गणित

अध्याय-10: सदिश बीजगणित

भौतिक राशियाँ (Physical Quantities)

भौतिक शास्त्र (Physics) का अध्ययन करने के लिए जिन राशियों का उपयोग प्राथमिक रूप से किया जाता है, वे राशियाँ भौतिक राशियाँ कहलाती हैं। उदाहरण- लम्बाई, मात्रा, घनत्व, क्षेत्रफल, आयतन, समय, तापमान, चाल, वेग, त्वरण, कार्य, आघूर्ण, संवेग, बल इत्यादि।

हम सम्पूर्ण भौतिक राशियों को दो मुख्य भागों में विभाजित कर सकते हैं। ये भाग निम्न हैं

1. अदिश राशियाँ (Scalar Quantities) या अदिश (Scalars)
2. सदिश राशियाँ (Vector Quantities) या सदिश (Vectors)।

1. **अदिश राशियाँ (Scalar Quantities)-** वे भौतिक राशियाँ जिनमें केवल परिमाण (Magnitude) होता है, दिशा (Direction) नहीं होती है, अदिश राशियाँ कहलाती हैं।

   उदाहरण- लम्बाई, मात्रा, घनत्व, आयतन, समय, तापमान, चाल, कार्य इत्यादि अदिश राशियाँ हैं।

2. **सदिश राशियाँ (Vector Quantities)-** सदिश का शाब्दिक अर्थ है- दिशा सहित अथवा दिशायुक्त। अतः वे भौतिक राशियाँ जिनमें परिमाण होता है तथा जिनकी अन्तरिक्ष (Space) में एक निश्चित दिशा (Definite direction) होती है, सदिश राशियाँ कहलाती हैं।

   उदाहरण-वेग, त्वरण, आघूर्ण, संवेग इत्यादि सदिश राशियाँ हैं।

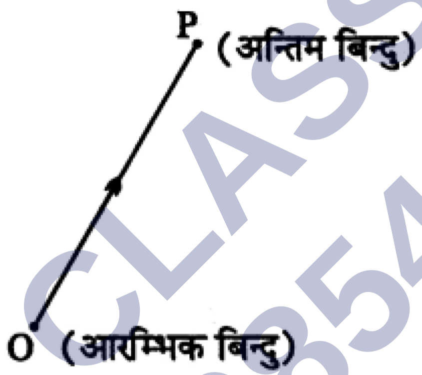
सदिश राशियों का निरूपण (Representation of Vectors Quantities)

हम जानते हैं कि एक सदिश राशि में परिमाण व दिशा दोनों पाये जाते हैं। अतः एक सदिश राशि को पूर्णतया निरूपित तभी किया जा सकता है जबकि उसके परिमाण व दिशा दोनों को निरूपित कर दिया जाये। इस उद्देश्य की पूर्ति हेतु किसी सदिश राशि के निरूपण के लिए एक दिष्ट रेखाखण्ड (Directed line segment) का प्रयोग किया जाता है।

दिष्ट रेखाखण्ड के रूप में सदिश (Vectorin form of Directed Line Segment)

खण्ड का शाब्दिक अर्थ है-भाग या हिस्सा। अन्तरिक्ष में किसी निश्चित दिशा में खींची गयी रेखा का एक निश्चित लम्बाई का हिस्सा, दिष्ट रेखाखण्ड कहलाता है।

मान लीजिए कि अन्तरिक्ष में कोई स्वेच्छ (Arbitrary) बिन्दु है तथा P कोई अन्य बिन्दु है। तब रेखाखण्ड OP में परिमाण व दिशा दोनों होंगे। रेखाखण्ड OP की लम्बाई परिमाण को तथा रेखाखण्ड OP की दिशा (0 से P की ओर) दिशा को निरूपित करने में सक्षम होगी। इस प्रकार रेखाखण्ड OP एक सदिश को पूर्णतया निरूपित करने में सक्षम होगा। यही कारण है कि सदिश को दिष्ट रेखाखण्ड कहकर परिभाषित किया जाता है (A vector is a directed line segment)।



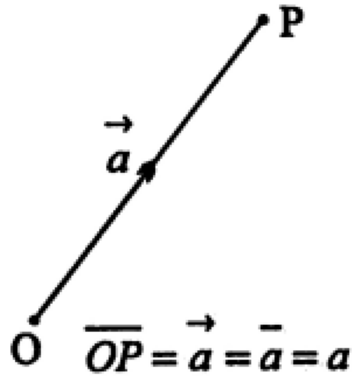
दिष्ट रेखाखण्ड

यहाँ OP एक दिष्ट रेखाखण्ड कहलाता है। इस प्रकार, एक दिष्ट रेखाखण्ड, एक सदिश को निरूपित करता है। यहाँ 0 प्रारम्भिक बिन्दु (Initial point or origin) तथा P अन्तिम बिन्दु (Final point or terminal point) कहलाता है।

सदिश राशियों का संकेतन (Notations of Vectors)

सदिश राशियों को मोटे (Clarendon or Bold face type) अक्षरों या सिरे पर तीर अथवा लकीर युक्त अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों से सूचित करते हैं।

उदाहरण-



a, b, c, d,......... अथवा $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, ...$ अथवा $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, ...$ इत्यादि। दिए गए

चित्र में सदिश $\overrightarrow{op}$ को $\vec{a}$ से सूचित किया गया है। $\vec{a}$

सदिश का मापांक (Modulus ofaVector)

वह धनात्मक संख्या जो किसी सदिश राशि के परिमाण को मापती है, उस सदिश राशि का मापांक कहलाती है।

सदिश $\vec{a}$ के मापांक को $|\vec{a}|$ या mod $\vec{a}$ से सूचित किया जाता है। कभी-कभी सदिश के मापांक को तिरछे अक्षर a से सूचित किया जाता है। इस प्रकार,

$$|\vec{a}| = |\bar{a}| = mod\ \vec{a} = mod\ \bar{a} = a.$$

मापांक को निरपेक्ष मान (Absolute value) भी कहते हैं।

नोट-

1. मापांक सदैव धनात्मक होता है।
2. किसी सदिश का मापांक तथा उस सदिश के प्रारिम्भक व अन्तिम बिन्दु को अन्तः परिवर्तित करने पर प्राप्त सदिश का मापांक आपस में बराबर होते हैं। अर्थात्,

   $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}.$

सदिशों के प्रकार (Types of Vectors)

1. **शून्य सदिश (Zero vector or Null Vector)-** वह सदिश जिसका मापांक शून्य होता है, शून्य सदिश कहलाता है।

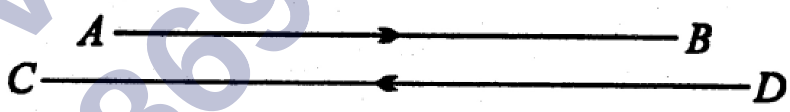
यदि $\vec{a}$ एक शून्य सदिश है, तो | $|\vec{a}| = 0.$

2. **उचित सदिश (Proper Vector)-** वह सदिश जिसका मापांक शून्य नहीं है, उचित सदिश कहलाता है। इसे अशून्य सदिश (Non-zero vector) भी कहते हैं।
3. **इकाई सदिश (Unit Vector)-** इकाई मापांक वाले सदिश को इकाई सदिश कहते हैं। सिर पर लगा चिन्ह ^ इकाई सदिश को निरूपित करता है। इस प्रकार, सदिश $\vec{a}$ की दिशा में इकाई सदिश को a से सूचित किया जाता है। a को 'a cap' बोलकर पढ़ा जाता है। हम a को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं-

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

4. **समदिश एवं असमदिश सदिश (Like and Unlike Vectors)-**दो सदिश समदिश कहलाते हैं, यदि उनकी अभिदिशायें समान हों।

समदिश सदिश



असमदिश सदिश

दो सदिश असमदिश कहलाते हैं, यदि उनकी अभिदिशायें विपरीत हों। ये सदिश विपरीतदिश सदिश भी कहलाते हैं।

नोट- समदिश तथा असमदिश दोनों प्रकार के सदिश समान्तर होते हैं। उनके परिमाणों का समान होना आवश्यक नहीं है।

5. **समरेखीय या समान्तर सदिश (Collinear or Parallel Vectors)-** यदि सदिशों की क्रिया-रेखायें (Lines of action) एक ही हों या एक ही रेखा के समान्तर हों, तो वे सदिश समरेखीय या समान्तर सदिश कहलाते हैं। दो समरेखीय या समान्तर सदिशों की

अभिदिशाओं का एक ही होना आवश्यक नहीं है। इस प्रकार, समदिश व असमदिश दोनों प्रकार के सदिश समरेखीय या समान्तर सदिश हैं।

6. **विपरीत या ऋण सदिश (Opposite or Negative Vector)-** वह सदिश जिसका मापांक सदिश $\vec{a}$ के मापांक के बराबर है, किन्तु दिशा की दिशा के विपरीत है, सदिश $\vec{a}$ का विपरीत या ऋण सदिश कहलाता है। इसे $-\vec{a}$ से सूचित किया जाता है। इस प्रकार,

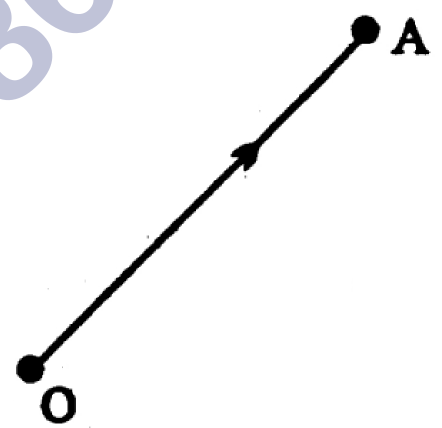
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

7. **व्युत्क्रम सदिश (Reciprocal Vectors)-** वह सदिश जिसकी दिशा वही है जो सदिश $\vec{a}$ की है किन्तु परिमाण $\vec{a}$ के परिमाण के व्युत्क्रम है, सदिश $\vec{a}$ का व्युत्क्रम सदिश कहलाता है।

उदाहरण- $-m\vec{a}$ तथा $\frac{1}{m}\vec{a}$ परस्पर व्युत्क्रम सदिश हैं।

8. **स्थिति सदिश (Position Vectors)-** प्रत्येक दिष्ट रेखा खण्ड (Directed line segment) एक सदिश को निरूपित करता है। माना किसी दिष्ट रेखा खण्ड का प्रारम्भिक बिन्दु o तथा अंतिम बिन्दु A है तो उसके द्वारा निरूपित सदिश $\overrightarrow{OA}$ होगा।



$\overrightarrow{OA}$ के द्वारा यह ज्ञात होता है कि स्थिर बिन्दु O के सापेक्ष A की स्थिति क्या है? बिन्दु o से A की दूरी और दिशा क्या है? अतः $\overrightarrow{OA}$ एक स्थिति सदिश है जो o के सापेक्ष बिन्दु A की

स्थिति बताता है।

9. समान सदिश (Equal Vectors)—दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान सदिश कहलाते हैं, यदि-

1) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ अर्थात् दोनों सदिशों के परिमाण समान हों,

2) $\vec{a}||\vec{b}$ अर्थात् दोनों सदिश परस्पर समान्तर हों तथा

3) $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ है की अभिदिशायें समान हों।

सदिशों का योग (Addition of Vectors)

माना $\overrightarrow{OA}$ तथा $\overrightarrow{AB}$ दो सदिश इस प्रकार से हैं कि प्रथम सदिश का अन्तिम बिन्दु, द्वितीय सदिश का प्रारम्भिक बिन्दु है। तब, सदिश $\overrightarrow{OB}$, सदिशों $\overrightarrow{OA}$ तथा $\overrightarrow{AB}$ का योग (परिणामी) कहलाता है।

अर्थात्

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

यह सदिश योग का त्रिभुज नियम (Triangle Law of Vector Addition) कहलाता है। इस नियम को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं-

“यदि दो सदिश किसी त्रिभुज की एक क्रम से ली गई दो भुजाओं से निरूपित होते हैं, तो उन सदिशों का योग विपरीत क्रम से ली गई त्रिभुज की तीसरी भुजा से निरूपित होता है।"

सदिशयोग के गुण (Properties of Veetor Addition)

