गणित

अध्याय-11: क्षेत्रमिति

क्षेत्रमिति की परिभाषा:

ज्यामितीय क्षेत्रमिति गणित की एक ऐसी शाखा है जो मापन सम्बन्धित क्रियाओं को पूर्ण करती है. मापन में भी विशेष रूप से यह ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफल, आयतन, एवं परिमिति या परिमाप के सूत्रों की निष्पत्ति एवं उनके प्रयोग से सम्बन्ध रखती है.

यहाँ क्षेत्रमिति के कुछ प्रमुख घटक है जो इस प्रकार है.

परिमाप/ परिधि: क्षेत्रमिति में परिमाप या परिधि एक ऐसी दुरी है जो रेखाखंडो से बनी आकृति के रेखाखंडो के साथ-साथ चलते हुए एक बंद आकृति बनाती है. अतः उस आकृति के चारों और चक्कर ही परिमाप कहलाता है. दुसरें शब्दों में, किसी आकृति के सभी भुजाओं की लंबाइयों का योग उस आकृति का परिमाप या परिमिति कहलाता हैं

क्षेत्रफल: किसी समतल या वक्रतल के द्वि-आयामी आकृति के परिमाण को क्षेत्रफल कहा जाता है. जिस क्षेत्र के क्षेत्रफल ज्ञात की जाए, वह क्षेत्र सामान्यतः किसी बन्द वक्र से घिरा होता है. क्षेत्रफल को हमेशा वर्ग इकाई में ही मापा जाता है.

आयतन: किसी त्रिविमीय आकृति द्वारा घिरा गया स्थान आयतन कहलाता है. किसी पदार्थ द्वारा घिरे हुए स्थान को लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई में व्यक्त किया जाता है. आयतन को हमेशा घन इकाई में मापा जाता है.

Note:-

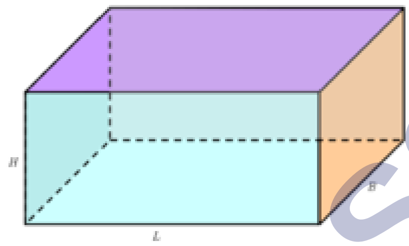
केवल त्रिविमीय आकृति के ही आयतन होते है. जैसे, बेलन, शंकु घन, घनाभ, गोला, छिन्नक आदि.

क्षेत्रमिति के सभी फार्मूला:-

द्विविमीय आकृति जैसे आयत, वर्ग, समकोण त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज आदि के क्षेत्रफल और परिमाप एवं त्रिविमीय आकृती जैसे घन, घनाभ, बेलन, शंकु, गोला, शंकु आदि का आयतन, क्षेत्रफल एवं परिधि यहाँ विस्तृत रूप से शामिल है. जो गणित आपको उज्जवल भविष्य के ओर ले जाएगा.

घनाभ

घनाभ (क्यूब्वायड) या आयतफलकी वह समान्तरषटफलक है जिसका प्रत्येक फलक आयताकार हो। जब तीनों बीमा (लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई) समान हों तो वह आकार घन (क्यूब) कहलाता है। ईंट, आयतफलकी का सबसे अच्छा उदाहरण है।



घनाभ के सूत्र

घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$.

घनाभ का परिमाप = $2(l + b) \times h$.

घनाभ के समस्त पृष्ठों का क्षेत्रफल = 2(लम्बाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + ऊँचाई × लम्बाई)

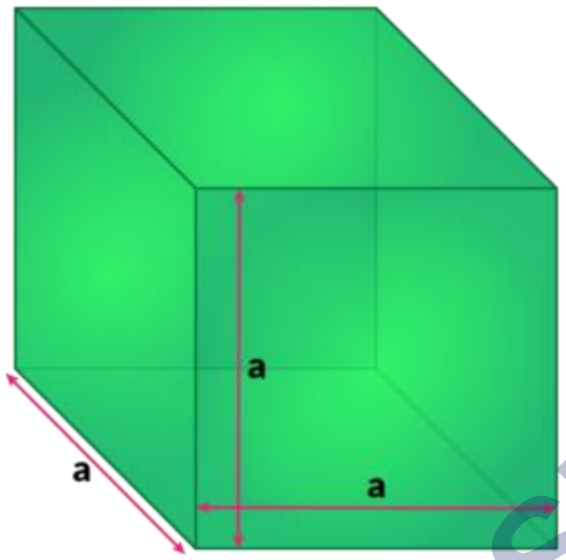
घनाभ के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$

घनाभ के विकर्ण = √(लम्बाई)^2 + (चौड़ाई)^2 + (ऊँचाई)^2

घन

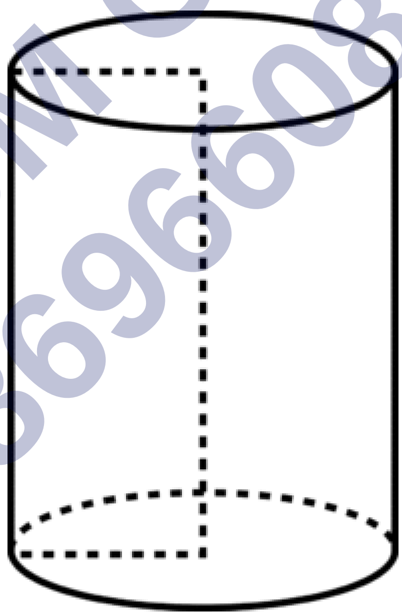
घन का आयतन = भुजा × भुजा × भुजा = भुजा^{3} (भुजा पर घतांक 3) घन इकाई / घन यूनिट होता है । जो कि घनाभ के आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊंचाई घन इकाई /घन यूनिट का ही एक रूप होता है । घन एक ऐसी त्रिआयामी आकृति को कहा जाता है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई सामान होती हैं।

घन का आयतन = भुजा × भुजा x भुजा या भुजा^{3}



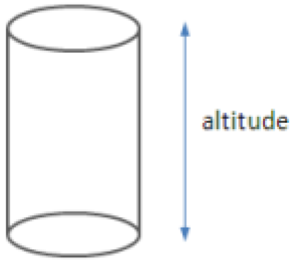
बेलन

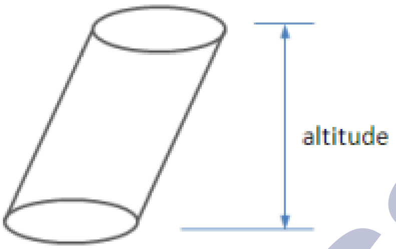
बेलन एक ऐसी त्रिआयामी(3d) ठोस आकृति होती है जोकि दो वृत्त एवं एक वक्र आयत से मिलकर बना होता है। इसके दो सिरे सामान त्रिज्या वाले वृत्त होते हैं एवं पार्श्व प्रष्ठ वक्र(curved) होता है।



समकोणीय एवं परोक्ष बेलन

समकोणीय बेलन एक ऐसा बेलन होता है जिसका अक्ष आधार को समकोण पर काटता है। लेकिन अगर कोई अक्ष आधार को समकोण पर नहीं काट रहा है तो फिर वह बेलन एक परोक्ष बेलन होगा।





बेलन का आयतन एवं क्षेत्रफल

अगर हमें एक बेलन का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालना है तो हमें इसे सबसे पहले तीन टुकड़ों में बांटना पडेगा। ये तीन टुकड़े होंगे दो सर्वांग्सम एवं समान्तर वृत्त एवं वक्र पृष्ठ जो कि एक आयत है।

जैसा कि हम जानते हैं कि एक वृत्त का क्षेत्रफल πr2 होता है। अगर हमारे पास दो वृत्त हैं तो फिर इनका कुल क्षेत्रफल होगा।

= 2 πr2

अब हमें बचे हुए आयत का क्षेत्रफल निकालना है जोकि होता है लम्बाई * चौड़ाई । यहाँ हमारे पास आयत की लम्बाई तो बेलन की ऊंचाई मानी जायेगी। अब जो आयत की चौड़ाई है वह वृत्त के परिमाप के सामान होगी जोकि 2πr होगा। अतः इस आयत का क्षेत्रफल होगा।

= 2πr × h

जब हम इन दोनों टुकड़ों को जोड़ देंगे तो इस बेलन का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा।

= 2 πr2 + 2πr × h

अतः बेलन का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2πr(r + h)

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

जैसा कि हम जानते हैं की बेलन का वक्र पृष्ठ सिर्फ एक आयत होता है अतः हमें सिर्फ उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा। यही क्षेत्रफल इस बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा।

जैसा की हम जानते हैं एक आयत का क्षेत्रफल होता है :

लम्बाई × चौड़ाई

यहाँ आयत की लम्बाई तो बेलन की ऊंचाई हो जायेगी लेकिन आयत की चौड़ाई वृत्त का परिमाप होगा। अतः हमें वह ज्ञात करना होगा। जैसा कि हम जानते हैं की एक वृत्त का परिमाप होगा :

$= 2\pi r$

अब हम वृत्त के परिमाप को एवं बेलन की ऊँचाई को गुना कर देंगे जिससे हमारे पास बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल या आयत का क्षेत्रफल आया जाएगा।

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r \times h$

बेलन का आयतन

आयतन(volume) का मतलब होता है की कोई त्रिआयामी आकृति अपने अन्दर कितना द्रव्य रख सकती है। इसे हम अक्सर m^3 या cm^3 से व्यक्त करते हैं।

एक बेलन का आयतन (volume of cylinder) निकालना बहुत सरल होता है। इसके लिए हमें बस वृत्त के क्षेत्रफल को बेलन की ऊंचाई से गुना करना पड़ता है।

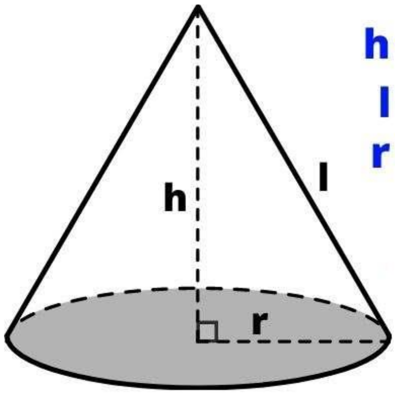
वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

इसे ऊंचाई (h) से गुना करने पर :

बेलन का आयतन = πr^{2h}

शंकु

शंकु (Cone) एक ऐसी त्रिआयामी (3d) आकृति है जिसका जिसका आधार गोलाकार होता है तथा जिसका शीर्ष एक बिंदु होता है। यदि किसी Shanku का आधार एक वृत्त हो तो उसे हम लम्ब वृत्तीय शंकु कहते है। यह शंकु समान आधार और ऊंचाई वाले बेलन के $\frac{1}{3}$ भाग के बराबर होता है।



एक शंकु में केवल एक आधार होता है एवं गोलाकार होता है। यह Cone का नीचे का हिस्सा होता है। इसे शंकु का फलक भी कहा जाता है।

एक शंकु में एक शीर्ष होता है। शंकु का शीर्ष एक बिंदु होता है।

एक शंकु की चौड़ाई उसके गोलाकार फलक का व्यास होता है अर्थात शंकु के गोलाकार भाग का व्यास ही शंकु की चौड़ाई होती है।

शंकु का क्षेत्रफल

शंकु का क्षेत्रफल दो प्रकार का होता है एक पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा दूसरा वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल। आइये अब Shanku के क्षेत्रफल को निकालने के लिए महत्वपूर्ण सूत्रों को जाने।

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल –

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने के लिए हमें शंकु की त्रिज्या तथा शंकु की तिर्यक (तिरछी) ऊंचाई का पता होना चाहिए। तभी हम शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल निकाल सकते हैं।

शंकु का वक्र पृष्ठिय क्षेत्रफल = πRL

अगर हमें शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा त्रिज्या दी गयी हो तो हम शंकु की तिर्यक ऊंचाई निकाल सकते हैं। इसके लिए हम शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को इसके सूत्र के बराबर लिख कर

और थोड़ी सी कैल्कुलेशन करके मान ज्ञात कर सकते हैं। ऐसा ही हम अन्य सूत्रों के साथ भी कर सकते हैं।

शंकु के पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने का मतलब होता है शंकु के चारों तरफ का क्षेत्रफल। इसमे शंकु के तल में मौजूद वृत का क्षेत्रफल भी शामिल होता है। शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने के लिए हम सूत्र का उपयोग करते हैं। Cone के पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल में हम शंकु तथा वृत के क्षेत्रफल को जोड़ देते हैं। क्योंकि Shanku के तल में वृत भी होता है।

जब हम शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृत्त का क्षेत्रफल भी जोड़ देते हैं तो हमें शंकु का पूर्ण पृष्ठीय या सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + वृत्त का क्षेत्रफल = शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\pi rl+\pi rl=\pi r(l+r)$$

अन्तः शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = πr (l + r)

यहाँ R या r का मतलब शंकु के आधार की त्रिज्या होता है तथा L या l का मतलब शंकु की तिर्यक अर्थात तिरछी ऊंचाई होता है। पाई का मान हम $\frac{22}{7}$

या 3.14 लेते हैं।

अगर किसी सवाल या प्रश्न में हमें शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने के लिए कहा जाए तो हम शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालेंगे ना कि वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल।

शंकु का आयतन

शंकु की बनावट के आधार पर हम Shanku का आयतन शंकु के समान आधार वाले एक बेलन के आयतन का तीसरा हिस्सा मानते हैं। जितना समान आधार वाले बेलन का आयतन होगा उसका तीसरा हिस्सा उसी आधार वाले शंकु का आयतन होगा।

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\times$बेलन का आयतन

इस प्रकार से Shanku का आयतन बेलन के आयतन का तीसरा हिस्सा होगा। इसलिए हम बेलन के आयतन को 3 से भाग कर देते हैं और हमें शंकु के आयतन का सूत्र मिल जाएगा।

शंकु का आयतन $\frac{1}{3}\ \pi r^2 h$

गोला

गोले के सभी सूत्रों को याद करने से पहले जरुरी है कि गोले से सम्बंधित सभी प्रकार के मूल बातों को जान ले. जैसे कि गोला किसे कहते हैं अथवा गोले की परिभाषा क्या है, गोले की त्रिज्या, गोले का व्यास तथा गोले कितने प्रकार के होते हैं।

गोले का केंद्र व त्रिज्या

केंद्र (Center):- जिस निश्चित बिंदु या नियत बिंदु से एक त्रि-आयामी गोले का निर्माण होता है, वह नियत बिंदु गोले का केंद्र कहलाता है। जैसा की ऊपर दिए गए चित्र नियत बिंदु O गोले का केंद्र (Center) है।

त्रिज्या की माप :- किसी भी गोले की केंद्र से उसकी सतह के बीच के रेखाखंड की लम्बाई को गोले की त्रिज्या कहते हैं। जैसा की ऊपर दिए गए गोले की चित्र से स्पष्ट हो रहा है केंद्र बिंदु (O) तथा सतह बिंदु (A) के बीच की रेखाखंड की लम्बाई ही गोले की त्रिज्या की माप है। गोले के त्रिज्या की माप से गोले का आयतन तथा सम्पूर्ण वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल (Gole ka Formula) आसानी से निकाल सकते हैं।

गोले का आयतन तथा क्षेत्रफल

गोले का व्यास (Diameter of Sphere):- किसी भी गोले के सतह पर स्थित एक बिंदु से दुसरे बिंदु पर जाने वाली रेखाखंड की लम्बाई जो की केंद्र बिंदु से होकर गुजरती है, गोले का व्यास

(Diameter of Gola) कहलाता है। ऊपर दिए चित्र में देख सकते हैं की रेखाखंड AB गोले का व्यास है जो की गोले के केंद्र बिंदु से होकर गुजर रही है।

गोले की व्यास की लम्बाई या सूत्र = 2 x गोले की त्रिज्या

गोले का व्यास (Diameter of Sphere):- किसी भी गोले के सतह पर स्थित एक बिंदु से दुसरे बिंदु पर जाने वाली रेखाखंड की लम्बाई जो की केंद्र बिंदु से होकर गुजरती है, गोले का व्यास (Diameter of Gola) कहलाता है। ऊपर दिए चित्र में देख सकते हैं की रेखाखंड AB गोले का व्यास है जो की गोले के केंद्र बिंदु से होकर गुजर रही है।

गोले की व्यास की लम्बाई या सूत्र = 2 x गोले की त्रिज्या

एक गोले के बाहरी सतह द्वारा घिरा हुआ भाग, गोले का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल होता है. चूँकि एक गोले में में कोई किनारा या कोना नहीं होता है, इसीलिए एक गोले का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल ही गोले के सम्पूर्ण क्षेत्रफल होता है. अतः निम्नलिखित संबंधो द्वारा एक गोले का सम्पूर्ण वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल का फार्मूला या सूत्र को परिभाषित करते हैं।

माना कि एक गोला है जिसका केंद्र बिंदु O है, त्रिज्या R है तथा व्यास की लम्बाई D है, अतः

गोले का सम्पूर्ण वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = 4 πR2

जहाँ π = 3.14

किसी भी गोले (Sphere) का क्षेत्रफल का फार्मूला (Formula) जब गोले का व्यास (Diameter) दिया हुआ हो.

Sphere ka Kshetrafal Formula = π D2

गोला का आयतन का सूत्र

किसी भी एक गोले के आयतन निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जा सकता है. चूँकि गोला दो प्रकार का होता है, ठोस गोला तथा खोखला गोला. अतः दोनों ही गोले का आयतन का फार्मूला निकालने के लिए गोले के त्रिज्या (खोखले गोले के लिए बाह्य तथा अन्तः त्रिज्या) का माप तथा व्यास की लम्बाई पता होना चाहिए.

ठोस गोला वह गोला होता है जो कि अंदर से भरा हुआ होता है, अर्थात गोले के आंतरिक भाग खोखला नहीं होता है। गोले का उदाहरण – पृथ्वी, उपग्रह, बॉल बेअरिंग.

