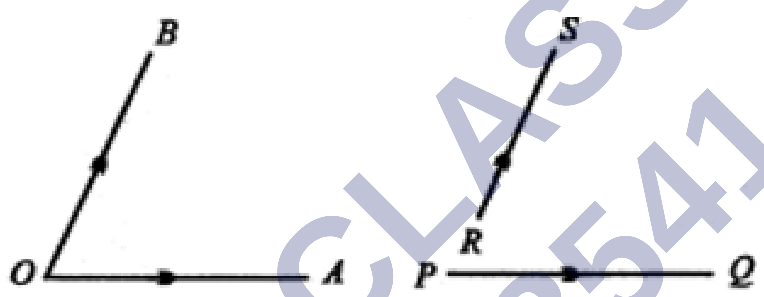
गणित

अध्याय-11: त्रि-विमीय ज्यामिति

दो सरल रेखाओं के बीच का कोण (Angle between Two Straight Lines)

1. दो प्रतिच्छेदी (समतलीय) रेखाओं (Intersecting or Coplanar lines) के बीच का कोण उनके बीच का न्यूनकोण होता है।
2. दो असमतलीय (विषम) रेखाओं (Non-intersecting or skew lines) के बीच का कोण अन्तरिक्ष में स्थित किसी बिन्दु से उन दोनों रेखाओं के समान्तर खींची गई रेखाओं के बीच का कोण होता है।



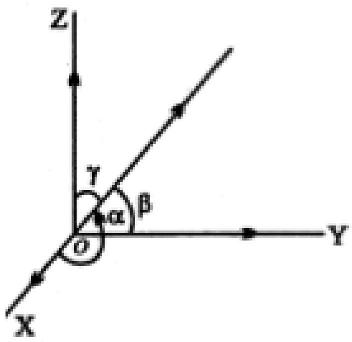
इस प्रकार यदि PQ तथा Rs विषम रेखाएँ हैं तब PQ तथा Rs के बीच का कोण AOB है, जहाँ OA तथा OBO से क्रमश: PQ तथा RS के समान्तर खींची गई हैं।

एक दी हुई रेखा तथा निर्देशांक अक्षों के बीच का कोण (Angle between a Given Line and Co-ordinate Axes)

एक दी हुई रेखा तथा निर्देशांक अक्षों के बीच का कोण वह कोण है जो मूलबिन्दु से दी हुई रेखा के समान्तर खींची गई रेखा निर्देशांक अक्षों से बनाती है।

किसी रेखा की दिक् कोज्याएँ (Direction Cosines of a Line)

यदि कोई सरल रेखा दैंशांक अक्षों की धनात्मक शाओं से क्रमशः कोण α, तथा y बनाती है तो cosα, as B, CosY उस सरल रेखा ने दिक् कोज्याएँ (Direction osines or D.C.)



कहलाती चित्र । ये साधारणतः क्रमशः 1, m, 1 से निरूपित की जाती हैं। इस प्रकार, I = cos a,m = cos pun = cos y.

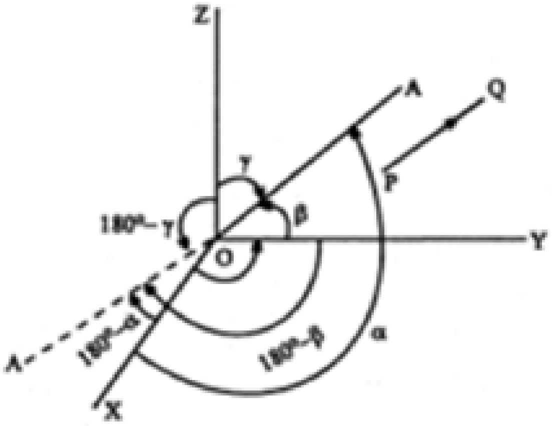
निर्देशांक अक्षों की दिक् कोज्याएँ (Direction Cosines of Co-ordinate Axes)

चूँकि X-अक्ष; X-अक्ष, Y-अक्ष तथा Z-अक्ष से क्रमशः 0°, 90° तथा 90° का कोण बनाती है। अतः X-अक्ष की दिक् कोज्याएँ cos 0°,cos 90°,cos 90° अर्थात् 1,0,0 हुई।

इसी प्रकार Y-अक्ष तथा Z-अक्ष की दिक् कोज्याएँ क्रमशः 0, 1,0 तथा 0,0, 1 हैं।

यदि सरल रेखा PQ की दिक् कोज्याएँ I, m, n हैं तो सरल रेखा OP की दिक् कोज्याएँ -I, -m, -n होती हैं। (If theDirection Cosines of a Line PQ are I, m and n, then the Direction Cosines of line QP are-h-mand-n)

माना सरल रेखा PQ की दिक् कोज्याएँ I, m, n हैं। माना PQ, निर्देशांक अक्षों से क्रमशः कोण a, B,Y बनाती है। तब, I = cosa,m = cosß,n = cos



O से PQ के समान्तर तथा P से ए की दिशा में सरल रेखा OA खींचो। तबOA भी अक्षों से α, β कोण बनाती है।

अब QP अक्षों से जो कोण बनाती है, वे वही हैं जो A0 (आगे बढ़ाने पर) अर्थात् OA' अक्षों से बनाती है।

स्पष्टत: $< A'Ox \ = \ 180° - \alpha,$

$< A'OY = 180° - \beta$

तथा $< A'OZ \ = \ 180° - \gamma$

अत: QP की दिक्-कोज्याएँ हुईं :

$cos(180° - \alpha), cos(180° - \beta)$ तथा cos(180° -1) अर्थात् - $cos\ \alpha, -cos\beta, -cos\gamma$

अर्थात् -1,-m,-n.

दो समान्तर रेखाओं की दिक् कोज्याएँ समान होती हैं यदि उनकी अभिदिशा एक-सी है (The Direction Cosines of the Two Parallel Lines are the Same (or equal) if their Sense of Direction is the Same)

दो समान्तर रेखाओं की दिक्-कोज्याओं के चिन्ह विपरीत होते हैं यदि उनकी अभिक्रिया विपरीत (The Direction Cosines of the Two Parallel Lines are the Opposite if their Sense of Direction is Opposite)

यदि $cos\alpha, cos\beta$ और $cos\gamma$ किसी रेखा की दिक्कोज्याएँ हों, तो $\cos^2 \alpha + \cos^2\beta + \cos 2\ \gamma = 1$ (If $\cos\alpha$, $\cos\beta$, and $\cos\gamma$ are the Direction Cosines of Line, then $\cos^2 \alpha + \cos^2\beta + \cos 2\ \gamma = 1$

दी हुई रेखा के समान्तर OP रेखा खींचो तथा OP को विकर्ण मानकर आयताकार ठोस (घनाभ) की रचना करो।

अत: OP की दिक् कोज्याएँ दी हुई रेखा की दिक्-कोज्याओं के बराबर होंगी।

$$\because \cos\alpha = \frac{OA}{OP}, \cos\beta = \frac{OB}{OP} \text{ तथा } \cos\gamma = \frac{OC}{OP}$$

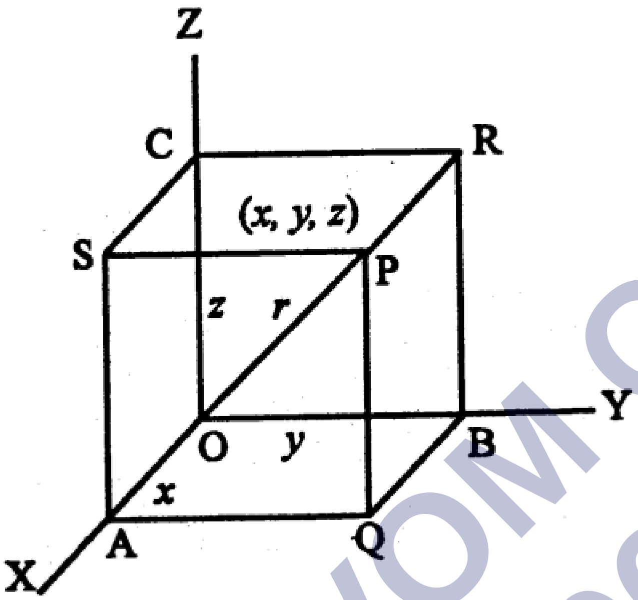
$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{OA^2}{OP^2} + \frac{OB^2}{OP^2} + \frac{OC^2}{OP^2}$$

$$= \frac{OA^2 + OB^2 + OC^2}{OP^2} \quad ...(1)$$

$$\because \quad OA^2 + OB^2 = OA^2 + AQ^2 = OQ^2$$

$$\therefore \quad OA^2 + OB^2 + OC^2 = OQ^2 + OC^2$$

$$= OQ^2 + QP^2 = OP^2$$



अत: समी. (1) में मान रखने पर,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{OP^2}{OP^2} = 1$$

या $$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

यदि सरल रेखा OP की दिक् कोज्याएँ l, m n हों तो P के निर्देशांक (lr,m, nr) होते हैं, जहाँ OP = r(If the Direction Cosines of Line OP are l, m and n, then the Coordinates op are (lr, mr, nr), where OP = r)

OP को विकर्ण लेकर घनाभ AQPSOBRC खींचो। तब,

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{r} \text{ या } x = r\cos\alpha \text{ या } x = lr$$

$$\cos\beta = \frac{OB}{OP} = \frac{y}{r} \text{ या } y = r\cos\beta \text{ या } y = mr$$

$$\cos\gamma = \frac{OC}{OP} = \frac{z}{r} \text{ या } z = r\cos\gamma \text{ या } z = nr$$

अत: P के निर्देशांक (lr, mr, nr) होंगे।

किसी रेखा के दिक् अनुपात (Direction Ratio of a Line)

वे राशियाँ जो किसी रेखा की दिक्-कोज्याओं के समानुपाती होती हैं, दिक् अनुपात (Direction Ratio or Proportional Direction Cosines) कहलाती हैं।

माना किसी रेखा की दिक् कोज्याएँ l, m, n हैं तथा दिशाअनुपात a. b. c हैं। तब परिभाषा से,

$$l \propto a, m \propto b, n \propto c$$

$$\Rightarrow \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad [\because l^2+m^2+n^2=1]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sum a^2}}, \quad [\text{जहाँ } \sum a^2 = a^2+b^2+c^2]$$

$$\text{अत: } l = \frac{a}{\sqrt{\sum a^2}}, m = \frac{b}{\sqrt{\sum a^2}}, n = \frac{c}{\sqrt{\sum a^2}}.$$

अत: यदि किसी रेखा के दिशा अनुपात a, b, c ज्ञात हों, तो उस रेखा की दिक् कोज्याएँ ज्ञात करने के लिए a, b, c में से प्रत्येक में $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ से भाग देते हैं।

किसी रेखा की दिक् कोज्याएँ अद्वितीय होती हैं (The Direction Cosines of a Line are

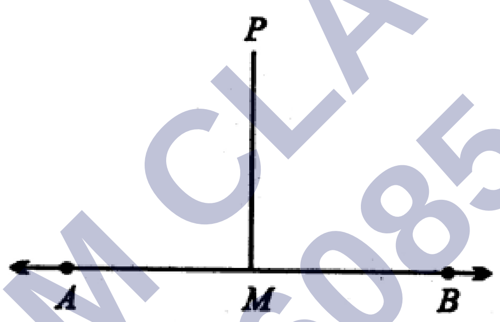
किसी रेखा के दिशा-अनुपात अद्वितीय नहीं होते हैं। यदि a, b, c किसी रेखा के दिशा - अनुपात हैं, तो ka, kb, kc$(k \neq 0)$ भी उस रेखा के दिशा-अनुपात होंगे (The Direction Ratios of a

Line are not Unique. If a, b and c are the Direction Ratios of a Line, then ka, kb, kc($k \neq 0$) will be the Direction Ratios of thatLine)

यदि a, b, c किसी रेखा के दिशा - अनुपात हैं तो $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$ (If a band care the Direction Ratios of a Line, then $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$)

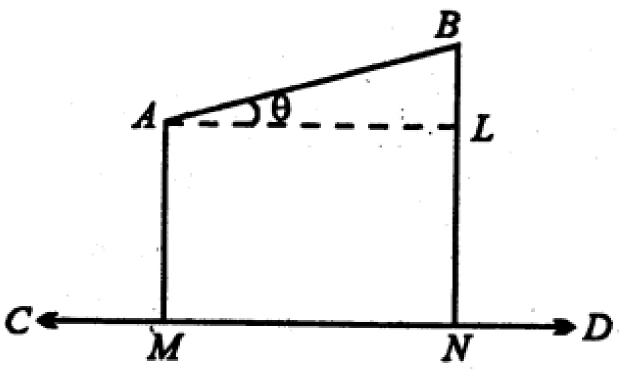
किसी बिन्दु का एक रेखा पर प्रक्षेप(Pro - jection of a Point on the Line)

किसी दिये हुए बिन्दु P से रेखा AB पर PM लम्ब डालो। तब पाद M को बिन्दु P का रेखा AB पर प्रक्षेप कहते हैं।



किसी रेखाखण्ड का अन्य रेखा पर प्रक्षेप (Projection of a Segment of a Line on Another Line)

AB दिया गया रेखाखण्ड तथा CD एक रेखा है।4 से CD पर AM तथा B से CD पर EN लम्ब डालो। तब MN को रेखाखण्ड AB का रेखा CD पर प्रक्षेप कहते हैं।



A से BN पर AL लम्ब डालो। स्पष्टत: AL, MN के समान्तर तथा बराबर है। यदि AB और CD के बीच का कोण हो, तो

$$\angle BAL = \theta$$

ΔBAL में $\cos\theta = \dfrac{AL}{AB}$

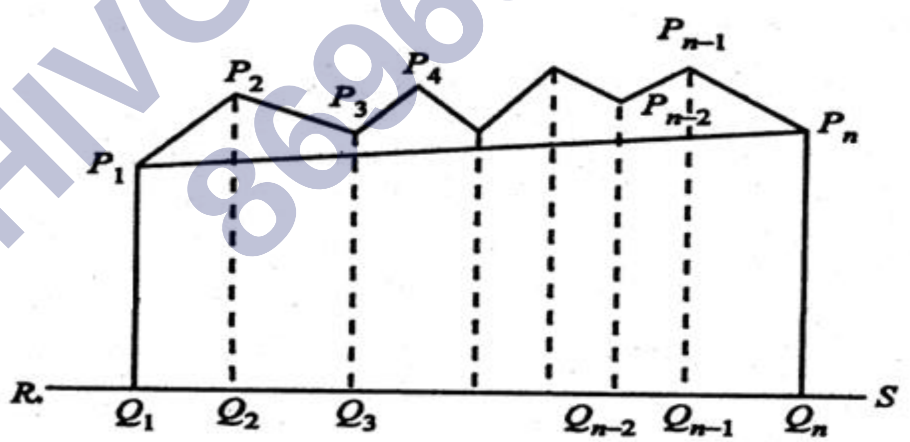
या $\quad AL = AB\cos\theta$

या $\quad MN = AB\cos\theta$

अत: AB का रेखा CD पर प्रक्षेप $AB\cos\theta$ है।

यदि $P_1, P_2, P_3.....,P_n$ आकाश में n बिन्दु हों तो P_1P_n का किसी रेखा पर प्रक्षेप, उसी रेखा पर $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4,....P_{n-1}P_n$ के प्रक्षेपों के योगफल के बराबर होता है (If $P_1p_2, p_2P_3, P_3P_4,....,P_{n-1}, P_n$ be the n Segments of a Broken Continuous Line. Then, the Sum of the Projections of All the Above Segments on a Line is Equal to the Projection of the Line P_1P_n on that line)

प्रमाण (Proof) : मानलो बिन्दु $P_1, P_2, P_3....,P_n$ के किसी दी हुई रेखा पर प्रक्षेप $Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n$



अत: दी हुई रेखा पर

P_1P_2 का प्रक्षेप $= Q_1Q_2$

P_2P_3 का प्रक्षेप $= Q_2Q_3$

P_3P_4 का प्रक्षेप $= Q_3Q_4$

$P_{n-1}P_n$ का प्रक्षेप $= Q_{n-1}Q_n$

$\therefore$ P_1P_2 का प्रक्षेप $+$ P_2P_3 का प्रक्षेप $+$ P_3P_4 का प्रक्षेप $+$
$+$ $P_{n-1}P_n$ का प्रक्षेप

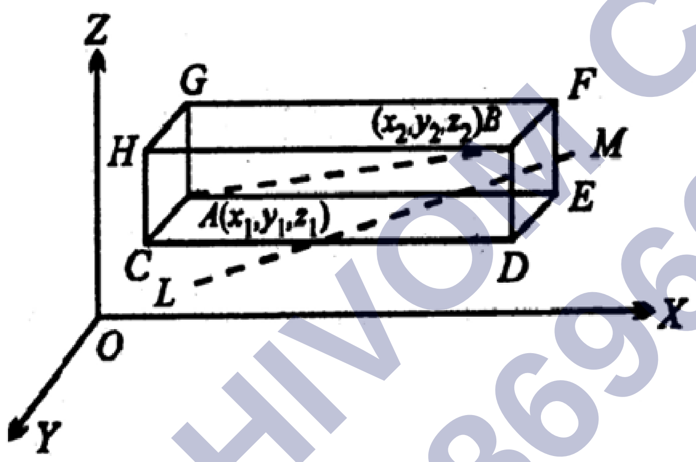
$= Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + Q_3Q_4 + \ldots + Q_{n-1}Q_n = Q_1Q_n$

$= P_1P_n$ का दी हुई रेखा पर प्रक्षेप।

दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का एक दी हुई रेखा पर प्रक्षेप (Projection of Line Joining Two Points on a Given Line)

माना दी हुई रेखा LM की दिक् कोज्याएँ l, m और हैं (अर्थात् रेखा X-अक्ष से α Y-अक्ष से β तथा Z-अक्ष से γ कोण बनाती है) तथा बिन्दु A(x_1,y_1, z_1) और B(x_2,y_2,z_2) हैं।

बिन्दु A से होते हुए XY, ZY तथा ZX समतलों के समानान्तर क्रमशः ACDE, ACHG और AEFG समतलों को खींचा।



इसी प्रकार बिन्दु B से होते हुए XY, ZY तथा ZX - समतलों के समानान्तर क्रमशः GFBH, BDEF और HCDB समतलों को खींचा।