सदिश योग के निम्न गुण हैं

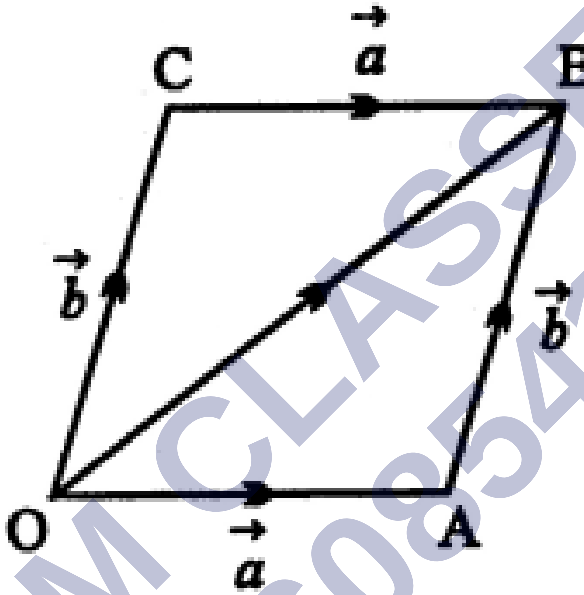
1. **क्रम-विनिमेय नियम** (Commutative law)- यदि तथा। कोई दो सदिश हैं तब,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

प्रमाण (Proof)– मान लीजिए कि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ है तब, सदिश योग के त्रिभुज नियम से,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b} \quad ...(1)$$



समान्तर चतुर्भुज OABC को पूरा किया। तब,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA},$$

[$\because \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ तथा $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$]

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \vec{b} + \vec{a} \; ....(2)$$

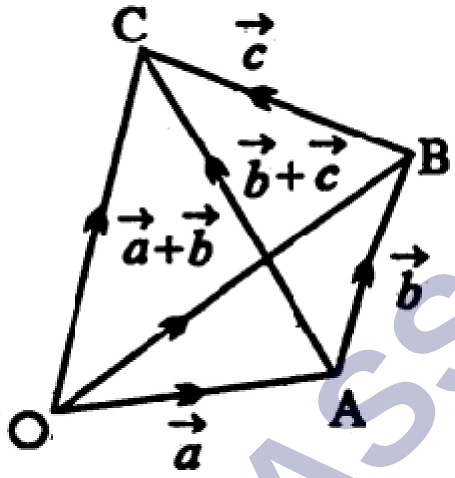
समी. (1) व (2) से,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

2. **साहचर्य नियम (AssociativeLaw)-** यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ कोई तीन सदिश हैं, तो $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

प्रमाण (Proof)– माना $\overline{OA} = \vec{a}, \overline{AB} = \vec{b}$ तथा $\overline{BC} = \vec{c}$

तब,



$\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} \ldots (1)$

पुनः $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} \ldots . (2)$

समी. (1) व (2) से,

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3. **शून्य सदिश योग्य तत्समक है (Zero Vector is an Additive Identity)-** यदि $\vec{a}$ कोई सदिश है तथा $\vec{0}$ शून्य सदिश है। तब,

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}.$

प्रमाण (Proof)– माना $\overline{OA} = \vec{a}$ तब,

$\vec{a} + \vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA}, \qquad [\because \vec{AA} = \vec{0}]$

$\overrightarrow{OA} + \vec{a} \ldots (1)$

पुनः $\vec{0} + \vec{a} = \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} = \vec{a} \ldots (2)$

समी. (1) व (2) से,

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$

4. **योज्य प्रतिलोम (Additive Inverse)-** प्रत्येक सदिश। के लिए एक सदिश - का अस्तित्व इस प्रकार होता है। कि

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} = (-\vec{a}) + \vec{a}.$

प्रमाण (Proof)—माना $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ तब $\overrightarrow{AO} = -\vec{a}.$

$\therefore \vec{a} + (-\vec{a}.) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OO} = \vec{0} \ldots (1)$

तथा $\therefore (-\vec{a}) + \vec{a} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \ldots (2)$

समी. (1) व (2) से,

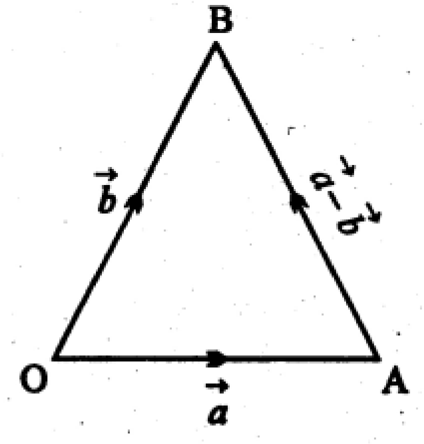
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} = (-\vec{a}) + \vec{a}$

नोट- सदिश $-\vec{a}$ सदिश $\vec{a}$ का योज्य प्रतिलोम कहलाता है।

सदिशों का व्यवकलन (Subtraction of Vectors)

यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ कोई दो सदिश हैं, तो सदिश $\vec{a}$ से सदिश $\vec{b}$ का व्यवकलन, सदिश $\vec{a}$ में सदिश $-\vec{b}$ के योग के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा हम लिखते हैं कि

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$



माना $OA = \vec{a}$ तथा $\underset{OB}{\rightarrow} = \vec{b}$ तब,}

$\overrightarrow{OB} = -\vec{b}$

$\therefore \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$

$= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA},$ [क्रमविनिमेय नियम से]

$= \overrightarrow{BA},$ [सदिश योग के त्रिभुज नियम से]

इसी प्रकार, $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$

अतः $\overrightarrow{AB} = B$ का स्थिति सदिश -A का स्थिति सदिश

तथा $\overrightarrow{BA} = A$ का स्थिति सदिश - B का स्थिति सदिश

उदहारण 1

त्रिभुज ABC में भुजा BC का मध्य बिंदु D हो, तो सिद्ध कीजिये कि-

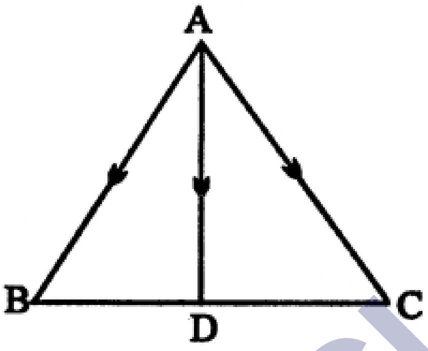
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}.$$

हल : ΔABC की भुजा BC का मध्य बिन्दु D है।

$\therefore \qquad BD = DC$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$



$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

ΔABD में, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

ΔACD में, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

समी. (2) और (3) को जोड़ने पर,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AD}$$

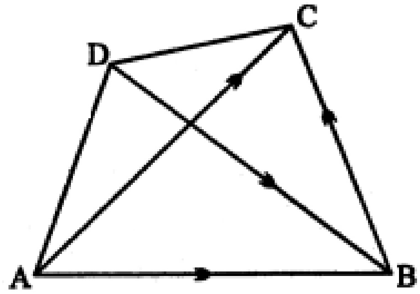
$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD},$

उदहारण 2

किसी चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC तथा BD है, तो सिद्ध कीजिए कि -

$$\vec{AB}+\vec{DC}=\vec{AC}+\vec{DB}.$$

हल : ΔABC में सदिश योग के त्रिभुज नियम से,



$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{AB}=\vec{AC}-\vec{BC} \quad ...(1)$$

ΔBCD में सदिश योग के त्रिभुज नियम से,

$$\vec{DC}=\vec{DB}+\vec{BC} \quad ...(2)$$

समी. (1) तथा (2) को जोड़ने पर,

$$\vec{AB}+\vec{DC}=(\vec{AC}-\vec{BC})+(\vec{DB}+\vec{BC})$$

$$=\vec{AC}+\vec{DB}.$$

खण्ड सूत्र (Section Formula)

दो दिए हुए बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड को एक दिए हुए अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु का स्थिति सदिश ज्ञात करना।

माना O मूलबिन्दु है जिसके सापेक्ष बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः a तथा b हैं। तब,

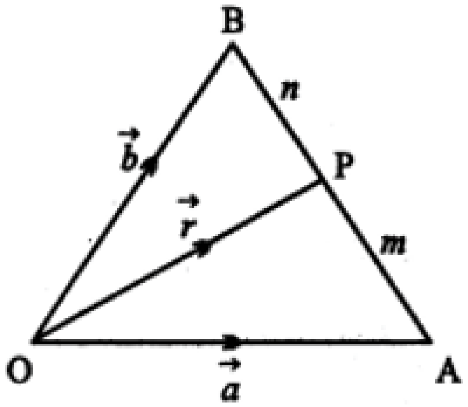
$$OA = a \text{ तथा } OB = b$$

माना बिन्दु P, रेखाखण्ड AB को m:n के अनुपात में विभाजित करता है तथा $OP = r$.

अब दो स्थितियाँ सम्भव हैं

स्थिति 1. जब PAB को अन्तः विभाजित करता है। तब,

$$\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$$



$$nAP = m\,PB$$

$$n\,\overrightarrow{AP} = m\,\overrightarrow{PB}$$

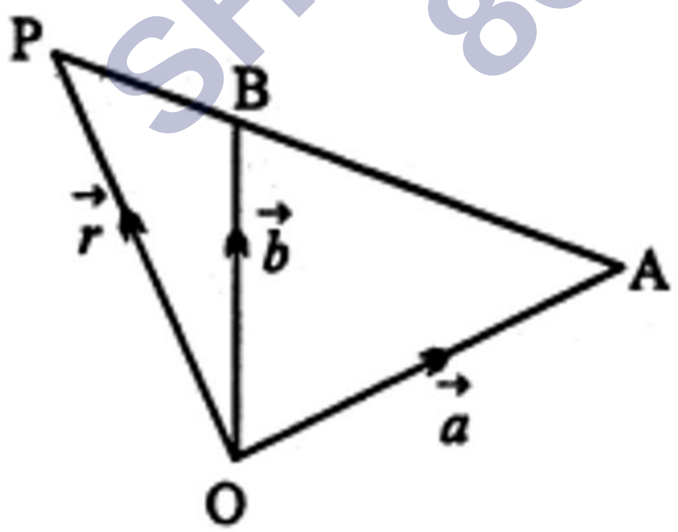
$$n(\vec{r}-\vec{a}) = m(\vec{b}-\vec{r})$$

$$(m+n)\vec{r} = m\vec{b}+n\vec{a}$$

$$\boxed{\vec{r}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}}$$

यही बिन्दु P का अभीष्ट स्थिति सदिश है।

स्थिति 2. जब PAB को बाह्यतः विभाजित करता है। तब,



$$\frac{AP}{PB}=\frac{-m}{n}$$

$$\Rightarrow \quad nAP=-mPB$$

$$\Rightarrow \quad n(\vec{r}-\vec{a})=-m(\vec{b}-\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad (m-n)\vec{r}=m\vec{b}-n\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}}$$

यही बिन्दु P का अभीष्ट स्थिति सदिश है।

उदाहरण 1. बिन्दुओं $2\vec{a}-3\vec{b}$ तथा $3\vec{a}-2\vec{b}$ को मिलाने वाली रेखा को 2:3 में अन्तर्गत तथा बहिर्गत विभक्त करने वाले बिन्दु का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

हल : यदि $\vec{C}$ अन्तः विभक्त करती है, तो

$$\vec{C}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

यहाँ $\vec{B}=3\vec{a}-2\vec{b},$

$$\vec{A}=2\vec{a}-3\vec{b} \text{ व}$$

$$m=2, n=3$$

$$\therefore \quad \vec{C}=\frac{2(3\vec{a}-2\vec{b})+3(2\vec{a}-3\vec{b})}{2+3}$$

$$=\frac{12\vec{a}-13\vec{b}}{5}$$

$$=\frac{12}{5}\vec{a}-\frac{13}{5}\vec{b}.$$

यदि $\vec{C}$ बाह्य विभक्त करता है, तो

$$\vec{C}=\frac{2(3\vec{a}-2\vec{b})-3(2\vec{a}-3\vec{b})}{2-3}$$

$$=\frac{6\vec{a}-4\vec{b}-6\vec{a}+9\vec{b}}{-1}$$

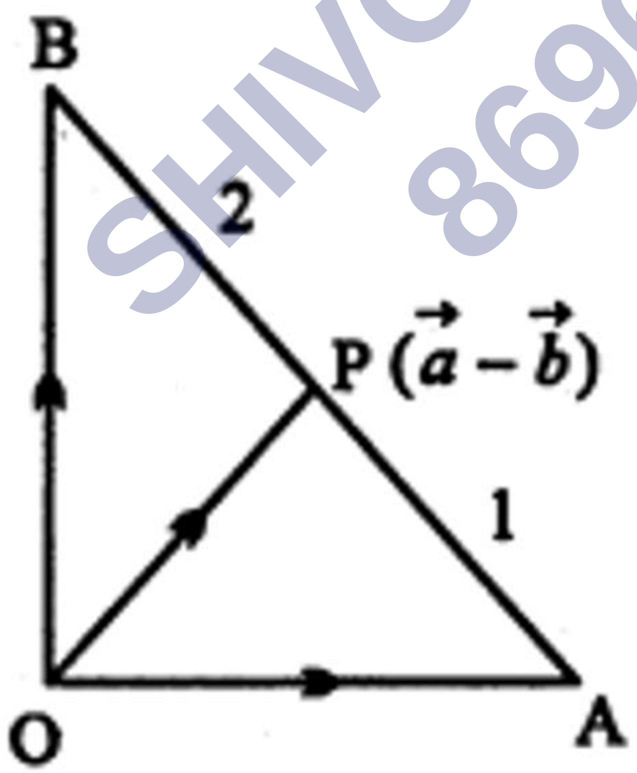
$$=\frac{5\vec{b}}{-1}$$

$$=-5\vec{b}.$$

उदाहरण 2.