माना कि ठोस गोले का त्रिज्या R तथा व्यास D है, तब

गोले का आयतन का फार्मूला $= \frac{4}{3}\ \pi R^3$

यदि गोले का व्यास का माप दिया हो उस स्थिति में गोले का आयतन का सूत्र

गोले का आयतन का सूत्र $= \left(\frac{1}{6}\right)\ \pi D^3$

.खोखले गोला का आयतन का सूत्र

ऐसा गोला जो की अंदर से खाली या खोखला होता है वह खोखला गोला या गोलीय कोश कहलाता है. गोलीय कोश का उदाहरण- बॉल, बलून आदि.

किसी भी खोखले गोला या गोलीय कोश के आयतन का सूत्र (Formula) निकालने के लिए गोले का आतंरिक त्रिज्या तथा बाह्य त्रिज्या का माप पता होना चाहिए.

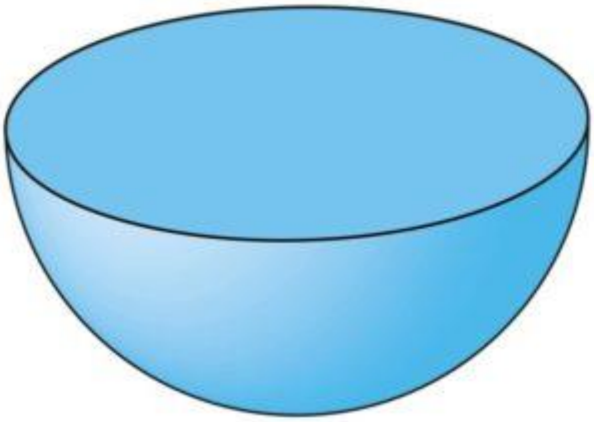
माना कि खोखले गोले का आंतरिक त्रिज्या (r) तथा बाह्य त्रिज्या R है, तब

खोखले गोले का आयतन का सूत्र $= \frac{4}{3}\ \pi(R^3 - R^3)$

यदि खोखले गोले का आतंरिक तथा बाह्य व्यास का माप क्रमशः d तथा D है तब,

खोखले गोले का आयतन का सूत्र $= \left(\frac{1}{6}\right) \pi(D^3 - d^3)$

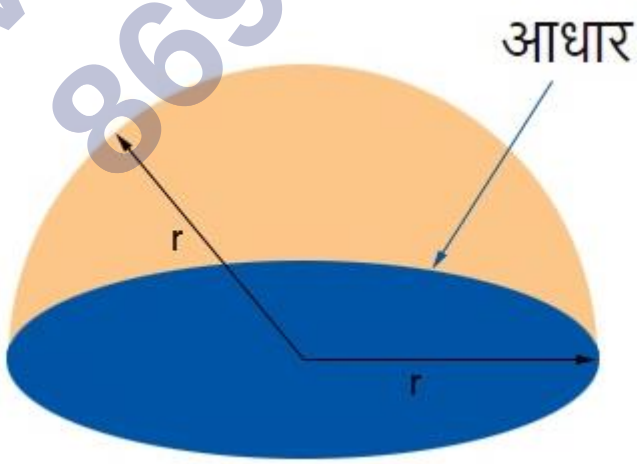
अर्द्ध गोला (Hemisphere)



जैसा की इसके नाम से ही प्रतीत हो रहा है, एक अर्ध गोला पूरे गोले का आधा भाग होता है। जब एक गोले को दो भागों में बांटा जाता है उससे हमें जो आकृति मिलती है वह अर्धगोला कहलाती है। इसकी एक सतह चपटी(flat) होती है एवं दूसरी सतह वक्र(curved) होती है।

ऊपर दी गयी आकृति में जैसा कि आप देख सकते हैं यहाँ इस त्रिआयामी आकृति की ऊपर वाली सतह चपटी(flat) है एवं जो दूसरी सतह है वह वक्र(curved) है। अतः यह एक अर्धगोला कहलायेगा।

अर्ध गोले की दो ही सतह होती हैं। पहली सतह चपटी होती है एवं दूसरी सतह वक्र अर्थात curved होती है। चपटी सतह उस अर्ध गोले का आधार कहलाती है।



एक अर्धगोले की जो वृत्त के आकार सतह होती है उसके हर बिंदु की केंद्र से दूरी समान होती है।

अर्ध गोला एक पूरे गोले को दो भागों में विभाजित किये जाने से बना होता है।

एक पूरे गोले को जब हम दो भागों में विभाजित करते हैं तो हमारे पास दो अर्धगोले हो जाते हैं।

अर्धगोले का आयतन

जैसा कि हम जानते हैं एवं पहले भी देख चुके हैं एक अर्ध गोला पूरे गोले का आधा भाग होता है अतः इसका आयतन भी पूरे गोले का आयतन का आधा होगा।

अतः

अर्ध गोले का आयतन = $\frac{1}{2}$ × गोले का आयतन

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3$$

अतः अर्ध गोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^2$

अर्धगोले का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

एक अर्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल एक पूर्ण गोले के क्षेत्रफल को आधा करने पर निकल गया। अब हमें इसका पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालना है तो बस इसके आधार का क्षेत्रफल जोड़ना होगा।

अर्ध गोले का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = अर्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

अतः अर्ध गोले का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$ वर्ग unit

ठोसों के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

पृष्ठीय क्षेत्रफल किसी 3D आकृति पर मौजूद सभी फलकों (या सतहों) के क्षेत्रफल का योग होता है। कुछ ठोस एक से अधिक आकृतियों के संयोजन से बनी होती हैं। इस प्रकार की आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए सभी संयोजित आकृतियों का क्षेत्रफल अलग-अलग ज्ञात करके सभी क्षेत्रफल का योग करें।

उदाहरण के लिए पानी या केरोसिन के टैंकर को लेते हैं जो बीच में बेलनाकार तथा दोनों तरफ अर्द्धगोलाकार होता है। इसलिए इस ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल तीनों भागों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा। इससे हमें प्राप्त होता है:

ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = एक अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + दूसरे अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

उदाहरण

रशीद को जन्मदिन के उपहार के रूप में एक लट्टू मिला, जिस पर रंग नहीं किया गया था। वह इस पर अपने मोमिया रंगों से रंग करना चाहता है। यह लट्टू एक शंकु के आकार का है जिसके ऊपर एक अर्धगोला अध्यारोपित है। लट्टू की पूरी ऊँचाई 5 cm है और इसका व्यास 3.5 cm है। उसके द्वारा रंग किया जाने वाला क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi=\frac{22}{7}\right)$ लीजिए।

हल:

यह लट्टू दो आकृतियों के संयोजन से बना है। एक अर्द्धगोला तथा उसके ऊपर शंकु है। अतः, हम वहाँ पर प्राप्त परिणाम को सुविधाजनक रूप से यहाँ प्रयोग कर सकते हैं। अर्थात्

लट्टू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$=\frac{1}{2}(4\pi r^2)=2\pi r^2$$

$$=2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\,cm^2$$

साथ ही, शंकु की ऊँचाई = लट्टू की ऊँचाई – अर्धगोलीय भाग की ऊँचाई (त्रिज्या)

$$=\left(5-\frac{3.5}{2}\right)cm$$

अतः शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l)= $\sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2} + (3.25)^2 = 3.7$ cm

इसलिए शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl = \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\ cm^2$

लट्टू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2 \times 22/7 \times 3.5/2 \times 3.5/2\ cm^2 + 22/7 \times 3.5/2 \times 3.7\ cm^2$

$= 39.6\ cm^2$

उदाहरण

एक आकृति सजावट के लिए प्रयोग होने वाला ब्लॉक दो ठोसों से मिलकर बना है। इनमें से एक घन है और दूसरा अर्धगोला है। इस ब्लॉक का आधार 5 cm कोर या किनारे वाला एक घन है और उसके ऊपर लगे हुए अर्धगोले का व्यास 4.2 cm है। इस ब्लॉक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 22/7 लीजिए।)

हलः

घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 × (कोर)^2 = $6 \times 5 \times 5\ cm^2 = 150\ cm^2$

अब, घन का वह भाग जिस पर अर्धगोला लगा हुआ है पृष्ठीय क्षेत्रफल में सम्मिलित नहीं होगा।

अतः ब्लॉक का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल – अर्धगोले के आधार का क्षेत्रफल + अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2 = (150 + \pi r^2)\ cm^2$

$= 150\ cm^2 + 22/7 \times 4.2 \times 4.2\ cm^2$

$= 150\ cm^2 + 13.86\ cm^2 = 163.86\ cm^2$

ठोसों के संयोजन का आयतन

इस अनुच्छेद में यह ज्ञात करने की कोशिश करेंगे कि इस प्रकार के ठोसों के आयतन किस प्रकार परिकलित किए जाते हैं। ध्यान दीजिए कि पृष्ठीय क्षेत्रफल परिकलित करने में हमने दोनों घटकों (ठोसों) के पृष्ठीय क्षेत्रफलों को जोड़ा नहीं था क्योंकि इनको मिलाने की प्रक्रिया में पृष्ठीय क्षेत्रफल का कुछ भाग लुप्त हो गया था। परंतु आयतन परिकलित करने की स्थिति में ऐसा नहीं होगा। दो

आधारभूत ठोसों के संयोजन से बने ठोस का आयतन वास्तव में दोनों घटकों के आयतनों के योग के बराबर होता है, जैसाकि हम नीचे दिए उदाहरण में देखेंगे।

उदाहरण

शांता किसी शेड में एक उद्योग चलाती है। यह शेड एक घनाभ के आकार का है जिस पर एक अर्धबेलन आरोपित है। यदि इस शेड के आधार की विमाएँ 7 m × 15 m हैं तथा घनाभाकार भाग की ऊँचाई 8 m है तो शेड में समावेशित हो सकने वाली हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। पुनः यदि यह मान लें कि शेड में रखी मशीनरी 300 m^3 स्थान घेरती है तथा शेड के अंदर 20 श्रमिक हैं जिनमें से प्रत्येक 0.08 m^3 के औसत से स्थान घेरता है तब शेड में कितनी हवा होगी? ($\pi = 22/7$ लीजिए।)

हल

शेड के अंदर हवा का आयतन (जब इसमें कोई व्यक्ति या मशीनरी नहीं है) घनाभ के अंदर की हवा और अर्धबेलन के अंदर की हवा के आयतनों को मिला कर प्राप्त होगा। अब, घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 15 m, 7 m और 8 m हैं। साथ ही, अर्धबेलन का व्यास 7 m और ऊँचाई 15 m है।

इसलिए वांछित आयतन = घनाभ का आयतन + ½ बेलन का आयतन

आगे, मशीनरी द्वारा घेरा गया स्थान = 300 m^3

तथा 20 श्रमिकों द्वारा घेरा गया स्थान = 20 × 0.08 m^3 = 1.6 m^3

अतः, शेड में उस समय हवा का आयतन, जब उसमें मशीनरी और श्रमिक हैं

$= 1128.75 - (300.00 + 1.60) = 827.15\ m^3$

उदाहरण

एक जूस बेचने वाला अपने ग्राहकों को जिन गिलासों से जूस देता था। उस बेलनाकार गिलास का आंतरिक व्यास 5 cm था, परंतु गिलास के निचले आधार (तली) में एक उभरा हुआ अर्धगोला था, जिससे गिलास की धारिता कम हो जाती थी। यदि एक गिलास की ऊँचाई 10 cm थी, तो गिलास की आभासी धारिता तथा उसकी वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लीजिए।)

हल

चूँकि गिलास का आंतरिक व्यास = 5 cm है और ऊँचाई = 10 cm है, इसलिए गिलास की आभासी धारिता = $\pi r^2 h$

$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10\ cm^3 = 196.25\ cm^3$

परंतु इसकी वास्तविक धारिता उपरोक्त धारिता से आधार में बने अर्धगोले के आयतन के बराबर कम है।

अर्थात् कमी बराबर है $2/3\ \pi r^3 = 2/3 \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5\ cm^3$

$= 32.71\ cm^3$

अतः गिलास की वास्तविक धारिता = आभासी धारिता – अर्धगोले का आयतन

$= 196.25\ cm^3 - 32.71\ cm^3$

$= 163.54\ cm^3$

उदाहरण

एक ठोस खिलौना एक अर्धगोले के आकार का है जिस पर एक लंब वृत्तीय शंकु आरोपित है। इस शंकु की ऊँचाई 2 cm है और आधार का व्यास 4 cm है। इस खिलौने का आयतन निर्धारित कीजिए। यदि एक लंब वृत्तीय बेलन इस खिलौने के परिगत हो तो बेलन और खिलौने के आयतनों का अंतर ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लीजिए।)

हल

मान लीजिए BPC अर्धगोला है तथा ABC अर्धगोले के आधार पर खड़ा एक शंकु है। अर्धगोले (और शंकु की भी) की त्रिज्या = ½ × 4 cm = 2 cm इसलिए खिलौने का आयतन = $2/3\ \pi r^3 + 1/3\ \pi r^2 h$

$= [2/3 \times 3.14 \times (2)^3 + 1/3 \times 3.14 \times (2)^2 \times 2]\ cm^3$

$= 25.12\ cm^3$

अब, मान लीजिए कि दिए गए ठोस के परिगत लंब वृत्तीय बेलन है। इस लंब वृत्तीय बेलन के आधार की त्रिज्या = HP = BO = 2 cm है तथा इसकी ऊँचाई

EH = AO + OP = (2 + 2) cm = 4 cm है।

अतः, वांछित आयतन = लंब वृत्तीय बेलन का आयतन – खिलौने का आयतन

$= (3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12)\ cm^3$

$= 25.12\ cm^3$

इस प्रकार, दोनों आयतनों का अंतर = $25.12\ cm^3$ है।

एक ठोस का एक आकार से दूसरे आकार में रूपांतरण

एक ठोस आकृति को अन्य आकार के दूसरे ठोस आकृति में परिवर्तित करने पर आकर में रूपांतरण हो जाता हैं जबकि आयतन में किसी प्रकार का कोई परिवर्तन नहीं होता है। उदाहरण के लिए पांच लीटर की बाल्टी से पानी एक गोलाकार घड़े में डाला जाता है तब आकृति में रूपांतरण होता है जबकि आयतन एक समान रहता है। एक उदाहरण केमाध्यम से इसे समझने का प्रयास करते हैं।

उदाहरण

मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 24 cm और आधार त्रिज्या 6 cm वाला एक शंकु बनाया गया है। एक बच्चे ने इसे गोले के आकार में बदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल:

शंकु का आयतन = $1/3 \times \pi \times 6 \times 6 \times 24\ cm^3$

यदि गोले की त्रिज्या r है तो उसका आयतन $4/3\ \pi r^3$ है।

चूँकि शंकु के रूप में और गोले के रूप में मिट्टी के आयतन बराबर हैं, इसलिए

$= 4/3\ \pi r^3 = 1/3 \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$

अर्थात् $r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3^3 \times 2^3$

अतः $r = 3 \times 2 = 6$

इसलिए, गोले की त्रिज्या 6 cm है।

उदाहरण

सेल्वी के घर की छत पर बेलन के आकार की एक टंकी है। इस टंकी में एक भूमिगत टंकी में भरे पानी को पंप द्वारा पहुँचा कर टंकी को भरा जाता है। यह भूमिगत टंकी एक घनाभ के आकार की है, जिसकी विमाएँ 1.57 m × 1.44 m × 95 cm हैं। छत की टंकी की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 95 cm है। यदि भूमिगत टंकी पानी से पूरी भरी हुई थी, तो उससे छत की टंकी को पूरा भरने के बाद भूमिगत टंकी में पानी कितनी ऊँचाई तक रह जाएगा? छत की टंकी की धारिता की भूमिगत टंकी की धारिता से तुलना कीजिए। (π = 3.14 लीजिए।)

हल:

छत की टंकी का आयतन = भूमिगत टंकी से निकाले गए पानी का आयतन

अब, छत की टंकी (बेलन) का आयतन = $\pi r^2 h$

$= 3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95\ m^3$

भूमिगत टंकी के पानी से पूरी भरी होने पर पानी का आयतन

$= l \times b \times h = 1.57 \times 1.44 \times 0.95\ m^3$

छत की टंकी को पानी से पूरा भरने के बाद भूमिगत टंकी में शेष बचे पानी का आयतन

$= [(1.57 \times 1.44 \times 0.95) - (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)]\ m^3 = (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2)\ m^3$

इसलिए, भूमिगत टंकी में शेष बचे पानी की ऊँचाई = (उसमें बचे पानी का आयतन)/($l \times b$)

$= (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2)/(1.57 \times 1.44)$ m

$= 0.475$ m $= 47.5$ cm

साथ ही, (छत की टंकी की धारिता)/ (भूमिगत की टंकी की धारिता)

$= (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)/ (1.57 \times 1.44 \times 0.95) = 1/2$

अतः, छत की टंकी की धारिता भूमिगत टंकी की धारिता की आधी है।

शंकु का छिन्नक

एक दिए हुए शंकु को उसके आधार के समांतर किसी तल द्वारा काटते हैं और इस तल के एक ओर बने शंकु को हटा देते हैं, तो तल के दूसरी ओर बचे शंकु के भाग को शंकु का छिन्नक कहते हैं। हम शंकु के छिन्नक के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं? इसे एक उदाहरण द्वारा समझते हैं।

उदाहरण

हनुमप्पा और उसकी पत्नी गंगाम्मा गन्ने के रस से गुड़ बना रहे हैं। उन्होंने गन्ने के रस को गर्म करके राब (शीरा) बना ली है, जिसे शंकु के छिन्नक के आकार के साँचों में डाला जाता है, जिनमें से प्रत्येक के दोनों वृत्तीय फलकों के व्यास क्रमशः 30 cm और 35 cm हैं तथा साँचे की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 14 cm है। यदि 1 cm^3 राब का द्रव्यमान लगभग 1.2 g है तो प्रत्येक साँचे में भरी जा सकने वाली राब का द्रव्यमान ज्ञात करें। ($\pi = 22/7$ लीजिए)

हल

चूँकि साँचा एक शंकु के छिन्नक के आकार का है, इसलिए इसमें भरी जा सकने वाली राब का

आयतन = $\pi/3\ h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

जहाँ r_1 बड़े आधार की त्रिज्या है और r_2 छोटे आधार की त्रिज्या है।

$= 1/3 \times 22/7 \times 14[(35/2)^2 + (30/2)^2 + (35/2 \times 30/2)]\ cm^3 = 11641.7\ cm^3$