$\because \quad AE = x_2 - x_1,$

$ED = y_2 - y_1$

और $\quad BD = z_2 - z_1$

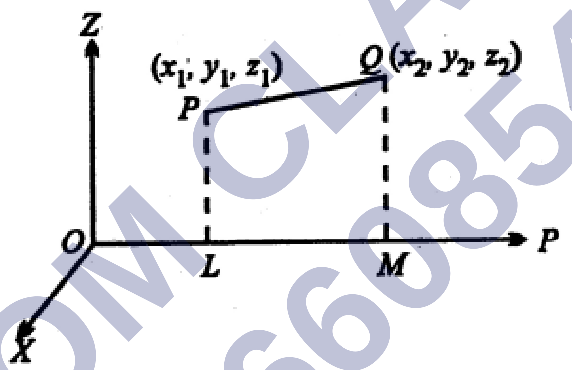
रेखा AB का प्रक्षेप रेखा LM पर

$= AE$ का LM पर प्रक्षेप + ED का LM पर प्रक्षेप + DB का LM पर प्रक्षेप

$$= (x_2 - x_1)l + (y_2 - y_1)m + (z_2 - z_1)n.$$

दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात (Direction Ratios of a Line Joining two Points)

मान लो $P(x_1, y_1, Z_1)$ और $Q(X_2, y_2, Z_2)$ दो बिन्दु हैं। PQ को मिलाओ।



P और Q से Y-अक्ष पर क्रमशः PL और QM लम्ब डालो। तब PQ का Y-अक्ष पर

प्रक्षेप = LM

= OM - OL

$= Y_2 - Y_1$

परन्तु, PQ का Y-अक्ष पर प्रक्षेप = PQ cos β जहाँ β PQ और Y-अक्ष के बीच का कोण है।

$$\therefore \quad PQ\cos\beta = y_2 - y_1$$

$$\Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{PQ}$$

इसी प्रकार PQ का x-अक्ष पर प्रक्षेप

$$PQ\cos\alpha = x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{PQ}$$

PO इसी तरह PQ का Z-अक्ष पर प्रक्षेप

इसी तरह PQ का Z-अक्ष पर प्रक्षेप

$$PQ\cos\gamma = z_2 - z_1$$

$$\therefore \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

अतः PQ की दिक्-कोज्याएँ $\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}$ तथा $\frac{z_2 - z_1}{PQ}$ हैं।

स्पष्टतः PQ के दिक् अनुपात $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ हैं।

उदाहरण 1. यदि P और Q के निर्देशांक क्रमशः (1, 2, 3) तथा (-1, 2, 1) हैं तो PQ के दिक् अनुपात तथा दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $x_2 - x_1 = -1 - 1 = -2$

$$y_2 - y_1 = 2 - 2 = 0$$

$$z_2 - z_1 = 1 - 3 = -2$$

$$\therefore r = PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

हम जानते हैं कि बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ होते हैं इसलिए PQ के दिक् अनुपात $-2, 0, -2$ हैं।

पुनः हम जानते हैं कि बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाली रेखा की दिक् कोज्याएँ $\frac{x_2 - x_1}{r}, \frac{y_2 - y_1}{r}, \frac{z_2 - z_1}{r}$ होती हैं।

इसलिए PQ की दिक् कोज्याएँ होंगी :

$$\frac{-2}{\sqrt{8}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{8}}.$$

उदाहरण 2. यदि एक रेखा के दिक् अनुपात-18, 12, 14 इसकी दिक् कोसाइन क्या है?

हल : दिया गया है:

$$x_2 - x_1 = -18, y_2 - y_1 = 12, z_2 - z_1 = -4$$

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-18)^2 + (12)^2 + (-4)^2}$$

$$r = \sqrt{484} = 22$$

रेखा की दिक् कोज्याएँ $\dfrac{x_2 - x_1}{r}, \dfrac{y_2 - y_1}{r}, \dfrac{z_2 - z_1}{r}$

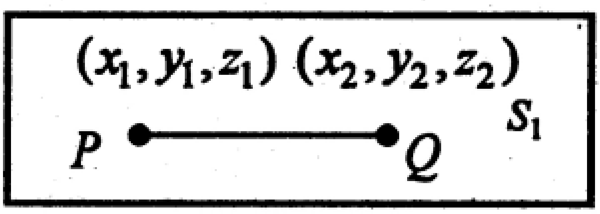
अर्थात् $\dfrac{-18}{22}, \dfrac{12}{22}, \dfrac{-4}{22}$

अर्थात् $\dfrac{-9}{11}, \dfrac{6}{11}, \dfrac{-2}{11}$.

समतल की संकल्पना छात्रों को समतल के बारे में चपटी समान सतह के रूप में बोधात्मक कल्पना होती है। सामान्यतः एक समतल की लम्बाई और चौड़ाई दोनों ही हैं परन्तु मोटाई नहीं होती ऐसा छात्र समझते हैं परन्तु समतल एक ऐसी सतह है जिस पर दो बिन्दु लेकर उसको मिलाने वाली रेखा पूर्णतः उस पर स्थित हो। अतः समतल की परिभाषा निम्नानुसार समझेंगे -

समतल की परिभाषा (Definition of Plane)

एक समतल एक सतह है जिसमें यदि कोई दो बिन्दु लिए जायें तो उनको मिलाने वाली रेखा उस सतह में पूर्णतः स्थित होती है।



चित्र में दर्शाया गया पृष्ठ (सतह) S_1 समतल है क्योंकि इसके किन्हीं दो बिन्दुओं P और Q को मिलाने से रेखाखण्ड PQ के सभी बिन्दु सतह S_1 पर स्थित होंगे अर्थात् रेखा PQ सतह पर पूर्णतः स्थित है।

चित्र 2.

चित्र (2) में दर्शाया गया पृष्ठ (सतह) S_2 किन्हीं दो बिन्दुओं A और B को मिलाने वाला रेखाखण्ड AB सतह S_2 पर पूर्णतः स्थित नहीं हैं अर्थात् AB रेखाखण्ड का प्रत्येक बिन्दु सतह S_2 पर स्थित नहीं है।

समतल का व्यापक समीकरण (General Equation of Plane)

माना X,Y, Z में एकघात का व्यापक समीकरण है -

$Ax + By + CZ + D = 0$ ...(1)

माना $P(X_1, Y_1, Z_1)$ तथा $Q(X_2, Y_2, Z_2)$ समी. (1) से

निरूपित बिन्दुपथ पर कोई दो बिन्दु हैं। तब,

$Ax_1 + By_1 + CZ_1 + D = 0$ ...(2)

तथा $Ax_2 + By_2 + CZ_2 + D = 0$ ...(3)

समी. (2) को n से तथा समी. (3) को m से गुणा करके जोड़ने पर,

$A(mxy_2 + nm_1) + B(my_2 + ny_1) + C(mz_2 + nz_1) + D (m + n) = 0$

या $A\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)+B\left(\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

$$+C\left(\frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)+D=0$$

जो यह सिद्ध करता है कि बिन्दु

$\frac{Mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} + \frac{nz_2 + nz_1}{m\ +n}$

M और n के प्रत्येक मान के लिए समीकरण (1) पर स्थित है।

स्पष्ट है कि m और n के विभिन्न मानों के लिए हमें PQ पर विभिन्न बिन्दु प्राप्त होंगे जो समीकरण (1) पर स्थित होंगे।

इस प्रकार, यदि P और समीकरण (1) पर स्थित है तो रेखा PQ पर स्थित प्रत्येक बिन्दु भी समीकरण (1) पर स्थित है अर्थात् रेखा PQ समीकरण (1) में पूर्णतः स्थित है।

अत: समीकरण (1) के द्वारा निरूपित सतह समतल है।

अत: X, Y, Z में एकघातीय व्यापक समीकरण एक समतल निरूपित करता है।

समतल के समीकरण का अन्त:खण्ड स्वरूप (Intercept Form of Equation of a Plane)

यदि कोई तल निर्देशाक्षों से क्रमशः a, b और c अन्त: खण्ड काटता है तो उस समतल का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ होता है। इसे अन्त:खण्ड स्वरूप कहते हैं। माना समतल का व्यापक समीकरण है।

Ax + By +Cx + D = 0 ...(1)

चूँकि यह समतल निर्देशाक्षों पर a, b और अन्त: खण्ड काटता है, अत: एव यह निर्देशाक्षों x-अक्ष, Y-अक्ष और Z-अक्ष को क्रमशः (a, 0, 0), (0, b, 0) तथा (0, 0, 0) पर मिलेगा।

इस प्रकार, A.a + B.0 + c.0 + D = 0 या A = $-\frac{D}{a}$

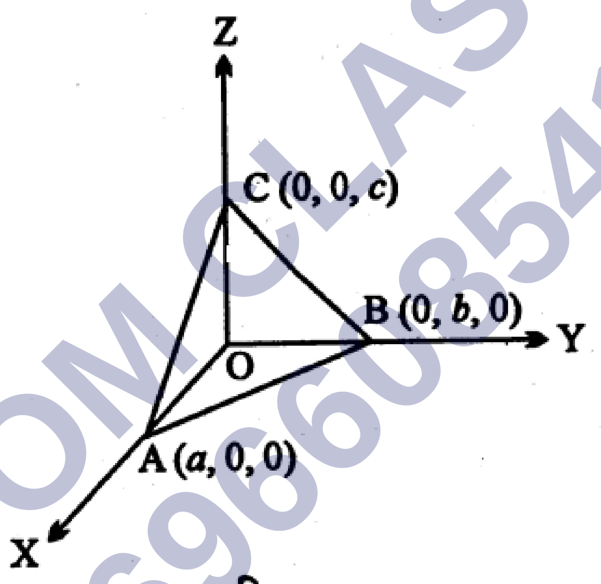
A.0 + B.b + C.0 + D = 0 या B = $-\frac{D}{b}$

A.0 + B.0 + C.c + D = 0 या C = $-\frac{D}{c}$ समी. (1) में A, B और C के मान रखने पर,

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}Z + D = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c} = 1$$



चित्र

यदि समतल Ax + By + Cr + D = 0 मूलबिन्दु से गुजरता है तो D = 0 अतः समतल का समीकरण Ax + By + Cz = 0 होगा।

समतल का व्यापक रूप Ax + By + Cz + D = 0 ...(1)

⇒ Ax + By + Cz = -D

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1 = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

$\therefore a = \frac{-D}{A} \Rightarrow A = \frac{-D}{a}$ ...(2)

यदि समतल (1) x-अक्ष के समांतर है तो $a = \infty$

$\therefore A = \frac{-D}{a}$ समी. (2) से

$$A = \frac{-D}{\infty}$$

समी. (1) में A = 0 रखने पर X-अक्ष के समान्तर समतल का समीकरण By + Cz + D = 0, [:40] इसी तरह, Y-अक्ष के समान्तर तल का व्यापक समीकरण है-

Ax + Cz + D = 0 तथा Z-अक्ष के समान्तर तल का व्यापक समीकरण है-

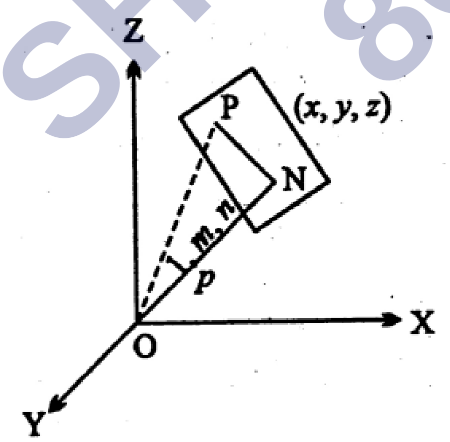
Ax + By + D = 0

समतल के समीकरण का अभिलम्ब स्वरूप (Normal Form of Equation of a Plane)

यदि किसी तल पर मूलबिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई p तथा लम्ब की दिक्-कोज्याएँ l, m, n हों तो उस तल का समीकरण है-

lx + my + n = p यह समतल के समीकरण का अभिलम्ब स्वरूप है।

माना दिये हुए समतल पर मूलबिन्दु O से ON लम्ब डाला गया है तथा ON = P यदि ON की दिक्-कोज्याएँ l, m, n हों तो N के निर्देशांक (pl, pm, pn) होंगे।



माना समतल पर कोई बिन्दु P(x, y, z) है। तब NP के दिक्-अनुपात x – pl, y - pm, z - pn होंगे। चूँकि ON समतल पर लम्ब है,

$\therefore$ ON $\perp$ PN (क्योंकि रेखा PN पूर्ण रूप से समतल में स्थित है।)

$$\therefore l(x - pl) + m(y - pm) + n(z - pn) = 0.$$

$\Rightarrow lx - pl^2 + my - pm^2 + nz - pn^2 = 0$

$\Rightarrow lx + my + nz = (pl^2 + m^2 + n^2).$

$\Rightarrow lx + my + nz = p, [\therefore l^2 + m^2 + n^2 = 1]$

बिन्दु P समतल पर कहीं पर भी हो, उपर्युक्त समीकरण सत्य है। अतः समीकरण (1) समतल को व्यक्त करता है।

समतल के व्यापक समीकरण को अभिलम्ब स्वरूप में परिवर्तित करना (To Change the Normal Form of General Equation of a Plane)

माना समतल का व्यापक समीकरण है Ax + By + Cz + D = 0 समतल के समीकरण में D को दक्षिण पक्ष में धन चिन्ह के साथ रखने पर,

-Ax - By-Cz = D ...(1)

माना इस समतल का अभिलम्ब स्वरूप है

lx + my + nz = p ...(2) यदि समी. (1) और (2) एक ही समतल को व्यक्त करें तो

$$\frac{-l}{A} = \frac{-m}{B} = \frac{-n}{C} = \frac{p}{D} = \frac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$[\because l^2 + m^2 + n^2 = 1]$$

$$\therefore \quad \boxed{l = \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

$$\boxed{m = \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

$$\boxed{n = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

$$\boxed{p = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

समी. (2) में मान रखने पर,

$$-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x - \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y$$
$$-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad ...(3)$$

स्पष्ट है कि मूलबिन्दु से समतल (1) पर डाले गये लम्ब की लम्बाई

$$= \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

चूँकि $\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$ अत: एव समतल के अभिलम्ब की दिक् - कोज्याएँ A, B, C अर्थात् x, y, z के गुणांकों के समानुपाती है।

एक बिन्दु (x1, y1, z_1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण [Equation of Plane Passing Through a Point (x1, Y1, z_1)]

माना समतल का व्यापक समीकरण है Ax + By + Cz +D = 0 ...(1)

यदि यह समतल (x_1, y_1, z_1) से गुजरता है तो इसके निर्देशांक समी. (1) को सन्तुष्ट करेंगे।

$\therefore$ $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ ...(2) समी. (1) में से समी. (2) को घटाने पर,

$A(x - x_1) + B(y - y1) + C(Z - Z_1) = 0$ ...(3)

यही अभीष्ट समतल का समीकरण है।

तीन असंरेखी बिन्दुओं से गुजरने वाले समतल का समीकरण (Equation of Plane Passing Through Three Non-Collinear Points)

माना समतल का व्यापक समीकरण है -

$Ax + By + Cz + D = 0$ ...(1)

यदि यह समतल बिन्दुओं $(X_1, Y_1, Z_1)(X_2, Y_2, Z_2)$ (x_3, Y_3, Z_3) से गुजरे तो

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ ....(2)

$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$ ...(3)

$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$ ...(4)

समी. (1),(2), (3) व (4) की सहायता से A, B, C और D को विलुप्त करने पर,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

यही अभीष्ट समतल का समीकरण है। इस प्रकार समतल के समीकरण के विभिन्न रूप ध्यान रखें: अन्त: खण्ड रूप

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

जहाँ a, b, c समतल द्वारा अक्षों Ox, OY, OZ पर काटे गये अन्तः खण्ड हैं।

सामान्य रूप (व्यापक रूप) $Ax + By + Cz + D = 0$ जहाँ A,B,C समतल पर लम्ब के दिक् अनुपात हैं। अभिलम्ब रूप $lx + my + nz = p$ जहाँ l, m, n समतल पर लम्ब के दिक् कोज्याएँ हैं तथा P समतल पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई है।

किसी बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ गुजरने वाले समतल का सामान्य रूप (व्यापक रूप)

$A(x - x1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, जहाँ A, B, C, समतल पर लम्ब के दिक् - अनुपात हैं।

निर्देशांक्षों समतलों के समीकरण समतल क्रमशः $z = 0$ (0 x y समतल)

$Y = 0$ (0 x z समतल)

X = 0 (0 x z समतल) OX अक्ष का समीकरण y = 0, Z = 0

ox अक्ष का समीकरण Z = 0, x = 0, OZ अक्ष का समीकरण x = 0, y = 0.

उदाहरण = समतल x + 2y – 2z = 9 के द्वारा निर्देशाक्षों पर काटे गये अन्त: खण्ड ज्ञात करो। समतल के अभिलम्ब की दिक्-कोज्याएँ भी ज्ञात करो।

हल: दिये हुए समतल का समीकरण है-

x + 2y - 2z = 9 ....(1) दोनों पक्षों में 9 से भाग देने पर,

$$\frac{x}{9}+\frac{2y}{9}-2z=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{9}+\frac{\frac{y}{9}}{2}+\frac{\frac{z}{-9}}{2}=1$$

अत: अभीष्ट अन्त: खण्ड 9, $\frac{9}{2}$ और $-\frac{9}{2}$ हैं। अभिलम्ब की दिक्-कोज्याएँ

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}},\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}},\frac{-2}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

अर्थात् $\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}$ होंगी।

उदाहरण:- बिन्दु (1 ,-2, 3) से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो उस सरल रेखा पर लम्ब है जिसके दिक्-अनुपात (2, 1, -1) हैं।

हल: हम जानते हैं कि बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से जाने वाले समतल का समीकरण जिसके अभिलम्ब के दिक्-अनुपात a, b, c हैं, निम्न हैं-

$a(x - x_1) + b(y-y_1) + c(z - z_1)$, ...(1)

यहाँ $x_1 = 1$, $y_1 = -2$, z1 = 3 तथा a = 2, b = 1 ,c = -1

अब समी. (1) में उपर्युक्त मान रखने पर, 2(x - 1) +1 (y + 2) +(-1)(z - 3) = 0

⇒ 2x – 2 + y + 2 – z + 3 = 0

$\Rightarrow 2x + y - z + 3 = 0$

यही अभीष्ट समतल का समीकरण है।

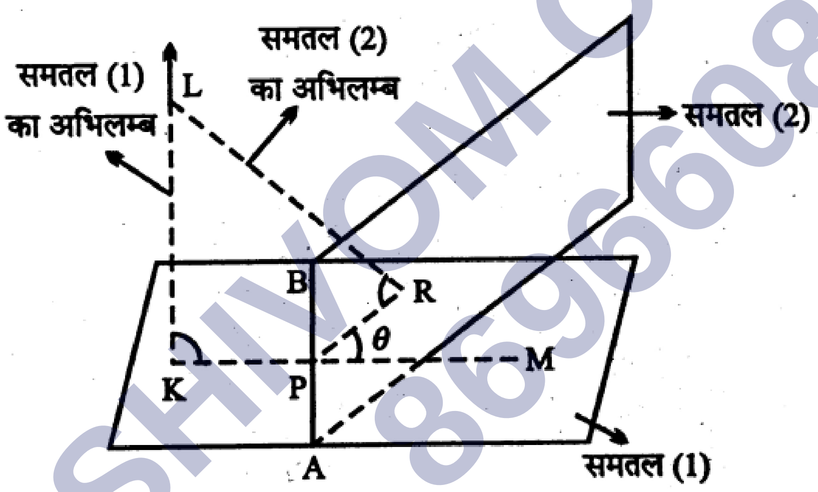
दो समतलों के बीच का कोण (Angle Be tween Two Planes)

दो समतलों के बीच का कोण उनके अभिलम्बों के बीच के कोण के बराबर होता है। माना समतलों के समीकरण ।

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ...(1)

और $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ...(2)

समतल (1) और (2) की प्रतिच्छेदी रेखा AB है। माना AB पर कोई बिन्दु P है, समतल (1) में AB पर PM लम्ब खींचा। इसी प्रकार, समतल (2) में AB पर PR लम्बखींचा। तब <MPR समतल (1) और (2) के बीच का कोण होगा।



स्पष्ट है कि दो समतलों के बीच का कोण उनके अभिलम्बों के बीच के कोण के बराबर होता है। अब समतलों (1) और (2) के अभिलम्बों के दिक्-अनुपात A_1, B_1, C_1 और A_2, B_2, C_2 है। यदि दोनों समतलों के बीच कोण θ हो, तो

$$\boxed{\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$

दोनों समतल लम्बवत् होंगे यदि $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

दोनों समतल समान्तर होंगे यदि $\frac{A1}{A2} = \frac{B1}{B2} = \frac{C1}{C2}$

दिये हुए समतल Ax + By + Cz + D = 0 के समान्तर समतल का समीकरण होगा -

Ax + By + Cz + γ = 0.