A और B दो बिन्दु हैं। बिन्दु A का स्थिति सदिश $6\vec{a}-6\vec{b}$ है। कोई बिन्दु P जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}-\vec{b}$ है, AB को 1:2 में विभक्त करता है, तो B का स्थिति सदिश ज़ात करो।

हल : माना O मूलबिन्दु है। तब,



$$\vec{OA} = 6\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{OP} = \vec{a} - \vec{b}, \vec{OB} = ?$$

$$m = 1, n = 2$$

$$\vec{OP} = \frac{1(\vec{OB}) + 2(\vec{OA})}{1+2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} - \vec{b} = \frac{\vec{OB} + 2(6\vec{a} - 2\vec{b})}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{OB} + 12\vec{a} - 4\vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{OB} = \vec{b} - 9\vec{a}$$

अत: B का स्थिति सदिश $= \vec{b} - 9\vec{a}$.

प्रमेय (Theorem)

यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो असमरेखीय सदिश हैं तथा x, y ऐसे अदिश हैं कि $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$, तो $x = 0, y = 0$.

प्रमाण (Proof)- माना $x \neq 0$

तब $\quad x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{-y}{x}\vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = m\vec{b}, \text{ जहाँ } m = \frac{-y}{x}$$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समरेखीय हैं। $\quad$ [$\because$ m एक अदिश है]

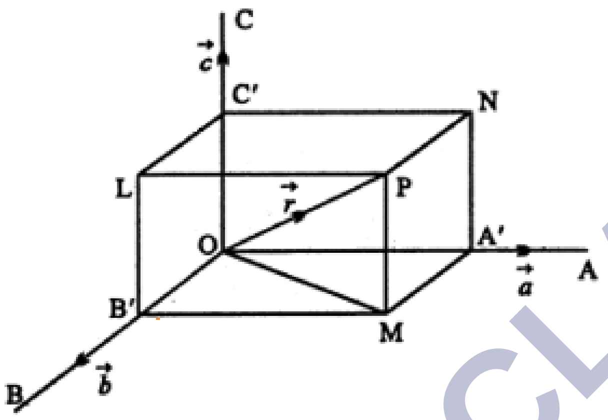
किन्तु सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ है असमरेखीय दिए गये हैं, अतः प्राप्त फल हमारी परिकल्पना के विरुद्ध है।

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि x = 0, y = 0.

असमतलीय सदिश (Non-coplanar Vectors)

यदि, $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$: कोई तीन असमतलीय सदिश हैं, तो किसी भी सदिश $\vec{r}$ को $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ के रूप में प्रकट किया जा सकता है, जहाँ x,y,z उचित अदिश हैं। $\underset{OA}{\rightarrow}$

प्रमाण (Proof)- माना $\underset{OA}{\rightarrow} = \vec{a}$, = तथा $\underset{OC}{\rightarrow} = \vec{c}$ कोई तीन असमतलीय सदिश हैं। माना $\underset{OP}{\rightarrow} = \vec{r}$ अन्तरिक्ष में कोई सदिश है।



OP को विकर्ण मानकर एक समान्तर षट्फलक (Parallelopiped) की रचना करो जिसकी तीन संगामी भुजायें OA', OB' तथा Oc' हैं जो क्रमशः OA, OB तथा OC के अनुदिश है।

$\because$ OA' OA के अनुदिश है।

$\therefore$ $\quad \overrightarrow{OA'} = x.\overrightarrow{OA} = x\vec{a}$, जहाँ x एक अदिश है।

इसी प्रकार, $\overrightarrow{OB'} = y.\overrightarrow{OB} = y\vec{b}$

$\overrightarrow{OC'} = z.\overrightarrow{OC} = z\vec{c}$

अब $\quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$

$= (\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'M}) + \overrightarrow{OC'}$

$= \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'}$

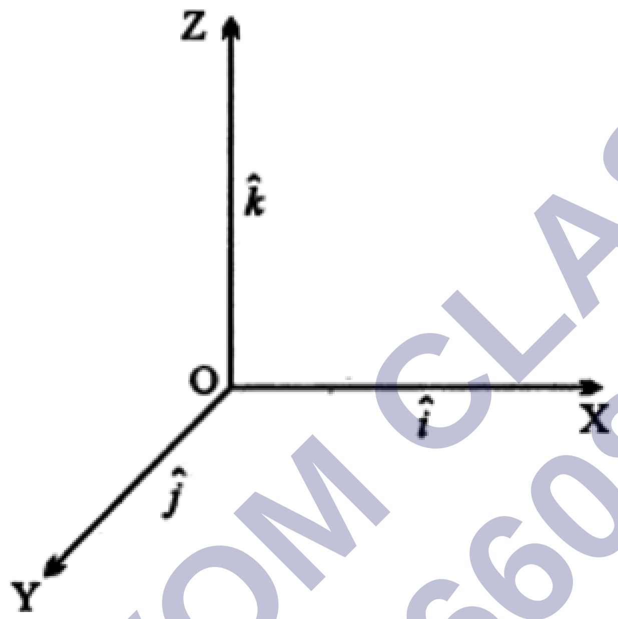
$= y\vec{b} + x\vec{a} + z\vec{c}$

अतः: $\quad \boxed{\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.}$

अतः ज्ञात हुआ कि किसी सदिश को तीन असमतलीय सदिशों के एकघात संचय (Linear combination) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

मात्रक सदिश

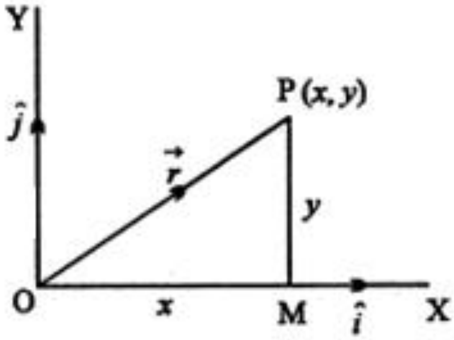
माना Ox, Or व Oz तीन परस्पर लम्बवत् संगामी रेखायें हैं। इन्हें हम क्रमश: X-अक्ष, Y-अक्ष व Z-अक्ष कहते हैं। ये रेखायें



बिन्दु o पर मिलती हैं, जिसे मूलबिन्दु (Origin) कहते हैं। Ox, OY व Oz के अनुदिश क्रमशः मात्रक सदिश i.j, k माने जाते हैं। स्पष्टत: ये मात्रक सदिश परस्पर लम्बवत् हैं तथा एकलाम्बिक मात्रक सदिश त्रिक् (Orthonormal Unit Vectors Triad) का निर्माण करते हैं। ये मात्रक सदिश दक्षिणावर्ती क्रम में लिए जाते हैं।

द्विविमीय एकक सदिश (Two-dimen sional Unit Vectors)

माना कागज के समतल में Ox व OY दो परस्पर लम्बवत् प्रतिच्छेदी रेखायें हैं। माना Oxव OY के अनुदिश मात्रक सदिश क्रमशः I,j हैं। माना इस समतल में कोई बिन्दु P(x,y) है। P से PM LOX खींचा। OP को मिलाया। तब OM = x तथा MP =y, माना OP =r.



$\because$ OM के अनुदिश मात्रक सदिश i है।

$\therefore \quad \overline{OM} = (OM)\hat{i} = \hat{j}$

$\because$ MP के अनुदिश मात्रक सदिश j है।

$\therefore \quad \overline{MP} = (MP)\hat{j} = y\hat{j}$.

अब, ΔOMP में,

$$\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP}$$

[सदिश योग के त्रिभुज नियम से]

$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j}}$

पुन: $\quad OP^2 = OM^2 + MP^2$

$\Rightarrow \quad r^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

अत: $\quad$ सदिश $\bar{r}$ का मापांक $= \sqrt{x^2 + y^2}$

है जो I,j के गुणांकों के वर्गों के योग का धनात्मक वर्गमूल है।

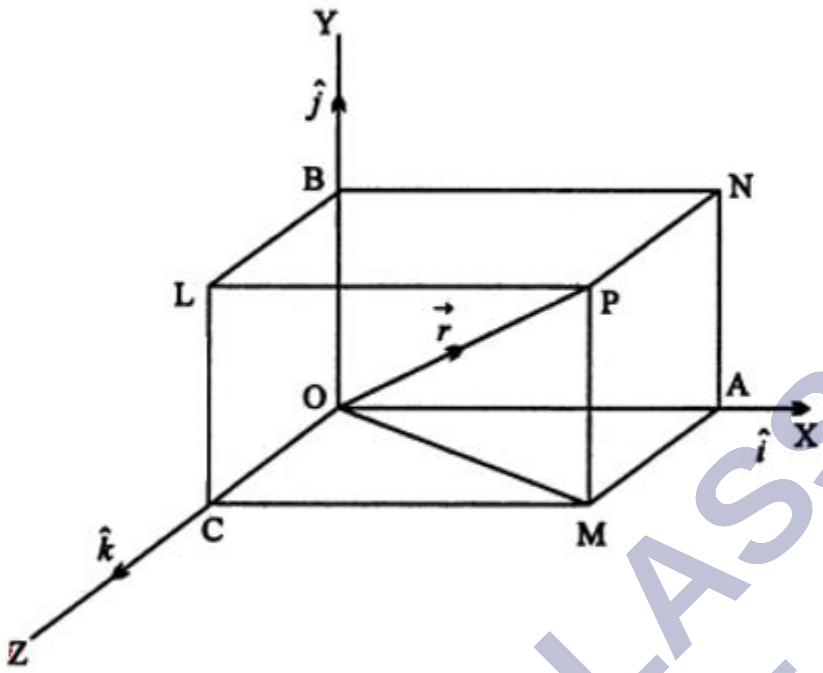
नोट-xi तथा / क्रमशः के ox व Or के अनुदिश सम कोणीय घटक सदिश या वियोजित सदिश भाग कहलाते हैं। अर्थात् xy सदिश r के क्रमशः O x व Or की दिशाओं में अदिश घटक कहलाते हैं। पुनः की दिशा में मात्रक सदिश

सदिश r =xi +ji को कभी-कभी (x,y) के द्वारा निरूपित किया जाता है।

त्रिविमीय एकक सदिश (Three-dimen sional Unit Vectors)

माना अन्तरिक्ष में ox,or व OZ परस्पर लम्बवत् प्रतिच्छेदी रेखायें हैं। 0 को मूलबिन्दु व ox,OY,Oz को निर्देशांक मानलो। माना Ox,OY NOz के अनुदिश मात्रक सदिश क्रमशः, व k हैं। माना इस

मतल में कोई बिन्दु P(x,y, 2) है। OP को मिलाया।



माना OP = r,OP को विकर्ण मानकर एक आयतफलकीय की रचना करो जिसकी तीन संगामी भुजायें OA, OB व OC क्रमशः Ox, OY व Oz के अनुदिश हों।