यह दिया है कि 1 cm^3 राब का द्रव्यमान 1.2 g है। अतः प्रत्येक साँचे में भरी जा सकने वाली राब का भार द्रव्यमान = (11641.7 × 1.2) g

= 13970.04g = 13.97 kg = 14 kg (लगभग)

उदाहरण

धातु से बनी एक खुली बाल्टी शंकु के एक छिन्नक के आकार की है, जो उसी धातु के बने एक खोखले बेलनाकार आधार पर आरोपित है (देखिए आकृति 13-23)। इस बाल्टी के दोनों वृत्ताकार

सिरों के व्यास 45 cm और 25 cm हैं तथा बाल्टी की कुल ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 40 cm और बेलनाकार आधार की ऊँचाई 6 cm है। इस बाल्टी को बनाने में प्रयुक्त धातु की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि हम बाल्टी की मुठिया (या हत्थे) को इसमें सम्मिलित नहीं कर रहे हैं। साथ ही, उस पानी का आयतन ज्ञात कीजिए जो इस बाल्टी में धारण कर सकता है। ($\pi = 22/7$ लीजिए)

हल

बाल्टी की कुल ऊँचाई = 40 cm है, जिसमें आधार की ऊँचाई भी सम्मिलित है। इसलिए शंकु के छिन्नक की ऊँचाई (40 – 6) cm = 34 cm है।

अतः, शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

जहाँ $r_1 = 22.5$ cm, $r_2 = 12.5$ cm और $h = 34$ cm

अतः $l = \sqrt{34^2 + (22.5 - 12.5)^2}$

$= \sqrt{34^2 + 10^2} = 35.44$ cm

इसमें प्रयुक्त धातु की चादर का क्षेत्रफल = शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + वृत्तीय आधार का क्षेत्रफल + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= [\pi \times 35.44 (22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)^2 + 2 \pi \times 12.5 \times 6]$ cm^2

$= 22/7 \times [1240.4 + 156.25 + 150]$ cm^2

$= 4860.9$ cm^2

अब, बाल्टी में आ सकने वाले पानी का आयतन, जिसे बाल्टी की धारिता भी कहते हैं

$= (\pi \times h)/3 \, (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$= 22/7 \times 34/3 \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5]$

$= 22/7 \times 34/3 \times 943.75$ cm^3 $= 33615.48$ cm^3

= 33.62 लीटर (लगभग)

शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

किसी शंकु के छिन्नक के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल निम्न सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है:

छिन्नक का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\pi l(r_1 + r_2)$, जहाँ l तिर्यक ऊँचाई है. जहाँ l छिन्नक की तिर्यक लम्बाई है r_1 बड़े आधार वाले भाग की त्रिज्या है जबकि r_2 छोटे आधार की त्रिज्या है।

शंकु के छिन्नक का आयतन

शंकु के छिन्नक का आयतन निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं:

$= \pi/3\ h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

जहाँ h छिन्नक की ऊंचाई है r_1 बड़े आधार की त्रिज्या है तथा r_2 छोटे आधार की त्रिज्या है।

उदाहरण

एक शंकु के छिन्नक, जो 45 cm ऊँचा है, के सिरों की त्रिज्याएँ 28 cm और 7 cm हैं। इसका आयतन, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल और संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 22/7 लीजिए)

हल:

इस छिन्नक को दो लंब वृत्तीय शंकुओं OAB और OCD के अंतर के रूप में देखा जा सकता है।

मान लीजिए सेंटीमीटर में शंकु OAB की ऊँचाई h_1 है और तिर्यक ऊँचाई l_1 है, अर्थात् OP = h_1 और OA = OB = l_1 है।

मान लीजिए शंकु OCD की सेंटीमीटर में ऊँचाई h_2 और तिर्यक ऊंचाई l_2 है।

हमें r_1 = 28 cm, r_2 = 7 cm और छिन्नक की ऊँचाई h = 45 cm है।

साथ ही $h_1 = 45 + h_2$ (1)

सबसे पहले हमें क्रमशः शंकुओं OAB और OCD की ऊँचाइयों h_1 और h_2 को निर्धारित करना आवश्यक है।

चूँकि त्रिभुज OPB और OQD समरूप हैं (क्यों?), इसलिए हमें प्राप्त है:

$h_1/ h_2 = 28/7 = 4/1$ (2)

(1) और (2) से हमें $h_2 = 15$ और $h_1 = 60$ प्राप्त होता है

अब, छिन्नक का आयतन = शंकु OAB का आयतन – शंकु OCD का आयतन

$= [1/3 \times 22/7 \times (28)^2 \times 60 - 1/3 \times 22/7 \times (7)^2 \times 15]\ cm^3 = 48510\ cm^3$

शंकु OAB तथा शंकु OCD की तिर्यक ऊँचाइयाँ क्रमशः l_1 और l_2 नीचे दर्शाए अनुसार प्राप्त होती हैं:

$l_2 = \sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 16.55$ cm

$l_1 = \sqrt{(28)^2 + (60)^2} = 66.20$ cm

इस प्रकार छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$= 22/7 \times 28 \times 66.20 - 22/7 \times 7 \times 16.55 = 54.61\ cm^2$

अब, छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + $\pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= 5461.5\ cm^2 + 22/7\ (28)^2\ cm^2 + 22/7\ (7)^2\ cm^2$

$= = 5461.5\ cm^2 + 2464\ cm^2 + 154\ cm^2 = 8079.5\ cm^2$

स्मरणीय तथ्य

- आधारभूत ठोसों घनाभ, बेलन, शंकु और गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन (को मिलाने से) से बने ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल निर्धारित करना।
- ठोसों घनाभ, बेलन, शंकु, गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन से बने ठोसों के आयतन ज्ञात करना।
- जब किसी शंकु को उसके आधार के समांतर किसी तल द्वारा काटकर एक छोटा शंकु हटा देते हैं, तो जो ठोस बचता है, वह शंकु का एक छिन्नक कहलाता है।

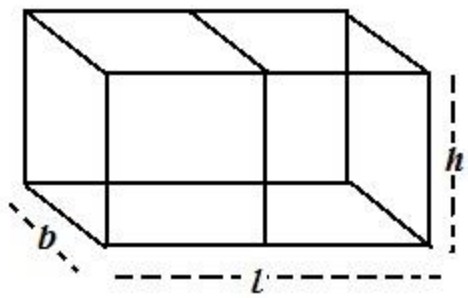
❖ दो घनों, जिनमे से प्रत्येक का आयतन 64 cm^3 है, के सलंग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है | इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल:

एक घन का आयतन = 64 cm3

एक किनारा = (64)1/3

= 4 cm



दो घनों के फलकों को मिलाने पर

l = 4 + 4 = 8 cm

b = 4 cm

h = 4 cm

इसप्रकार इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(lb + bh + lh)

= 2(8×4 + 4×4 + 8×4)

= 2(32 + 16 + 32)

= 2×80

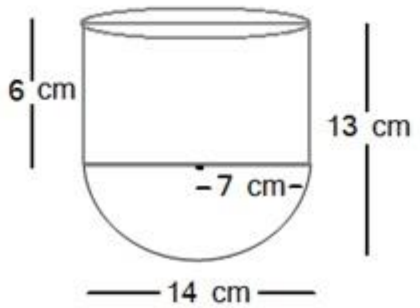
= 160 cm2

अत: इस घनाभ का प्राप्त पृष्ठीय क्षेत्रफल 160 cm2 है |

कोई बर्तन एक खोखले अर्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है | अर्धगोले का व्यास 14 cm है और इस बर्तन (पात्र) की कुल ऊँचाई 13 cm है | इस बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :

अर्धगोले का व्यास = 14 cm



अर्धगोले की त्रिज्या r = $\frac{14}{2}$ cm = 7 cm

बर्तन की कुल ऊँचाई H = 13 cm

बेलना भाग की ऊँचाई h = 13 cm - 7 cm = 6 cm

बेलनाकार भाग की त्रिज्या r = 7 cm

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$

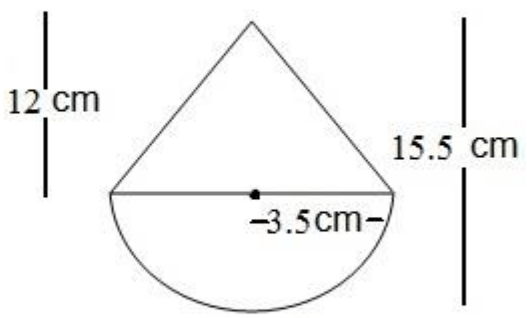
$= 2\times \frac{22}{7} \times 7(6 + 7)$

$= 44 \times 13$

$= 572\ cm^2$

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल 572 cm^2 है |

❖ एक खिलौना त्रिज्या 3.5 cm वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्ध गोले पर अध्यारोपित है | इस खिलौने की संपूर्ण ऊँचाई 15.5 cm है | इस खिलोने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



हल:

अर्धगोलाकार भाग की त्रिज्या r = 3.5 cm

शंक्वाकार भाग की त्रिज्या r = 3.5 cm

शंक्वाकार भाग की ऊँचाई h = 15.5 – 3.5 = 12 cm

शंक्वाकार भाग की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$l = \sqrt{12^2 + 3.5^2}$

$l = \sqrt{144 + 12.25}$

$l = \sqrt{156.25}$

$l = 12.5$ cm

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi rl + 2\pi r^2$

$= \pi r(l + 2r)$ [दोनों त्रिज्या बराबर रहने पर]

$= \frac{22}{7} \times 3.5(12.5 + 2 \times 3.5)$

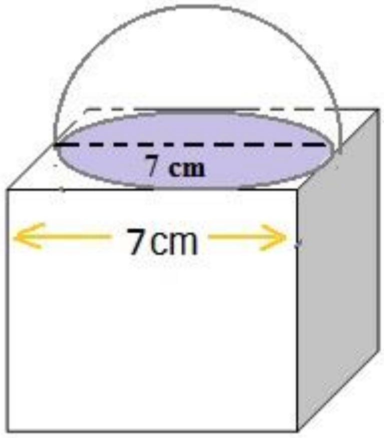
$= 22 \times 0.5(12.5 + 7)$

$= 11(19.5)$

$= 214.5\ cm^2$

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 214.5 cm^2 है |

❖ भुजा 7 cm वाले एक घनाकार ब्लाक के ऊपर एक अर्धगोला रखा हुआ है | अर्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है ? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



हल :

घनाकार ब्लॉक का एक किनारा = 7 cm

अर्धगोले का अधिकतम व्यास d = 7 cm

$\therefore$ त्रिज्या $r = \frac{7}{2}$ cm

ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाकार ब्लॉक का क्षेत्रफल + अर्धगोले का क्षेत्रफल – अर्धगोले से ढके एक वृत्त का क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a2 + 2\pi r2 - \pi r2$

$= 6a2 + \pi r2$ [a = घन का एक किनारा]

$$= 6(7)^2 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

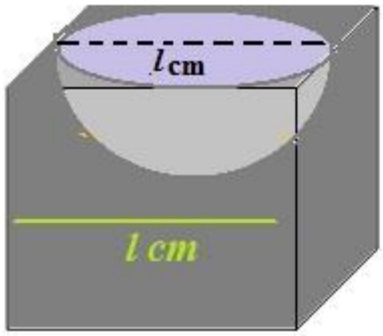
$$= 6 \times 49 + \frac{77}{2}$$

$$= 294 + 38.5 = 332.5 \text{ cm}^2$$

अत: ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 332.5 cm^2

❖ घनाकार ब्लाक के एक फलक को अन्दर की ओर से काट कर एक अर्धगोलाकार गड्ढा इस प्रकार बनाया गया है की अर्धगोले का व्यास घन के एक किनारे के बराबर है | शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :



माना अर्धगोले का ब्यास d = l इकाई

अत: त्रिज्या r = $\frac{l}{2}$ इकाई

और घन का एक किनारा a = l इकाई

(चूँकि घन का किनारा अर्धगोले के ब्यास के बराबर है)

शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाकार ब्लॉक का क्षेत्रफल + अर्धगोले का क्षेत्रफल – अर्धगोले से ढके एक वृत्त का क्षेत्रफल

= 6a2 + 2πr2 – πr2 [a = घन का एक किनारा]

= 6a2 + πr2

$= 6\,l^2 + \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2$

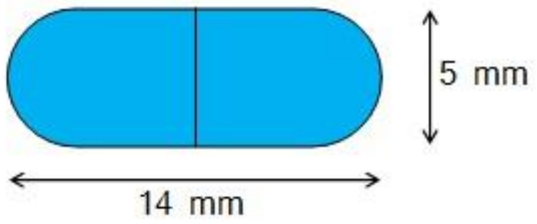
$= 6\,l^2 + \pi\frac{l^2}{4}$

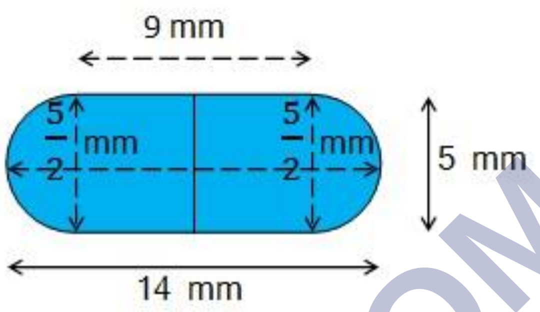
$= \frac{24\,l^2 + \pi\,l^2}{4}$

$= \frac{1}{4}(24 + \pi)\,l^2$ वर्ग इकाई

❖ दवा का एक कैप्सूल (capsule) एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक – एक अर्धगोला लगा हुआ है (देखिए आकृति 13.10) | पुरे कैप्सूल की लंबाई 14 mm है और उसका व्यास 5 mm है इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज़ात कीजिए |

हल





यहाँ बेलन का ब्यास, अर्धगोले के ब्यास के बराबर है |

अत: अर्धगोले का ब्यास D = 5 mm

इसलिए, त्रिज्या $r = \frac{5}{2}$ mm

और बेलन का ब्यास d = 5 mm

$\therefore$ त्रिज्या $r = \frac{5}{2}$ mm

बेलन की ऊँचाई h = कैप्सूल की लंबाई - 2r

h = 14 mm - 5 [चूँकि 2r = D]

= 9 mm

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 (अर्धगोलों का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2 \times 2\pi r2 + 2\pi rh$

$= 2\pi r(2r + h)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2} \ (5 + 9)$$

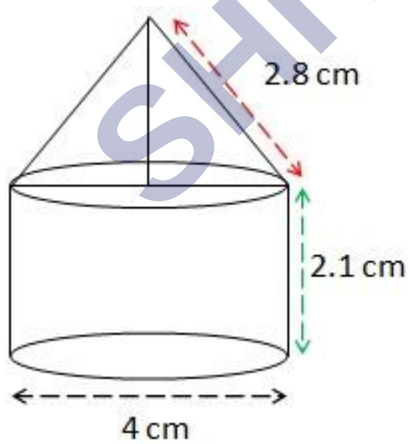
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2} \times 14$$

$$= 2 \times 22 \times 5$$

$$= 220 \ mm^2$$

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 220 \ mm^2$

- ❖ कोई तंबू एक बेलन के आकार का है जिस पर एक शंकु आध्यारोपित है | यदि बेलनाकार भाग की ऊँचाई और क्रमशः 2.1 m और 4 m है तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई 2.8 m है तो इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस (canvas) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए | साथ ही, 500 रू प्रति m2 की दर से इसमें प्रयुक्त कैनवस की लागत ज्ञात कीजिए | (ध्यान दीजिए कि तंबू के आधार को कैनवस से नहीं ढका जाता है |)



हल :

तम्बू के बेलनाकार भाग का ब्यास = 4 cm

अत: त्रिज्या r = 2 cm

बेलनाकार भाग की ऊँचाई h = 2.1 cm

शंकु की तिर्यक ऊँचाई l = 2.8 cm

ब्यास = 4 cm

और त्रिज्या r = 2 cm

इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस (canvas) का क्षेत्रफल

= बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंक्वाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi rl$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2 \times 2.1 + \frac{22}{7} \times 2 \times 2.8$

$= \frac{22}{7} \times 2\,(2 \times 2.1 + 2.8)$

$= \frac{44}{7}(4.2 + 2.8)$

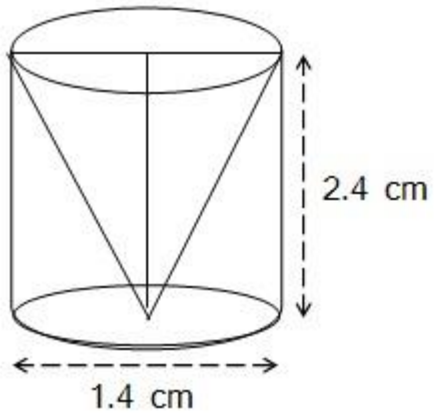
$= \frac{44}{7} \times 7$

$= 44\ cm^2$

कैनवास का लागत = 44×500 = ₹ 22000 |

❖ ऊँचाई 2.4 cm और व्यास 1.4 cm वाले एक ठोस बेलन में से ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंक्वाकार खोल (cavity) काट लिया जाता है |शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेंटीमीटर तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :



बेलन की ऊँचाई h = 2.4 cm

बेलन का ब्यास = 1.4 cm

अत: बेलन की त्रिज्या r = 0.7 cm

काटे गए शंकु की ऊँचाई h = 2.4 cm

और त्रिज्या r = 0.7 cm

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$l = \sqrt{2.4^2 + 0.7^2}$

$l = \sqrt{5.76 + 0.49}$

$l = \sqrt{6.25}$

l = 2.5 cm

शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलन के पेंदी का क्षेत्रफल

= 2πrh + πrl + πr2

= πr(2h + l + r)

$$= \frac{22}{7} \times 0.7\ (2 \times 2.4 + 2.5 + 0.7)$$

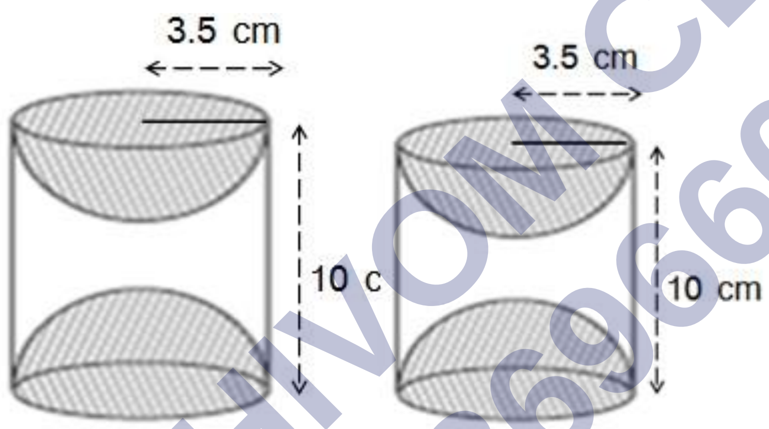
$$= \frac{22}{10} \times (4.8 + 2.5 + 0.7)$$

$$= \frac{22}{10} \times (8.0)$$

$$= \frac{176}{10}$$

$= 17.6\ cm^2$

❖ लकड़ी के ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्धगोला खोदकर निकालते हुए, एक वस्तु बनाई गई है, जैसाकि आकृति 13.11 में दर्शाया गया है | यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है तो इस वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



हल :

बेलन की ऊँचाई = 10 cm

आधार की त्रिज्या = 3.5 cm

अर्धगोले की त्रिज्या = 3.5 cm

वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + उपरी अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + निचली अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

= 2πrh + 2πr2 + 2πr2

= 2πr(h + r + r)

= 2πr(h + 2r)

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5\,(10 + 2 \times 3.5)$

$= 2 \times \frac{110}{10}\,(10 + 7)$

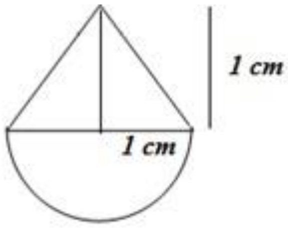
$= \frac{110 \times 34}{10}$

$= \frac{3740}{10}$

$= 374\ cm^2$

❖ एक ठोस एक अर्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएँ 1 cm हैं तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है | इस ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात कीजिए |

हल :



शंकु की त्रिज्या r = 1 cm

शंकु की ऊँचाई = 1 cm

अर्धगोले की त्रिज्या r = 1 cm

ठोस का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi r^2(2r + h)$

$= \frac{1}{3}\pi\ (1)^2[2(1) + 1]$

$= \frac{1}{3}\pi\ [3]$

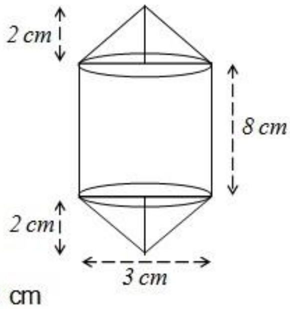
$= \pi\ cm^3$

ठोस का आयतन $\pi\ cm^3$

❖ एक इंजीनियरिंग के विधार्थी रचेल से एक पतली एल्युमिनियम की शीट का प्रयोग करते हुए एक मॉडल बनाने को कहा गया जो एक ऐसे बेलन के आकार का हो जिसके दोनों सिरों पर दो शंकु जुड़े हुए हों | इसा मॉडल का व्यास 3 cm है और इसकी लंबाई 12 cm है | यदि प्रत्येक शंकु की ऊँचाई 2 cm हो तो रचेल द्वारा बनाए गए मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन ज़ात कीजिए|

(यह मान लीजिए कि मॉडल की आंतरिक और बाहरी विमाएँ लगभग बराबर है |)

हल :



शंकु की त्रिज्या $r = \frac{3}{2} = 1.5$ cm

शंकु की ऊँचाई $h = 2$ cm

बेलन की त्रिज्या $r = 1.5$ cm

बेलन की ऊँचाई $H = 12 - 2 - 2 = 8$ cm

मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन = 2(शंकु का आयतन) + बेलन का आयतन

$= 2(\frac{1}{3}\pi r^2 h) + \pi r^2 H$

$= \pi r^2(\frac{2}{3}h + H)$

$= \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 (\frac{2}{3} \times 2 + 8)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{15}{10} \times \frac{15}{10} \left(\frac{4+24}{3}\right)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \left(\frac{28}{3}\right)$

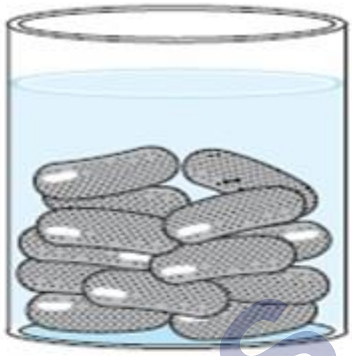
$= 22 \times 3$

$= 66 \text{ cm}^3$

अत: मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन 66 cm^3 है |

❖ एक गुलाबजामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की चाशनी होती है | 45 गुलाबजामुन एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरे अर्धगोलाकार हैं तथा इसकी लंबाई 5 cm और व्यास 2.8 cm है

हल :



अर्धगोलाकार सिरे का ब्यास = 2.8 cm

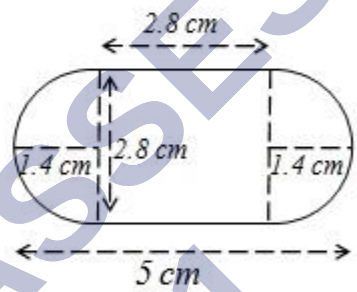
तो अर्धगोलाकार सिरे की त्रिज्या r = 1.4 cm

पुरे गुलाब जामुन की लम्बाई l = 5 cm

तो बेलनाकार भाग की लम्बाई h = 5 - (1.4 + 1.4)

= 5 - 2.8 cm

= 2.2 cm



सभी 45 गुलाब जामुनों का आयतन = 45(अर्धगोले का आयतन + बेलन का आयतन + अर्धगोले का आयतन)

$= 45\left(\frac{2}{3}\pi r^2 + \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^2\right)$

$= 45\,\pi r^2\left(\frac{2}{3}r + h + \frac{2}{3}r\right)$

$= 45\left[\frac{22}{7}(1.4)^2\left(\frac{2}{3}\times 1.4 + 2.2 + \frac{2}{3}\times 1.4\right)\right]$

$= 45\left[\frac{22}{7}\times\frac{14}{10}\times\frac{14}{10}\left(\frac{2.8}{3} + 2.2 + \frac{2.8}{3}\right)\right]$

$= 45\left[\frac{44\times 14}{100}\left(\frac{5.6}{3} + 2.2\right)\right]$

$= 45\left[\frac{616}{100}\left(\frac{5.6+6.6}{3}\right)\right]$

$= 45\left[\frac{616}{100}\left(\frac{12.2}{3}\right)\right]$

$= \frac{15\times 616\times 122}{1000}$

$= \frac{1127280}{1000}$

$= 1127.280\ \text{cm}^3$

चासनी की मात्रा = 1127.280 cm^3 का 30%

$= 1127.280 \times \frac{30}{100}$

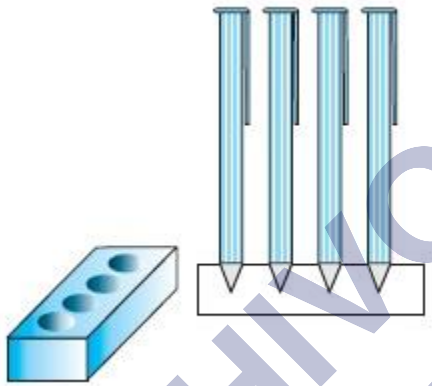
$= 1127.280 \times \frac{30}{100}$

$= 338.1840\ cm^3$

अत: 45 गुलाब जामुनों में चासनी की मात्रा 338 cm^3 है |

एक कमलदान घनाभ के आकार की एक लकड़ी से बना हा जिसमें कलम रखने के लिए चार शंक्वाकार गड्ढे बने हुए हैं | घनाभ की विमाएँ 15 cm x 10 cm x 3.5 cm हैं | प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5 cm है और गहराई 1.4 cm है | पुरे कमलदान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए

हल :



धनाभ की लंबाई l = 15 cm

घनाभ की चौड़ाई b = 10 cm

घनाभ की ऊँचाई h = 3.5 cm

शंक्वाकार भाग की त्रिज्या (r) = 0.5 cm

ऊँचाई (h) = 1.4 cm

पूरे कमलदान की लकड़ी का आयतन = घनाभ का आयतन – चरों शंक्वाकार गढ्ढे का आयतन

$= l \times b \times h - 4\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$

$= 15 \times 10 \times 3.5 - 4\left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.5 \times 0.5 \times 1.4\right)$

$= 525 - 4\left(\frac{1}{3} \times 22 \times 0.25 \times 0.2\right)$

$= 525 - \left(\frac{1}{3} \times 4.4\right)$

$= 525 - \frac{4.4}{3}$

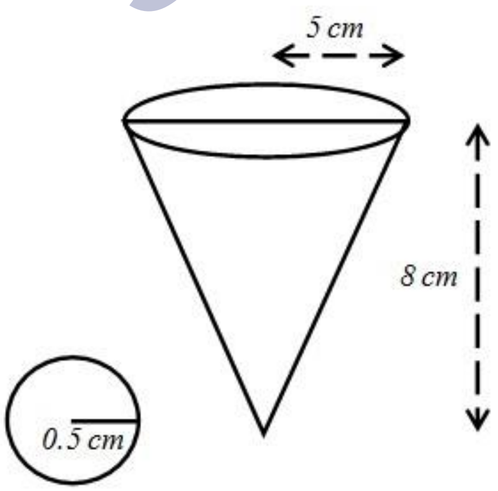
$= 525 - 1.47$

$= 523.53 \text{ cm}^3$

पूरे कमलदान की लकड़ी का आयतन 523.53 cm^3 है |

❖ एक बर्तन एक उल्टे शंकु के आकार का है | इसकी ऊँचाई 8 cm है और इसके ऊपरी सिरे (जो खुला हुआ है) की त्रिज्या 5 cm त्रिज्या है | यह ऊपर तक पानी से भरा हुआ है | जब इस बर्तन में सीसे की कुछ गोलियाँ जिनमे प्रत्येक 0.5 cm त्रिज्या वाला एक गोला है, डाली जाती हैं, तो इसमें से भरे हुए पानी का एक चौथाई भाग बाहर निकल जाता है | बर्तन में डाली गई सीसे की गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए |

हल :



शंकु की ऊँचाई (h) = 8 cm

शंकु की त्रिज्या (R) = 5 cm

गोली की त्रिज्या (r) = 0.5 cm

माना बर्तन में डाली गई गोलियों की संख्या = n

अत: n × (गोली का आयतन) = $\frac{1}{4}$ (शंकु का आयतन)

$$\Rightarrow \quad n \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

सरलीकरण करने पर

$$\Rightarrow \quad n \times \frac{4}{3} \times r^3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times R^2 \times h$$

$$\Rightarrow \quad n \times \frac{4}{3} \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times 8$$

$$\Rightarrow \quad n \times \frac{4}{3} \times 0.125 = \frac{1}{3} \times 25 \times 2$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{1}{3} \times 25 \times 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{0.125}$$

$$\Rightarrow \quad n = 25 \times \frac{1}{2} \times \frac{1000}{125}$$

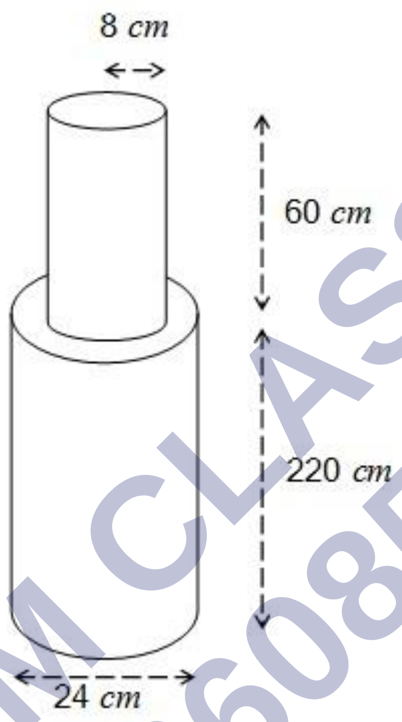
$$\Rightarrow \quad n = \frac{1}{2} \times \frac{1000}{5}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{500}{5} = 100$$

अत: गोलियों की संख्या 100 है |

ऊँचाई 220 cm और आधार व्यास 24 cm वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60 cm और त्रिज्या 8 cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का स्तंभ बना है | इस स्तंभ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है 1 cm3 लोहे का द्रव्यमान लगभग 8 g होता है | (π = 3.14 लीजिए |)

हल :



मोटे बेलन की ऊँचाई (H) = 220 cm

व्यास (d) = 24 cm

अत: त्रिज्या (R) = 12 cm

पतले बेलन की ऊँचाई (h) = 60 cm

त्रिज्या (r) = 8 cm

अब लौह स्तंभ का आयतन = $\pi R^2 H + \pi r^2 h$

$= \pi(R^2H + r^2h)$

$= 3.14\ (12\times12\times220 + 8\times8\times60)$

$= 3.14\ (31680 + 3840)$

$= 3.14\ (35520)$

$= 111532.8\ cm^3$

लोहे का द्रव्यमान = $111532.8\ cm^3 \times 8$

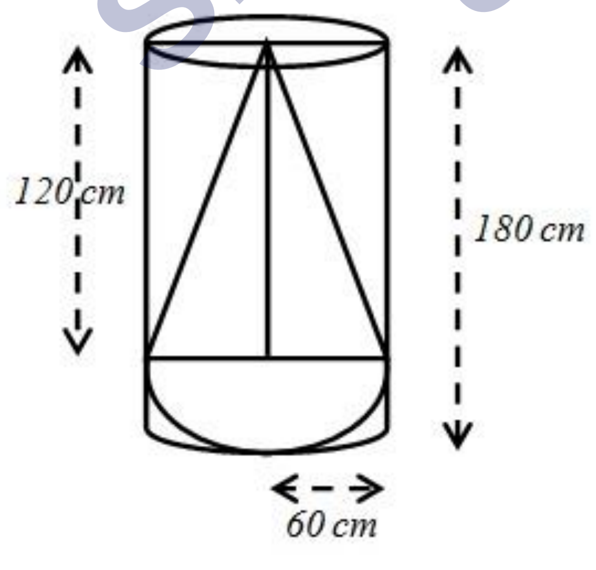
$= 892262.4\ g$

अब द्रव्यमान kg में = $\dfrac{892262.4}{1000} = 892.2624$ kg

अर्थात लौह सतंभ का द्रव्यमान 892.26 kg है |

एक ठोस में, ऊँचाई 120 cm और त्रिज्या 60 cm वाला एक शंकु सम्मिलित है, जो 60 cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर आरोपित है | इस ठोस को पानी से भरे हुए एक लंब वृत्तीय बेलन में इस प्रकार सीधा डाल दिया जाता है कि यह बेलन की तली को स्पर्श करे | यदि बेलन की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 180 cm है तो बेलन में शेष बचे पानी का आयतन ज्ञात कीजिए |

हल :



ठोस के शंकु की ऊँचाई (h) = 120 cm

ठोस के शंकु की त्रिज्या (r) = 60 cm

ठोस के अर्धगोले की त्रिज्या (r) = 60 cm

बड़े बेलन की ऊँचाई (H) = 180 cm

बड़े बेलन की की त्रिज्या (r) = 60 cm

शेष बचे पानी का आयतन = बड़े बेलन का आयतन – ठोस का आयतन

$$= \pi r^2 H - \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3\right)$$

$$= \pi r^2 \left[H - \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{3}r\right)\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 \left[180 - \left(\frac{1}{3} \times 120 + \frac{2}{3} \times 60\right)\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 [180 - (40 + 40)]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 [180 - 80]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 [100]$$

$$= \frac{22 \times 360000}{7} \text{ cm}^3$$

$$= \frac{7920000}{7} \text{ cm}^3$$

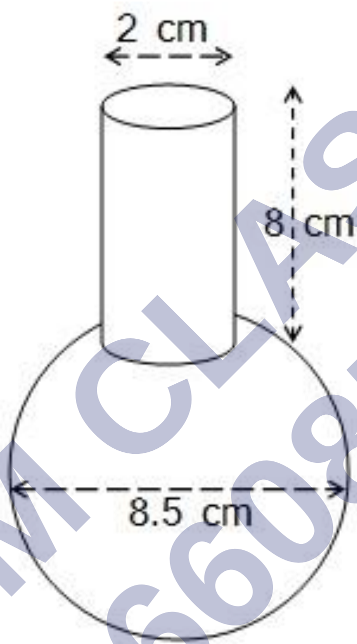
$$= 1131428.57 \text{ cm}^3$$

या आयतन घन मीटर में $= \dfrac{1131428.57}{100 \times 100 \times 100} \text{ m}^3$

$$= 1.131 \text{ m}^3 \text{ (लगभग)}$$

❖ एक गोलाकार काँच के बर्तन की एक बेलन के आकार की गर्दन है जिसकी लंबाई 8 cm है और व्यास 2 cm है जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5 cm है | इसमें भरे जा सकने वाली पानी की मात्रा माप कर, एक बच्चे ने यह ज्ञात किया कि इस बर्तन का आयतन 345 cm3 है | जाँच कीजिए कि बच्चे का उत्तर सही है या नहीं, यह मानते हुए की उपरोक्त मापन आंतरिक मापन है और π = 3.14 |

हल :