जहाँ γ कोई नियतांक है।

उदाहरण:- सिद्ध कीजिए कि समतल x + 2y + 3z = 6 और 3x - 3y + z = 1 परस्पर लम्बवत् हैं।

हल: दिये गये समतलों के समीकरण हैं -

X + 2y + 3z = 6 ...(1) तथा 3x - 3y + z = 1 ...(2) समतल (1) के अभिलम्ब के दिक्-अनुपात 1, 2, 3 हैं। समतल (2) के अभिलम्ब के दिक्-अनुपात 3, -3, 1 हैं।

अब, $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$ =(1)(3) +2(-3) +(3)(1) = 3 – 6 + 3 = 0.

अतः दिये गये समतल (1) और (2) परस्पर लम्बवत् हैं।

उदाहरण:- समतलों 2x – y + z = 6 और x + y + 2z =1 के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल: दिये गये समतलों के समीकरण हैं -

2x – y + z = 6 ...(1) तथा x + y + 2z = 7 ...(2) समतल (1) के अभिलम्ब के दिक्-अनुपात 2, -1, 1 हैं। समतल (2) के अभिलम्ब के दिक् - अनुपात 1, 1, 2 हैं। समतल (1) और (2) के बीच का कोण यदि θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

यहाँ $a_1 = 2, b_1 = -1, c_1 = 1;\ a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = 2.$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{2.1+(-1).1+1.2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \cos 60^\circ$$

$$\therefore \quad \theta = 60^\circ.$$

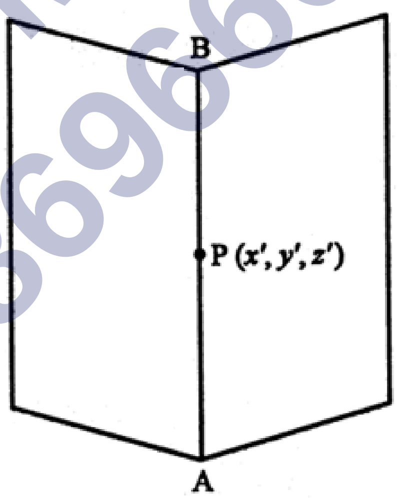
दो समतलों की प्रतिच्छेद रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण (Equation of any Plane Passing Through the Line of Intersection of Two Planes)

माना दो दिये हुए समतलों के समीकरण हैं

$A_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ...1

$A_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ ...(2)

माना समतल (1) और (2) एक सरल रेखा में काटते हैं। माना रेखा AB पर एक बिन्दु P(x', y', z') है।



चूँकि यह बिन्दु प्रतिच्छेद रेखा पर है अतः इसके निर्देशांक समी. (1) और (2) को सन्तुष्ट करेंगे।

$\therefore A_1x + b_1y + c_1z' + d_1 = 0$ ...(3)

$A_2x' + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ ...(4) समी. (4) में 2 से गुणा करके समी. (3) और (4) को जोड़ने पर, $(a_1x' + b_1y + q_2z' + d_2) = 0$

यह समीकरण γ के सभी मानों के लिए सत्य है जबकि प्रतिबन्ध (3) और (4) सन्तुष्ट हो जायें।

अत: (x',y',z') भी निम्न पृष्ठ पर स्थित होगा $(a_1x + b_1y + c_1z + d) + \gamma\ a_2x + b2y + c_2z + d_2) = 0$ ...(5) यह x, y, z में एकघातीय समीकरण है अतएव यह एक समतल को निरूपित करता है। λ के भिन्न-भिन्न मानों के लिए दिये हुए समतलों की प्रतिच्छेद रेखा से जाने वाले भिन्न-भिन्न समतल समी. (5) द्वारा प्राप्त होंगे। अत: समी. (1) और (2) के प्रतिच्छेद रेखा से होकर जाने वाले किसी समतल का समीकरण है|

$$\boxed{(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0}$$

उदाहरण:- उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों x + y + z = 6 और 2x + 3y + 4x + 5 = 0 के कटान से जाता है और बिन्दु (1, 4, 6) से होकर गुजरता है।

हल: दिये गये समतलों के समीकरण हैं x + y + z = 6

x + y + z – 6 = 0, 2x + 3y + 4z + 5 = 0, ...(2) समतलों (1) और (2) की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले किसी समतल का समीकरण होगा $x+y+z-6 + \lambda(2x + 3y + 4z + 5) = 0$ ...(3)

समतल (3) बिन्दु (1, 4, 6) से होकर गुजरता है। इसलिए बिन्दु (1, 4, 6) समी. (3) को सन्तुष्ट करेगा।

1 + 4 + 6 – 6 + (2x1 + 3x4 + 4x6 + 5) = 0

$\Rightarrow 5 + \lambda\ (43) = 0$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{5}{43}$$

अब २ का मान समी. (3) में रखने पर,

$(x + y + 2 - 6) - \frac{5}{43}(2x + 3y + 4z + 5) = 0$

$\Rightarrow 43(x + y + z) - (10x + 15y + 20z)$

-258 - 25 = 0

$\Rightarrow$ 33x + 28y + 23z - 283 = 0

यही समतल का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण:- उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों 3x – y + 2z – 4 = 0 और x + y + z = 0 के प्रतिच्छेदन तथा बिन्दु (2, 2, 1) से होकर जाता है।

हल: दिये गये समतलों के समीकरण हैं

3x – y + 2z – 4 = 0 ...(1) और x + y + z – 2 = 0 ...(2) समतल (1) और (2) के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले समतल का समीकरण होगा -

3x – y + 2z – 4 + λ(x + y + z - 2) = 0 ..(3) समतल (3) बिन्दु (2, 2, 1) से होकर जाता है।

$\therefore$ 3x2 – 2 + 2x1 – 4 + λ (2 + 2 + 1 - 2) = 0

$$\Rightarrow 2 + 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda - \frac{2}{3}$$

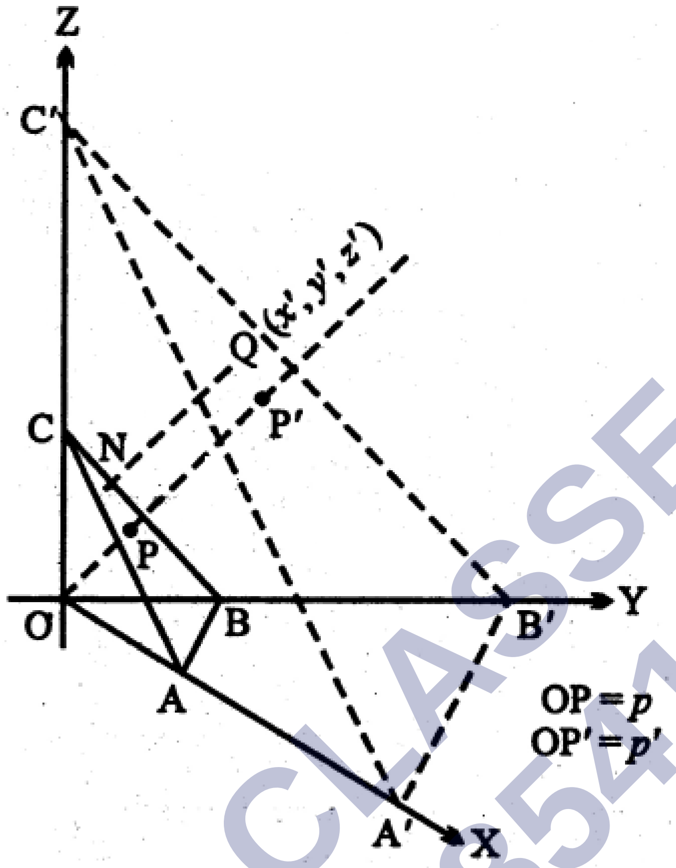
λ का मान समी. (3) में रखने पर अभीष्ट समतल का समीकरण होगा -

$\Rightarrow$ 3x – y + 2z - 4-$\frac{2}{3}$(x + y + z - 2) = 0

दिये हुए बिन्दु की समतल से लम्बवत् दूर (Distance of a Point from a Given Plane)

स्थिति जब समतल का समीकरण अभिलम्ब रूप में होमाना समतल ABC का समीकरण है-

lx + my + nz = p ...(1)



बिन्दु (x,y', z') से समतल (1) की लम्बवत् दूरी ज्ञात करना है।

समतल (1) के समान्तर एक समतल A'B'C' खींचा जिसमें बिन्दु α(x, y, z') हो। अतः समतल A'B'C' का समीकरण होगा -

जहाँ lx + my + nz = p ...(2)

OP' = p' यदि (x, y', z') समतल (2) पर स्थित हो, तो lx' + my' + nz' = p ...(3) बिन्दु Q(x',y,'z) से समतल (1) की लम्बवत् दूरी QN = P'P = OP' - OP = p' -p

⇒ QN = lx' + my' + nz'- p, [समी. (3) से]...(4) स्थिति जब समतलका समीकरण व्यापक रूप में होमाना समतल का समीकरण है-

Ax + By + Cz + D = 0 इसकी तुलना lx + my + nz – p = 0 से करने पर,

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}=\frac{-p}{D}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\therefore l=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, m=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$n=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, -p=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

इनके मान समी. (4) में रखने पर,

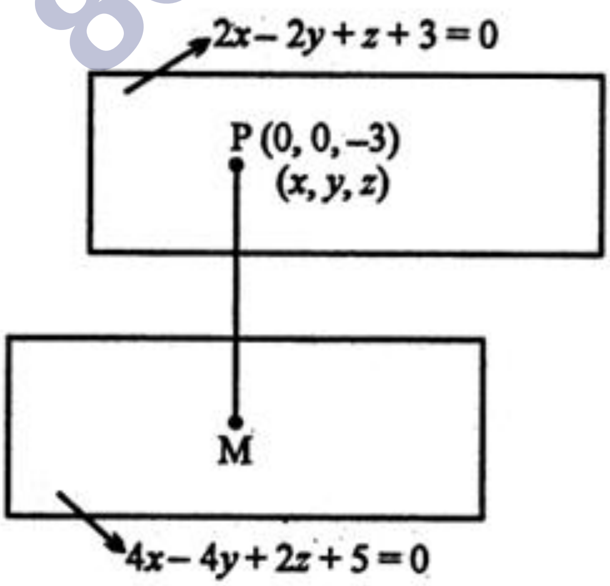
$$QN=\pm\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

यही अभीष्ट लम्बवत् दूरी है।

उदाहरण:- सिद्ध करो कि दो समान्तर समतलों 2x - 2y + z + 3 = 0 तथा 4x - 4y + 2z + 5 = 0 के बीच की दूरी $\frac{1}{6}$ है।

हल: दिये गये दो समान्तर समतलों के समीकरण हैं -

2x - 2y + z + 3 = 0 ...(1) तथा 4x - 4y +2z + 5 = 0 ....(2) समीकरण (1) में x = 0, y = 0 रखने पर z = -3 प्राप्त होता है। अतः समतल (1) पर एक बिन्दु P(0, 0, -3) प्राप्त हुआ



बिन्दु P(0,0,-3) से समतल (2) पर डाले गये लम्ब की लम्बाई ही दोनों समतलों के बीच की दूरी होगी।

$$PM = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

यहाँ a = 4, b = -4, c = 2, d = 5 तथा $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = -3$

∴ दोनों समतलों के बीच की दूरी

$$PM = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

यहाँ $a = 4, b = -4, c = 2, d = 5$

तथा $x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = -3$

∴ दोनों समतलों के बीच की दूरी—

$$PM = \frac{4(0) - 4(0) + 2(-3) + 5}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{-6+5}{\sqrt{16+16+4}} = -\frac{1}{6}$$

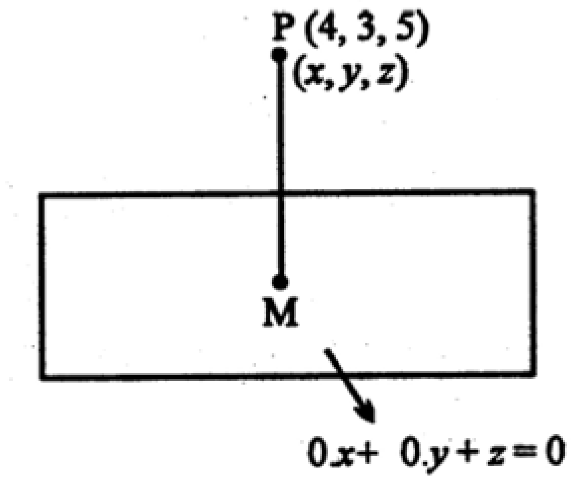
अतः दोनों समतलों के बीच की दूरी $\frac{1}{6}$ होगी।

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण बिन्दु (4, 3, 5) की xy-समतल से लम्बवत् दूरी ज़ात कीजिए।

हल: XY-समतल का समीकरण होगा z = 0 या 0.x + 0.y + z = 0 हम जानते हैं कि बिन्दु (x_1, y_1, z_1) की समतल ax + by + cz + d = 0 की लम्बवत् दूरी होती है

$$PM = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



यहाँ a = 0, b = 0, c = 1, d = 0 तथा x_1 = 4, y_1 = 3 और z_1 = 5

$$\therefore \quad PM = \frac{0.4 + 0.3 + 1.5 + 0}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$\Rightarrow \quad PM = 5.$$

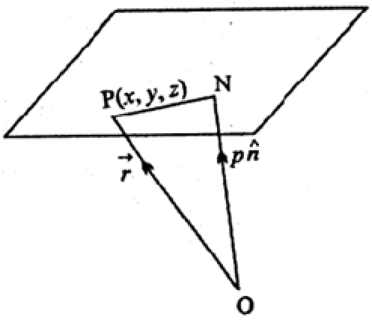
समतल का समीकरण ज्ञात करना (To Find the Equation of a Plane)

अभिलम्ब रूप में समतल का समीकरण ज्ञात करना |

माना 0 मूलबिन्दु है तथा 0 से समतल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई ON = p है। ध्यान रहे कि p सदैव धनात्मक लिया जाता है। यदि ON के अनुदिश मात्रक सदिश n है तो

$\overrightarrow{ON}$ = pn.

माना समतल पर स्थित किसी बिन्दु P (x, y, z) का स्थिति सदिश



चूँकि बिन्दु N और P समतल में स्थित हैं, अत: एव रेखा NP, उस समतल में स्थित है जो ON पर लम्ब है। फलस्वरूप ON, समतल में स्थित प्रत्येक सरल रेखा के लम्बवत् है। इस प्रकार, ON और NP परस्पर लम्ब हैं।

$$\therefore \quad \vec{NP}.\hat{n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{r} - p\hat{n}).\hat{n} = 0 \Rightarrow \vec{r}.\hat{n} - p\hat{n}.\hat{n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}.\hat{n} - p = 0, \qquad [\because \hat{n}.\hat{n} = 1]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}.\hat{n} = p} \qquad ...(1)$$

चूँकि समीकरण (1), समतल में स्थित प्रत्येक बिन्दु के स्थिति सदिश से सन्तुष्ट हो जाता है तथा किसी ऐसे बिन्दु के स्थिति सदिश से सन्तुष्ट नहीं होता है जो समतल पर स्थित नहीं है, अतः यह एक समतल के समीकरण को निरूपित करता है जो समतल के समीकरण का अभिलम्ब रूप कहलाता है। नोट-समतल के समीकरण (1) को निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है

$$\vec{r}.\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = p$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}.\vec{n} = np$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}.\vec{n} = q \qquad ...(2)$$

जहाँ $\quad np = q$

अतः मूलबिन्दु से समतल (1) या (2) पर डाले गये लम्ब की लम्बाई $p = \frac{q}{n}$ होगी।

समीकरण का कार्तीय रूप (Cartesian form) प्राप्त करना

यदि की दिक्-कोज्याएँ l, m, n हों, तो

$$\hat{n} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$$

तथा $\quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

अतः समी. (1) में मान रखने पर,

$$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}).(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = p$$

$$\Rightarrow \qquad lx + my + nz = p \qquad ...(3)$$

यही समतल के समीकरण का कार्तीय रूप है जिसमें l, m, n समतल के अभिलम्ब की दिक्-कोज्याएँ तथा p मूलबिन्दु से समतल पर डाले गये अभिलम्ब की लम्बाई है।

उपप्रमेय - यदि समतल मूलबिन्दु से गुजरता है, तो अतः समी. (1) से, समतल का समीकरण P = 0 होगा।

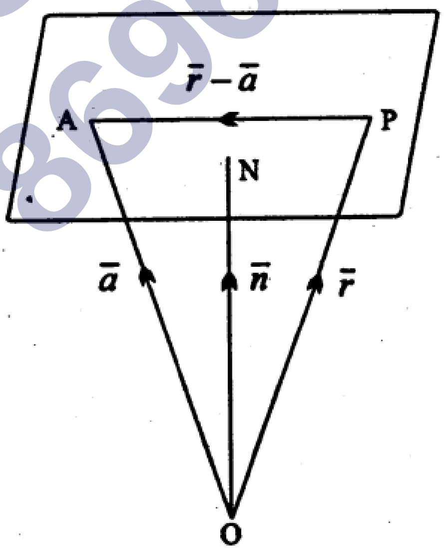
उस समतल का समीकरण ज्ञात करना जो 1 से होकर गुजरता है तथा एक दिए हुए सदिश पर लम्ब है-

माना 0 मूलबिन्दु है। A दिया हुआ बिन्दु तथा समतल पर P कोई अन्य बिन्दु है।

माना $OA = \dot{a}$ और

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$.

