा है।