गोलाकार भाग का व्यास = 8.5 cm

गोलाकार भाग का त्रिज्या (R) = $\frac{8.5}{2}$ cm

बेलनाकार गर्दन की ऊँचाई (h) = 8 cm

गर्दन का व्यास (d) = 2 cm

इसलिए, त्रिज्या (r) = 1 cm

इसमें भरे जा सकने वाले पानी का आयतन = गोले का आयतन + बेलन का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi r^2 h$$

$$= 3.14\left(\frac{4}{3} \times \frac{8.5}{2} \times \frac{8.5}{2} \times \frac{8.5}{2} + 1 \times 1 \times 8\right)$$

$$= 3.14\left(\frac{8.5 \times 8.5 \times 8.5}{3 \times 2} + 8\right)$$

$$= 3.14\left(\frac{614.125 + 48}{6}\right)$$

$$= 3.14\left(\frac{662.125}{6}\right)$$

$$= \frac{1.57 \times 662.125}{3}$$

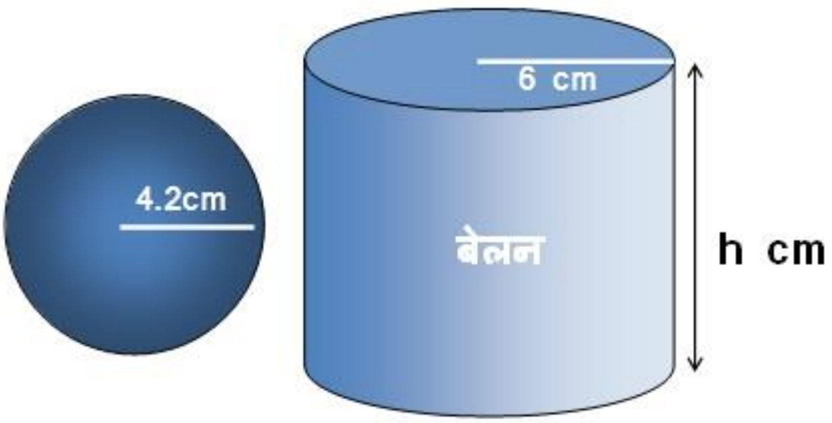
$$= \frac{1.57 \times 662.125}{3}$$

$$= 346.51 \text{ cm}^3$$

अत: बच्चे द्वारा ज्ञात माप सही नहीं है |

❖ त्रिज्या 4.2 cm वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 cm वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है | बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए |

हल :



धातु के गोले की त्रिज्या (r) = 4.2 cm

बेलन की त्रिज्या (R) = 6 cm और

माना बेलन की ऊँचाई h cm है।

बेलन का आयतन = गोले का आयतन

$$\Rightarrow \quad \pi R^2 h = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow \quad R^2 h = \frac{4}{3} r^3$$

$$\Rightarrow \quad 6^2 h = \frac{4}{3} (4.2)^3$$

$$\Rightarrow \quad 36 h = \frac{4}{3} \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{4 \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 36}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 9} = 1.4 \times 1.4 \times 1.4 = 2.74 \text{ cm}$$

❖ क्रमशः 6 cm, 8 cm और 10 cm त्रिज्याओं वाले धातु के ठोस गोलों को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना बड़े ठोस गोले की त्रिज्या = R cm

दिया है : r_1 = 6 cm, r_2 = 8 cm और r_3 = 10 cm

बड़े गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi (r_1)^3 + \frac{4}{3}\pi (r_2)^3 + \frac{4}{3}\pi (r_3)^3$

$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi (R)^3 = \frac{4}{3}\pi [(r_1)^3 + (r_2)^3 + (r_3)^3]$

दोनों तरफ सरल करने पर हम पाते हैं -

$\Rightarrow (R)^3 = [(r_1)^3 + (r_2)^3 + (r_3)^3]$

$\Rightarrow (R)^3 = [(6)^3 + (8)^3 + (9)^3]$

$\Rightarrow (R)^3 = [216 + 512 + 1000]$

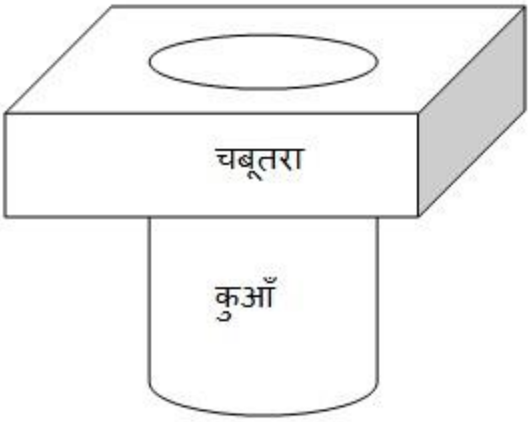
$\Rightarrow (R)^3 = 1728$

$\Rightarrow R = \sqrt[3]{1728}$

$\Rightarrow R = 12$

अत: नए गोले की त्रिज्या 12 cm है |

❖ व्यास 7 m वाला 20 m गहरा एक कुआँ खोदा जाता है और खोदने से निकली हुई मिट्टी को समान रूप से फैलाकर 22 m x 14 m वाला एक चबूतरा बनाया गया है | इस चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए |



हल : कुएँ का व्यास = 7 m

अत: कुएँ की त्रिज्या (r) = 3.5 cm

कुएँ की गहराई (h) = 20 m

चबूतरे की लम्बाई (l) = 22 m और चौड़ाई (b) = 14 m

माना चबूतरे की ऊँचाई = h m

चबूतरे का आयतन = कुएँ से निकाली गई मिटटी का आयतन

$l \times b \times h = \pi r^2 h$

$22\text{ cm} \times 14\text{ cm} \times h = \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 20\text{ m}$

$\Rightarrow 22\text{ cm} \times 14\text{ cm} \times h = \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 20$

$\Rightarrow h = \frac{22 \times 3.5 \times 3.5 \times 20}{7 \times 14 \times 22}$

$\Rightarrow h = \frac{35 \times 35 \times 20}{7 \times 14 \times 10 \times 10}$

$\Rightarrow h = \frac{5 \times 35 \times 2}{14 \times 10}$

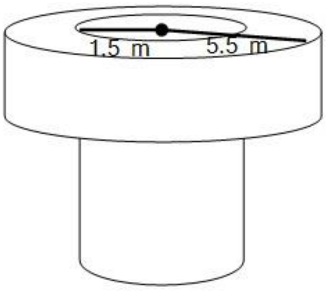
$\Rightarrow h = \frac{35 \times 2}{14 \times 2}$

$\Rightarrow h = \frac{35 \times 2}{14 \times 2}$

$\Rightarrow h = \frac{35}{14} = \frac{5}{2} = 2.5\text{ m}$

अत : चबूतरे की ऊँचाई = 2.5 m

❖ व्यास 3 m वाला 14 m गहरा की गहराई तक खोदा जाता है | इससे निकली हुई मिट्टी को कुँए के चारों ओर 4 m चौड़ी एक वृत्ताकार वलय (ring) बनाते हुए, समान रूप से फैलाकर एक प्रकार का बाँध बनाया जाता है | इस बाँध की ऊँचाई ज्ञात कीजिए |



हल : कुएँ का व्यास = 3 m

कुएँ की त्रिज्या (r) = $\frac{3}{2}$ m = 1.5 m

कुएँ की गहराई (H) = 14 m

कुएँ के चारों वृताकार वलय की चौड़ाई = 4 m

अत: वलय की बाह्य त्रिज्या (R) = 4 m + 1.5 = 5.5 m

माना वलयाकार चबूतरे की ऊँचाई = h m

वलयाकार चबूतरे का आयतन = कुएँ से निकाली गई मिटटी का आयतन

$\Rightarrow \pi R^2h - \pi r^2h = \pi r^2H$

$\Rightarrow \pi h (R^2 - r^2) = \pi r^2H$

$\Rightarrow h (R^2 - r^2) = r^2H$

$\Rightarrow h [(5.5)^2 - (1.5)^2] = 1.5 \times 1.5 \times 14$

$\Rightarrow h (5.5 + 1.5) (5.5 - 1.5) = 1.5 \times 1.5 \times 14$

[$a^2 - b^2 = (a + b) (a - b)$]

$\Rightarrow h (7 \times 4) = 1.5 \times 1.5 \times 14$

$\Rightarrow h = \frac{1.5 \times 1.5 \times 14}{7 \times 4}$

$\Rightarrow h = \frac{1.5 \times 1.5}{2}$

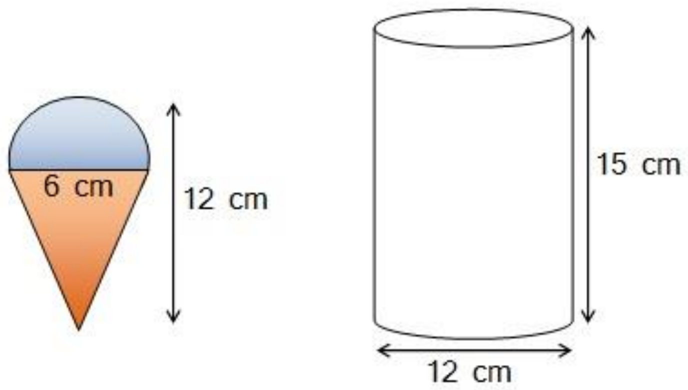
$\Rightarrow h = \frac{2.25}{2}$

$\Rightarrow h = 1.125$ m

अत : वलयाकार चबूतरे की ऊँचाई = 1.125 m

❖ व्यास 12 cm और ऊँचाई 15 cm वाले एक लंब वृत्तीय बेलन के आकार का बर्तन आइसक्रीम से पूरा भरा हुआ है | इस आइसक्रीम को ऊँचाई 12 cm और व्यास 6 cm वाले शकुओं में

भरा जाना है, जिनका ऊपरी सिरा अर्धगोलाकार होगा | उन शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो इस आइसक्रीम से भरे जा सकते हैं |



हल : बेलनाकार बर्तन का व्यास = 12 cm

तो बर्तन की त्रिज्या R = 6 cm

बर्तन की ऊँचाई H = 15 cm

आइसक्रीम की त्रिज्या r = $\frac{6}{2}$ = 3 cm

शंक्वाकार भाग की ऊँचाई h = 12 cm

भरे जा सकने वाले आइसक्रीमों की संख्या = $\frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{एक आइसक्रीम का आयतन}}$

$\Rightarrow \quad = \frac{\pi R^2 H}{\text{अर्धगोले का आयतन} + \text{शंकु का आयतन}}$

$\Rightarrow \quad = \frac{\pi R^2 H}{\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

$\Rightarrow \quad = \frac{\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi r^2 (2r + h)}$

$\Rightarrow \quad = \frac{\pi\, 6^2 \times 15}{\frac{1}{3}\pi\, 3^2 (2 \times 3 + 12)}$

$\Rightarrow \quad = \frac{6^2 \times 15}{\frac{1}{3}\, 3^2 (18)}$

$\Rightarrow \quad = \frac{36 \times 15}{3 \times 18}$

$\Rightarrow \quad = \frac{2 \times 15}{3}$

$\Rightarrow \quad = \frac{30}{3} = 10$

अत: भरे जा सकने वाले आइसक्रीमों की संख्या 10 है |

❖ विमाओं 5.5 cm x 10 cm x 3.5 cm वाला एक घनाभ बनाने के लिए, 1.75 cm व्यास और 2 mm मोटाई वाले कितने चाँदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा ?

हल : सिक्कों का व्यास = 1.75 cm

त्रिज्या $r = \frac{1.75}{2}$ cm

सिक्के की ऊँचाई $h = 2$ mm $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ cm

माना चाँदी के सिक्कों की संख्या n है |

अतः n चाँदी के सिक्कों का आयतन = घनाभ का आयतन

$\Rightarrow n(\pi r^2 h) = l \times b \times h$

$$\Rightarrow n = \frac{l \times b \times h}{\pi r^2 h}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5.5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 3.5 \text{ cm}}{\frac{22}{7} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5.5 \times 10 \times 3.5 \times 7 \times 2 \times 2 \times 5}{22 \times 1.75 \times 1.75}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 35 \times 7 \times 2 \times 2 \times 5 \times 100 \times 100}{22 \times 175 \times 175 \times 10 \times 10}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 35 \times 2 \times 5 \times 100}{11 \times 25 \times 175}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 2 \times 100}{11 \times 25}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5 \times 10 \times 2 \times 100}{25}$$

$$\Rightarrow n = \frac{10 \times 2 \times 100}{5} = 2 \times 2 \times 100 = 400$$

अतः सिक्कों की संख्या 400 है |

❖ 32 cm ऊँची और आधार त्रिज्या 18 cm वाली एक बेलनाकार बाल्टी रेत से भरी हुई है | इस बाल्टी को भूमि पर खाली किया जाता है और इस रेते की एक शंक्वाकार ढेरी बनाई जाती है | यदि शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई 24 cm है, तो इस ढेरी की त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए |

हल : बेलनाकार बाल्टी की त्रिज्या R = 18 cm

और ऊँचाई H = 32 cm

शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई = 24 cm

बेलनाकार बाल्टी की आयतन = πR^2H

शंक्वाकार ढेरी का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2h$

शंक्वाकार ढेरी का आयतन = बेलनाकार बाल्टी की आयतन

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2h = \pi R^2H$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} r^2 \times 24 = \frac{22}{7} \times 18 \times 18 \times 32$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \times r^2 \times 24 = 18 \times 18 \times 32$

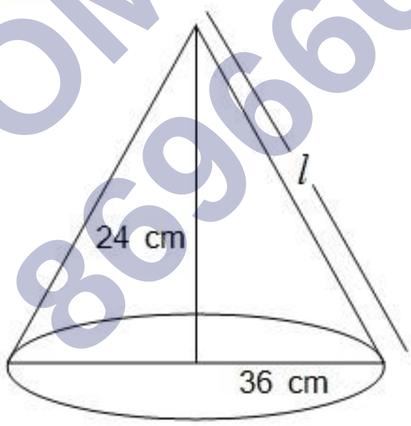
$\Rightarrow r^2 \times 8 = 18 \times 18 \times 32$

$\Rightarrow r^2 = \frac{18 \times 18 \times 32}{8}$

$\Rightarrow r^2 = 18 \times 18 \times 4$

$\Rightarrow r = \sqrt{18 \times 18 \times 4}$

$\Rightarrow r = 36$



$l = \sqrt{24^2 + 36^2}$

$l = \sqrt{(12 \times 2)^2 + (12 \times 3)^2}$

$l = \sqrt{12^2 \times 2^2 + 12^2 \times 3^2}$

$l = \sqrt{12^2(2^2 + 3^2)} = 12\sqrt{(2^2 + 3^2)}$

$l = 12\sqrt{4+9} = 12\sqrt{13}\ cm$

❖ m चौड़ी और 1.5 m गहरी एक नहर में पानी 10 km /h की चाल से बह रहा है | 30 मिनट में, यह नहर कितने क्षेत्रफल की सिंचाई कर पाएगी, जबकि सिंचाई के ल;इए 8 cm गहरे पानी की आवश्यकता होती है |

हल : 1 घंटे में नहर की लंबाई l = 10km = 10000 m

नहर की चौड़ाई b = 6 m

नहर की गहराई h = 1.5 m

1 घंटे में नहर में पानी का आयतन = $l \times b \times h$

$= 10000 \times 6 \times 1.5 \text{ m}^3$

$= 90000 \text{ m}^3$

अत: 30 मिनट में पानी का आयतन = $\frac{90000}{2} \text{ m}^3$

$= 45000 \text{ m}^3$

सिंचाई के लिए पानी की ऊँचाई = 8 cm = $\frac{8}{100}$ m

अब, क्षेत्रफल × उचाई = आयतन

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $\times \frac{8}{100} = 45000 \text{ m}^3$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $= 45000 \text{ m}^3 \times \frac{100}{8}$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $= 562500 \text{ m}^2$

अत: सिंचाई के लिए 562500 m^2 क्षेत्रफल की जरुरत है |

❖ पानी पीने वाला एक गिलास 14 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है | दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 4 cm और 2 cm हैं | इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए |

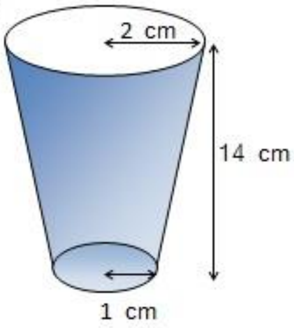
हल : छिन्नक वाले गिलास की ऊँचाई = 14 cm

उपरी सिरे का व्यास = 4 cm

उपरी सिरे की त्रिज्या R = 2 cm

निचली सिरे का व्यास = 2 cm

निचली सिरे की त्रिज्या r = 1 cm



गिलास की धारिता $= \frac{1}{3}\pi h (R^2 + r^2 + Rr)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14\ (2^2 + 1^2 + 2 \times 1)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{1} \times 2\ (4 + 1 + 2)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{1} \times 14$$

$$= \frac{308}{3} = 102\frac{2}{3}\ cm^3$$

❖ एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4 cm है तथा इसके वृत्तीय सिरों के परिमाप (परिधियाँ) 18 cm और 6 cm हैं | इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

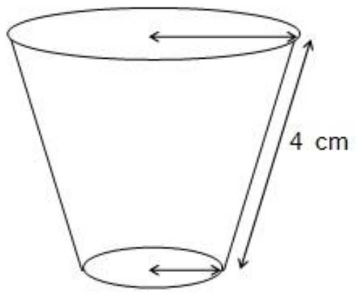
हल :

शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई (l) = 4 cm

उपरी सिरे का परिमाप = 18 cm

$$2\pi R = 18$$

$$R = \frac{18}{2\pi} = \frac{9}{\pi}$$



निचले सिरे का परिमाप = 6 cm

$$2\pi r = 6$$

$$r = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$$

छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi l\,(R + r)$

$$= \pi \times 4\left(\frac{9}{\pi} + \frac{3}{\pi}\right)$$

$$= \pi \times 4\left(\frac{12}{\pi}\right)$$

$$= 48 \text{ cm}^2$$

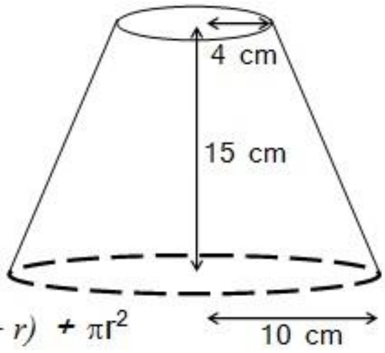
अत : छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 48 cm^2 है |