स्पष्ट है कि $\overrightarrow{AP}$ उस समतल



स्पष्ट है कि $\overrightarrow{AP}$ उस समतल में स्थित है जिसके लम्बवत् दिया हुआ सदिश है जो $\vec{n}$ से निरूपित है। अतः: $\overrightarrow{AP}.\vec{n}$के लम्बवत् है।

$$\therefore \quad \vec{AP}.\vec{n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(\vec{r}-\vec{a}).\vec{n} = 0}$$

यही समतल का अभीष्ट समीकरण है।

नोट-(1) उपर्युक्त समीकरण को हम निम्न रूप में भी लिख सकते है-

$$\vec{r}.\vec{n} - \vec{a}.\vec{n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}.\vec{n} = \vec{a}.\vec{n}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}.\vec{n} = q, \text{ जहाँ } q = \vec{a}.\vec{n}.$$

अत: इस समतल पर मूलबिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई

$$= \frac{q}{n} = \frac{\vec{a}.\vec{n}}{n}.$$

समी. (1) उस समतल का समीकरण है जो (x) से होकर गुजरता है तथा जिसके अभिलम्ब की दिक्-कोज्याएँ (a,b,c) के समानुपाती हैं।

तीन असमरेख बिन्दुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण (Equation of a Plane Passing through Three Non-collinear Points)

माना A, B, C तीन असमरेख बिन्दु हैं जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ हैं तथा P समतल पर कोई बिन्दु है जिसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ है, तो

$$\vec{AP} = \vec{r} - \vec{a}$$
$$\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$$
$$\vec{CB} = \vec{b} - \vec{c}$$

समतलीय हैं। अतएव इनका अदिश त्रिकगुणन शून्य होगा।

अतः $\quad [\vec{r}-\vec{a}, \vec{a}-\vec{b}, \vec{b}-\vec{c}] = 0$

$\Rightarrow \quad (\vec{r}-\vec{a}).(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{b}-\vec{c}) = 0$

$\Rightarrow \quad (\vec{r}-\vec{a}).(\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}) = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{r}.(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}) = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

यही समतल का अभीष्ट समीकरण है।

नोट-कार्तीय रूप : माना समतल का व्यापक समीकरण है-

$Ax + By + Cz + D = 0$ ...(1)

यदि यह समतल बिन्दुओं $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$ और (x_3,y_3,z_3) से गुजरे तो

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ ...(2)

$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$ ...(3)

$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$ ...(4)

समीकरण (1), (2), (3) व (4) की सहायता से A,B,C और D को विलुप्त करने पर,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots(5)$$

यही अभीष्ट कार्तीय समीकरण है।

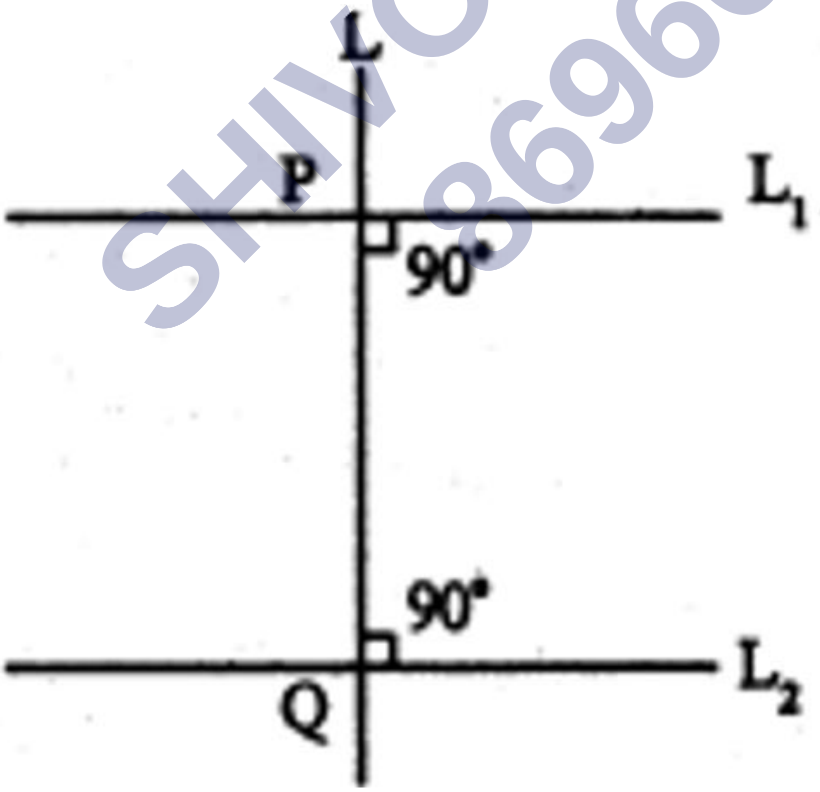
अप्रतिच्छेदी रेखायें (Non-intersecting Lines or Skew Lines)

वे रेखायें जो न तो एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित करती हैं न ही समान्तर हैं, अप्रतिच्छेदी रेखायें कहलाती हैं।

जिन रेखाओं में से होकर समतल न जा सके अर्थात् जो असमतलीय हों, अप्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं।

दो विषमतल रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी (The shortest distance between two skew lines)

दो विषमतल रेखाओं द्वारा उस सरल रेखा पर जो उन दोनों पर लम्ब है, अन्त:खण्डित भाग दोनों विषमतल रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी कहलाती है।



दो अप्रतिच्छेदी रेखाओं पर उभयनिष्ठ लम्ब की लम्बाई न्यूनतम दूरी होती है।

यदि दो सरल रेखायें प्रतिच्छेद करती हैं, तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी स्पष्टतः शून्य होगी। यदि दो सरल रेखायें प्रतिच्छेद नहीं करती हैं तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी की रेखा इन दोनों रेखाओं में से प्रत्येक के लम्बवत् होगी। इस रेखा के इन रेखाओं के बीच कटे भाग की लम्बाई, दोनों रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी कहलाती है।

चित्र में l_1 व l_2 दो अप्रतिच्छेदी रेखायें हैं। रेखा $l_,$ और l_1 में से प्रत्येक के लम्बवत् हैं। रेखाका, रेखाओं व के बीच प्रतिच्छेदित भाग PQ है। तब रेखाखण्ड PQ की लम्बाई, रेखाओं l_1 व l_2 के बीच की न्यूनतम दूरी है।

टीप-दो रेखाएं समतलीय हों और वे प्रतिच्छेदी हों, तो उनकी बीच

की न्यूनतम दूरी 0(शून्य) होगी।

दो अप्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच की न्यूनतमदूरी (The Shortest Distance between Two Non-intersecting Lines)

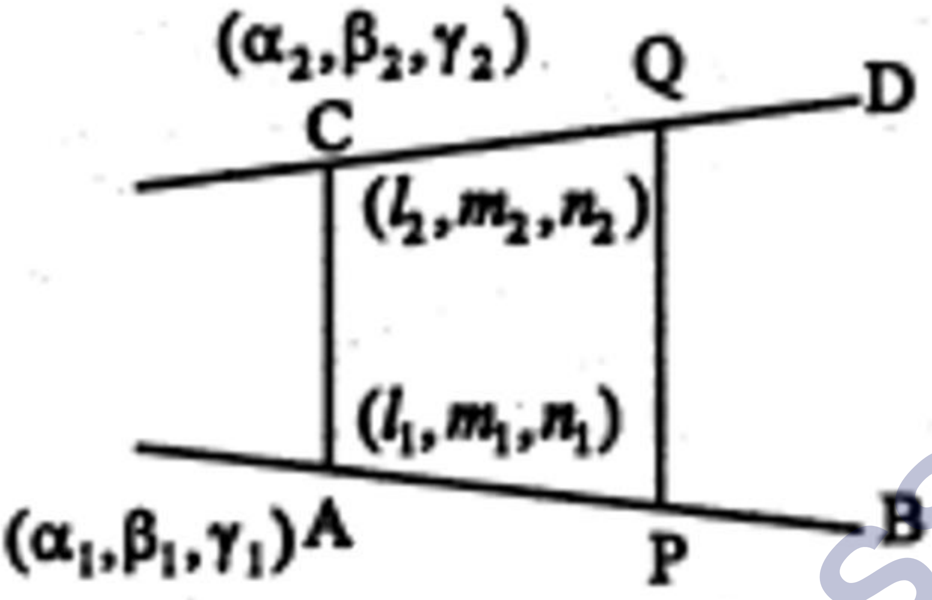
माना दो अप्रतिच्छेदी रेखाओं के कार्तीय रूप में समीकरण

$$\frac{x-\alpha_1}{l_1}=\frac{y-\beta_1}{m_1}=\frac{z-\gamma_1}{n_1}=r_1 \qquad ...(1)$$

तथा $$\frac{x-\alpha_2}{l_2}=\frac{y-\beta_2}{m_2}=\frac{z-\gamma_2}{n_2}=r_2 \qquad ...(2)$$

जहाँ $A(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ एक रेखा पर तथा $C\ (\alpha_{2,}\beta_1,y_2)$ दूसरी रेखा पर स्थित बिन्दु है। l_1,m_1,n_1 तथा l_2,m_2,n_2 क्रमशः दोनों रेखाओं के दिक्-अनुपात हैं।

माना PQ दोनों रेखा पर लम्ब है अर्थात् AB और CD पर तथा l,m,n, PQ रेखा के दिक्-अनुपात हैं। चूंकि PQ रेखाओं AB और CD पर लम्ब है,



$$\therefore \quad ll_1+mm_1+nn_1=0$$
$$ll_2+mm_2+nn_2=0$$

इन समीकरणों को हल करने पर,

$$\frac{l}{m_1n_2-m_2n_1}=\frac{m}{n_1l_2-n_2l_1}=\frac{n}{l_1m_2-l_2m_1}$$

यदि λ,μ,υ रेखा PQ के दिक्-अनुपात हो, तो

$$\lambda=\frac{m_1n_2-m_2n_1}{\sqrt{(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda=\frac{m_1n_2-m_2n_1}{\sqrt{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)^2}}$$

इसी प्रकार,

$$\mu=\frac{n_1l_2-n_2l_1}{\sqrt{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)^2}}$$

तथा $$\upsilon = \frac{l_1 m_2 - l_2 m_1}{\sqrt{\Sigma(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}}$$

सारणिक रूप में, न्यूनतम दूरी

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 & \gamma_1 - \gamma_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

$$\div \sqrt{\Sigma(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}$$

नोट- यदि दी हुई रेखाएं समतलीय हों, तो न्यूनतम दूरी शून्य होगी,अर्थात् $\sum(a_1 - a_1)(m_1 n_2 - m_2 n_1). = 0$

उदाहरण (Examples)

सरल रेखाओं $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ तथा $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : रेखाओं के समीकरण हैं

$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$......(1)

$\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$........(2)

यहाँ $x_1 = 3, y_1 = 8, z_1 = 3, a_1 = 3, b_1 = -1, c_1 = 1$

$x_2 = -3, y_2 = -7, z_2 = 6, a_2 = -3, b_2 = 2, c_2 = 4$

न्यूनतम दूरी

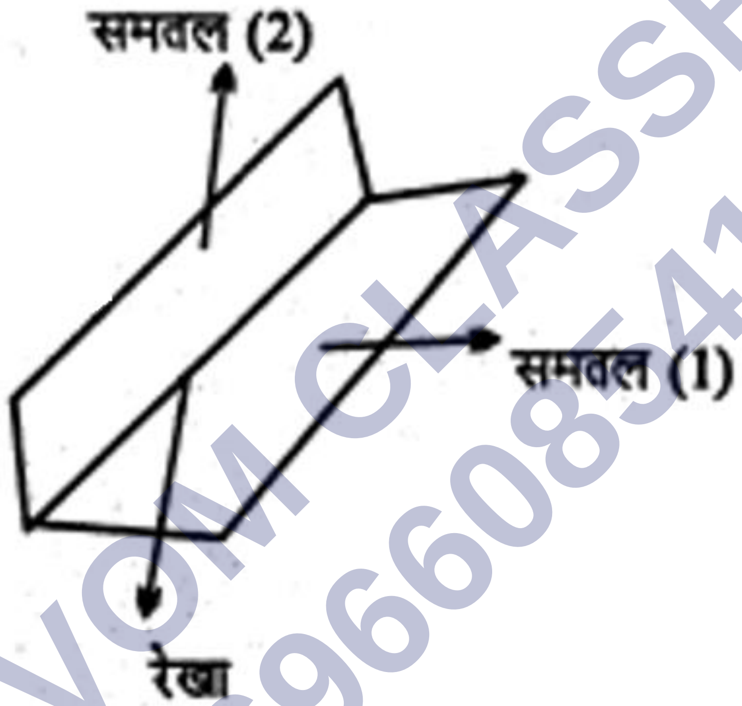
$$\text{S.D.} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 + (a_1 c_2 - c_1 a_2)^2}}$$

रेखा का समीकरण (Equation of Line)

दो समतल यदि वे समान्तर नहीं हैं तो एक रेखा पर प्रतिच्छेद करते हैं। माना कि उन समतलों के समीकरण हैं:

$$a_1x+b_1y+c_1+d_1=0 \quad ...(1)$$

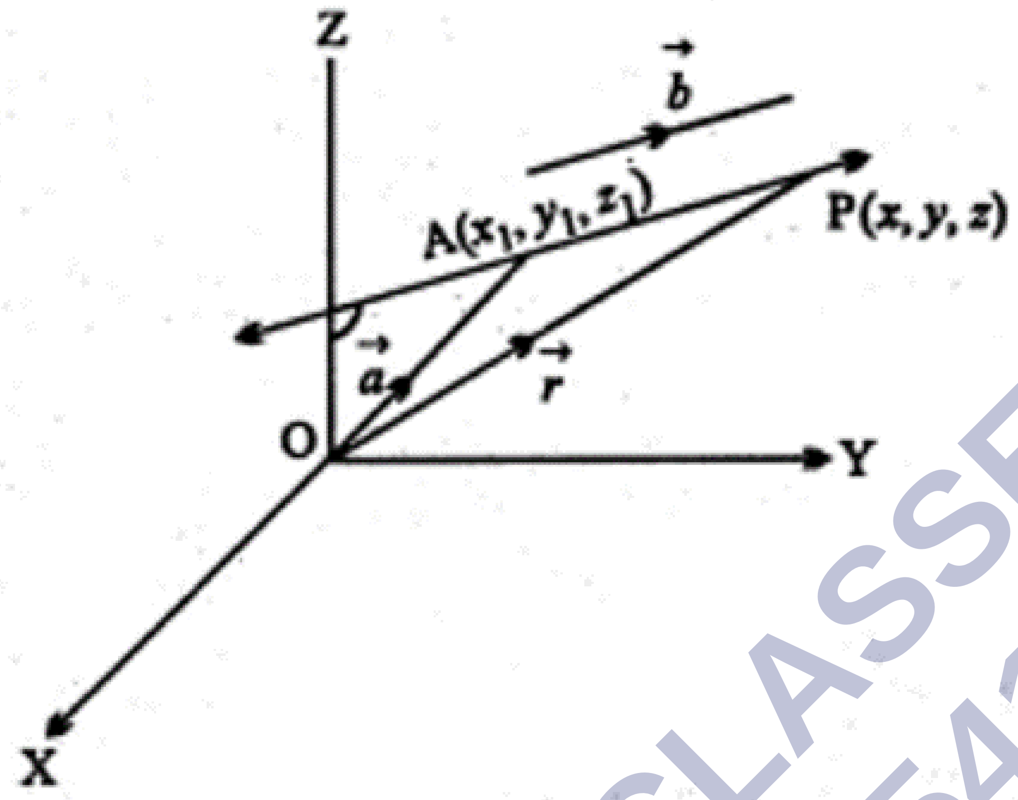
$$a_2x+b_2y+c_2+d_2=0 \quad ...(2)$$



अत: यदि दोनों समतल समान्तर नहीं हैं तो समी. (1) और (2) एक साथ एक रेखा के समीकरण को निरूपित करते हैं।

एक सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना (To Find the Equation of a Line)

(i) उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जो एक दिये हुए बिन्दु A से गुजरती है तथा एक दिए हुए सदिश $\vec{b}$ के समान्तर है।



माना कि दिए हुए बिन्दु A का स्थिति सदिश $\vec{a}$ है तथा उससे गुजरने वाली रेखा पर स्थित किसी स्वेच्छ बिन्दु P का स्थिति

सदिश $\vec{r}$ है। तब, चूंकि

$$\overrightarrow{AP} \parallel \vec{b}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AP} = t\vec{b},$$

जहाँ t एक प्राचल है।

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t\vec{b} \Rightarrow \vec{r} - \vec{a} = t\vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}} \quad ...(1)$$

के भिन्न-भिन्न मानों के लिए रेखा पर बिन्दु P की भिन्नभिन्न स्थितियाँ प्राप्त होती हैं। अतः समी. (1) सरल रेखा का सदिश समीकरण है।

नोट-सदिश $\vec{b}$ के समान्तर और मूलबिन्दु से होकर जाने वाली रेखा

का सदिश समीकरण $\vec{r} = t\vec{b}$ होगा।

रेखा का कार्तीय रूप में समीकरण प्राप्त करना-माना कि दिये हुए A बिन्दु के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1)तथा इससे होकर जाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात a, b,c हैं। तब,

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

$$\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

$$\therefore \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

समी. (1) में मान रखने पर,

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}) + t(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})$$

$$= (x_1 + ta)\hat{i} + (y_1 + tb)\hat{j} + (z_1 + tc)\hat{k}$$

$\therefore$ दोनों पक्षों में $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ के गुणांकों को बराबर रखने पर,

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + ta \\ y &= y_1 + tb \\ z &= z_1 + tc \end{aligned}\right\} \quad \ldots(2)$$