तब OA = x, OB = y तथा Oc = z और इसलिए

OA= xi, ÕB = yj तथा oC = zk

अब, $\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$,

(सदिश योग का त्रिभुज नियम)

$= (\vec{OC} + \vec{CM}) + \vec{MP}$

$= (\vec{OC} + \vec{OA}) + \vec{OB}$,

[$\because \vec{CM} = \vec{OA}$ तथा $\vec{MP} = \vec{OB}$]

$= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

यहाँ xi = r का Ox दिशा में वियोजित भाग,

yj= r का Oy दिशा में वियोजित भाग,

zk=r का Oz दिशा में वियोजित भाग।

$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\vec{r}$ **की दिशा में मात्रक सदिश**

$$\boxed{\hat{r}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

दो सदिशों (घटक रूप में) का योग व व्यवकलन—

माना $\bar{r}_1=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$

तथा $\bar{r}_2=x_2\hat{i}+y_2\hat{j}+z_2\hat{k}$

तब $\bar{r}_1+\bar{r}_2=(x_1+x_2)\hat{i}+(y_1+y_2)\hat{j}+(z_1+z_2)\hat{k}$

तथा $\bar{r}_1-\bar{r}_2=(x_1-x_2)\hat{i}+(y_1-y_2)\hat{j}+(z_1-z_2)\hat{k}.$

किसी सदिश के दिक्-अनुपात और दिक कोज्याएँ (Direction Ratios and Directionosines of any Vector):

दिक्-अनुपात (Directionratios)-माना अन्तरिक्ष में कोई बिन्दु P(a,b,c) है। 0 मूलबिन्दु है तथा Ox,OY,Oz निर्देशाक्ष हैं। माना 0 के सापेक्ष बिन्दु P का स्थिति सदिश r है। तब,

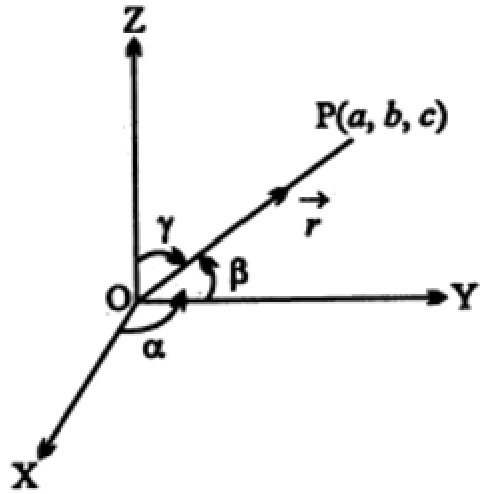
$$OP=r\ =\ ai\ +bj+ck$$

जहाँ I,j,k क्रमशः Ox,OY और Oz के अनुदिश मात्रक सदिश हैं।

स्पष्ट है कि OP की दिशा P पर निर्भर करती है, क्योंकि 0 अन्तरिक्ष में एक निश्चित बिन्दु है। अत: P के निर्देशांक (coordinates) OP की दिशा को निर्धारित करेंगे।

ab,c सदिश r= ai +bj +ck के दिक्-अनुपात कहलाते है।

दिक्-कोयाएँ(Direction cosines)- यदि अशून्य सदिश r आधार सदिशों I,j,k के साथ क्रमशः कोण $\alpha\beta\gamma$ बनावें तो कोण $\alpha\beta\gamma$ को दिक् कोण कहते हैं तथा इन कोणों की कोज्याएँ अर्थात् $cos\ \alpha, cos\beta. coS\ \gamma$ सदिश 7 की दिक्कोज्याएँ कहलाती हैं।



किसी सदिश की दिक्-कोज्याएँ क्रमशः1,m,n द्वारा निरूपित की जाती हैं। इस प्रकार,

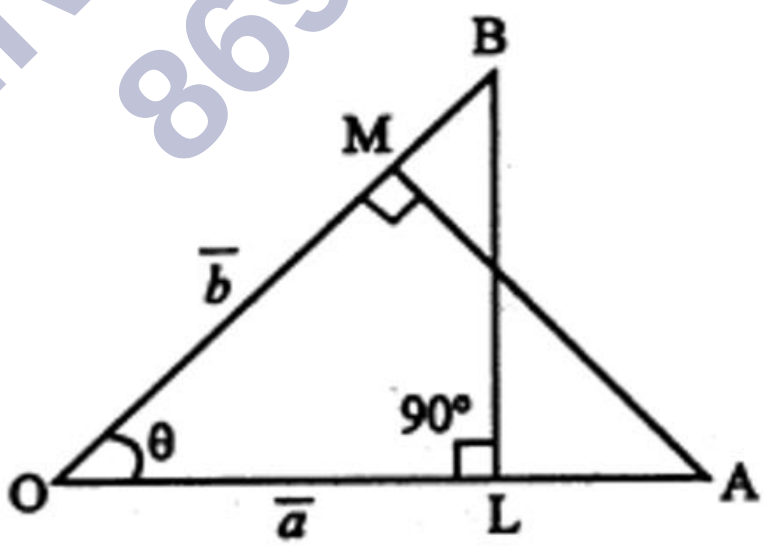
l =cos α

M= cosβ

$n = \cos\gamma$

दो सदिशों के अदिश गुणनफल का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of the Scalar Product of Two Vectors)

दो सदिशों का अदिश गुणनफल उनमें से किसी एक के परिमाण तथा दूसरे के पहले की दिशा में अदिश घटक के गुणनफल के बराबर होता है।



माना $\overline{OA} = \overline{a}$ तथा $\overline{OB} = \overline{b}$
तथा $\angle AOB = \theta$. तब, परिभाषा से,

$$\overline{a}.\overline{b} = ab\cos\theta$$

जहाँ $a = |\overline{a}| = OA$

तथा $b = |\overline{b}| = OB.$

B से $BL \perp OA$ तथा A से $AM \perp OB$ डाला। तब, $OL = b\cos\theta$

B से BL ⊥OA तथा A से AM ⊥ OB डाला। तब, OL = bcos ∅

= सदिश b का सदिश a की दिशा में अदिश घटक

या

सदिश b का सदिश a की दिशा में प्रक्षेप का परिमाण तथा OM = $a\cos\emptyset$

= सदिश a का सदिश b की दिशा में अदिश घटक

या

सदिश a का सदिश 6 की दिशा में प्रक्षेप का परिमाण।

अब a.b = $ab\cos\emptyset$ = (a)($b\cos\emptyset$)

=a($b\cos\emptyset$)

= (सदिश a का परिमाण) x (सदिश 6 का सदिश a की दिशा में अदिश घटक)

पुनः a.b = $ab\cos\emptyset$ = $ba\cos\emptyset$

=(b)($a\cos\emptyset$) =|| ($a\cos\emptyset$)

= (सदिश 5 का परिमाण)

x (सदिश a का सदिश 6 की दिशा में अदिश घटक)

नोट :

नोट : 1. सदिश $\bar{b}$ का सदिश $\bar{a}$ की दिशा में अदिश घटक (प्रक्षेप)

$$\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}|}$$

2. सदिश $\bar{a}$ का सदिश $\bar{b}$ की दिशा में अदिश घटक (प्रक्षेप)

$$\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

3. सदिश $\bar{b}$ का सदिश $\bar{a}$ की दिशा में सदिश घटक

$$=\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}|}\hat{a}$$

4. सदिश $\bar{a}$ का सदिश $\bar{b}$ की दिशा में सदिश घटक

$$=\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{b}|}\hat{b}$$

5. $\dfrac{\text{सदिश } \bar{a} \text{ का सदिश } \bar{b} \text{ पर प्रक्षेप}}{\text{सदिश } \bar{b} \text{ का सदिश } \bar{a} \text{ पर प्रक्षेप}} = \dfrac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$

6. $\dfrac{\text{सदिश } \bar{b} \text{ का सदिश } \bar{a} \text{ पर प्रक्षेप}}{\text{सदिश } \bar{a} \text{ का सदिश } \bar{b} \text{ पर प्रक्षेप}} = \dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$.

दो समान सदिशों का अदिश गुणनफल (Scalar Product of Two Equal Vectors) या सदिश का वर्ग (Square of a Vector)

माना a कोई सदिश है। चूंकि प्रत्येक सदिश स्वयं के साथ 0° का कोण अन्तरित करता है,

$a.a = a.a\ cos0$=a^2

हम $a.a$ को $(a)^2$ कहते हैं।

अतः $(a)^2 = a^2$

सदिश का वर्ग = सदिश के परिमाण का वर्ग

दूसरे शब्दों में, किसी सदिश का परिमाण, उस सदिश के स्वयं के साथ अदिश गुणनफल का धनात्मक वर्गमूल होता है।

अदिश गुणनफल के प्रगुण (Properties of Scalar Product)

प्रगुण 1. क्रमविनिमेय नियम (Commutative Law)

यदि तथा । कोई दो सदिश हैं, तो

$a.b = b.a.$

प्रमाण (Proof): $a.b = ab\cos\emptyset = ba\cos\emptyset$

अतः $a.b = b.a$

बंटन नियम का व्यापक रूप (General Form of Distributive Law)

हम जानते हैं कि

$$\overline{a}.(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}.\overline{b}+\overline{a}.\overline{c}$$

माना $\overline{a}=\overline{l}+\overline{m}$ तब,

$$\begin{aligned}(\overline{l}+\overline{m}).(\overline{b}+\overline{c}) &= (\overline{l}+\overline{m}).\overline{b}+(\overline{l}+\overline{m}).\overline{c}\\ &= \overline{b}.(\overline{l}+\overline{m})+\overline{c}.(\overline{l}+\overline{m})\\ &= \overline{b}.\overline{l}+\overline{b}.\overline{m}+\overline{c}.\overline{l}+\overline{c}.\overline{m}\\ &= \overline{l}.\overline{b}+\overline{m}.\overline{b}+\overline{l}.\overline{c}+\overline{m}.\overline{c}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{(\overline{l}+\overline{m}).(\overline{b}+\overline{c})=\overline{l}.\overline{b}+\overline{l}.\overline{c}+\overline{m}.\overline{b}+\overline{m}.\overline{c}}$$

व्यापक रूप में,

$$=(\overline{l}+\overline{m}+\overline{n}+...).(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+...)$$

$$=\overline{l}.\overline{a}+\overline{l}.\overline{b}+\overline{l}.\overline{c}+....+\overline{m}.\overline{a}+\overline{m}.\overline{b}$$

$$+\overline{m}.\overline{c}+...+\overline{n}.\overline{a}+\overline{n}.\overline{b}+\overline{n}.\overline{c}+...+...$$

उपर्युक्त निष्कर्षों के आधार पर हम देखते हैं कि

(i) $(\overline{a}+\overline{b})^2=(\overline{a}+\overline{b}).(\overline{a}+\overline{b})$, $[\because(\overline{r})^2=\overline{r}.\overline{r}]$

$$=\overline{a}.\overline{a}+\overline{a}.\overline{b}+\overline{b}.\overline{a}+\overline{b}.\overline{b}$$

$$=\overline{a}.\overline{a}+2\overline{a}.\overline{b}+\overline{b}.\overline{b}, \qquad [\because\overline{a}.\overline{b}=\overline{b}.\overline{a}]$$

$$\boxed{(\overline{a}+\overline{b})^2=\overline{a}^2+2\overline{a}.\overline{b}+\overline{b}^2}$$

(ii) $(\overline{a}+\overline{b}).(\overline{a}-\overline{b})$

$$=\overline{a}.\overline{a}-\overline{a}.\overline{b}+\overline{b}.\overline{a}-\overline{b}.\overline{b}$$

$$=\overline{a}.\overline{a}-\overline{b}.\overline{b}, \qquad [\because\overline{a}.\overline{b}=\overline{b}.\overline{a}]$$

लाम्बिक एकक सदिश त्रय (Orthogonal Unit Vectors Triad)

हम जानते हैं कि i,j तथा k क्रमशः Ox,OY तथा Oz के अनुदिश मात्रक सदिश होते हैं, अतः वे परस्पर लम्बवत् होते हैं। इनके पारस्परिक अदिश गुणनफल अत्यन्त महत्वपूर्ण हैं।

$$\boxed{\hat{i}.\hat{i}=1.1.\cos0°=1=\hat{i}^2}$$

[∵ प्रत्येक सदिश स्वयं से 0° का कोण बनाता है]