❖ एक तुर्की टोपी शंकु के एक छिन्नक के आकर की है (देखिये आकृति 13.24) | यदि इसके खुले सिरे की त्रिज्या 10 cm है, ऊपरी सिरे की त्रिज्या 4 cm है टोपी की तिर्यक ऊँचाई 15 cm है तो इसके बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल : टोपी की तिर्यक ऊँचाई (l) = 15 cm

खुले सिरे की त्रिज्या (R) = 10 cm

ऊपरी सिरे की त्रिज्या (r) = 4 cm



बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल = $\pi l\,(R+r) + \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 15\,(10+4) + \frac{22}{7} \times 4 \times 4$$

$$= \frac{22}{7} \times 15\,(14) + \frac{22}{7} \times 16$$

$$= \frac{22}{7} \times 210 + \frac{22}{7} \times 16$$

$$= \frac{22}{7}\,(210 + 16)$$

$$= \frac{22}{7}\,(226)$$

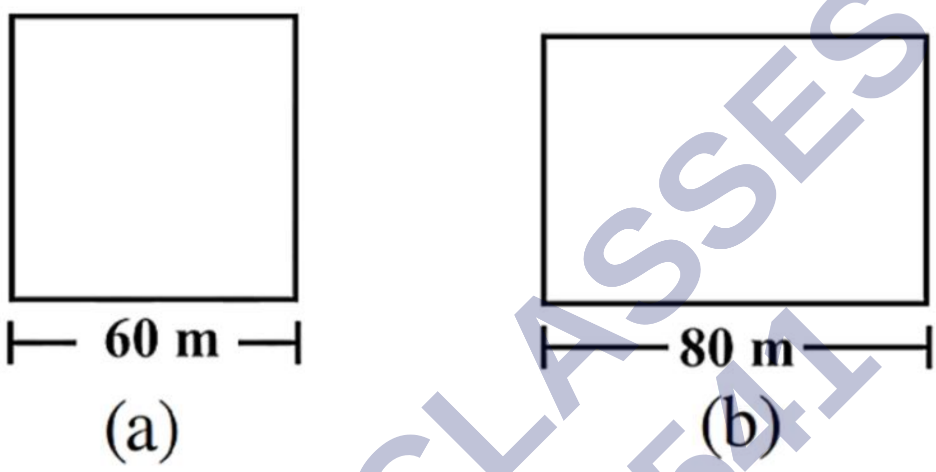
$$= \frac{4972}{7}\ \text{cm}^2$$

$$= 710\frac{2}{7}\ \text{cm}^2$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 11.1 (पृष्ठ संख्या 179)

प्रश्न 1 जैसा की संलग्न आकृति में दर्शाया गया है. एक आयताकार और एक वर्गाकार खेत के माप दिए हुए हैं। यदि इनके परिमाप समान है, तो किस खेत का क्षेत्रफल अधिक होगा?



उत्तर- आकृति से

वर्गाकार खेत की भुजा = 60m

आयताकार खेत की लम्बाई = 80m

प्रश्नानुसार

वर्गाकार खेत का परिमाप = आयताकार खेत का परिमाप

तब 4 × भुजा = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

4 × 60 = 2(80 + चौड़ाई)

240 = 160 + 2 × चौड़ाई

240 - 160 = 2 × चौड़ाई

80 = 2 × चौड़ाई

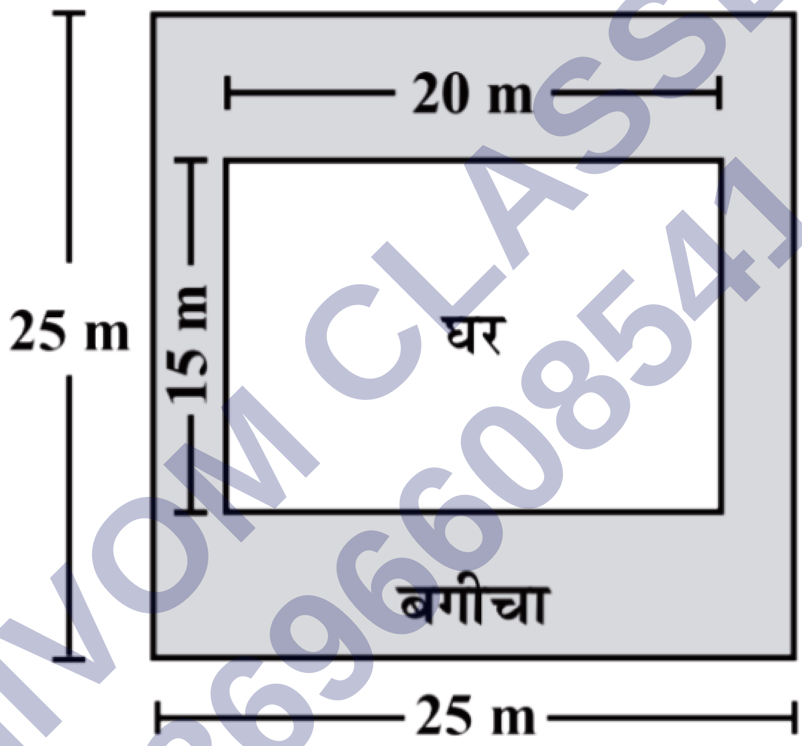
40 = चौड़ाई

तब वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = $(60)^2$ = 3600m^2

तथा आयताकार खेत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई = 80 × 40 = 3200m^2

इस प्रकार वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल अधिक होगा।

प्रश्न 2 श्रीमती कौशिक के पास चित्र में दर्शाए गए मापों वाला एक वर्गाकार प्लाट है। वह प्लॉट के बीच में एक घर बनाना चाहती हैं। घर के चारों ओर एक बगीचा विकसित किया गया है| 55 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से इस बगीचे को विकसित करने का व्यय ज्ञात कीजिए।



उत्तर- चित्र से-

वर्गाकार प्लाट की भुजा = 25m

तब प्लाट का क्षेत्रफल = भुजा 22 = $(25)^2$ = 625m^2

दिया गया

घर की लंबाई = 20m

घर की चौड़ाई = 15 m

तब घर का क्षेत्रफल = लंबाई ×× चौड़ाई = 20 × 15 = 20 × 15 = 300m^2

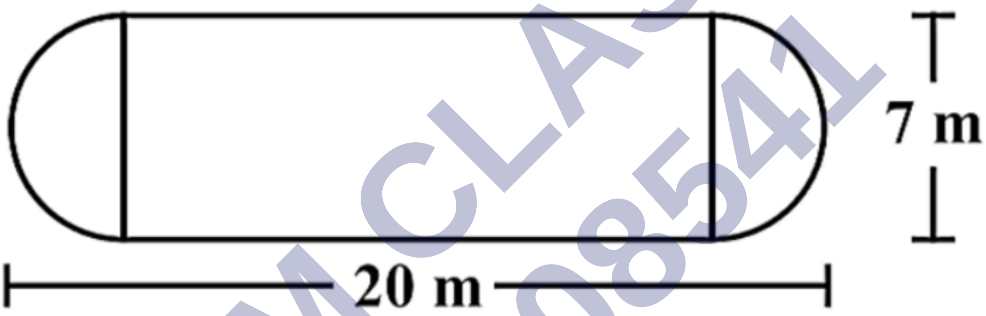
घर के चारो ओर के बगीचे का क्षेत्रफल = प्लाट का क्षेत्रफल - घर का क्षेत्रफल = 625 − 300 = $325m^2$

चुकि 1 वर्ग मीटर बगीचे को विकसित करने का व्यय = 55

तब 325 वर्ग मीटर बगीचे को विकसित करने का व्यय = 55 × 325 = 17875

अतः, बगीचे को विकसित करने का कुल व्यय = 17875 रु

प्रश्न 3 जैसा कि आरेख में दर्शाया गया है. एक बगीचे का आधार मध्य में आयताकार है और किनारों पर अर्धवृत्त के रूप में है। इस बगीचे का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (आयत की लंबाई 20 - (3.5+3.5) मीटर है।)



उत्तर-

बगीचे की लंबाई = 20m

किनारों पर अर्धवृत्त का व्यास = 7m

तब अर्धवृत्त की त्रिज्या $= \frac{7}{2} = 3.5m$

दोनों अर्धवृत्तों का परिमाप $= 2 \times \pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 = 22m$

चित्रानुसार

आयताकार भाग की लंबाई = 20 − (3.5 + 3.5)

= 20 − 7 = 13m

तथा आयताकार भाग की चौड़ाई = 7m

तब बगीचे का परिमाप = दोनों अर्धवृत्तों का परिमाप + आयताकार भाग की लंबाई

= 22 + 13 + 13 = 48m

दोनों अर्धवृत्तों का क्षेत्रफल = 2 × 12πr^2

= 2 × 12 × 227 × 3.5 × 3.5

= 38.5m^2

तब आयताकार भाग का क्षेत्रफल = l × b = l × b = 13 × 7 = 91m^2

अत: इस बगीचे का कुल क्षेत्रफल = दोनों अर्धवृत्तों का क्षेत्रफल + आयताकार भाग का क्षेत्रफल

= 91 + 38.5

= 129.5m^2

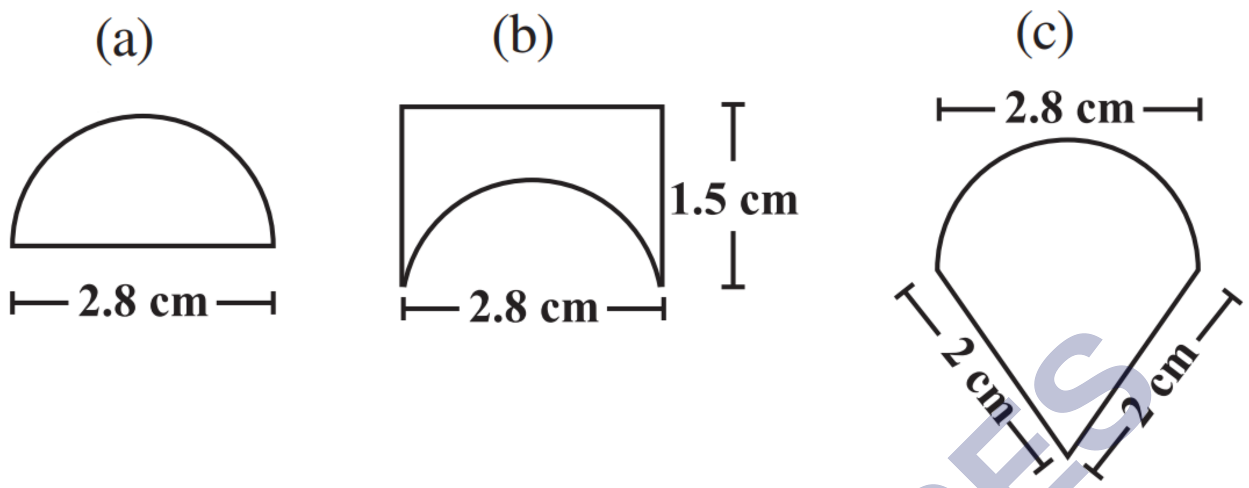
प्रश्न 4 फर्श बनाने के लिए उपयोग की जाने वाली एक टाइल का आकार समांतर चतुर्भुज का है जिसका आधार 24cm और संगत ऊँचाई 10cm है। 1080 वर्ग मीटर क्षेत्रफल के एक फर्श को ढकने के लिए ऐसी कितनी टाइलों की आवश्यकता है? (फर्श के कोनो को भरने के लिए आवश्यकतानुसार आप टाइलों को किसी भी रूप में तोड़ सकते हैं।)

उत्तर-

फर्श का क्षेत्रफल = 1080 वर्ग मीटर

$$\text{आधार} = 24cm = 0.24m$$
$$\text{ऊँचाई} = 10cm = 0.10m$$
$$\text{तब टाइल का क्षेत्रफल} = \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$
$$= 0.24 \times 0.10 = 0.024m^2$$
$$\text{आवश्यक टाइलों की संख्या} = \frac{1080}{0.024}$$
$$= 45000$$

प्रश्न 5 एक चींटी किसी फर्श पर बिखरे हुए विभिन्न आकारों के भोज्य पदार्थ के टुकड़ों के चारों ओर घूम रही है। भोज्य पदार्थ के किस टुकड़े के लिए चींटी को लंबा चक्कर लगाना पड़ेगा? स्मरण रखिए, वृत्त की परिधि सूत्र c=2πrc=2πr, जहाँ rr वृत्त की त्रिज्या है, की सहायता से प्राप्त की जा सकती है।



उत्तर-

a. व्यास = 2.82

तब त्रिज्या $= \frac{2.8}{2} = 1.4cm$

अर्धवृत्त का परिमाप $= \pi r = \frac{22}{7} \times 1.4$

= 4.4cm

अत: चीटी द्वारा चली गई कुल दूरी = अर्धवृत्त का परिमाप + व्यास

= 4.4 + 2.8

= 7.2cm

b. व्यास = 2.8

तब त्रिज्या $= \frac{2.8}{2} = 1.4cm$

अर्धवृत्त का परिमाप $= \pi r = \frac{22}{7} \times 1.4$

= 4.4cm

अत: चीटी द्वारा चली गई कुल दूरी = अर्धवृत्त का परिमाप + अन्य भागो का परिमाप

= 1.5 + 1.5 + 4.4 + 2.8

= 10.2cm

c. व्यास = 2.8

तब त्रिज्या $= \frac{2.8}{2} = 1.4\text{cm}$

अर्धवृत्त का परिमाप $= \pi r = \frac{22}{7} \times 1.4$

= 4.4cm

अत: चीटी द्वारा चली गई कुल दूरी = अर्धवृत्त का परिमाप + अन्य भागो का परिमाप

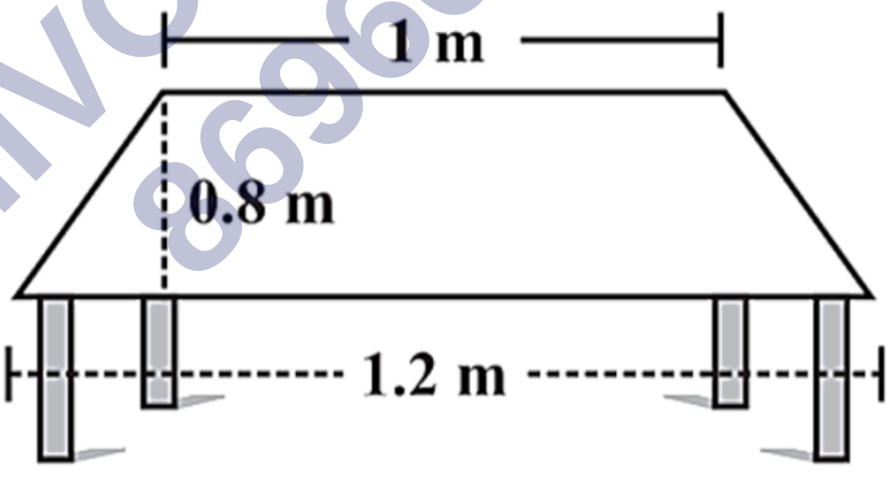
= 2 + 2 + 4.4

= 8.4cm

(b) भोज्य पदार्थ के किस टुकड़े के लिए चींटी को लंबा चक्कर लगाना पड़ेगा |

प्रश्नावली 11.2 (पृष्ठ संख्या 186)

प्रश्न 1 एक मेज के ऊपरी पृष्ठ (सतह) का आकर समलंब जैसा है। यदि इसकी समांतर भुजाएँ 1m और 1.2m यही तथा इन समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 0.8m है, तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर- माना पहली समांतर भुजा की लंबाई = a = 1m

दूसरी समांतर भुजा की लंबाई = b = 1.2m

दिया गया a = 1m, b = 1.2m

तथा ऊँचाई (h) = 0.8m

तब इसका क्षेत्रफल

= 12(a + b) × h

मान रखने पर

12 × (1 + 1.2) × 0.8 = 12 × 2.2 × 0.8 = 0.88m^2

अतः, मेज के ऊपरी पृष्ठ का क्षेत्रफल = 0.88m^2

प्रश्न 2 एक समलंब का क्षेत्रफल 34cm^2 है और इसकी ऊँचाई 4cm है। समांतर भुजाओं में से एक की लंबाई 10cm है। दूसरी समांतर भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- समलंब का क्षेत्रफल = 34cm^2

माना पहली समांतर भुजा की लंबाई = a

दूसरी समांतर भुजा की लंबाई = b

दिया गया a = 10cm

तथा ऊँचाई (h) = 4cm

समलंब का क्षेत्रफल = 12(a + b) × h

34 = 12(10 + b) × 4

या 34 = 20 + 2b

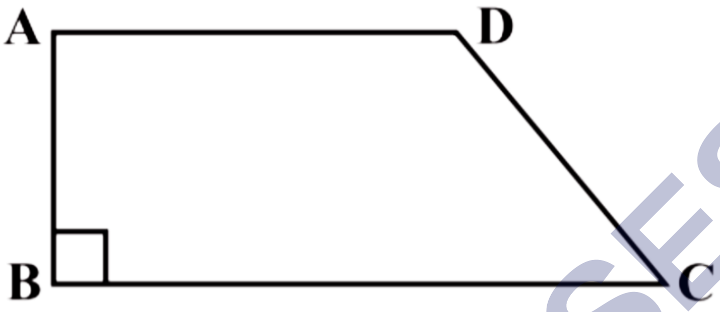
या 34 − 20 = 2b

या 14 = 2b

या 7 = b

अतः, दूसरी समांतर भुजा की लंबाई = 7cm

प्रश्न 3 एक समलंब के आकार के खेत ABCD की बाड़ की लंबाई 120m है। यदि BC = 48m,CD = 17m और AD = 40m है, तो इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। भुजा AB समांतर भुजाओं AD तथा BC पर लंब है।