अतः समी. (2) से t को विलुप्त करने पर,

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = t \quad \ldots(3)$$

यही अभीष्ट समीकरण है।

समी. (3) से स्पष्ट है कि रेखा (3) पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $(x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc)$ होंगे।

नोट-यदि कोई रेखा मूलबिन्दु (0, 0,0) से होकर गुजरे तथा

$\vec{b} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$ के समान्तर हो, तो उस रेखा का समीकरण होगा।

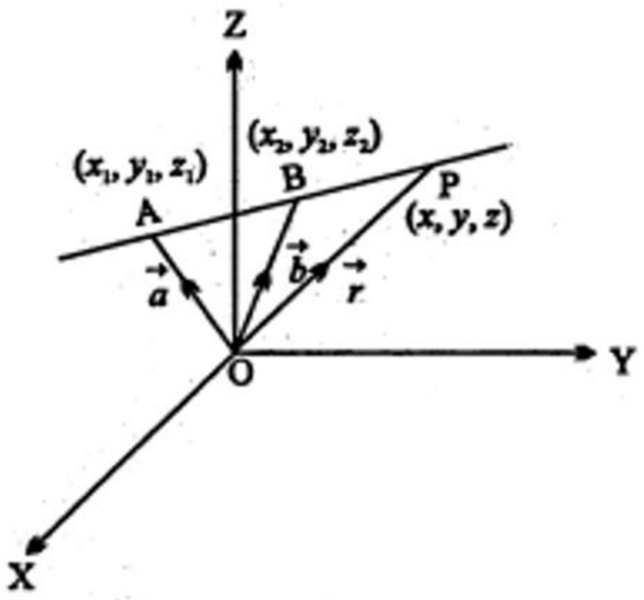
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z}{c} = t$$

अतः इस रेखा पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक (ta, tb, tc) होंगे।

(ii) दो दिये हुए बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करना-

माना दो दिये हुए बिन्दुओं $A(x_1,y_1,z_1)$ तथा $B(x_2,y_2,z_2)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करना है। A व B के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं। माना रेखा पर स्थित किसी स्वेच्छ बिन्दु P(x,y,z) का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।

बिन्दुओं A तथा B से गुजरने वाली रेखा बिन्दु A से गुजरती है तथा सदिश $\vec{A}B$ के समान्तर है। अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण है:



$$\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$$

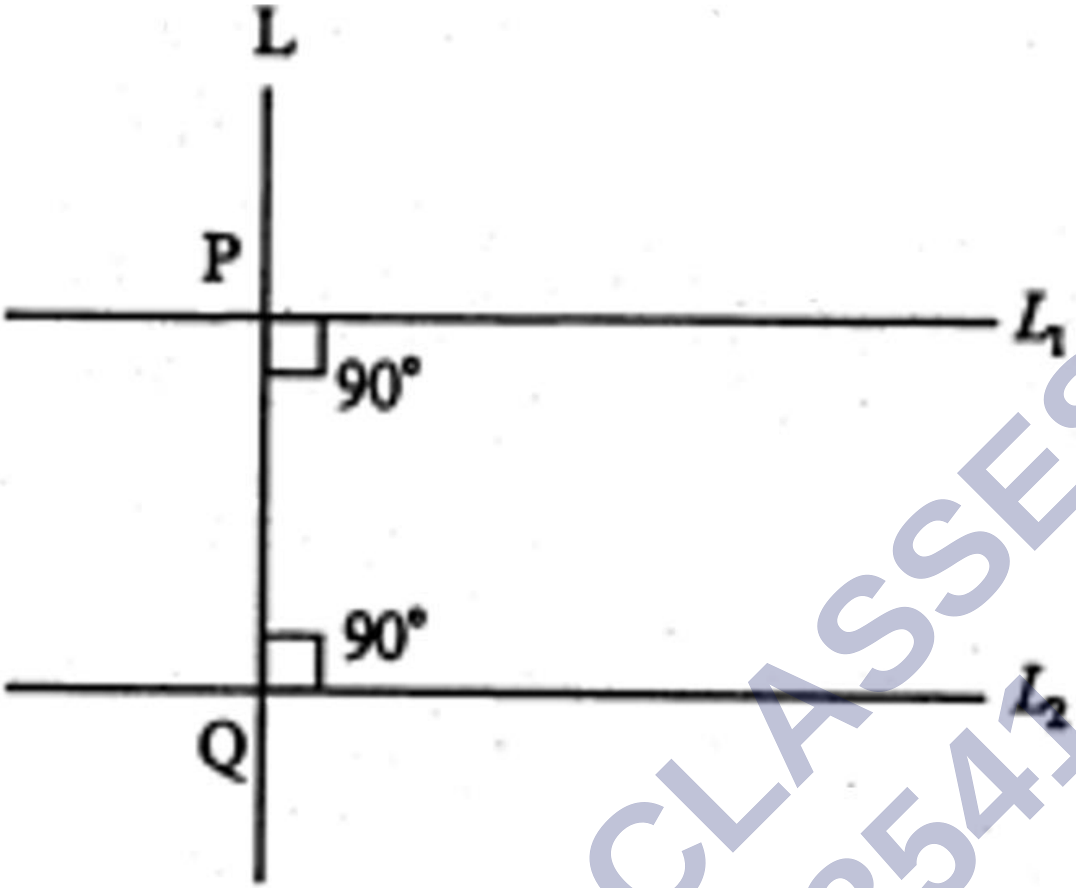
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}}$$

जहाँ t एक प्राचल है।

यही अभीष्ट समीकरण है।

न्यूनतम दूरी (Shortest Distance)

यदि दो सरल रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं, तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी स्पष्टतः शून्य होगी। यदि दो सरल रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करती हैं तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी की रेखा इन दोनों रेखाओं में से प्रत्येक के लम्बवत् होगी। इस रेखा के इन रेखाओं के बीच कटे भाग की लम्बाई, दोनों रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी कहलाती है।



चित्र में L_1, L_2 दो अप्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। रेखा L, L_1 और L_2 में से प्रत्येक के लम्बवत् है। रेखा का, रेखाओं L_1 L_2 के बीच प्रतिच्छेदित भाग PQ है। तब रेखाखण्ड PQ की लम्बाई, रेखाओं L_1 L_2 के बीच की न्यूनतम दूरी है।

दो अप्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच कीन्यूनतमदूरी ज्ञात करना (To find the Shortest Distance between Two Non-intersecting, Lines or Skew Lines)

माना दो अप्रतिच्छेदी सरल रेखाओं के समीकरण

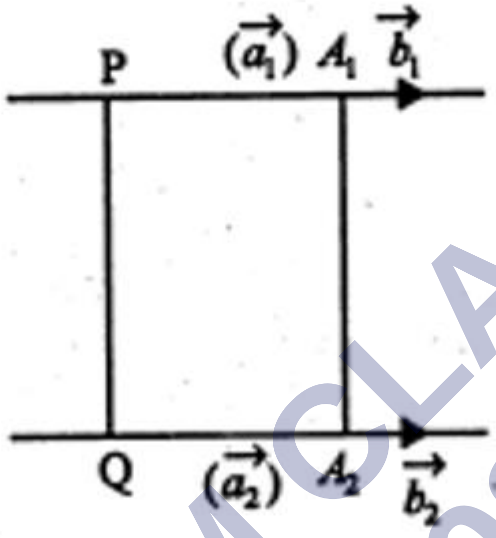
$\vec{r} = \overrightarrow{a_1} + \vec{t}b_1$

$\vec{r} = \overrightarrow{a_2} + \vec{s}b_2$

तथा हैं तथा उनके बीच की न्यूनतम दूरी PQ है। PQ रेखा (1) व (2) में से प्रत्येक के लम्बवत् है। फलस्वरूप, यह $\overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{b_2}$ की दिशा के समान्तर है।

माना $\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \vec{n}$

$$\therefore \qquad \hat{n} = \frac{\vec{b_1} \times \vec{b_2}}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}$$



अब, $PQ = A_1A_2$ का PQ पर प्रक्षेप

$$= (\vec{a_2} - \vec{a_1}).\vec{n} = \frac{\left[(\vec{a_2} - \vec{a_1}).(\vec{b_1} \times \vec{b_2})\right]}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}$$

$$= \frac{\left[(\vec{a_2} - \vec{a_1}).(\vec{b_1} \times \vec{b_2})\right]}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}$$

या $$PQ = \frac{[\vec{a_2} - \vec{a_1}, \vec{b_1}, \vec{b_2}]}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}$$

नोट-दी हुई दो रेखाएँ प्रतिच्छेदित करेंगी यदि उनके बीच की न्यूनतम दूरी शून्य हो अर्थात् यदि

[$\vec{a_2} - \vec{a_1}\ \vec{b_1}\ \vec{b_2}$] = 0.

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 11.1 (पृष्ठ संख्या 482)

प्रश्न 1 यदि एक रेखा x, y और z-अक्ष के साथ क्रमशः 90°, 135°, 45° के कोण बनाती है तो इसकी दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना रेखा की दिक् कोसाइन क्रमशः l, m, n हैं।

$$\text{तब } l = \cos 90^\circ, m = \cos 135^\circ, n = \cos 45^\circ$$

$$l = 0, m = \frac{1}{\sqrt{2}}, m = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

प्रश्न 2 एक रेखा की दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशाक्षों के साथ समान कोण बनाती है।

उत्तर- माना रेखा निर्देशाक्षों के साथ समान कोण α बनाती है, कब रेखा की दिक् कोसाइन

$$l = \cos\alpha, m = \cos\alpha, n = \cos\alpha$$

$$\text{परन्तु } l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha \pm = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ रेखा की दिक् कोसाइन है।

$$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

प्रश्न 3 यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात -18, 12, -4 हैं तो इसकी दिक्-कोज्याएँ क्या हैं?

उत्तर- दिया है, a = −18, b = 12,c = −4

$$\therefore \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$= \sqrt{(-18)^2+(-12)^2+(-4)^2}$$

$$\sqrt{324+144+16} = \sqrt{484} = 22$$

माना यदि a, b, c दिक्-अनुपात होतो दिक्-कोज्याएँ इस प्रकार है

$$\therefore \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{18}{22} = -\frac{9}{11}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

$$\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = -\frac{4}{22} = -\frac{2}{11}$$

अतः रेखा की दिक्-कोज्याएँ $= -\frac{9}{11}, \frac{6}{11}$ और $-\frac{2}{11}$ है।

प्रश्न 4 दर्शाइए कि बिन्दु (2, 3, 4), (-1, -2, 1), (5, 8, 7) संरेख हैं।

उत्तर- बिन्दुओं P(2, 3, 4) और Q(-1, -2, 1) को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात

(-1 -2), (-2 -3), (1 -4) अर्थात् -3, -5, -3 हैं।

बिन्दुओं Q(-1, -2, 1) और R(5, 8, 7) को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात

5 - (-1), 8 - (-2), 7 - 1 अर्थात् 6, 10, 6 हैं।

$\therefore$ PQ और QR के दिक् अनुपात समानुपाती हैं।

$\therefore$ PQ और QR समान्तर हैं।

पुन: चूँकि PQ और QR में बिन्दु Q उभयनिष्ठ है।

अतः P, Q और R संरेख बिन्दु हैं।

प्रश्न 5 एक त्रिभुज की भुजाओं की दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए। यदि इसके शीर्ष बिन्दु (3, 5, -4), (-1, 1, 2) और (-5, -5, -2) हैं।

उत्तर- माना त्रिभुज की भुजाओं के शीर्ष बिन्दु क्रमशः A(3, 5, -4), B(-1, 1, 2) और C(-5, -5, -2) हैं।

$$\text{तब दो बिन्दुओं के बीच की दूरी} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\text{से } AB = \sqrt{(-1-3)^2(1-5)^2 + (2+4)^2}$$

$$= \sqrt{16+16+36} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$BC = \sqrt{(-5+1)^2 + (-5-1)^2 + (-2-2)^2}$$

$$= \sqrt{16+36+16} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$\text{तथा } CA = \sqrt{(-5-3)^2 + (-5-5)^2 + (-2+4)^2}$$

$$= \sqrt{64+100+41} = \sqrt{168} = 2\sqrt{142}$$

$$\therefore AB\text{के दिक् कोसाइन}$$

$$= \frac{-1-3}{2\sqrt{17}}, \frac{-1-5}{2\sqrt{17}}, \frac{2+4}{2\sqrt{17}} \text{ या } \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}$$

BC के दिक् कोसाइन

$$= \frac{-5+1}{2\sqrt{17}}, = \frac{-5-1}{2\sqrt{17}}, = \frac{-2-2}{2\sqrt{17}} \text{ या } \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}$$

तथा CA के दिक् कोसाइन

$$= \frac{3+5}{2\sqrt{42}}, \frac{5+5}{2\sqrt{42}}, \frac{-4+2}{\sqrt{42}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}$$

प्रश्नावली 11.2 (पृष्ठ संख्या 491-493)

प्रश्न 1 दर्शाइए कि दिक्-कोज्याएँ

$\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}; \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}; \frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$

वाली तीन रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं।

उत्तर- दो रेखाएँ जिनकी दिक्-कोज्याएँ क्रमशः l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 परस्पर लम्बवत् होंगी यदि $l_1 l_2 + m_1 m_1 + n_1 n_2 = 0$

दिक्-कोज्या $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$ वाली रेखाएँ

यहाँ l_1, m_1, n_1 के मान क्रमशः $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$

तथा l_2, m_2, n_2 के मान क्रमशः $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$

अब $l_1 l_2 + m_1 m_1 + n_1 n_2$

$$= \frac{12}{13} \times \frac{4}{13} + \left(\frac{-3}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{-4}{13}\right) = 0$$

या $\frac{48-36-12}{169} = \frac{48-48}{169} = 0$ जो की सत्य है।

$\Rightarrow$ अतः दोनों रेखाएँ परस्पर लंबवत् है।

दिक्-कोज्या $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}; \frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ वाली रेखाएँ

अब $l_1 l_2 + m_1 m_1 + n_1 n_2$

$$= \frac{4}{13} \times \frac{3}{13} + \frac{12}{13}\left(\frac{-4}{13}\right) + \frac{3}{13} \times \left(\frac{12}{13}\right)$$

$$= \frac{12-48+36}{169} = \frac{48-48}{169} = 0$$

$\Rightarrow$ ये रेखाएँ परस्पर लंबवत् है।

दिक्-कोज्या $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}; \frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$ वाली रेखाएँ

अब $l_1 l_2 + m_1 m_1 + n_1 n_2$

$$= \frac{3}{13} \times \frac{12}{13} + \left(\frac{-4}{13}\right)\left(\frac{-3}{13}\right) + \frac{12}{13} \times \left(\frac{-4}{13}\right)$$

$$= \frac{36+12-48}{169} = \frac{48-48}{169} = 0$$

$\Rightarrow$ दोनों रेखाएँ परस्पर लंबवत् है। इति सिद्धम्

अतः दी गई रेखाएँ परस्पर लंबवत् है।

प्रश्न 2 दर्शाइए कि बिन्दुओं (1, -1, 2), (3, 4, -2) से होकर जाने वाली रेखा बिन्दुओं (0, 3, 2) और (3, 5, 6) से जाने वाली रेखा पर लम्ब है।

उत्तर- दिए गए बिन्दु A (1, -1, 2), B (3, 4, -2) से होकर जाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात 3 - 1, 4 + 1, -2 - 2 या 2, 5, -4 हैं। बिन्दु C (0, 3, 2) और D(3, 5, 6) से होकर जाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात 3 - 0, 5 - 3, 6 - 2 या 3, 2, 4 है।

हम जानते हैं कि,

रेखाएँ जिनके दिक् अनुपात (a1, b1, c1) तथा (a2, b2, c2) है परस्पर लम्बवत होंगी यदि और केवल

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

यहाँ $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 2 \times 3 + 5 \times 2 + (-4) \times 4$

$= 6 + 10 - 16$

$= 16 - 16 = 0$

अतः रेखा AB तथा CD एक-दूसरे पर लंब हैं। इति सिद्धम्

प्रश्न 3 दर्शाइए कि बिन्दुओं (4, 7, 8), (2, 3, 4) से होकर जाने वाली रेखा बिन्दुओं (-1, -2, 1) (1, 2, 5) से जाने वाली रेखा के समान्तर हैं।

उत्तर- बिन्दु A(4, 7, 8), B(2, 3, 4) से होकर जाने वाली रेखा AB के दिक्-अनुपात

a_1, b_1, c_1 क्रमशः 2 - 4, 3 - 7, 4 - 8 या -2, -4, -4 हैं।

बिन्दु C(-1, - 2, 1) और D(1, 2, 5) से होकर जाने वाली रेखा CD के दिक्-अनुपात

a_2, b_2, c_2, क्रमशः 1 - (-1), 2 - (-2), 5 - 1 या 2, 4, 4 हैं।

रेखा AB, CD के समान्तर होगी यदि

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{-2}{2} = -1\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{-4}{4} = -1, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-4}{4} = -1$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

अतः AB || CD इति सिद्धम्

प्रश्न 4 बिन्दु (1, 2, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश

$3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ के समान्तर है।

उत्तर-

$3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ दी गई रेखा बिन्दु A(1, 2, 3) से होकर जाती है तथा सदिश

$\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ के समान्तर है। बिन्दु A का स्थिति सदिश

$= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore$ दी गई रेखा का सदिश समीकरण $\vec{r}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

या $\vec{r}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

जहाँ λ एक अदिश है।

प्रश्न 5 बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ से होकर जाने वाली व सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ के समान्तर रेखा को सदिश और कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अभीष्ट रेखा, दिये गए सदिश बिन्दु

$\vec{r} = 2\hat{k} - \hat{j} + 4\hat{k}$ से होकर जाती है तथा सदिश $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ के समान्तर है।

अभीष्ट रेखा का समीकरण

$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \ldots (1)$ कार्तीय समीकरण

(1) में $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ लेने पर,

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

$$\Rightarrow x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$= (2 + \lambda)\hat{i} + (-1 + 2\lambda)\hat{j} + (4 - \lambda)\hat{k}$$

$$\Rightarrow = x = 2 + \lambda, y = -1 + 2\lambda, z = 4 - \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1} = \lambda$$

$\therefore \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$ रेखा का अभीष्ट कार्तीय समीकरण है।

प्रश्न 6 उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (-2, 4, -5) से जाती है और

$\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$

के समान्तर है।

उत्तर-

अभीष्ट रेखा, रेखा $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$

∴ अभीष्ट रेखा के दिक् अनुपात 3, 5, 6 हैं और यह बिन्दु (-2, 4, -5) से होकर जाती है।