इसी प्रकार, $\boxed{\hat{j}.\hat{j}=1.1.\cos0°=1=\hat{j}^2}$

तथा $\boxed{\hat{k}.\hat{k}=1.1.\cos0°=1=\hat{k}^2}$

पुनः $\boxed{\hat{i}.\hat{j}=1.1.\cos90°=0=\hat{j}.\hat{i}}$

$\boxed{\hat{j}.\hat{k}=1.1.\cos90°=0=\hat{k}.\hat{j}}$

तथा $\boxed{\hat{k}.\hat{i}=1.1.\cos90°=0=\hat{i}.\hat{k}}$

स्मृति सहायिका (Aid to Memory) :

•	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	1	0	0
$\hat{j}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

द्विविमीय निर्देश तन्त्र में दो सदिशों का अदिश गुणनफल (ScalarProductofTwo Vectors in Two-dimensional Coordinate System)

माना $\overline{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$ तथा $\overline{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j}$ तब,

$$\overline{a}.\overline{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j}).(b_1\hat{i} + b_2\hat{j})$$

$$= a_1b_1.\hat{i}.\hat{i} + a_1b_2\hat{i}.\hat{j} + a_2b_1\hat{j}.\hat{i} + a_2b_2\hat{j}.\hat{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{a}.\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

त्रिविमीय आकाश में दो सदिशों का अदिश गुणनफल (ScalarProduct of Two Vectors in Three-dimensional Space)

माना $\overline{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\overline{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

तब,

$$\overline{a}.\overline{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}).(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1\hat{i}.\hat{i} + a_1b_2\hat{i}.\hat{j} + a_1b_3\hat{i}.\hat{k} + a_2b_1\hat{j}.\hat{i}$$

$$+ a_2b_2\hat{j}.\hat{j} + a_2b_3\hat{j}.\hat{k} + a_3b_1\hat{k}.\hat{i}$$

$$+ a_3b_2\hat{k}.\hat{j} + a_3b_3\hat{k}.\hat{k}$$

$$\boxed{\overline{a}.\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

दो सदिशों के बीच का कोण (Angle between Two vectors)

माना $\bar{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ तथा $\bar{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

तब,

$$\bar{a}.\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

$$\Rightarrow ab\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{ab}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}}$$

जो अभीष्ट कोण देता है।

दो सदिशों के लम्बवत् होने का प्रतिबन्ध (Condition of Perpendicularity of Two Vectors)

माना $\overline{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ तथा $\overline{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ तब,

$\overline{a}.\overline{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ [अनुच्छेद 10(B)·8 से]

अब यदि $\bar{a}$ तथा $\bar{b}$ परस्पर लम्बवत् हैं, तो $\bar{a}.\bar{b}=0$

अर्थात् $\boxed{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0}$

जो अभीष्ट प्रतिबन्ध है।

दो सदिशों के समान्तर होने का प्रतिबन्ध (Condition of Parallelism of Two Vectors)

माना $\overline{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ तथा $\overline{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

यदि $\overline{a}$ तथा $\overline{b}$ परस्पर समान्तर हैं, तो

$\overline{a}=\lambda\overline{b}$, जहाँ λ एक अदिश है।

$$\Rightarrow (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})=\lambda(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$$

दोनों पक्षों में $\hat{i},\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ के गुणांकों को बराबर रखने पर,

$$a_1=\lambda b_1, a_2=\lambda b_2, a_3=\lambda b_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda}$$

जो अभीष्ट प्रतिबन्ध है।

सिद्ध करना कि (To Prove that):

$$\bar{r} = (\bar{r}.\hat{i})\hat{i} + (\bar{r}.\hat{j})\hat{j} + (\bar{r}.\hat{k})\hat{k}.$$

प्रमाण (Proof) : हम जानते हैं कि

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

दोनों पक्षों में $\hat{i}$ से अदिशत: गुणन लेने पर,

$$\bar{r}.\hat{i} = x(\hat{i}.\hat{i}) + y(\hat{j}.\hat{i}) + z(\hat{k}.\hat{i})$$

$$\Rightarrow \quad \bar{r}.\hat{i} = x$$

इसी प्रकार, $\bar{r}.\hat{j} = x(\hat{i}.\hat{j}) + y(\hat{j}.\hat{j}) + z(\hat{k}.\hat{j}) = y$

तथा $\bar{r}.\hat{k} = x(\hat{i}.\hat{k}) + y(\hat{j}.\hat{k}) + z(\hat{k}.\hat{k}) = z$

अत: $\boxed{\bar{r} = (\bar{r}.\hat{i})\hat{i} + (\bar{r}.\hat{j})\hat{j} + (\bar{r}.\hat{k})\hat{k}}$

उदाहरण 1. सदिशों ani+2j+3k और b = 21 -3j+k का अदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\bar{a}.\bar{b} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}).(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$$
$$= \hat{i}.2\hat{i} + 2\hat{j}.(-3\hat{j}) + 3\hat{k}(\hat{k})$$
$$= 2 - 6 + 3 = -1.$$

सदिश गुणनफल क्रम विनिमेय नहीं होता है (Vector Product is not Commutative)

$$\bar{a} \times \bar{b} = ab\sin\theta\,\hat{n}$$

स्पष्ट है कि, $\bar{b} \times \bar{a} = ba\sin\theta(-\hat{n})$

$$= -ab\sin\theta\,\hat{n}$$

समी. (1) व (2) से, $\boxed{\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}}$

या $\boxed{\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{a} = \bar{0}}$

नोट : 1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

2. $-\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{a} \times \bar{b})$

3. $\bar{a} \times (-\bar{b}) = -(\bar{a} \times \bar{b})$

4. $(-\bar{a}) \times (-\bar{b}) = \bar{a} \times \bar{b}.$

समान्तरचतुर्भुजका क्षेत्रफल जिसके विकर्ण दिये हों

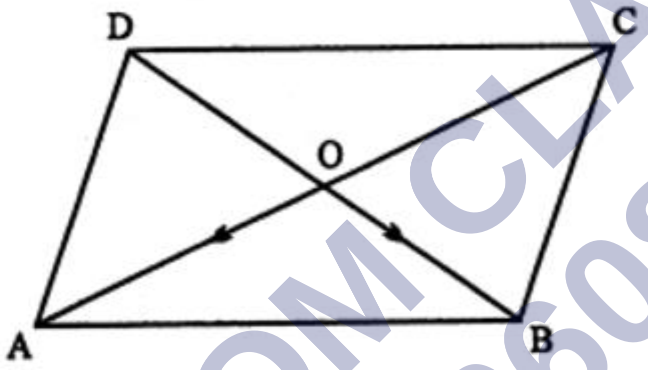
समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$= 4$ (ΔOAB का क्षेत्रफल)

$$= 4 \times \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}|$$

$$= 2\left|\frac{1}{2}\vec{CA} \times \frac{1}{2}\vec{DB}\right|,$$

[$\because O, CA$ तथा DB का मध्य बिन्दु है।]



समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{AC} \times \vec{BD}|$.

sin ∅ के लिए व्यंजक (Expression for sine)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \text{(अनुच्छेद § 10(B)·24 से)}$$

$$\Rightarrow ab \sin\theta \hat{n} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$a^2b^2 \sin^2\theta = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$\Rightarrow \sin^2\theta$

$$= \frac{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}{a^2b^2}$$

या $$\sin^2\theta = \frac{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}$$

$[\because a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ तथा $b^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2]$

लैंग्राज की सर्वसमिका (Lagrange's Identity)

यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ कोई दो सदिश हों, तब

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} . \vec{b})^2$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a} . \vec{a} & \vec{a} . \vec{b} \\ \vec{a} . \vec{b} & \vec{b} . \vec{b} \end{vmatrix}.$$

उपपत्ति—हम जानते हैं कि

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \, \hat{n}$$

$$\therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta |\hat{n}| \right|$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta)^2$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} . \vec{b})^2$$

दायें पक्ष को सारणिक रूप में लिखने पर,

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}\times\vec{b}| = \begin{vmatrix} |\vec{a}|^2 & \vec{a}.\vec{b} \\ \vec{a}.\vec{b} & |\vec{b}|^2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}\times\vec{b}| = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b} \\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b} \end{vmatrix}$$

अतः $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$

उदाहरण 1. यदि a और b दो सदिश इस प्रकार हैं कि a = 2,b=7 तथा a x b = 3i+2j +6k हो, a तो और b के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : $\bar{a}\times\bar{b} = 3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}$

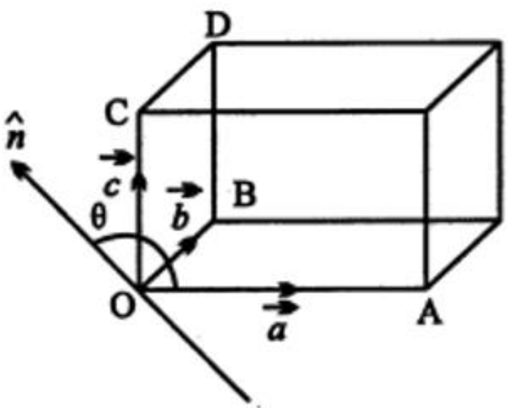
$$\Rightarrow \quad |\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$

हम जानते हैं कि $\sin\theta = \dfrac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}||\bar{b}|} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{7}{2\times7}$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

ज्यामितीय व्याख्या (Geometrical Interpretation)

एक समान्तर षट्फलक (Parallelopiped) पर विचार कीजिए जिसकी तीन संगामी कारें (Coterminous edges) OA,OB. और OC क्रमशः सदिशों a, और द्वारा निरूत की जाती है।



माना इसका आयतन V है। तब, सदिश $b \times c$ समान्तर चतुर्भुज $OBDC$ के सदिश क्षेत्रफल को निरूपित करता है। माना,

$bxc = nn$

जहाँ n, समान्तर चतुर्भुज $OBDC$ का क्षेत्रफल है अर्थात् $n = n = b \times c$ तथा n एक मात्रक सदिश है जो समान्तर चतुर्भुज के समतल के लम्बवत् है तथा OB से OC तक के घूर्णन (Rotation) की धनात्मक अभिदिशा (Positive sense) में है।

माना n एवं a के बीच का कोण ∅ है। तब,

$na = 1.a.\cos\emptyset = a\cos\emptyset$

$na = (1)$ (OA का n पर प्रक्षेप)

=OA का n पर प्रक्षेप

=A से समान्तर चतुर्भुज $OBDC$ पर

डाले गये लम्ब की लम्बाई

अब समी. (1) व (2) से,

A से समान्तर चतुर्भुज OBDC पर डाले गये लम्ब की

लम्बाई = $a\cos\emptyset$

अतः समान्तर षट्फलक का आयतन

V=(आधार OBDC का क्षेत्रफल) (A से आधार OBDC पर डाले गये लम्ब की लम्बाई)

$$= na\cos\emptyset = an\cos\emptyset$$

$$= an = a.(bxc)$$

$$= [abe]$$

नोट : V धनात्मक होगा, यदि ∅ न्यूनकोण है तथा ऋणात्मक होगा, यदि 0 अधिक कोण है।

अदिश त्रिक गुणनफल के प्रगुण (Properties of Scalar Triple Product)

प्रगुण 1. $(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab})$

अर्थात् त्रिक अदिश गुणनफल में सदिशों के चक्रीयक्रम के अपरिवर्तित रहने पर उसका मान अपरिवर्तित रहता है।

प्रमाण (Proof)

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad ...(1)$$

$$[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}] = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad ...(2)$$

(सारणिकों के प्रगुण से)

और $$[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}] = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad ...(3)$$

(सारणिकों के प्रगुण से)

अतः समी. (1), (2) व (3) से,

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}] = [\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}].$$

प्रगुण 2. $(\boldsymbol{abc}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab})$

$$= -(\boldsymbol{acb}) = -(\boldsymbol{bac}) = -(\boldsymbol{cba})$$

अर्थात् त्रिक अदिश गुणनफल में सदिशों के चक्रीय क्रम का परिवर्तन गुणनफल के चिन्ह को परिवर्तित कर देता है।