उत्तर- खेत का परिमाप = 120m

तथा BC = 48m,CD = 17m और AD = 40m

तब खेत का परिमाप = AB + BC + CD + DA

120 = AB + 48 + 17 + 40

या 120 − 105 = AB

या 15 = AB

तब खेत का क्षेत्रफल = 12 × (BC + AD) × AB

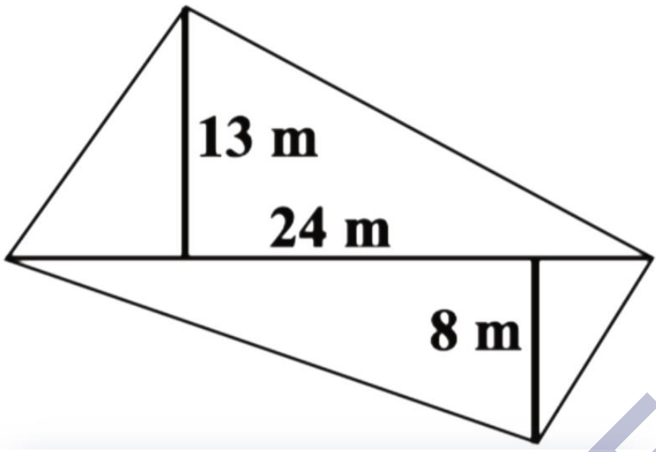
= 12 × (48 + 40) × 15

= 12 × (88) × 15

= $660m^2$

अतः, खेत ABCD का क्षेत्रफल = $660m^2$

प्रश्न 4 एक चतुर्भुज आकार के खेत का विकर्ण 24m है और शेष सम्मुख शीर्षों से इस विकर्ण पर खींचे गए लंब 8m एवं 13m हैं। खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर- माना चतुर्भुजाकार खेत ABCD है

चित्रानुसार प्रथम ऊंचाई = 13m

द्वितीय ऊंचाई = 8m

तथा विकर्ण(आधार) = 24m

तब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = $\triangle$ABC का क्षेत्रफल + $\triangle$ADC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ (प्रथम ऊंचाई + द्वितीय ऊंचाई)

$= \frac{1}{2} \times 24 \times (13 + 8)$

$= \frac{1}{2} \times 24 \times 21$

= 252

अतः, चतुर्भुजाकार खेत का क्षेत्रफल = $252m^2$

प्रश्न 5 किसी समचतुर्भुज के विकर्ण 7.5cm एवं 12cm है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- प्रथम विकर्ण = 7.5cm

तथा द्वितीय विकर्ण = 12cm

तब समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ प्रथम विकर्ण $\times$ द्वितीय विकर्ण

$= \frac{1}{2} \times 7.5 \times 12$

= 45

अतः समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 45cm^2

प्रश्न 6 एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल गेट कीजिए जिसकी भुजा 6cm और शीर्षलंब 4cm है। यदि एक विकर्ण की लंबाई 8cm है तो दूसरे विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- समचतुर्भुज का आधार = 6cm

शीर्षलंब = 4cm

प्रथम विकर्ण की लंबाई = 8cm चुकि एक समचतुर्भुज, एक समांतर चतुर्भुज होता है।

तब समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × शीर्षलंब = 6 × 4 = 24cm^2

हम जानते है समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ प्रथम विकर्ण $\times$ द्वितीय विकर्ण

$24 = \frac{1}{2} \times 8 \times$ द्वितीय विकर्ण

द्वितीय विकर्ण $= \frac{24}{4} = 6$

अतः, द्वितीय विकर्ण की लंबाई = 6cm

प्रश्न 7 किसी भवन के फर्श में समचतुर्भुज के आकार की 3000 टाइलें हैं और इनमें से प्रत्येक के विकर्ण 45cm एवं 30cm लंबाई के हैं। 4 रूपये प्रति वर्ग मीटर की दर से इस फर्श को पॉलिश करने का व्यय ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

प्रथम विकर्ण की लंबाई = 45cm

द्वितीय विकर्ण की लंबाई = 30cm

तब एक टाइल का क्षेत्रफल = 12 × प्रथम विकर्ण × द्वितीय विकर्ण $= \frac{1}{2} \times 45 \times 30$

= 675cm^2

इस प्रकार 3000 टाइलों का क्षेत्रफल = 675 × 3000 = 2025000cm^2

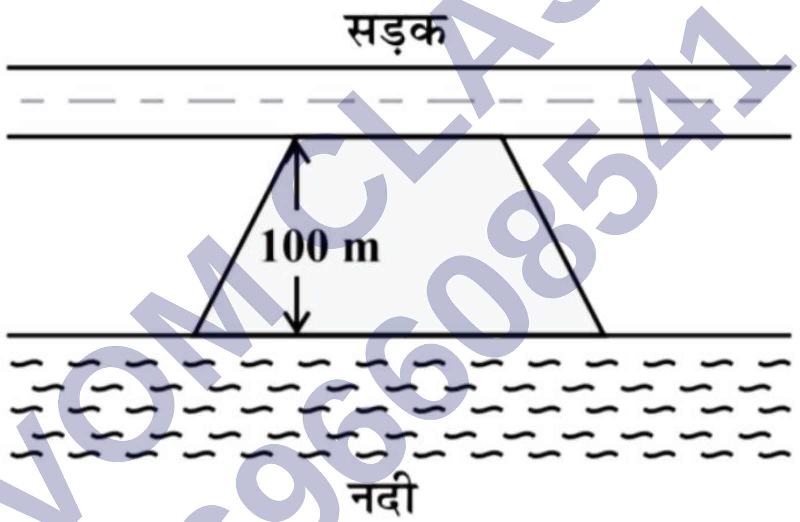
अत: पॉलिश करने का व्यय $= \frac{2025000}{10000}$

= 202.50m² ; चुकि 1m² = 10000cm²

दिया गया 1m² पर पॉलिश करने का व्यय = रु 44

तब 202.50 m² पर पॉलिश करने का व्यय = 4 × 202.50 = 810 रु

प्रश्न 8 मोहन एक समलंब के आकार का खेत खरीदना चाहता है। इस खेत की नदी के साथ वाली भुजा सड़क के साथ वाली भुजा के समांतर हैं और लंबाई में दुगुनी है। यदि इस खेत का क्षेत्रफल 10500m² है और दो समांतर भुजाओं के बीच की लंबवत 100m दूरी है, तो नदी के साथ वाली भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।



उत्तर- दो समांतर भुजाओं के बीच की लंबवत दूरी = 100m

खेत का क्षेत्रफल = 10500m²

माना सड़क के साथ वाली भुजा की लंबाई = x

तब नदी के साथ वाली भुजा की लंबाई = 2x

समलंब खेत का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (पहली भुजा + दूसरी भुजा) $\times$ लम्बवत दूरी

$$10500 = \frac{1}{2}(x + 2x) \times 100$$

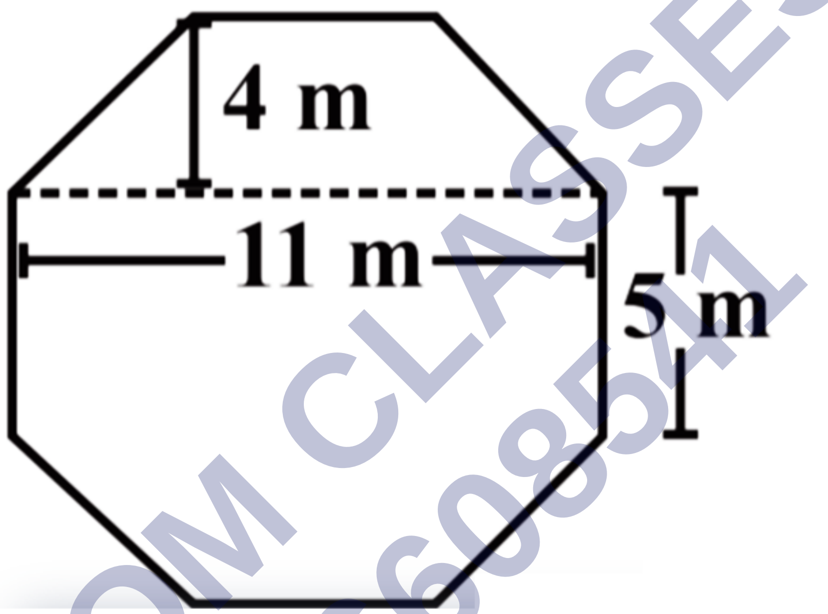
10500 = 3 × 50

$$x = \frac{10500}{50} \times 3$$

x = 70

अत: नदी के साथ वाली भुजा की लंबाई = 2x = 2 × 70 = 140m

प्रश्न 9 एक उपर उठे चबूतरे का ऊपरी पृष्ठ अष्टभुज आकार का है| जैसा की आकृति में दर्शाया गया है। अष्टभुजी पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर- चित्रानुसार अष्टभुज के भुजा की लंबाई = 5m

हमने अष्टभुज को तीन भागों में विभाजित किया।

जिसमे से दो समलंब चतुर्भुज और एक आयत है|

समलंब जिनकी समांतर भुजाएँ = 11m और 5m

तथा लंबवत दूरी = 4m

आयत जिसकी लंबाई = 11m

और चौड़ाई = 5m

तब दो समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 2 × 12 × समान्तर भुजाओ का योग × लम्बवत दूरी

$$= 2 \times \frac{1}{2}(11 + 5) \times 4 = 64m^2$$

तथा आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई = 11 × 5

= $55m^2$

अत: अष्टभुज पृष्ठ का क्षेत्रफल = दो समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल + आयत का क्षेत्रफल

= $64 + 55 = 119m^2$

प्रश्न 10 एक पंचभुज आकार का बगीचा है जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ज्योति और कविता ने इसे दो विभिन्न तरीकों से विभाजित किया।

दोनों तरीकों का उपयोग करते हुए इस बगीचे का क्षेत्रफल गेट कीजिए। क्या आप इसका क्षेत्रफल ज्ञात करने की कोई और विधि बता सकते हैं?

उत्तर- ज्योति के आरेख से-

तब पंचभुज का क्षेत्रफल इस प्रकार लिख सकते है|

पंचभुज का क्षेत्रफल = समलंब ABCP का क्षेत्रफल + समलंब AEDP का क्षेत्रफल

= 12 × समान्तर भुजाओ का योग × लम्बवत दूरी + $\frac{1}{2}$ × समान्तर भुजाओ का योग × लम्बवत दूरी

चित्रानुसार मान रखने पर-

$$= \frac{1}{2}(30 + 15) \times CP + \frac{1}{2}(15 + 30) \times DP$$

$$= \frac{1}{2}(30 + 15)(CP + DP)$$

$$= \frac{1}{2} \times 45 \times CD$$

चुकि CD = CP + PD = 15

= 12 × 45 × 15

= $337.5m^2$

कविता के आरेख से

चित्रानुसार AM = 30 – 15 = 15m

तब पंचभुज का क्षेत्रफल इस प्रकार लिख सकते है|

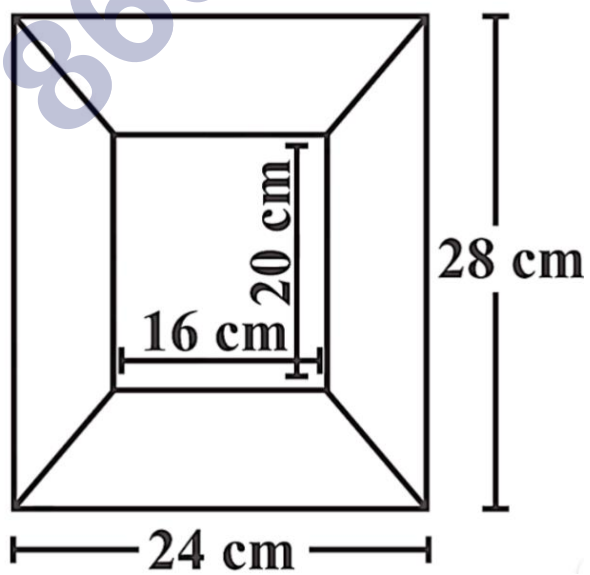
पंचभुज का क्षेत्रफल = △ABE का क्षेत्रफल + वर्ग BCDE का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊंचाई + भुजा × भुजा

$= \frac{1}{2} \times 15 \times 15 + 15 \times 15$

= 112.5 + 225.0

= $337.5m^2$

प्रश्न 11 संलग्न पिक्चर फ्रेम के आरेख की बाहरी एवं अंतः विमाएँ क्रमशः 24cm × 28cm एवं 16cm × 20cmहैं। यदि फ्रेम के प्रत्येक खंड की चौड़ाई समान है, तो प्रत्येक खंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर- माना चित्रानुसार चार आकृति I,II,III और IV है-

आकृति I का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × समान्तर भुजाओ का योग × लम्बवत दूरी

$= \frac{1}{2}(28 + 40) \times 4$

$= \frac{1}{2} \times 48 \times 4$

= $96cm^2$

चित्रानुसार I और II समान है|

अत:आकृतिI का क्षेत्रफल = आकृति II का क्षेत्रफल = $96cm^2$

इसी प्रकार आकृति III का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (20 + 16) × 4

$= \frac{1}{2} \times 40 \times 4$

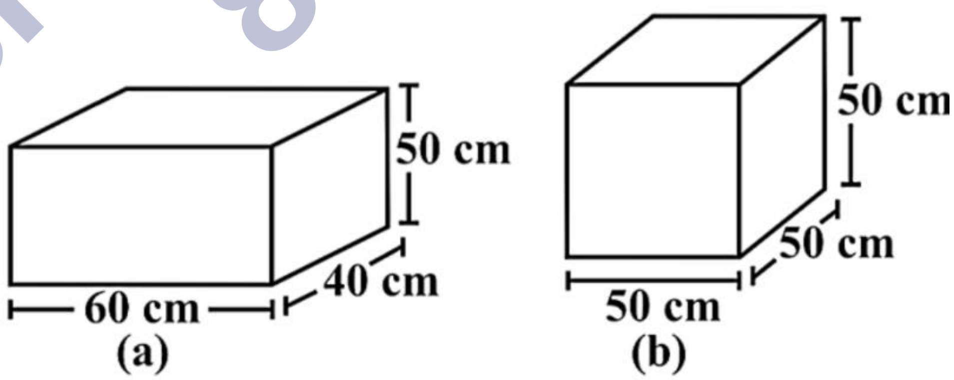
= $80cm^2$

चित्रानुसार III और IV समान है

इसलिए, आकृति (IV) का क्षेत्रफल = $80cm^2$

प्रश्नावली 11.3 (पृष्ठ संख्या 194)

प्रश्न 1 दो घनाभाकार डिब्बे हैं जैसा कि संलग्न आकृति में दर्शाया गया है| डिब्बे को बनाने के लिए कम सामग्री की आवश्यकता है?



उत्तर- इसके लिए हम इनके क्षेत्रफल ज्ञात करते है

a. पहले डिब्बे की लंबाई(l) = 60cm

पहले डिब्बे की चौड़ाई (b) = 40cm

पहले डिब्बे की ऊँचाई (h) = 50cm

पहले डिब्बे का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(lb + bh + hl)

= 2(60 × 40 + 40 × 50 + 50 × 60)

= 2(2400 + 2000 + 3000)

= 2 × 7400

= $14800cm^2$

b. दूसरे डिब्बे की लंबाई (l) = 50cm

दूसरे डिब्बे की चौड़ाई (D = 50cm

दूसरे डिब्बे की ऊँचाई (h) = 50cm

दूसरे डिब्बे का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(lb + bh + hl)

= 2(50 × 50 + 50 × 50 + 50 × 50)

= 2(2500 + 2500 + 2500)

= 2 × 7500

= $15000cm^2$

यहाँ पहले डिब्बे का क्षेत्रफल कम है| अत: इसे बनाने के लिए कम सामग्री की आवश्यकता है।

प्रश्न 2 80cm × 48cm × 24 माप वाले एक सूटकेस को तिरपाल के कपड़े से ढकना है। ऐसे 100 सूटकेसों को ढकने के लिए 96cm चौड़ाई वाले कितने मीटर तिरपाल के कपड़े की आवश्यकता है?

उत्तर- सूटकेस की लंबाई (l) = 80cm

सूटकेस की चौड़ाई (b) = 48cm

सूटकेस की ऊँचाई (h) = 24cm

तिरपाल की चौड़ाई = 96cm

तब सूटकेस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(lb + bh + hl)

= 2(80 × 48 + 48 × 24 + 24 × 80)

= 2(3840 + 1152 + 1920)

= 2 × 6912

= $13824cm^2$

सूटकेस को ढकने के लिए आवश्यक तिरपाल सूटकेस के क्षेत्रफल के समान होगा

तब तिरपाल का क्षेत्रफल = सूटकेस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

l × b = 13824

l × b = 13824

l × 96 = 13824

$$l = \frac{13824}{96}$$

= 144cm

अत:100 सूटकेसों को ढकने के लिए आवश्यक तिरपाल = 144 × 100 = 14400cm = 144m

प्रश्न 3 एक ऐसे घन की भुजा ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल $600cm^2$ है।

उत्तर- घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $600cm^2$

हम जानते है घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6l^2$

अत: $6l^2 = 600$

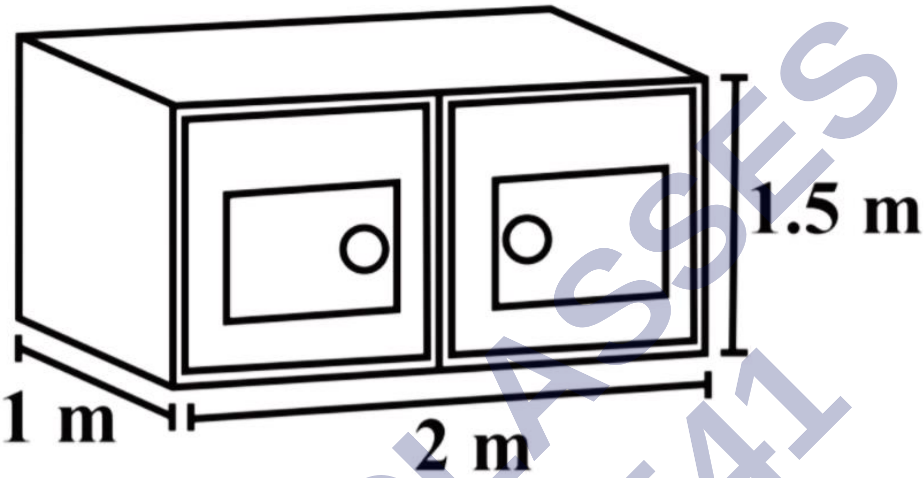
$l^2 = 100$

वर्गमूल लेने पर

l = 10cm

अतः, घन की भुजा = 10cm

प्रश्न 4 रुखसार ने 1m × 2m × 1.5m माप वाली एक पेटी को बाहर से पेंट किया। यदि उसने पेटी के तल के अतिरिक्त उसे सभी जगह से पेंट किया हो तो ज्ञात कीजिए कि उसने कितने पृष्ठीय क्षेत्रफल को पेंट किया।



उत्तर- इस पेटी की लंबाई (l) = 2m

पेटी की चौड़ाई (b) = 1m

पेटी की ऊँचाई (h) = 1.5m

तब इस पेटी का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = lb + 2(bh + hl)

= 2 × 1 + 2(1 × 1.5 + 1.5 × 2)

= 2 + 2(1.5 + 3.0)

= 2 + 9.0 = 11m^2

अतः पेंट के लिए आवश्यक पृष्ठीय क्षेत्रफल = 11m^2

प्रश्न 5 डैनियल एक ऐसे घनाभाकर कमरे की दीवारों और छत को पेंट कर रहा है जिसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 15m,10m एवं 7m हैं। पेंट की प्रत्येक कैन की सहायता से 100m^2 क्षेत्रफल को पेंट किया जा सकता है। तो उस कमरे के लिए उसे पेंट की कितनी कैनों की आवश्यकता होगी?