∴ अभीष्ट रेखा का समीकरण $\frac{x-(-2)}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-(-5)}{6}$

या $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+5}{6}$

प्रश्न 7 एक रेखा का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$$

है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

रेखा का समीकरण $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$

यह रेखा बिन्दु (5, -4, 6) से गुजरती है और इसके दिक् अनुपात 3, 7, 2 हैं।

अर्थात् $\vec{r}_1 = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}$

अत: रेखा का सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{b}$ है

$$= (5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$$

प्रश्न 8 मूलबिन्दु और (5,-2, 3) से जाने वाली रेखा का समीकरण सदिश व कार्तीय रूपों में ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दिये गये बिन्दु $\vec{r}_1 = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ तथा $\vec{r}_2 = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

इन दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

या $\vec{r} = (0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) + \lambda\left[(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k})\right]$

या $\vec{r} = \lambda(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$कार्तीय समीकरण उपरोक्त समीकरण में

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \lambda(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$ लेने पर,

$$\Rightarrow x = 5\lambda, y = -2\lambda, z = 3\lambda$$

$$\Rightarrow = \frac{x}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3} = \lambda$$

अतः $= \frac{x}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ रेखा का अभीष्ट कार्तीय समीकरण है।

प्रश्न 9 बिन्दुओं (3, -2, -5) और (3, -2, 6) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण सदिश व कार्तीय रूप में ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिये गये बिन्दुओं A(3,-2, -5) व B(3, -2, 6) के स्थिति सदिश

$\vec{r}_1 = (3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k})$ तथा $\vec{r}_2 = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$

इन दो बिन्दुओ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

या $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}) + \lambda$

$$\left[(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})-(3\hat{i}-2\hat{j}-5\hat{k})\right]$$

या $\vec{r}=(3\hat{i}-2\hat{j}-5\hat{k})+\lambda(0\hat{i}+0\hat{j}+11\hat{k})$

या $\vec{r}=(3\hat{i}-2\hat{j}-5\hat{k})+\lambda(11\hat{k})$

कार्तीय समीकरण में, $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ लेने पर,

$$x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=(3\hat{i}-2\hat{j}-5\hat{k})+\lambda(11\hat{k})$$

$$\Rightarrow x=(3+0\lambda), y(-2+0\lambda), z=-5+11\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{x\text{-}3}{0}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+5}{0}=\lambda$$

अतः अभीष्ट कार्तीय समीकरण $\frac{x\text{-}3}{0}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+5}{0}$ है।

प्रश्न 10 निम्नलिखित रेखायुग्म के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

a. $\vec{r}=2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})$

b. $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}-6\hat{k}+\mu(3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k})$

उत्तर-

a. दी गई रेखाये क्रमशः सदिश क्रमशः

$b_1=3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}$ और $b_2=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ के समान्तर है।

$\therefore$ यदि इन सदिशों के बिच कोण θ है तो रेखाओ के बिच कोण भी θ होगा।

$$\text{तब } \cos\theta = \frac{\vec{b_1}.\vec{b_2}}{|\vec{b_1}|.|\vec{b_2}|} = \frac{(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}).(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})}{|3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}||\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}|}$$

$$= \frac{3+4+12}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}.\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$$

$$= \frac{19}{\sqrt{49}\sqrt{49}} = \frac{19}{7.3} = \frac{19}{21}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{19}{21}$$

माना θ इन सदिशों के बिच का कोण है। दी गई रेखा वेक्टर के समानांतर हैं।

$$\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k} \text{ और } \vec{b_2} = 3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k} \text{ क्रमश:}$$

∴ उनके बीच का कोण थाटा द्वारा दिया जाता है।

$$\cos\theta = \frac{\vec{b_1}.\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|} = \frac{(1)(3)+(-1)(-5)+(-2)(-4)}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{9+25+16}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{15}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{15}\right)$$

प्रश्न 11 निम्नलिखित रेखायुग्म के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

a. $$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+36}{-3} \text{ और } \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$$

b. $$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \text{ और } \frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$$

उत्तर-

a. दी गई रेखाओं के दिक् अनुपात क्रमशः 2, 5, -3 और -1, 8, 4 है।

यदि दी गई रेखाओं के मध्य कोण θ है, तब

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+a_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$= \frac{(2)(-1)+(5)(8)+(-3)(4)}{\sqrt{2^2+5^2+(-3)^2}\sqrt{(-1)^2+8^2+4^2}}$$

$$= \frac{-2+40-12}{\sqrt{38}\sqrt{81}} = \frac{26}{9\sqrt{38}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{26}{9\sqrt{38}}$$

b. दिए गए समीकरण हैं

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \text{ और } \frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$$

$$\therefore \vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \text{ और } \vec{b}_2 = 4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}$$

θ के दो रेखाओं के बीच का कोण बनाएं

$$\cos\theta = \frac{\vec{b_1}.\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|} = \frac{2(4)+2(1)+1(8)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\sqrt{4^2+1^2+8^2}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \theta \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

प्रश्न 12 P का मान ज्ञात कीजिए रेखाए

$$\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2} \text{ और } \frac{7-7x}{3p}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$$ परस्पर लंबवत् है।

उत्तर- दी गई रेखाओ को मानक रूप में लिखने पर,

$$\frac{1-x}{-3}=\frac{y-2}{\frac{2p}{7}}=\frac{z-3}{2} \text{ तथा } \frac{x-1}{\frac{2p}{7}}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-6}{-5}$$

इनके दिक् अनुपात (a_1, b_1, c_1) व (a_2, b_2, c_2) क्रमशः $-3\,\frac{2p}{7}\,2$ व $\frac{-3p}{7}, 1, -5$ है।

यदी रेखाये परस्पर लम्ब है, तब $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

अर्थात् $(-3)\left(\frac{-3p}{7}\right)+\frac{2p}{7}(1)+2(-5)=0$

$$\Rightarrow \frac{9p}{7}+\frac{2p}{7}-10=0$$

$$\Rightarrow \frac{11p}{7}$$

$$\Rightarrow p=\frac{70}{11}$$

प्रश्न 13 दिखाइए कि रेखाएँ

$$\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{1} \text{ और } \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$ परस्पर लम्ब है।

उत्तर- दी गई रेखाएं के दिक् अनुपात

$a_1, b_1, c_1 = 7,-15,1$ तथा $a_2, b_2, c_2 = 1,2,3$

∵ रेखाये परस्पर लम्ब है।

∴ $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

या 7 × 1 + (-5) × (2) + (1) × 3 = 0

या 7 – 10 + 3 = 0

या 0 = 0 जोकि सत्य है।

प्रश्न 14 रेखाओ

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

के बिच की न्यूनतम दुरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दी गई रेखाओं के समीकरण

$$\vec{r}(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \ldots (1)$$

$$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}0 + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) \ldots (2)$$

समीकरण (1) की तुलना $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ से तथा समीकरण (2) की तुलना $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ से करने पर,

$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{a}_2 = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{b}_1 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

अब $\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$

और $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2-1)\hat{i} - (2-2)\hat{j} + (1+2)\hat{k}$

$$= -3\hat{i} - 0\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\therefore (\vec{a}_2 - \vec{a}_1).(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = (\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}).(-3\hat{i} + \hat{k})$$

$= (1)(-3) + (-3)(0) + (-2)(3) = -3 - 6 = -9$ और

$$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{12}$$

दोनों रेखाओं के बीच की दूरी $\left|\frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1).(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$

$$= \left|\frac{-9}{3\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{-3}{\sqrt{2}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

अत: दी गई दोनों रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ इकाई है।

प्रश्न 15

रेखाओ $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बिच की न्यूनतम दुरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दिए गए समीकरणों की तुलना $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ और $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$

$$x_1 = -1, y_1 = -1, z = -1;$$

तथा $x_2 = 3, y_2 = 5, z_2 = -7;$

$a_1 = 7, b_1 = -6, c_1 = 1$ तथा $a_2 = 1, b_2 = -2, c_2 = 1$

अतः $D = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2$

$$= (-14+6)^2 + (-6+2)^2 + (1-7)^2$$

$$= 64 + 16 + 36 = 116$$

$$\therefore \text{न्यूनतम} = \frac{1}{\sqrt{D}}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}}\begin{vmatrix} 3+1 & 5+1 & 7+1 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{29}}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{29}}[4(-16+2)-6(7-1)+8(-14+6)]$$

$$\frac{1}{4\sqrt{29}}[-16-36-64] = \frac{1}{2\sqrt{29}} \cdot \frac{4\times 29}{2\sqrt{29}}$$

(ऋण चिन्ह लेने पर)

$$= 2\sqrt{29} \text{ इकाई}$$

प्रश्न 16 रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

उत्तर- दिए गए समीकरणों की तुलना करना

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1 \text{ और } \vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$$

क्रमशः दिया है $\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b}_1 = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{a}_2 = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$ और $\vec{b}_2 = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

अब $\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$

और $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -9\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}$

$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = 3\sqrt{19}$

$\therefore (\vec{a}_2 - \vec{a}_1).(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 9$

$$b = \left|\frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| = \frac{9}{3\sqrt{19}} = \frac{3}{\sqrt{19}}$$

प्रश्न 17 रेखाए जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित है के बिच की न्यूनतम दुरी ज्ञात कीजिए।

$\vec{r} = (1 - t)\hat{i} + (t - 2)\hat{j} + (3 - 2t)\hat{k}$ और $\vec{r} = (s + 1)\hat{i} + (2s - 1)\hat{j} - (2s + 1)\hat{k}$

उत्तर-

दी गई रेखाओ के समीकरण

$\vec{r} = (1 - t)\hat{i} + (t - 2)\hat{j} + (3 - 2t)\hat{k}$

या $\vec{r} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} + t(-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

तथा $\vec{r} = (s + 1)\hat{i} + (2s - 1)\hat{j} - (2s + 1)\hat{k}$

या $\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + s(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ तथा $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ से करने पर,

$$a_1 = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k},$$

$$\vec{b}_1 = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

तथा $\vec{a}_2 = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k},\ \vec{b}_2 = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$$\therefore \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2+4)\hat{i} - (2+2)\hat{j} + (-2-1)\hat{k} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$$

$\therefore$ अभीष्ट न्यूनतम दुरी $d = \left| \dfrac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1).(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right|$

$$= \left| \frac{(\hat{j} - 4\hat{k}).(2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k})}{\sqrt{29}} \right| = \left| \frac{-4+12}{\sqrt{29}} \right| = \frac{8}{\sqrt{29}}$$

अतः दी गई रेखाओ के बिच की न्यूनतम दुरी $\dfrac{8}{\sqrt{29}}$ है।

प्रश्नावली 11.3 (पृष्ठ संख्या 507-509)

प्रश्न 1 निम्नलिखित प्रश्न में से प्रत्येक में समतल के अभिलम्ब की दिक् कोसाइन और मूलबिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए।

a. z = 2

b. x + y + z = 1

c. 2x + 3y – z = 5

d. 5y + 8 = 0

उत्तर-

a. दिये गये समतल का समीकरण z = 2 इसकी तुलना समतल के मानक समीकरण l x + my + nz = p से करने पर, समतल की मूलबिन्दु से दूरी p = 2 मात्रक तथा समतल के अभिलम्ब की दिक् केसाइन l = 0, m = 0, n = 1

b. दिये गये समतल का समीकरण x + y + z = 1

दोनों पक्षों को $\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{3}$ से भाग देने पर, $\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

इसकी तुलना समतल के मानक समीकरण lx + my + nz = p से करने पर,

समतल पर अभिलम्ब की दिक् कोज्याये

$$l = \frac{1}{\sqrt{3}}, m = \frac{1}{\sqrt{3}}, n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

अर्थात् $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ व मुलबिन्दु से दुरी $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ इकाई

c. समतल का समी. 2x + 3y – z = 5

∴ दिक् अनुपात 1, 3, -1 है।

तब दिक् अनुपात $\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}$

$$\frac{3}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}$$

$\therefore$ समतल की मूलबिंदु से दुरी

$$= \left| \frac{5}{\sqrt{2^2+3^3+(-1)^2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{14}} \text{ इकाई}$$

d. समतल का समी. 5y + 8 = 0

या 5y = -8

∴ दिक् अनुपात 0, 5, 0 है।

तथा दिक् कोसाइन

$$0, \frac{5}{\sqrt{0^2+5^2,0}} 0$$

या $0 \frac{5}{5}$

$$\Rightarrow 1, 1, 0$$

समतल की मुलबिंदु से दुरी $= \left| \frac{-8}{\sqrt{0^2+5^2+0}} \right|$

$$= \frac{8}{5} \text{ इकाई}$$

प्रश्न 2 उस समतल का समीकरणे ज्ञात कीजिए जो मूलबिन्दु से 7 मात्रक दूरी पर है, और सदिश $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ पर अभिलम्ब है।

उत्तर- यहाँ p = 7 मात्रक

$$\vec{n} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\therefore \hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{(3)^2+(5)^2+(-6)^2}}$$

$$= \frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{9+25+36}} = \frac{1}{\sqrt{70}}(3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k})$$

$$\therefore \text{तल का अभीष्ट समीकरण } \vec{r}.\hat{n} = p \text{ से } \vec{n} = \left(\frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{70}}\right) = 7$$

प्रश्न 3 निम्नलिखित समतल का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

a. $\vec{r}.(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$

b. $\vec{r}.(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = 1$

c. $\vec{r}.\left[(s - 2t)\hat{i} + (3 - t)\hat{j} + (2s + t)\hat{k}\right] = 15$

उत्तर-

a. समतल का सदिश समीकरण

$$\vec{r}.(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$$

यदि समतल पर स्थित कोई बिन्दु (x, y, z) है, तब

$$(x\ \hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}).(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$$

$$\Rightarrow x + y - z = 2$$

जोकि अभीष्ट समीकरण है।

b. दिये गये तल का सदिश समीकरण

$$\vec{r}.(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = 1$$

यदि समतल पर स्थित को बिन्दु (x, y, z) है, तब

$$(x\hat{i}) + y\hat{j} + z\hat{k}.(2\hat{i} + 3\hat{j}) - 4\hat{k} = 1$$

या $2x + 3y - 4z = 1$

जोकि अभीष्ट समीकरण है।

c. दिये गए तल का सदिश समीकरण

$$\vec{r}.\left[(s-2t)\hat{i} + (3-t)\hat{j} + (2s+t)\hat{k}\right] = 15$$

यदि समतल पर स्थित कोई बिंदु P(x, y, z)

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$\vec{r}$ केमान को प्रतिस्थापि करने पर समी. 1 से

$$\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right).\left[(s - 2t)\hat{i} + (3-t)\hat{j} + (2s+t)\hat{k}\right] = 15 \ldots (1)$$

$$\Rightarrow (s-2t)x + (3-t)y + (2s+\ t)z = 15$$

जोकि अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 4 निम्नलिखित स्थितियों में मूलबिन्दु से खींचे गये लम्ब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए

a. 2x + 3y + 4z - 12 = 0

b. 3y + 4z - 6 = 0

c. x + y + z = 1

d. 5y + 8 = 0

उत्तर-

a. दिया गया समीकरण 2x + 3y + 4 - 12 = 0

दोनों पक्षे $\sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$ से भाग करने पर

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{12}{\sqrt{29}}$$

यही समतल का अभिलम्ब रूप है।

अभिलम्ब के दिक्-कोणाइन, $l = \frac{2}{\sqrt{29}} m = \frac{3}{\sqrt{29}}$ तथा $n = \frac{4}{\sqrt{29}}$

समतल की मूल बिन्दु से दूरी, $d = \frac{12}{\sqrt{29}}$

$\therefore$ मूल बिन्दु से समतल पर सब के पार *

$$x = ld = \frac{12}{\sqrt{29}} \times \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{24}{29}$$

$$y = md = \frac{12}{\sqrt{29}} \times \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{36}{29}$$

$$z = nd = \frac{12}{\sqrt{29}} \times \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{48}{29}$$

अतः लम्ब के पद के निर्देशांक $\left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$

b. समतल का समीकरण 3y + 4z - 6 = 0

दोनों पक्षे $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16 = 5}$ से भाग करने पर

$\therefore$ समतल के लम्ब के दिक्-कोसाइन $l = 0, m = \frac{3}{5}$ तथा $n = \frac{4}{5}$

और समतल की मूल बिन्दु से दुरी $d = \frac{6}{5}$

$\therefore$ मूल बिन्दु से समतल पर लम्ब के पद के निर्देशांक

$$x = ld = \frac{6}{5} \times 0 = 0$$

$$y = md = \frac{6}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{25}$$

$$z = nd = \frac{6}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

अतः समतल पर मूल बिन्दु से लम्ब के पद के निर्देशांक $= \left(0, \frac{18}{25}, \frac{24}{25}\right)$

c. दिया गया समीकरण x + y + z = 1

दोनों पक्षे $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ से भाग करने पर

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

मुलबिन्दु से समतल पर लम्ब के दिक्-कोसाइन $l = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}, m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तथा $n = \frac{1}{\sqrt{3}}$

तथा मुलबिन्दु से दुरी $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ मुल बिन्दु से समतल पर लम्ब के पद के निर्देशांक

$$x = ld = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = md = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$z = nd = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

अतः लम्ब के पद के निर्देशांक $= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

d. दिया गया समीकरण 5y + 8 = 0

∴ मूल बिन्दु से समतल के दिक्-कोसाइन l = 0, m = 1 तथा n = 0

∴ मूल बिन्दु से दुरी $d = -\frac{8}{5}$

∴ मूल बिन्दु से समतल पर लम्ब के पद के निर्देशांक

$$x = ld = \frac{8}{5} \times 0 = 0$$

$$y = md = \frac{8}{5} \times 1 = -\frac{8}{5}$$

$$z = nd = \frac{8}{5} \times = 0 = 0$$

∴ समतल पर लम्ब के पद निर्देशांक $\left(0, \frac{8}{5}, 0\right)$

प्रश्न 5 निम्नलिखित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत समतल को सदिश एवं कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

a. बिन्दु (1, 0, -2) से जाता है और सदिश $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ पर अभिलम्ब है।

b. बिन्दु (1, 4, 6) से जाता है और सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ पर अभिलम्ब है।

उत्तर-

a. सदिश समीकरण सदिश रूप में समीकरण

$$(\vec{r} - \vec{a}).\vec{n} = 0$$

यहाँ $\vec{a} = (1, 0, -2) = \hat{i} - 2\hat{k}$ तथा $\vec{n} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

∴ समतल का समीकरण

$[\vec{r} - (\hat{i} - 2\hat{k})].(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 0$ कार्तीय समीकरण समतल का समीकरण जो (x_1, y_1, z_1) से गुजरता है और लम्ब के दिक्-अनुपात a, b, c हैं।