प्रमाण (Proof)— $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$,

$$= -\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b})$$

$$= -[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}] \quad ...(1)$$

$$[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}] = \vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a}) = -\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$= -[\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}] \quad ...(2)$$

$$[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}] = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b}) = -\vec{c}.(\vec{b}\times\vec{a})$$

$$= -[\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}] \quad ...(3)$$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}] = [\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}] \quad ...(4)$$

अतः समी. (1), (2), (3) व (4) से,

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}] = [\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}]$$

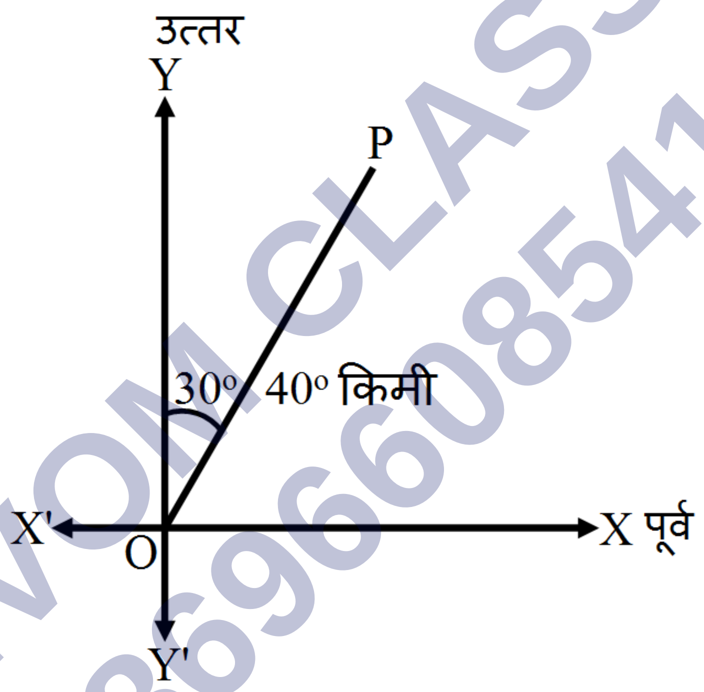
$$= -[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}] = -[\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}] = -[\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}].$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 10.1 (पृष्ठ संख्या 444-445)

प्रश्न 1 उत्तर से 30° पूर्व में 40 किमी के विस्थापन को आलेखीय निरूपण कीजिए।

उत्तर- 20 किमी को 1 सेमी मानते हुए 2 सेमी का एक रेखाखण्ड OP, OY की दायीं ओर OY के साथ 30° का कोण बनाते हुए खींचा गया। इस प्रकार सदिश $\underset{op}{\rightarrow}$ oy से 30° पूर्व में किमी 40 किमी के विस्थापन को निरूपित करता है।.



प्रश्न 2 निम्नलिखित मापों को अदिश एवं सदिश के रूप में श्रेणीबद्ध कीजिए।

a. 10 किग्रा।
b. 2 मीटर उत्तर-पश्चिम।
c. 40°
d. 40 वाट।
e. 10^{-19} कूलॉम
f. 20 मी/ से.।

उत्तर-

a. अदिश- यहाँ इकाई किग्रा जो द्रव्यमान का मात्रक है तथा हम जानते हैं कि द्रव्यमान एक अदिश राशि है, अतः 10 किग्रा भी एक अदिश राशि है।
b. सदिश- 2 मीटर उत्तर-पश्चिम एक सदिश राशि है क्योंकि इसमें परिमाण (2 मीटर) तथा दिशा। (उत्तर-पश्चिम) दोनों विद्यमान हैं।
c. अदिश- 40° एक कोण को प्रदर्शित करता है हम जानते हैं कि कोण एक अदिश राशि है क्योंकि इसमें केवल परिमाण होता है।
d. अदिश- यहा इकाई वाट है जोकि शक्ति का मात्रक है तथा कार्य करने की शक्ति एक अदिश राशि है, अत: 40 वाट भी एक अदिश राशि है क्योंकि इसमें केवल परिमाण होता है।
e. अदिश- 10^{-19} कुलाम एक अदिश राशि है क्योंकि इसमें केवल परिमाण विद्यमान है।
f. सदिश- यहाँ दिया गया मात्रक मी/ से. है जोकि त्वरण का मात्रक है तथा त्वरण एक सदिश राशि है। अत: 20 मी/ से. एक सदिश राशि है क्योंकि इसमें परिमाण के साथ दिशा भी विद्यमान है।

प्रश्न 3 निम्नलिखित को अदिश एवं सदिश राशियों के रूप में श्रेणीबद्ध कीजिए।

a. दूरी।
b. बल।
c. वेग।
d. कार्य।

उत्तर-

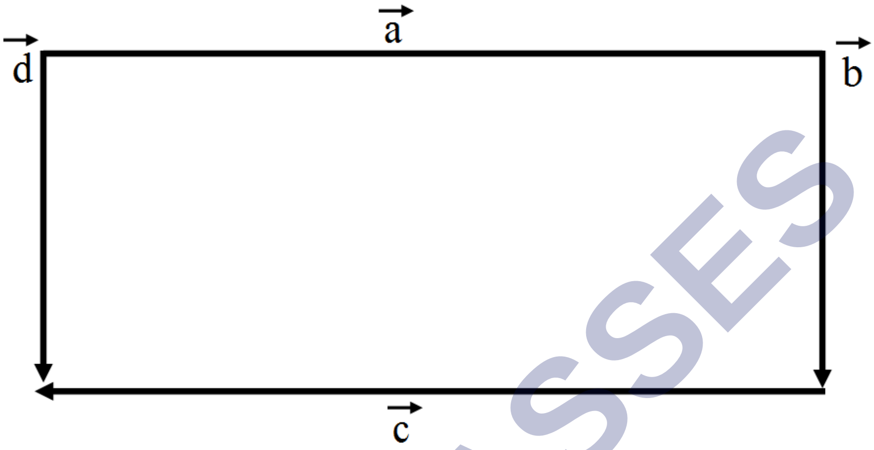
a. अदिश- दूरी एक अदिश राशि है क्योंकि इसमें केवल परिमाण होता है।
b. सदिश- बल एक सदिश राशि है क्योंकि इसमें परिमाण व दिशा दोनों विद्यमान है।
c. सदिश- वेग एक सदिश राशि है क्योंकि इसमें परिमाण व दिशा दोनों विद्यमान है।
d. अदिश- कार्य एक अदिश राशि है क्योंकि इसमें केवल परिमाण होता है।

प्रश्न 4 आकृति (एक वर्ग) में निम्नलिखित सदिशों को पहचानिए।

a. सह आदिम।

b. समान।

c. संरेख परन्तु असमान।



उत्तर-

a. सह आदिम $\vec{d}, \ \vec{d}$

b. $\vec{d}, \ \vec{d}$

c. $\vec{a}, \ \vec{c},$

प्रश्न 5 निम्नलिखित के उत्तर सत्य व असत्य के रूप में दीजिए।

a. $\vec{a}$ तथा $-\vec{d}$ संरेखीय हैं।

b. दो संरेख सदिशों का परिमाण सदैव समान होता है।

c. दो समान परिमाण वाले सदिश संरेख होते हैं।

d. दो समान परिमाण वाले संरेखीय सदिश समान होते हैं।

उत्तर-

a. सत्य।

हल-

क्योंकि प्रत्येक सदिश स्वयं के संरेख होता है। अत: कथन सत्य है।

b. असत्य।

हल-

दो संरेख सदिशों के परिमाण भिन्न-भिन्न हो सकते हैं। अत: कथन असत्य है।

c. असत्य।

d. सत्य।

प्रश्नावली 10.2 (पृष्ठ संख्या 455-456)

प्रश्न 1 निम्नलिखित सदिशों के परिमाण का परिकलन कीजिए।

a. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

b. $\vec{b} = 2\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}$

c. $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

उत्तर-

a. दिया हे,

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ से तुलना करने पर,

$x = 1, y = 1,$ तथा $z = 1,$

$|\vec{a}| = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\therefore |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

b. $\vec{b} = 2\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\therefore |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + (-3)^2}$$

$$= |\vec{a}|\sqrt{4 + 49 + 9} = \sqrt{62}$$

c. $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

$$\therefore \vec{c} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{3}} = 1$$

प्रश्न 2 समान परिमाण वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

उत्तर-

माना दो विभिन्न सदिशों $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ है।

$\vec{a}$ का परिणाम $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

इसी प्रकार $\vec{b}$ का परिणाम $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

इसी प्रकार $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो सदिशों है (इसी प्रकार के अनन्त सदिश हो सकते है।)

प्रश्न 3 समान दिशा वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

उत्तर- माना दो सदिशों,

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$

$A = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ से तुलना करने पर,

x = 1, y = 1, z = 1

$$\vec{a} \text{ के कोसाइन} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{a} \text{ की दिक्-कोज्याएँ} = \frac{x}{\sqrt{3}}, \frac{y}{\sqrt{3}}, \frac{z}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \vec{a} \text{ की दिक्-कोज्याएँ} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{और इसी प्रकार } \vec{b} \text{ के दिक्-कोज्याएँ} = \left(\frac{3}{\sqrt{27}}, \frac{3}{\sqrt{27}}, \frac{3}{\sqrt{27}}\right)$$

$$\text{या} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

और इसी प्रकार $\vec{a}$, $\vec{b}$ एक ही दिशा में है, परन्तु

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 +} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2 +} = \sqrt{27}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$$

$$\Rightarrow \vec{a} \neq \vec{b}$$

प्रश्न 4 x और y के मान ज्ञात कीजिए ताकि सदिश $2\hat{i} + 3\hat{j}$ और $x\hat{i} + y\hat{j}$ समान हो।

उत्तर-

माना $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ तथा $x\hat{i} + y\hat{j}$ दिए गए सदिश है।

$\hat{i}$ और $\hat{j}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$\therefore x = 2, y = 3$

प्रश्न 5 एक सदिश का प्रारम्भिक बिन्दु (2, 1) है और अन्तिम बिन्दु (-5, 7) है। इस सदिश के अदिश एवं सदिश घटक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना सदिश के प्रारम्भिक वे अन्तिम बिन्दु क्रमशः A(2, 1), B(-5, 7) हैं।

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

$$= (-5 - 2)\hat{i} + (7 - 1)\hat{j} = -7\hat{i} + 6\hat{j}$$

$\therefore$ दिए गए अदिश घटक -7 और 6 है; जबकि सदिश घटक $-7\hat{i}$ और $-7\hat{j}$ है।

प्रश्न 6 सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$\vec{a} = 2\ddot{i} - 2\ddot{j} + \ddot{k}$

$\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$

और $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$= 0\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$

$= -4\hat{i} - \hat{k}$

प्रश्न 7 सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक पात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

सदिश की दिशा में इकाई सदिश $\vec{a}$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$$

प्रश्न 8 सदिश $\overrightarrow{PQ}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ विन्दु P और Q क्रमशः (1, 2, 3) और (4, 5, 6) हैं।

उत्तर- बिन्दु P(1, 2, 3) तथा Q(4, 5, 6) को मिलाने वाला सदिश

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_{2-y_1})\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (4 - 1)\hat{i} + (5 - 2)\hat{j} + (6 - 3)\hat{k}$$

$$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

मात्रक सदिश $\overrightarrow{PQ}$ जो $\overrightarrow{PQ}$ के अनुदिश है।

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

प्रश्न 9 दिए हुए सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ के लिए सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया गया सदिश

$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ है

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = (2-1)\hat{i} + (-1+1)\hat{j} + (2-1)\hat{k}$$

$$= \hat{i} + 0.\hat{j} + \hat{k} = \hat{i} + \hat{k}$$

$\vec{a} + \vec{b}$ के परिमाण $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश

$$\frac{(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$$

प्रश्न 10 सदिश $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए। जिसका परिमाण 8 इकाई है।

उत्तर- माना $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{a}$ का परिणाम

$$\therefore |\vec{a}| = \sqrt{(5)^2 + (-1)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30}$$

$\therefore$ $\vec{a}$ के अनुदिश 8 इकाई वाला सदिश

$$8 \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{8(5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{30}}$$

$$= \frac{40}{\sqrt{30}}\hat{i} - \frac{8}{\sqrt{30}}\hat{j} + \frac{16}{\sqrt{30}}\hat{k}$$