उत्तर- कमरे की लंबाई (l) = 15m

कमरे की चौड़ाई (b) = 10m

कमरे की ऊँचाई (h) = 7m

पेंट के लिए आवश्यक पृष्ठीय क्षेत्रफल = lb + 2(bh + hl)

= 15 × 10 + 2(10 × 7 + 7 × 15)

= 150 + 2(70 + 105)

= 150 + 350

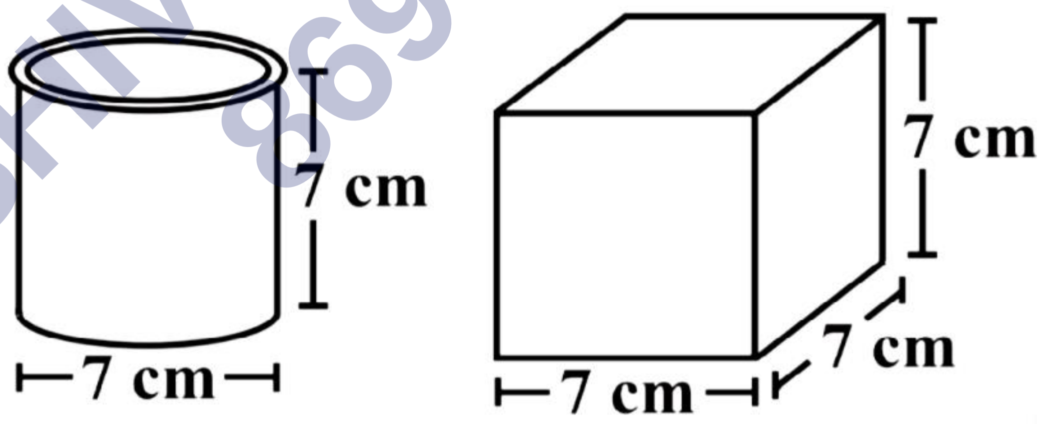
= $500m^2$

दिया गया प्रत्येक कैन की से पेंट किया गया क्षेत्रफल = $100m^2$

तब आवश्यक कैनों की संख्या $= \frac{500}{100} = 5$

अतः कमरे में पेंट करने के लिए उसे 5 कैनों की आवश्यकता है|

प्रश्न 6 वर्णन कीजिए कि दाईं तरफ की गई आकृतियाँ किस प्रकार एक समान हैं और किस प्रकार एक दूसरे से भिन्न हैं? किस डिब्बे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है?



उत्तर- पहला चित्र बेलन का है

बेलनाकार डिब्बे का व्यास = 7cm

बेलनाकार डिब्बे की ऊँचाई (h) = 7cm

तब बेलनाकार डिब्बे की त्रिज्या (r) = 72cm

बेलनाकार डिब्बे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2πrh

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times 7 = 154cm^2$$

और घनाकार डिब्बे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = 4 × भुजा^{2}

= 4 × $(7)^2$ = 196cm^2

अतः स्पष्ट है की दोनों के पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल में से घनाकार डिब्बे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है।

प्रश्न 7 7m त्रिज्या और 3m ऊँचाई वाला एक बंद बेलनाकार टैंक किसी धातु की एक चादर से बना हुआ है। उसे बनाने के लिए वांछित धातु की चादर की मात्रा ज्ञात कीजिए

उत्तर- टैंक की त्रिज्या (r) = 7m

टैंक की ऊँचाई (h) = 3m

तब इस टैंक का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2πr(h + r)

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(3+7)$$

= 440m^2

अतः वांछित धातु की चादर की मात्रा = 440m^2

प्रश्न 8 एक खोखले बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4224cm^2 है। इसे इसकी ऊँचाई के अनुदिश काटकर 33cm चौड़ाई की एक आयताकार चादर बनाई जाती है। आयताकार चादर का परिमाप ज्ञात कीजिए।

उत्तर- बेलन का वक्र पृष्ठीय = 4224cm^2

बेलन की ऊँचाई = 33cm

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2πrh

$$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 33 = 4224$$

r = 4224 × 72 × 22 × 33

r = 22411cm

इसे आयताकार चादर में बदलने पर

इसकी चौड़ाई = 33cm

आयताकार चादर की लंबाई = वृत की परिधि

l = 2πr

$$l = 2 \times \frac{22}{7} \times 22411 \ = \ 128cm$$

तब आयताकार चादर का परिमाप = 2(l + b)

= 2(128 + 33) = 2 × 161 = 322

अतः, आयताकार चादर का परिमाप = 322cm

प्रश्न 9 किसी सड़क को समतल करने के लिए एक सड़क रोलर को सड़क के ऊपर एक बार घुमने के लिए 750 चक्कर लगाने पड़ते हैं। यदि सड़क रोलर का व्यास 84cm और लंबाई 1m है तो सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- रोलर का व्यास = 84cm

सड़क रोलर की लंबाई (h) = 1m = 100cm

सड़क रोलर की त्रिज्या (r) = d^2 = 842 = 42cm

इसका पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2πrh

$$= 2\frac{22}{7} \times 42 \times 100 = 26400cm^2$$

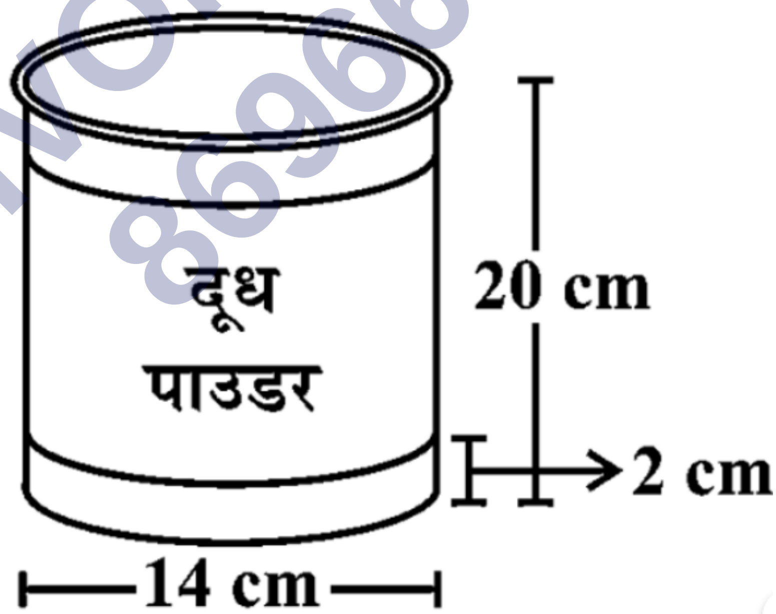
तब रोलर द्वारा 750 चक्कर लगाने में पूरा किया गया कुल क्षेत्रफल = 26400 × 750

= 1,9800000cm^2 = 1980m^2

चुकि 1m^2 = 10,000cm^2

अतः इस सड़क का कुल क्षेत्रफल = 1980m^2

प्रश्न 10 एक कंपनी अपने दूध पाउडर को ऐसे बेलनाकार बर्तनों में पैक करती है जिनका व्यास 14cm और ऊँचाई 20cm है। कंपनी बर्तन के पृष्ठ के चारों ओर एक लेबल लगाती है (जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है)। यदि यह लेबल बर्तन के तल और शीर्ष दोनों से 2cm की दूरी पर चिपकाया जाता है तो लेबल का क्षेत्रफल क्या है?



उत्तर- बेलनाकार बर्तन का व्यास = 14cm

बर्तन की ऊँचाई = 20cm

तब बर्तन की त्रिज्या $(r) = \frac{14}{2} = 7cm$

तब इस लेबल की ऊँचाई (h) = 20 − 2 − 2 = 16cm

इसका पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2πrh

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 16 = 704$$

अतः लेबल का क्षेत्रफल = $704cm^2$

प्रश्नावली 11.4 (पृष्ठ संख्या 199-200)

प्रश्न 1 आपको एक बेलनाकार टैंक दिया हुआ है, निम्नलिखित में से किस स्थिति में आप उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे और किस स्थिति में आयतन:

(a) यह ज्ञात करने के लिए कि इसमें कितना पानी रखा जा सकता है।

(b) इसका प्लास्टर करने के लिए वांछित सीमेंट बोरियों की संख्या।

(c) इसमें भरे पानी से भरे जाने वाले छोटे टैंकों की संख्या।

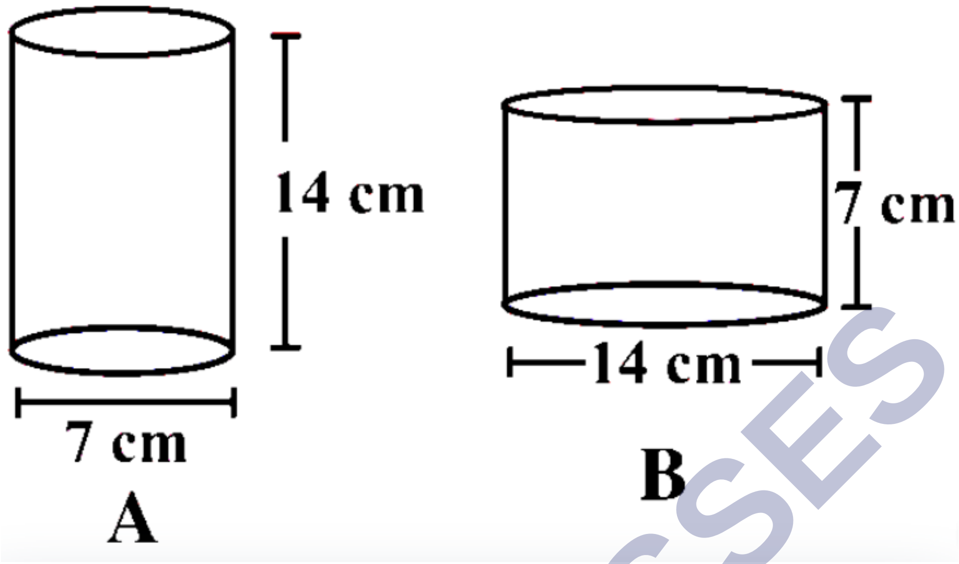
उत्तर-

(a) इसके लिए टैंक का आयतन ज्ञात करेंगे|

(b) इसके लिए टैंक का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे|

(c) इसके लिए छोटे टैंक का आयतन ज्ञात करेंगे|

प्रश्न 2 बेलन AA का व्यास 7cm और ऊँचाई 14cm है। बेलन B का व्यास 14cm और ऊँचाई 7cm है। परिकलन किए बिना क्या आप बता सकते हैं कि इन दोनों में किसका आयतन अधिक है। दोनों बेलनों का आयतन ज्ञात करते हुए इसका सत्यापन कीजिए। जाँच कीजिए कि क्या अधिक आयतन वाले बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल भी अधिक है।



उत्तर- हम जानते है की जिसकी त्रिज्या ज्यादा होगी उसका आयतन भी ज्यादा ही होगा|अत: बेलन BB का आयतन अधिक है|

बेलन A के लिए

बेलन A का व्यास = 7cm

तब बेलन A की त्रिज्या = 72cm

बेलन A की ऊँचाई = 14cm

अत: बेलन A का आयतन $\pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 72 \times 72 \times 14 = 539 cm^3$

बेलन B के लिए

बेलन B का व्यास = 14cm

तब बेलन B की त्रिज्या = 142 = 7cm

बेलन B की ऊँचाई = 7cm

अत: बेलन AA का आयतन $= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7 = 1078 cm^3$

अत: स्पष्ट है|

दोनों ऊपर से खुले हुए है

बेलन AA का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(2h + r)$

$= \frac{22}{7} \times 72(2 \times 14 + 72)$

= 11 × 632

= 346.5cm^2

बेलन B का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{22}{7} \times 7(2 \times 7 + 7)$

= 22 × (14 + 7) = 22 × 21 = 462cm^2

हाँ, स्पष्ट है अधिक आयतन वाले बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल भी अधिक है।

प्रश्न 3 एक ऐसे घनाभ की ऊंचाई ज्ञात कीजिए जिसके आधार का क्षेत्रफल 180cm^2 और जिसका आयतन 900cm^3 है?

उत्तर- घनाभ के आधार का क्षेत्रफल = 180cm^2

घनाभ का आयतन = 900cm^3

घनाभ के आधार का क्षेत्रफल = (l × b) = 180cm^2

तब घनाभ का आयतन = l × b × h = 900

180 × h = 900

$\frac{900}{180} = h$

H = 5

अतः घनाभ की ऊँचाई = 5m

प्रश्न 4 एक घनाभ की विमाएँ 60cm × 54cm × 30cm हैं। इस घनाभ के अंदर 6cm भुजा वाले कितने छोटे घन रखे जा सकते हैं।

उत्तर- उत्तर: घनाभ की लंबाई (l) = 60cm

घनाभ की चौड़ाई (b) = 54cm

घनाभ की ऊँचाई (h) = 30cm

तब घनाभ का आयतन = l × b × h = 60 × 54 × 30 = $97200cm^3$

तथा घन का आयतन = $(भुजा)^3$ = 6 × 6 × 6 = $216cm^3$

रखे जाने वाले छोटे घनों की संख्या $= \frac{60\times54\times30}{6\times6\times6} = 450$

प्रश्न 5 एक ऐसे बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका आयतन $1.54m^3$ और जिसके आधार का व्यास 140cm है?

उत्तर- बेलन का आयतन = $1.54m^3$

बेलन के आधार का व्यास = 140cm

तब त्रिज्या (r) = $\frac{140}{2}$ = 70cm

तब बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$ = 1.54

$= \frac{22}{7} \times 0.7 \times 0.7 \times h = 1.54$

$$= \frac{1.54 \times 7}{0.7 \times 0.7} = h$$

= 1

अतः बेलन की ऊँचाई = 1m

प्रश्न 6 एक दूध का टैंक बेलन के आकार का है जिसकी त्रिज्या 1.5m और लंबाई 7m है। इस टैंक में भरे जा सकने वाले दूध की मात्रा लीटर में ज्ञात कीजिए।

उत्तर- टैंक की त्रिज्या (r) = 1.5m

टैंक की ऊँचाई (h) = 7m

बेलनाकार टैंक का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 \times 7$$

= $49.5cm^3$

= 49500 लीटर ; चुकि $1cm^3$ = 1000 लीटर

अतः, टैंक में भरे दूध की मात्रा = 49500 लीटर

प्रश्न 7 यदि किसी घन के प्रत्येक किनारे को दुगुना कर दिया जाए, तो

(i) इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितने गुना वृद्धि होगी?

(ii) इसके आयतन में कितने गुना वृद्धि होगी?

उत्तर-

(i) माना, घन की भुजा = l

तब पुराने घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6l^2$.....(i)

यदि घन के प्रत्येक किनारे को दुगुना कर दिया जाए तो भुजा = 2 × l

तब नए घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6(2l)^2 = 6 \times 4l^2 = 4 \times 6l^2$.....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से-

नए घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 4 × पुराने घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

अतः इस स्थिति में घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल चार गुना हो जाएगा।

(ii) माना, घन की भुजा = l

तब पुराने घन का आयतन = l^3.....(i)

यदि घन के प्रत्येक किनारे को दुगुना कर दिया जाए तो भुजा = 2 × l

तब नए घन का आयतन = $(2l)^3 = 8l^3$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से-

नए घन का आयतन = 8 × पुराने घन का आयतन

अतः इस स्थिति में घन का आयतन 8 गुना हो जाएगा।

प्रश्न 8 एक कुंड के अंदर 60 लीटर प्रति मिनट की दर से पानी गिर रहा है। यदि कुंड का आयतन $108m^3$ है, तो ज्ञात कीजिए कि इस कुंड को भरने में कितने घंटे लगेंगे?

उत्तर- कुंड का आयतन = $108m^3$

कुंड के अंदर पानी गिरने की दर = 60 लीटर/ मिनट

$= \frac{60}{1000}$ मीटर^3/मिनट

$\therefore$ $1l = 11000m^3$

चुकि;$1l=11000m^3

$= \frac{60\times60}{1000}$ मीटर^3/घंटे

= 3.6 मीटर^3/ घंटे

कुंड में 3.63.6 मीटर^3 पानी भरने में लगा समय = 1 घंटा

इसलिए कुंड में 1 मीटर^3 पानी भरने में लगा समय = 13.6 घंटे

अत: कुंड में $108m^3$ पानी भरने में लगा समय = 1083.60 घंटे = 30 घंटे

अतः कुंड को भरने में लगा समय 0= 30 घंटे