$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$

यहाँ समतल बिन्दु (1, 0, -2) से गुजरता है और लम्ब के दिक्-अनुपात (1, 1, -1) हैं।

अर्थात् $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $z_1 = -2$ और a = l, b = 1, c = −1

∴ समतल का समीकरण

$1(x-1) + 1(y-0) + (-1)(z + 2) = 0$

या $x - 1 + y - z - 2 = 0$

या $x + y - z = 3$

b. सदिश समीकरण समतल बिन्दु (1, 4, 6) से होकर जाता है तथा लम्ब सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ के अनुदिश है

अर्थात् $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ और $\vec{n} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

∴समतल का समीकरण $(\vec{r} - \vec{a})\vec{n} = 0$

या $[\vec{r} - (\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})].(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$

कार्तीय समीकरण समतल बिन्दु (1, 4, 6) से होकर जाता है।

समतल पर लम्ब के दिक्-अनुपात (1, -2, 1) हैं।

अर्थात् $x_1 = 1, y_1 = 4, z_1 = 6$ और $a = l, b = 2, c = 1$

$\therefore$ समतल का समीकरण

$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

$1(x - 1) - 2(y - 4)(z - 6) = 0$

या $x - 2y + z - 1 + 8 - 6 = 0$

या $x - 2y + z + 1 = 0$

प्रश्न 6 उन समतल के समीकरण ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित बिन्दुओं से गुजरते हैं।

a. (1, 1 ,-1), (6, 4, -5), (-4, -2, 3)

b. (1, 1, 0), (1, 2, 1), (-2, 2, -1)

उत्तर-

a. तीन असरेख बिन्दुओ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$(\vec{r} - \vec{a}).[(\vec{b} - \vec{a})] \times (\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

यहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \vec{b} = 6\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}, \vec{c} = -4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\therefore (\vec{b} - \vec{a}) = (6\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

$$= 5\hat{i} + 3\hat{j}0 + 4\hat{k}$$

अब $(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

$$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = 0$$

अर्थात् सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ संरेख है।

अतः तलों की संख्या असंख्य होगी।

b. यहाँ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}, \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=-2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$$\therefore \vec{b}-\vec{a}=(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{j})-(\hat{i}+\hat{j})=\hat{j}+\hat{k}$$

$$\vec{c}-\vec{a}=(-2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})-(\hat{i}+\hat{j})=-3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$$

अब $(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})=$

समतल का समीकरण $\vec{r}-\left[(\hat{i}+\hat{j})\right].(-2\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k})=0$

कार्तीय रूप, $\left[(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-(\hat{i}+\hat{j})(-2\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k})=0\right.$

या $\left[(x-1)\hat{i}+(y-1)\hat{j}+z-1\hat{k}(-2\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k})=0\right.$

या $-2(x-1)-3(y+3)+3z=0$

या $-2x+2-3y+3+3z=0$

या $2x+3y-3z=5$

प्रश्न 7 समतल 2x + y - z = 5 द्वारा काटे गए अन्तःखण्डों को ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया गया समतल का समीकरण

2x + y – z = 5

5 से दोनों पक्षों में भाग देने पर

$$\frac{2}{5}x+\frac{y}{5}-\frac{z}{5}=1$$

या $\dfrac{x}{\frac{5}{2}}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{-5}=1$

अर्थात् समतल द्वारा काटे गए अन्त:खण्ड

$\frac{5}{2}, 5 - 5$ है।

प्रश्न 8 उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका y-अक्ष पर अन्त:खण्ड 3 और जो तल ZOX के समान्तर है।

उत्तर- ZOX के समान्तर तल का समीकरण y = a

यह तल y-अक्ष पर अन्त:खण्ड 3 बनाता है।

⇒ a = 3 समतल अभीष्ट का समीकरण y = 3

प्रश्न 9 उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों 3x - y + 2z - 4 = 0 और x + y + z - 2 = 0 के प्रतिच्छेदन तथा बिन्दु (2, 2, 1) से होकर जाता है।

उत्तर- दिये गये समतलों के प्रतिच्छेदन से जाने वाले समतल का समीकरण

$(3x - y + 2z - 4) + \lambda(x + y + z - 2) = 0$...(1)

यह बिन्दु (2, 2, 1) से होकर जाता है, तब

$(3 \times 2 - 2 + 2 \times 1 - 4) + \lambda(2 + 2 + 1 - 2) = 0$

या $2 + 3\lambda = 0$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

λ का मान (1) में रखने पर,

अभीष्ट समतल का समीकरण $(3 \times -y + 2z - 4) - \frac{2}{3}(x + y + z - 2) = 0$

या $(9x - 3y + 6z - 12) - (2x + 2y + 2z - 4) = 0$

या $7x - 5y + 4z - 8 = 0$

प्रश्न 10 उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों

$$\vec{r}(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=7 \text{ और } \vec{r}(2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k})=9$$

की प्रतिच्छेदन रेखा और बिन्दु (2, 1, 3) से होकर जाता है।

उत्तर-

दिए गए समतलों $\vec{r}(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=7\ \vec{r}(2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k})=9$

$$\vec{r}(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=7, \vec{r}(2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k})-9=0\ldots(1)$$

यह समीकरण बिन्दु (2, 1, 3)

अर्थात् $2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ से होकर जाता है।

$$\therefore (2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}).(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})-7$$

$$+\lambda\left[(2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}).(2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k})-9\right]$$

$$=0(4+2-9)-7+\lambda\left[(4+5+9)-9\right]=0$$

$$-10+9\lambda=0$$

या $=\frac{10}{9}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\vec{r}(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})-7+\frac{10}{9}\left[\vec{r}(2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k})-9\right]=0$$

या $9\left[\vec{r}(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})-7\right]+10\left[\vec{r}(2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k})-9\right]=0$

$$\vec{r}\left[9(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+10(2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k})\right]-63-90=0$$

या $\vec{r}\left[(18+20)\hat{i}+(18+50)\hat{j}+(-27+30)\hat{k}\right]-153=0$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण

$$\vec{r}(38\hat{i}+68\hat{j}+3\hat{k})-53=0$$

या $\vec{r}(38\hat{i}+68\hat{j}+3\hat{k})=153$

प्रश्न 11 तलों x + y + z = 1 और 2x + 3y + 4z = 5 की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले तथा तल x - y + z = 0 पर लम्बवत् तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिए गए समतलों x + y + z =1 और 2 x + 3y + 4z = 5 के प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$(x+y+z-1)+\lambda(2x+3y+4z-5)=0$$

या $(1+2\lambda)x+(1+23\lambda)y+(1+4\lambda)z-1-5\lambda=0\ldots(1)$

यह तल $x-y+z=0$ के लम्बवत् है।

$$\therefore(1+2\lambda)1+(1+3\lambda)(-1)+(1+4\lambda)1=0$$

$$1+2\lambda-1-3\lambda+14\lambda=0\ [\because a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0]$$

$$1+3\lambda=0$$

$$\therefore\lambda-\frac{1}{3}$$

अतः अभीष्ट समतल का समीकर $\lambda=-\frac{1}{3}$ (1) में रखने पर,

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)x+\left(1-\frac{3}{3}\right)y+\left(1-\frac{4}{3}\right)z+\frac{5}{3}=0$$

$$\frac{1}{3}x+0.y-\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}=0$$

$$x-z+2=0$$

प्रश्न 12 समतलों जिनके सदिश समीकरण

$\vec{r}(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=5$ और $\vec{r}(3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})=3$

उत्तर-

यदि समतलों $\vec{r}.\vec{n}_1$ और $\vec{r}.\vec{n}_2=d_1$ के बीच कोण θ है तब,

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

यहाँ $\vec{n_1}=2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ और $\vec{n_2}=3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$

$$\therefore\cos\theta=\frac{(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}).(3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})}{|2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}||3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}|}$$

$$=\frac{2\times3+2\times(-3)+(-3)\times5}{\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{3^2+(-3)^2+(5)^2}}$$

$$=\frac{-15}{\sqrt{17}\sqrt{43}}=\frac{-15}{\sqrt{731}}$$

$$\therefore\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-15}{\sqrt{731}}\right)$$

जबकि न्यूनकोण $\cos^{-1}\frac{15}{\sqrt{175}}$ होगा।

प्रश्न 13 निम्नलिखित प्रश्न में ज्ञात कीजिए कि क्या दिए गए समतल के युग्म समान्तर हैं अथवा लम्बवत् हैं और उस स्थिति में, जब ये न तो समान्तर हैं और न ही लम्बवत्, उनके बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

a. 7x + 5y + 6z + 30 = 0 और 3x – y – 10z + 4= 0
b. 2x + y + 3z - 2 = 0 और x - 2y + 5 = 0
c. 2x – 2y + 4z + 5 = 0 और 3x – 3y + 6z – 1 = 0
d. 2x - y + 3z - 1 = 0 और 2x - y + 3z + 3 = 0
e. 4x + 8y + z - 8 = 0 और y + z - 4 = 0

उत्तर-

a. दिए गए समतल $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ हैं।

समतल समान्तर होंगे यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

समतल लंबवत् होंगे यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

दिए गए समतल, $7x + 5y + 6z + 30 = 0 \ldots (1)$

तथा $3x - y - 10z + 4 = 0 \ldots (2)$

ये समतल समान्तर नहीं है, क्योंकि $\frac{7}{3} \neq \frac{5}{-1} \neq \frac{6}{-10}$

$$a_1a_2 + b_1b_1 + c_1c_2 = 7 \times 3 + 5 \times (-1) + 6 \times (-10)$$

$$= 21 - 5 - 60$$

$$= 21 - 65 = -44 \neq 0$$

ये समतल लंबवत् नहीं है।

यदि दोनों समतलो के बिच यदि कोण θ होतो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$= \frac{7.3+5(-1)+6(-10)}{\sqrt{7^2+5^2+6^2}\sqrt{3^2+(-1)^2+(-10)^2}}$$

$$= \frac{21-5-60}{\sqrt{49+25+36}\sqrt{9+1+100}}$$

$$= \frac{-44}{\sqrt{110}\sqrt{110}} = \frac{-44}{110} = \frac{-4}{10} = \frac{-2}{5}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

अतः दिए गए समतलो के बिच का कोण $\cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ है।

b. दिए गए समतल $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ हैं।

समतल समान्तर होंगे यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

समतल लंबवत् होंगे यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

दिए गए समतल, $2x + y + 3z - 2 = 0 \ldots (1)$

तथा $x - 2y + 5 = 0 \ldots (2)$

ये समतल समान्तर नहीं है, क्योंकि $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{3}{0}$

$$a_1a_2 + b_1b_1 + c_1c_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 3 \times 0$$

$$= 2 - 2 + 0 = 0$$

ये समतल समान्तर नहीं है, क्योंकि $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{3}{0}$

$$a_1a_2 + b_1b_1 + c_1c_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 3 \times 0$$

$$= 2 - 2 + 0 = 0$$

$$= 21 - 65 = -44 \neq 0$$

अतः दिए समतल आपस में लंबवत् है।

c. दिए गए समतल $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ हैं।

समतल समान्तर होंगे यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

समतल लंबवत् होंगे यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

दिए गए समतल, $2x + 2y + 4z + 5 = 0 \ldots (1)$

तथा $2x - 3y + 6z - 1 = 0 \ldots (2)$

दिए गए समतल समान्तर है, क्योंकि $\frac{2}{3} = \frac{-2}{-3} = \frac{4}{6}$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

d. दिए गए समतल $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ हैं।

समतल समान्तर होंगे यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

समतल लंबवत् होंगे यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

दिए गए समतल, $2x - y + 3z - 1 = 0 \ldots (1)$

तथा $2x - y + 3z + 3 = 0 \ldots (2)$

दिए गए समतल समान्तर है, क्योंकि $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} = \frac{3}{3}$

$$\Rightarrow 1 = 1 = 1$$

e. दिए गए समतल $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ हैं।

समतल समान्तर होंगे यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

समतल लंबवत् होंगे यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

दिए गए समतल, $4x + 8y + z + -8 = 0 \ldots (1)$

तथा $0.x + y + z - 4 = 0 \ldots (2)$

ये समतल समान्तर नहीं है क्योकि $\frac{4}{0} \neq \frac{8}{1} \neq \frac{1}{1}$

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 4 \times 0 + 8 \times 1 + 1 \times 1$$

$$= 0 + 8 + 1 = 9 \neq 0$$

ये समतल लंबवत् नहि है।

यदि दोनों समतलो के बिच कोण θ है।

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$= \frac{4.0+8.1+1.1}{\sqrt{4^2+8^2+1^2}\sqrt{0+1^2+1^2}}$$

$$= \frac{8+1}{\sqrt{16+64+1}\sqrt{1+1}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{81}\sqrt{2}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

अतः दोनों समतलों के बिच का कोण 45° है।

प्रश्न 14 निम्नलिखित प्रश्न में प्रत्येक दिए गए बिन्दु से दिए गए संगत समतल की दूरी ज्ञात कीजिए।

a.

बिन्दु	समतल
(0, 0, 0)	3x - 4y + 12z = 3

b.

बिन्दु	समतल
(3, -2, 1)	2x - y + 2z + 3 = 0

c.

बिन्दु	समतल
(2, 3, -5)	x + 2y - 2z = 9

d.

बिन्दु	समतल
(-6, 0, 0)	2x + 3y - 6z - 2 = 0

उत्तर-

a. हम जानते है। कि बिन्दु (x_1, y_1, z_1) की समतल ax + by + cz + d = 0 से दूरी

$$d = \left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$ होती है।

बिन्दु (0, 0, 0) की समतल 3x - 4y + 12z =3 से दुरी

$$= \left|\frac{3.0-4.0+12.0-3}{\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}}\right| = \left|\frac{-3}{\sqrt{9+16+144}}\right| = \frac{3}{13}$$ इकाई

b. हम जानते है। कि बिन्दु (x_1, y_1, z_1) की समतल $ax + by + cz + d = 0$ से दूरी

$$d = \left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$ होती है।

बिन्दु (3, -2, 1) की समतल $2x - y + 2z + 3 = 0$ से दुरी

$$= \left|\frac{2.3-(-2)+2.1+3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}\right| = \left|\frac{6+2+2+3}{\sqrt{4+1+4}}\right| = \left|\frac{13}{\sqrt{9}}\right| = \frac{13}{3}$$ इकाई

c. हम जानते है। कि बिन्दु (x_1, y_1, z_1) की समतल $ax + by + cz + d = 0$ से दूरी

$$d = \left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$ होती है।

बिन्दु (2, 3, -5) की समतल $x + 2y - 2z - 9 = 0$ से दुरी

$$= \left|\frac{2+2.3-2(-5)-9}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}\right| = \left|\frac{-2+6+10-9}{\sqrt{1+4+4}}\right|$$

$$= \left|\frac{9}{\sqrt{9}}\right| = \frac{9}{3} = 3$$ इकाई

d. हम जानते है। कि बिन्दु (x_1, y_1, z_1) की समतल $ax + by + cz + d = 0$ से दूरी

$$d = \left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$ होती है।

बिन्दु (-6, 0, 0) की समतल $2x - 3y + 6z - 2 = 0$ से दुरी

$$= \left| \frac{-2.6 - 3.0 + 6.0 - 2}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} \right| = \left| \frac{-12 - 2}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \right|$$

$$= \frac{14}{\sqrt{49}} = \frac{14}{7} = 2 \text{ इकाई}$$

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 512-514)

प्रश्न 1 दिखाइए कि मूल बिन्दु से (2, 1, 1) को मिलाने वाली रेखा बिन्दुओं (3, 5, -1) और (4, 3, -1) से निर्धारित रेखा पर लम्ब है।

उत्तर- बिन्दु A(2, 1, 1) और मूल बिन्दु O(0, 0, 0) वाली रेखा AO के दिक्-अनुपात = 2 - 0, 1 - 0, 1 - 0 या 2, 1, 1

तथा बिन्दु C(3, 5, -1) और D(4, 3, -1) से निर्धारित रेखा के दिक्-अनुपात = 4 - 3, 3 - 5, -1 + 1 या 1 - 2, 0

AO और CD लम्ब होंगी यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

अतः $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

$= 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 0 = 2 - 2 = 0$

अतः AO और CD परस्पर लम्ब हैं। इति सिद्धम्।

प्रश्न 2 यदि दो परस्पर रेखाओं की दिक्-कोसाइन l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 हों तो दिखाइए कि इन दोनों पर लम्ब रेखा की दिक्-कोसाइन $m_1n_2 - m_2n_1 - n_1l_2 - n_2l_1 - l_1m_2 - l_2m_1$ है

उत्तर- माना दी गई दो रेखाएँ AB और CD जिसके दिक्-कोसाइन क्रमशः l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 हों परस्पर लम्ब होती हैं। यदि

$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 दिक्-कोसाइन है तो l, m, n है।

तो $ll_2 + mm_2 + nn_2 = 0$

$ll_1 + mm_1 + nn_1$

$$\therefore \frac{l}{m_1n_2-m_2n_1} = \frac{n}{n_1l_2-n_2l_1} = \frac{m}{l_1m_2-l_2m_1}$$

या $$\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2}} \ldots (1)$$

$[\because l^2+m^2+n^2=1]$

$\because (m_1n_2-m_1n_2)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2$

$$=(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)$$

$$-(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)^2$$

$$=1\times 1-0=1$$

$$\left[\because l^2+m^2+n^2=1, l_2^2+m_2^2+n_2^2=0\right]$$

और $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

ये मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{l}{m_1n_2-m_2n_1} = \frac{m}{n_1l_2-n_2l_1} = \frac{n}{l_1m_2-l_2m_1} = \frac{1}{1} = 1$$

अतः $l = m_1n_2 - m_2n_1, m = n_1l_2 - n_1l_1$

तथा $n = n_2l_2 - l_1m_1$

प्रश्न 3 उन रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात कीजिए, जिनके दिक्-अनुपात a, b, c और b - c, c - a, a - b हैं।

उत्तर- मान लीजिए उन रेखाओं के बीच कोण 0 है और दिए हुए दिक्-अनुपात a, b, c, और b - c, c - a, a - b है तो

$$\cos\theta = \frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{(b-c)^2+(c-a^2+(a-b)^2}} = 0$$

$$\therefore \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

प्रश्न 4 x-अक्ष के समान्तर तथा मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- x-अक्ष के दिक्-कोसाइन = 1, 0, 0

$$\therefore \text{अभीष्ट रेखा का समीकरण} = \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$$

$$= \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$$

प्रश्न 5 यदि बिन्दुओं A, B, C और D के निर्देशांक क्रमशः (1, 2, 3), (4, 5, 7), (-4, 3, -6) और (2, 9, 2) हैं तो AB और CD रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- A(1, 2, 3), B(4, 5, 7) को मिलाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात = 4 - 1, 5 - 2, 7 - 3 या 3, 3, 4