प्रश्न 11 दर्शाइए कि सदिश

$2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ और $4\hat{i} - 6\hat{j} - 8\hat{k}$ संरेख है।

उत्तर-

$\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख होंगे यदि $\vec{a} = \lambda\vec{b}$

माना $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = -4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$

$$\vec{b} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$$

$$= -2(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -2\vec{b}$$

अतः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख है, जहाँ इति सिद्धम्

$$\lambda = -2$$

प्रश्न 12 सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ की दिक् cosine ज्ञात कीजिए।

उत्तर- हल सूत्रानुसार,

यदि $\vec{a} = a_1 \ddot{i} + a_2 \ddot{j} + a_3 \ddot{k}$ तो

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

मान लीजिये $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

यहाँ $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$

$$\therefore \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^3}$$

$$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^3}$$

$$= \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_2^3}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$\therefore$ अतः $\vec{a}$ के दिक् कोसाइन $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$

प्रश्न 13 बिन्दुओं A(1, 2, -3) एवं B(-1, -2, 1) को मिलाने वाले एवं A से B की तरफ दिष्ट सदिश की दिक्-कोज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

यहाँ A(1, -2, 1) से, $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $z_1 = -3$

B(-1, -2, 1) से, $x_2 = -1$, $y_2 = -2$, $z_2 = 1$

∴ A से B की और अभीष्ट सदिश

$$= \overrightarrow{AB} = (-1 - 1)\hat{i} + (-2 - 2)\hat{j} + [1 - (-3)]\hat{k}$$

$$-2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$$

सदिश $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ की दिक्-कोज्याएँ है $\frac{a_1}{|a_1|}, \frac{a_2}{|a_2|}, \frac{a_3}{|a_3|}$

यदि $|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (4)^2}$

$$= \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$$

$\Rightarrow -2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$ दिक्-कोज्याएँ है

$-\frac{2}{6}, -\frac{4}{6}, -\frac{4}{6}$ अथवा $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

प्रश्न 14 दर्शाइए कि सदिश

$\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ अक्षों OX, OY, OZ के साथ बराबर झुका हुआ है।

उत्तर-

सदिश $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ की दिक्-कोज्याएँ क्रमशः

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \text{ या } \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}$$

चूँकि सदिश की दिक्-कोज्याएँ समान हैं अतः सदिश अक्षों से समान कोण बनाता है।

प्रश्न 15 बिन्दुओं $P(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ और $Q(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ को मिलाने वाली रेखा को 2:1 के अनुपात में (i) अन्तः (ii) बाह्य, विभाजित करने वाले विन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

i. अन्तः विभाजन

बिंदु $P(\vec{a})$ और $Q(\vec{b})$ को अन्तः m : n अनुपात में विभाजन करने वाला बिंदु R का स्थिति सदिश

$$\vec{R} = \frac{m\,\vec{b}+n\,\vec{a}}{m+n} \text{ है}$$

यहाँ $m = 2, n = 1, \vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$$\therefore \vec{R} = \frac{2\times(1\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+1\times(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{2+1}$$

$$= \frac{(-2+1)\hat{i}+(2+2)\hat{j}(2-1)\hat{k}}{3}$$

$$= \frac{-\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}}{3} = \frac{1}{3}\hat{i} + \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}$$

ii. बाह्य, विभाजित PQ को बाह्य 2 : 1 के अनुपात में विभाजन करने वाला बिंदु

$$\vec{R} = \frac{m\,\vec{b}-n\,\vec{a}}{\text{m-n}} = \frac{2(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})-1(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{2-1}$$

$$= \frac{(-2-1)\hat{i}+(2-2)\hat{j}+(2+1)\hat{k}}{1}$$

$$= -3\hat{i} + 0.\hat{j} + 3\hat{k} = -3\hat{i} + 3\hat{k}$$

प्रश्न 16 दो बिन्दुओं P (2, 3, 4) और Q(4, 1, -2) को मिलाने वाले सदिश का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$P(\vec{a})$ और $Q(\vec{b})$ को मिलाने वाले सदिश बिंदु $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ है

दिया है $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}, \vec{b} = 4\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore$ अभीष्ट मध्य बिंदु

$$\frac{=(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})+(4\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})}{2}$$

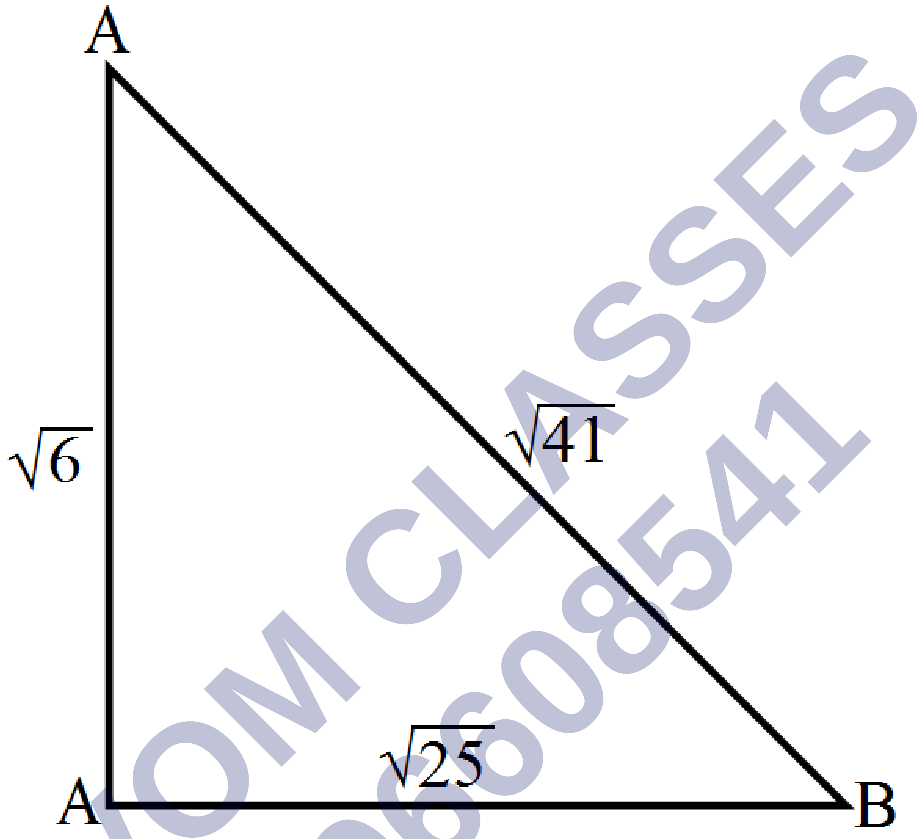
$$\frac{(2+4)\hat{i}+(3+1)j+(\hat{4}+2)\hat{k}}{2}$$

$$\frac{6\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}}{2}$$

$$= 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

प्रश्न 17 दर्शाइए कि बिन्दु A, B और C जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ है, एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों का निर्माण करते हैं।

उत्तर- $\underset{AB}{\rightarrow} = \vec{b} - \vec{a} = -\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$



$$\therefore |\overrightarrow{AB}|^2 = 35, \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BC}|^2 = 41, \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore |\overrightarrow{CA}|^2 = 6$$

अभी $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$

अतः $\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

प्रश्न 18 त्रिभुज ABC के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही नहीं है?

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

c. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

d. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

उत्तर-

c. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

हल-

सदिश के योगफल त्रिभुज के नियम से

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$$

या $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$

या $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

या $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

अतः विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 19 यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो संरेख सदिश है तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही नहीं है?

a. $\vec{b} = \gamma \vec{a}$ किसी अदिश γ के लिए

b. $\vec{a} = \pm \vec{b}$

c. $\vec{a}$ और $\vec{b}$ कर्मगत घटक समानुपाती नहीं है।

d. दोनों सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ की दिशा समान है परन्तु परिणाम विभिन्न है।

उत्तर-

d. दोनों सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ की दिशा समान है परन्तु परिणाम विभिन्न है।

प्रश्नावली 10.3 (पृष्ठ संख्या 462)

प्रश्न 1 दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिणाम क्रमशः $\sqrt{3}$ वं २ है और $\vec{a}.\vec{b} = \sqrt{6}$ है तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बिच का कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है,

$|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}|$ तथा $\vec{a}.\vec{b} = \sqrt{6}$

माना सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बिच यदि θ कोण हो तो $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{a}|}$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{3})(2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})(\sqrt{2})}{(\sqrt{3})(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

अतः दिए गए सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बिच के कोण का मान $\frac{\pi}{4}$ है

प्रश्न 2 सदिशों $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के बिच का कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

मान लीजिए

$\vec{a} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

तथा $\vec{b} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

और माना $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बिच यदि θ कोण हो, तो

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}||\vec{b}|}$$

$$= \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}).(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})}{|\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}||3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}|}$$

$$= \frac{1.3 + (-2)(-2) + 3.1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{3 + 4 + 3}{\sqrt{1 + 4 + 9}\sqrt{9 + 4 + 1}}$$

$$= \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

अतः $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$

प्रश्न 3 सदिशों $\hat{i} + \hat{j}$ पर सदिश $\hat{i} - \hat{j}$ का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$

सदिश $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$$\therefore = \frac{(\hat{i}-\hat{j}).((\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1-1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\left[\because |\vec{b}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\right]$$

प्रश्न 4 सदिशों $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ पर सदिश $7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

मान $\vec{a} = \hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$

सदिश $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} \ldots (1)$

अब $\vec{a}.\vec{b} = (\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}).(7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k})$

$$= (1)(7)+(3)(-1)+7(8)$$

$$= 7-3+56 = 60$$

और $\because |\vec{b}| = \sqrt{7^2+(-1)^2+8^2}$

$$= \sqrt{49+1+64}$$

$$= \sqrt{114}$$

(1) में रखने पर,

अतः $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप $= \dfrac{60}{\sqrt{114}}$

प्रश्न 5 दर्शाइए कि दिए हुए निम्नलिखित तीन सदिशों में से प्रत्येक मात्रक सदिश है $\frac{1}{7}(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}), \frac{1}{7}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})$, यह भी दर्शाइए कि ये सदिश परस्पर एक-दूसरे के लम्बवत् है।

उत्तर-

मान $\vec{a} = \frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$

$\vec{b} = \frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k})$

और $\vec{c} = \frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$

तब $\vec{a}$ का परिणाम $\vec{a} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2}$

$\frac{1}{7}\sqrt{4+9+36}$

$\frac{1}{7}\sqrt{49} = \frac{1}{7} \times 7 = 1$

$\vec{b}$ का परिणाम $|\vec{b}| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{-6}{7}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2}$

$\frac{1}{7}\sqrt{4+36+4}$

$\frac{1}{7}\sqrt{49} = \frac{1}{7} \times 7 = 1$

तथा $\vec{c}$ का परिणाम $\vec{c} = \frac{1}{7}\sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)^2}$

$\frac{1}{7}\sqrt{36+4+9}$

$\frac{1}{7}\sqrt{49} = \frac{1}{7} \times 7 = 1$

$\therefore \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ मात्रक सदिश है।

$\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$\frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})$

$\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{49}[2(3) + 3(-6) + 6(2)]$

$= \frac{1}{49}(6 - 18 + 21) = 0$

अर्थात सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ एक-दूसरे के लम्बवत् है।

इसी प्रकार, दिखाया जा सकता है की सदिश $\vec{b}$ और c तक $\vec{c}$ और $\vec{a}$ परस्पर लम्बवत् है।

अतः दिए गए सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, परस्पर लम्बवत् है।

प्रश्न 6 यदि $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b})$ और $|\vec{a}| = 8|\vec{b}|$ हो तो $|\vec{a}|$ एवं $|\vec{a}|$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है

$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = 8$

$\Rightarrow \vec{a} + (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}(\vec{a} - \vec{b}) = 8$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} - \vec{b}.\vec{b} = 8$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 8$

$$[\because \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}]$$

$$\Rightarrow 64\,|\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2 = 8[\because |\vec{a}| = 8\,|\vec{b}|]$$