तथा रेखा C(-4, 3, -6) और D(2, 9, 2) को मिलाने वाली रेखा CD के दिक्-अनुपात = 2 + 4, 9 - 3, 2 + 6 या 6, 6, 8 हैं।

AB तथा CD रेखाएँ समान्तर होगी।

$$\text{यदि } \frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

AB और CD आपस में समान्तर हैं।

∴ इनके बीच का 0° हैं।

प्रश्न 6 यदि रेखाएँ

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2} \text{ और } \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$$

परस्पर लम्ब हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दी गयी पहली रेखा के दिक्-अनुपात = -3, 2k, 2 तथा दूसरी रेखा के दिक्-अनुपात

= 3k, 1, -5 रेखाओं के परस्पर लम्ब होने के लिए,

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

$(-3) \times 3k + (2k) \times 1 + 2(-5) = 0$

$-9k + 2k - 10 = 0$

$-7k - 10 = 0$

$$k = -\frac{10}{7}$$

प्रश्न 7 बिन्दु (1, 2, 3) से जाने वाली रेखा तथा $\vec{r}\left(\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}\right) + 9 = 0$ पर लम्बवत् रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- समतल $\vec{r}(\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) + 9 = 0$ के लम्ब के अनुदिश सदिश

$= \hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore$ उस रेखा का समीकरण जो (1, 2, 3) से होकर जाती है और सदिश $= \hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ के अनुदिश है।

$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$

प्रश्न 8 बिन्दु (a, b, c) से जाने वाले तथा तल $\vec{r}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 2$ के समान्तर तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

समतल $\vec{r}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 2$ के समान्तर किसी भी समतल का समीकरण है

$$\vec{r}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 2\lambda$$

यह तल बिन्दु (a, b, c) से होकर जाता है

$$(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}).(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \lambda$$

$$a + b + c = \lambda$$

λ का मान समीकरण (1) में रखने पर।

$$\vec{r}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = a + b + c$$

या $x + y + z = a + b + c$

यह अभीष्ट समतल का समीकरण है।

प्रश्न 9 रेखाओ

$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$

के बिच की न्यूनतम दुरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिए गए समीकरण है

$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$

इनकी तुलना $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ से करने पर

$\vec{a}_1 = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{b}_1 = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{a}_2 = -4\hat{i} - \hat{k}$ तथा $\vec{b}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

अब $\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = 4\hat{i} - \hat{k} - (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) = -10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$= (4 + 4)\hat{i} + (6 + 2)\hat{j} + (-2 + 6)\hat{k}$

$= 8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$

अतः $|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 64 + 16}$

$= \sqrt{144} = 12$

दोनों रेखाओं के मध्य दुरी $= \left|\frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1).(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$

$= \left|\frac{(-10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})(8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k})}{12}\right|$

$= \left|\frac{-10 \times 8 + 8(-2) + 4(-3)}{12}\right|$

$\left|\frac{-80 - 16 - 12}{12}\right| = \left|\frac{-108}{12}\right| = 9$

प्रश्न 10 उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दु (5, 1, 6) और (3, 4, 1) को मिलाने वाली रेखा YZ तल को काटती है।

उत्तर- बिन्दु (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2}$$

(5, 1, 6) और (3, 4, 1) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-5}{3-5} = \frac{y-1}{4-1} = \frac{z-6}{1-6}$$

या $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-6}{-5}$

$\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-6}{5}$ (मान लिया)

इस रेखा पर किसी बिन्दु का निर्देशांक $(5+2\lambda, 1-3\lambda, 6+5\lambda)\ldots(1)$

यह बिन्दु YZ-तल अर्थात् x = 0 पर स्थित है।

$5 + 2\lambda = 0$ या $= -\frac{5}{2}$

λ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$x = 0$$

$y = 1 - 3\lambda = 1 - 3\left(-\frac{5}{2}\right) = 1 + \frac{15}{2} = \frac{17}{2}$ तथा

$$z = 6 + 5\lambda = 6 + 5\left(-\frac{5}{2}\right) = 6 - \frac{25}{2} = \frac{13}{2}$$

अतः अभीष्ट बिन्द $\left(0 \frac{17}{2}, \frac{13}{2}\right)$

प्रश्न 11 उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दुओं (5, 1, 6) और (3, 4, 1) को मिलाने वाली रेखा ZX-तल को काटती है।

उत्तर- दिए गए बिन्दुओं (5, 1, 6) और (3, 4, 1) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण है

$$\frac{x-5}{3-5} = \frac{y-1}{4-1} = \frac{z-6}{1-6}$$

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-6}{-5}$$

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-6}{5} = \lambda \text{ (मान लिया)}$$

इसी रेखा पर माना किसी बिन्दु P के निर्देशांक $(5+2\lambda, 1-3\lambda, 6+5\lambda)$

यह बिन्दु ZX-तल अर्थात् y = 0 पर स्थित है।

$$1 - 3\lambda = 0 \text{ या } \lambda = \frac{1}{3}$$

$$x = 5 + 2\lambda = 5 + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$$

$$y = 0$$

तथा $z = 6 + 5\lambda = 6 + 5\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{18+15}{3} = \frac{23}{3}$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{17}{3}, 0, \frac{23}{3}\right)$ है।

प्रश्न 12 उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दुओं (3,-4,-5) और (2,-3, 1) से गुजरने वाली रेखा, समतल 2x + y + z = 7 के पार जाती है।

उत्तर- दिए गए बिन्दुओं (3, -4, -5) और (2, -3, 1) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y+4}{-3+4} = \frac{z+5}{1+5}$$

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{6} = \lambda \text{ (मान लिया)}$$

इसी रेखा पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(3-\lambda, -4+\lambda, -5+6\lambda)$

यह ज्ञात बिन्दु समतल 2x + y + z = 7 पर स्थित है।

$$\therefore 2(3-\lambda) + (-4+\lambda) + (-5+6\lambda) = 7$$

$$6 - 2\lambda - 4 + \lambda - 5 + 6\lambda = 7$$

$$5\lambda = 0$$

$$\therefore \lambda = 2$$

अत: अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक

$$x = 3 - \lambda = 3 - 2 = 1$$

$$y = -4 + \lambda = -4 + 2 = -2$$

$$z = -5 + 6\lambda = -5 + 6 \times 2 = 7$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक (1, -2, 7) हैं।

प्रश्न 13 बिन्दु (-1, 3, 2) से जाने वाले तथा समतलों x + 2y + 3z = 5 और 3x +3y + 2 = 0 में से प्रत्येक पर लम्ब समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-मान लीजिए बिन्दु (-1, 3, 2) से जाने वाले समतल का समीकरण है।

a(x + 1) + b(y - 3)+ c(z - 2) = 0

दिया गया समतल x + 2 + 32 = 5 पर लम्ब है

a + 2b + 3c = 0 तथा समतल 3x + 3y + z = 0 पर लम्ब है

3a + 3b + c = 0

समीकरण (ii) और (iii) से,

$$\frac{a}{2-9} = \frac{b}{9-1} = \frac{c}{3-6}$$

$$\frac{a}{-7} = \frac{b}{8} = \frac{c}{-3}$$

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{-8} = \frac{c}{-3} = \lambda \text{ (मान लिया)}$$

$$\therefore a = 7\lambda, b = -8\lambda \text{ और } c = 3\lambda$$

a, b, c का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$7\lambda(x+1) - 8\lambda(y-3) + 3\lambda(z-2) = 0$$

या $7\lambda(x+1) - 8(y-3) + 3(z-2) = 0$

या $7x - 8y + 3z + 7 + 24 - 6 = 0$

या $7x - 8y + 3z + 25 = 0$

प्रश्न 14 यदि बिन्दु (1, 1, p) और (-3, 0, 1) समतल $\vec{r}(3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) + 13 = 0$

से समान दूरी पर स्थित हों तो p का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- हम जानते हैं कि बिन्दु $\vec{a}$ से समतल $\vec{r}.\vec{n} = d$ की दूरी

$$= \left| \frac{\vec{a}_1.\vec{n} = d}{|\vec{n}|} \right|$$

दिया है $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + p\hat{k}, \vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}, d = -13$

$\therefore$ दिए गए बिन्दु से समतल की दूरी, $d_1 = \frac{\vec{a}_1(\vec{n}_1) - d}{\overrightarrow{n_r}}$

$$= \left| \frac{(\hat{i}+\hat{j}+p\hat{k}).(3\hat{i}+4\hat{j}-12\hat{k})+13}{\sqrt{9+16+144}} \right|$$

$$= \left| \frac{(3+4-12p)+13}{\sqrt{169}} \right| = \left| \frac{20-12p}{13} \right|$$

साथ ही बिन्दु (-3, 0, 1) से समतल $\vec{r}(3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) + 13 = 0$ से दूरी,

$$d_2 = \left| \frac{(-3\hat{i}+\hat{k}).(3\hat{i}+4\hat{j}-12\hat{k})+13}{\sqrt{3^2+4^2 12^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{-9-12+13}{13} \right| = \frac{8}{13}$$

अब $d_1 = d_2$

$$\left| \frac{20-12p}{13} \right| = \pm \frac{8}{13} = 20 - 12p = 8$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर, $20 - 12p = 8$

$\therefore 12p = 20 - 8 = 12$ या $p = 1$

तथा ऋणात्मक चिन्ह लेने पर $20 - 12p = -8$

$\therefore 12p = 20 + 8 = 28$

$\therefore p = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$

अतः $p = 1$ या $\frac{7}{3}$

प्रश्न 15 समतलों

$$\vec{r}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=1 \text{ और } \vec{r}.(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+4=0$$

के प्रतिच्छेदन रेखा से जाने वाले तथा :-अक्ष के समान्तर तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिए गए समतलों के प्रतिच्छेदन से जाने वाले समतल का समीकरण

$$\vec{r}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})-1+\lambda\left[\vec{r}(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}+4)\right]=0$$

$$\vec{r}\left[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1-\lambda)\hat{k}\right]-1+4\lambda=0\ldots(1)$$

∵ यहाँ तल, x-अक्ष के समान्तर है।

∴ x-अक्ष के दिक्-कोसाइन 1, 0, 0 हैं।

समतल का लम्ब सदिश $\left[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1-\lambda)\hat{k}\right]$ के अनुदिश है।

अतः $1.(1+2\lambda)=0$ या $=-\frac{1}{2}$

λ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\vec{r}\left[\left(1-2\times\frac{1}{2}\right)\hat{i}+\left(1-\frac{3}{2}\right)\hat{j}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\hat{k}\right]-1-\frac{1}{2}=0$$

या $\vec{r}\left(-\frac{1}{2}\hat{j}+\frac{3}{2}\hat{k}\right)-3=0$

या $\vec{r}(-\hat{j}+3\hat{k})-6=0$

या $\vec{r}(\hat{j}-3\hat{k})+6=0$ या $y-3z+6=0$

यह अभीष्ट समतल का समीकरण है।

प्रश्न 16 यदि O मूल बिन्दु तथा बिन्दु P के निर्देशांक (1, 2, -3) हैं तो बिन्दु P से जाने वाले तथा OP के लम्बवत् तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-मूल बिन्दु तथा P(1, 2, -3) से होकर जाने वाली वाली रेखा के दिक्-अनुपात 1 - 0, 2 - 0, - 3 - 0 या 1, 2, -3 हैं।

और समतल P(1, 2, -3) से होकर जाता है।

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$1.(x - 1) + 2(y - 2) - 3(z + 3) = 0$$

या $(x - 1) + 2(y - 4) - 3(z - 9) = 0$

या $(x) + 2(y) - 3(z - 14) = 0$

प्रश्न 17 समतलों

$\vec{r}(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$ और $\vec{r}(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$

के प्रतिच्छेदन रेखा को अन्तर्विष्ट करने वाले तथा तल

$\vec{r}(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{i}) + 8 = 0$ के लम्बवत् तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिए गए समतल हैं

$$\vec{r}(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$$

और $\vec{r}(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$

इनकी प्रतिच्छेदन रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण

$\vec{r}(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 + \lambda[\vec{r}(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{ik}) + 5] = 0$

या $\vec{r}(1 + 2\lambda)\hat{i} + (2 + \lambda)\hat{j} + (3 - \lambda)\hat{k} - 4 + 5\lambda = 0$

जोकि समतल $\vec{r}(5\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) + 8 = 0$ के लम्बवत् है।

अर्थात् $(1 + 2\lambda) \times 5 + (2 + \lambda) \times 3 + (3 - \lambda) \times (-6) = 0$ या

$5 + 10\lambda + 6 + 3\lambda - 18 + 6\lambda = 0$

या $19\lambda - 7 = \lambda = \frac{7}{19}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$\vec{r}\left[\left(1 + 2\frac{7}{19}\right)\hat{i} + \left(2 + \frac{7}{19}\right)\hat{j} + \left(3 - \frac{7}{19}\right)\hat{k}\right]$

$-4 + 5 \times \frac{7}{19} = 0$

या $\vec{r}\left[\frac{33}{19}\hat{i} + \frac{45}{19}\hat{j} + \frac{50}{19}\hat{k}\right] - \frac{41}{19} = 0$

या $\vec{r}(33\hat{i} + 45\hat{j} + 50\hat{k}) - 41 = 0$

या $33x + 45y + 50z = 41$

यही अभीष्ट तल का समीकरण है।

प्रश्न 18 बिन्दु (-1, -5, -10) से रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ और समतल $\vec{r}(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु के मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- रेखा और समतल के समीकरण हैं

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}) \ldots . (1)$

और

$\vec{r}(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = \ldots (2)$ समीकरण (i) तथा (ii) को हल करने पर,

$$\left[2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})\right](\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$$

या $(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}).(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

$+\lambda\left[(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5\right.$

या $(2 + 1 + 2) + \lambda(3 - 4 + 2) = 5$

$5 + \lambda(1) = 5$

$\lambda = 0$

λ का मान समी. (1) में रखने पर, $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

दिया गया बिन्दु $(-1, -5, -10) = -\hat{i} - 5\hat{j} - 10\hat{k}$

इन बिन्दुओं के मध्य दूरी $= \sqrt{[2 - (-1)]^2 + (-1 + 5) + (2 + 10)^2}$

$= \sqrt{3^3 + 4^2 + 12^2}$

$= \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$

प्रश्न 19 बिन्दु (1, 2, 3) से जाने वाली तथा समतलों

$\vec{r}(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$ और $\vec{r}(3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$

के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान लीजिए बिन्दु (1, 2, 3) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}) \ldots (1)$$

रेखा समतल $\vec{r}(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$ के समान्तर है। समतल का अभिलम्ब और रेखा (i) परस्पर लम्बवत् है।

$$a - b + 2c = 0$$

इसी प्रकार रेखा (i) और समतल $\vec{r}(3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ समान्तर है।

रेखा (i) और समतल का अभिलम्ब परस्पर लम्बवत् है।

$$\Rightarrow 3a + b + c = 0$$

समीकरण (ii) और (iii) को हल करने पर,

$$\frac{a}{-1-2} = \frac{b}{6-1} = \frac{c}{1+3}$$

$$\frac{a}{-3} = \frac{b}{5} \text{ या } = \frac{a}{3} = \frac{b}{-5} = \frac{c}{-4}$$

a,b का c के मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$$

$$= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(-3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k})$$

प्रश्न 20 बिन्दु (1, 2, -4) से जाने वाली और दोनों रेखाओं

$$\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7} \text{ और } \frac{x-15}{3} = \frac{x-29}{8} = \frac{x-5}{-5}$$

पर लम्ब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान लीजिए अभीष्ट रेखा

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}) \ldots (1)$$

रेखाओं के समीकरण हैं

$$\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$$

और $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})$ आपस में लम्ब हैं।

अत: इन रेखाओं के दिक्-अनुपात 3, -16, 7 और a, b, c हैं। ये रेखाएँ परस्पर लम्ब होंगी यदि

$$3a - 16b + 7c = 0 \ldots (2)$$

इसी प्रकार रेखा $\frac{x-15}{3} = \frac{x-29}{8} = \frac{x-5}{-5}$

और $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})$ के दिक्-अनुपात 3, 8, -5 और a, b तथा c हैं।

ये परस्पर लम्बवत् होंगी यदि $\therefore\ 3a - 8b - 5c = 0 \ldots (3)$

समीकरण (2) और (3) को हल करने पर,

$$\frac{a}{80-56} = \frac{b}{21+15} = \frac{c}{24+48}$$

या $\frac{a}{24} = \frac{b}{36} = \frac{c}{72}$

या $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6}$

a, b, तथा c के मान समी. (1) में रखने पर

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

यही अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

प्रश्न 21 यदि एक समतल के अन्त:खण्ड a, b, c हैं और इसकी मूल बिन्दु से दूरी p इकाई है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{p_2}$$

उत्तर- ऐसे समतल का समीकरण जिसके अन्त:खण्ड a, b, c हैं।

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

समतल की मूल बिन्दु से दूरी = p

अत: या $p = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$

या $p^2 = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$

$\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{p^2}$ इति सिद्धम्

प्रश्न 22 सही उत्तर का चुनाव कीजिए-

दो समतलों 2x + 3y + 43 - 4 और 4r + by + 88 - 12 के बीच की दूरी है

a. 2 इकाई
b. 4 इकाई
c. 8 इकाई
d. $\dfrac{2}{\sqrt{29}}$ इकाई

उत्तर-

d. $\dfrac{2}{\sqrt{29}}$ इकाई

हल-

समतल के समीकरण,

2x + 3y + 43 = 4 और 4x + 6y + 8z = 12

या 2x + 3y + 4z = 6

समतल (1) तथा (2) के बीच की दूरी

$$= \frac{6-4}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

अत: विकल्प (d) सही है।

प्रश्न 23 सही उत्तर का चुनाव कीजिए-

समतल 2x -y + 4x = 5 और 5x -2 5y + 10x = 6 हैं।

a. परस्पर लम्ब
b. समान्तर
c. y-अक्ष पर प्रतिच्छेदन करते हैं।
d. बिन्दु $\left(0, 0\frac{5}{4}\right)$ से गुजरते है।

उत्तर-

b. समान्तर

हल-

समतल के समीकरण

2x -y + 4z = 5 और

$5x - 2.5y + 10z = 6$ उपरोक्त समीकरणों में x, y तथा z के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$\frac{2}{5} = \frac{-1}{-2.5} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

अर्थात् दोनों ही समतल समान्तर हैं।

अतः विकल्प (B) सही है।