या $63|\vec{b}|^2 = 8$

$$\therefore |\vec{b}|^2 = \sqrt{\frac{8}{63}}$$

$$\Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{\frac{8}{63}}$$

किन्तु $|\vec{a}| = 8|\vec{b}| = 8 \times \sqrt{\frac{8}{63}} = \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{63}}$

इसी प्रकार, $|\vec{a}| = \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

$$|\vec{b}| = \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{63}}$$

प्रश्न 7 $(3\vec{a} - 5\vec{b}).(2\vec{a} + 7\vec{b})$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$(3\vec{a} - 5\vec{b}).(2\vec{a} + 7\vec{b})$$

$$= (3\vec{a})(2\vec{a}) + (3\vec{a})(7\vec{b}) + (5\vec{b})(2\vec{a}) + (-5\vec{b})(7\vec{b})$$

$$6|\vec{a}|^2 + 21(\vec{a}.\vec{b}) - 10(\vec{b}.\vec{a}) - 35|\vec{b}|^2$$

$$\left[\because \vec{a}.\vec{a} = |3\vec{a}|^2, \vec{b}.\vec{b} = |\vec{b}|^2, \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}\right]$$

$$= 6|\vec{a}|^2 + 21(\vec{a}.\vec{b}) - 10(\vec{a}.\vec{b}) - 35|\vec{b}|^2$$

$$= 6|\vec{a}|^2 + 11(\vec{a}.\vec{b}) - 35|\vec{b}|^2$$

प्रश्न 8 दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि इनके परिणाम समान है और इनके बिच का कोण 60º है तथा इनका अदिश गुणनफल $\frac{1}{2}$ है।

उत्तर-

यदि सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बिच कोण θ हो तो $\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$

दिया है, $\theta = 60^\circ$,

$\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\therefore \cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{|\vec{a}|}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}}{|\vec{a}|^2}$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2 = 1$

$\Rightarrow |\vec{a}| = 1$

अतः $|\vec{a}| = 1, \ |\vec{b}| = 1$

प्रश्न 9 यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$ के लिए $(\vec{x} - \vec{a}).(\vec{x} + \vec{a}) = 12$ हो तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है,

$(\vec{x} - \vec{a})(\vec{x} + \vec{a}) = 12$

या $\vec{x}.\vec{x} + \vec{x}.\vec{a} - \vec{a}\,\vec{x} - \vec{a}.\ \vec{a} = 12$

या $|\vec{x}|^2 - |\vec{a}|^2 = 12$

या $|\vec{x}|^2 - 1 = 12$ [$\because |\vec{a}| = 1$ (दिया है)]

या $|\vec{x}|^2 = 13$

$\therefore \vec{x} = \sqrt{13}$

प्रश्न 10 यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ इसी प्रकार है कि $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{c}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$

$\therefore \vec{a} + \lambda\vec{b}(2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(-\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$\vec{a} + \lambda\vec{b}, \vec{c}$ पर लम्ब है।

$\Rightarrow (\vec{a} + \lambda\vec{b}.\vec{c}) = 0$ [चूँकि दो लम्बवत सदिशों का अदिश गुणनफल शून्य होता है]

या $[(2 - \lambda)\hat{i} + (2 + 2\lambda)\hat{j} + (3 - \lambda)\hat{k}].[3\hat{i} + \hat{j}] = 0$

$\Rightarrow 3(2 - \lambda) + (2 + 2\lambda) + 0 = 0$

$\Rightarrow 6 - 3\lambda + 2 + 2\lambda = 0$

$\Rightarrow 6 - 3\lambda + 2 + 2\lambda = 0$

या $\lambda = 8$

अतः λ का अभीष्ट मान 8 है।

प्रश्न 11 दर्शाइए की दो शून्येतर सदिशो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए $|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}, |\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$ पर लम्ब है।

उत्तर-

माना $\vec{p} = |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}$ तथा $\vec{q} = |\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$

$$\vec{p}.\vec{q} = [|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}\,|\vec{a}|\ .\ [|\vec{a}\,|\vec{b} - |\ \vec{b}|\vec{a}|\ ]$$

$$= |\vec{a}|\vec{b}. = [|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}\,|\vec{a}|\ + |\vec{b}\,|\vec{a}. [|\ \vec{a}|\vec{b} - |\ \vec{b}|\ \ \vec{a}|\,]$$

$$= |\vec{a}|^2\ \vec{b}.\ \vec{b} - |[\vec{a}|\,|\vec{b}\,|\vec{b}.\ \vec{a} + |\ \vec{b}|\,|\ \vec{a}|\ \vec{a}.\ \vec{b} - |\ \vec{b}|^2\ \vec{a}\,.\,\vec{a}$$

किन्तु

$$\vec{b}.\ \vec{a} = \vec{a}.\ \vec{b} \text{ और } \vec{b}.\ \vec{b} = |\ \vec{b}|^2 \text{ तथा } \vec{a}.\ \vec{a} = |\ \vec{a}|^2$$

$$\therefore \vec{p}.\ \vec{q} = |\ \vec{a}|^2|\ \vec{b}|^2 - |\ \vec{a}|\,|\ \vec{b}|\ \vec{a}.\ \vec{b} + |\ \vec{a}|\,|\ \vec{b}|\ \vec{a}.\ \vec{b} - |\ \vec{b}|^2|\ \vec{a}|^2$$

$$= |\ \vec{a}|^2|\ \vec{b}|^2 - |\ \vec{a}|^2\ |\vec{b}|^{2=0}$$

$$\therefore \vec{p}.\ \vec{q} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p} \perp \vec{q} \text{ इति सिद्ध}$$

अतः दिए गए सदिश एक दूसरे पर लम्ब है।

प्रश्न 12 यदि $\vec{a}.\vec{a} = 0$ और $\vec{a}.\vec{b} = 0$ तो सदिशों $\vec{b}$ के बारे में क्या निष्कर्ष निकाला जा सकता है?

उत्तर- दिया $\vec{a}.\vec{a} = 0$ और $\vec{a}.\vec{b} = 0$

$\vec{a}.\vec{a} = 0$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2 = 0$

या $|\vec{a}| = 0$

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\theta = 0\ [\because |\vec{a}| = 0]$

$\Rightarrow \vec{b}$ कोई भी सदिश हो सकता है।

प्रश्न 13 यदि $\vec{a}.\vec{b}$ व $\vec{c}$ एकांक सदिश है तथा $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ तो $(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

चूँकि $\vec{a}.\vec{b}$ और $\vec{c}$ एकांक सदिश है।

$\therefore |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 1,$

अब $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$

$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0\ [\because \vec{0}.\vec{0}]$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}\vec{a}) = 0$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}) = 0$

$\Rightarrow 1+1+1+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}) = 0$

$\Rightarrow (\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}) = -\frac{3}{2}$

प्रश्न 14 यदि $\vec{a} = 0$ अथवा $\vec{b} = 0$ तब $\vec{a}.\vec{b} = 0$ परन्तु विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है। एक उदहारण द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

उत्तर-

$$\text{माना } \vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} \text{ और } \vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{a} \text{ का परिणाम } |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{b} \text{ का परिणाम } |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$$

$$\text{किन्तु } \vec{a}.\vec{b} = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})$$

$$1 \times 1 \times -2 \times 3 + 1 \times 5 = 1 - 6 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$$

$$\text{परन्तु } \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$$

प्रश्न 15 यदि किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष क्रमशः (1,2,3),(-1,0,0),(0,1,2) है तो ∠ABC ज्ञात कीजिए। [∠ABC सदिशों $\overrightarrow{AB}$ एवं $\overrightarrow{BC}$ के बिच का कोण है।]

उत्तर- माना O मूलबिंदु है।

$$\overrightarrow{AB} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \overrightarrow{OB} = -\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = -\hat{i}$$

तथा $\overrightarrow{OC} = 0\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} = \hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{BA} = OC - OB = (\hat{j} + 2\hat{k}) - (-\hat{i})$

$= \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

और $\overrightarrow{BA} = OA - OB = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (-\hat{i})$

$= 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

अब $\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{BC}|.|\overrightarrow{AB}|}$

$= \frac{(\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}).(2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})}{|\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}||2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}|}$

$= \frac{(1)(2)+(1)(2)+(2)(3)}{\sqrt{1^2+1^2 2^2}\sqrt{2^2+2^2+3^2}}$

$= \frac{2+2+6}{\sqrt{617}} = \frac{10}{\sqrt{102}}$

$\angle ABC = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{102}}\right)$

प्रश्न 16 दर्शाइए की बिन्दु A(1, 2, 2), B(2, 6, 3) और C(3, 10, -1) है।

उत्तर- दिया है, बिंदु ABC के स्तिथि सदिश क्रमशः (1, 2, 7), (2, 6, 3) और (3, 10, -1) है।

माना O मूलबिंदु है।

तब $\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$

तथा $\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} + 10\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k})$

$= (\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k})$

और $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= (3\hat{i} + 10\hat{j} - \hat{k}) - (2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k})$

$= (\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$

एक ही सदिश $\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ को निरूपित करते है। अतः A, B, C इस सदिश के ही बिन्दु है।

अतः बिन्दु A, B तथा C संरेख है।

प्रश्न 17 दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ और $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्षो की रचना करते है।

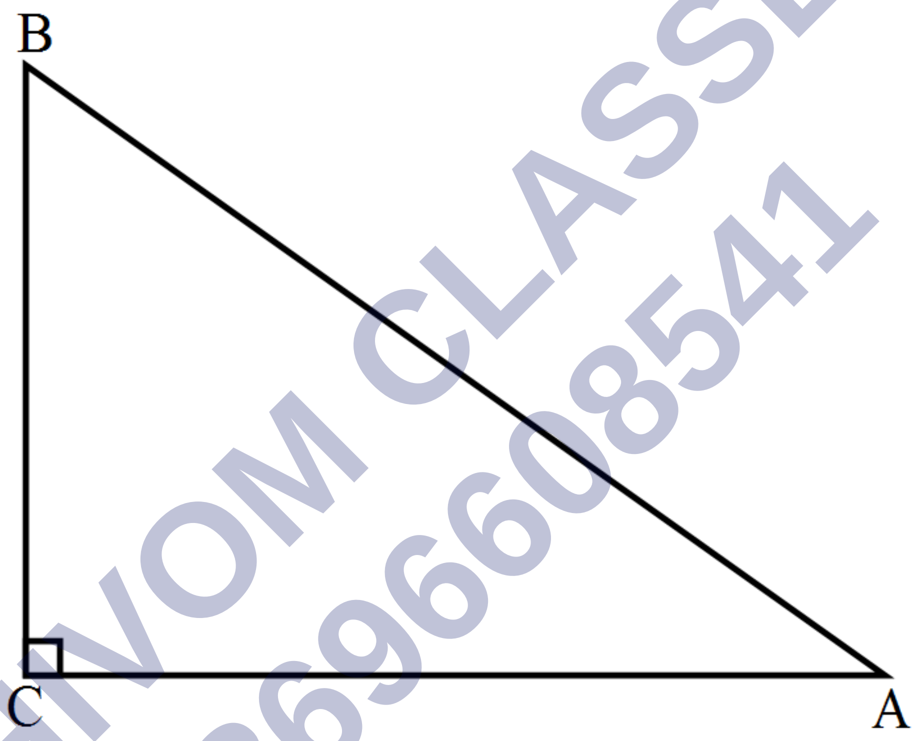
उत्तर- मान लीजिए दिए हुए सदिशों

$2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ और $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ को क्रमशः A, B तथा C से व्यक्त करे, तब

A का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

B का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OB} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

और C का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$



अब $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

$= -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41}$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$= (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}) - (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$$

$$= 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$= |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

$$= (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$$

$$= -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$= |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

समकोण $\triangle ABC$ के लिए जहाँ $\angle C = 90^\circ$ हो, तब

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

$$41 = 6 + 35 = 41$$

अतः दिए गए सदिशों से एक समकोण त्रिभुज की रचना होती है।

प्रश्न 18 यदि शून्येतर सदिश $\vec{a}$ का परिणाम 'a' है और λ एक शून्येतर अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है। यदि

a. $\lambda = 1$

b. $\lambda = -1$

c. $a|\lambda|$

d. $a = \frac{1}{|\lambda|}$

उत्तर-

d. $a = \frac{1}{|\lambda|}$

हल-

दिया है $\vec{a}$ का परिणाम = a

अर्थात $|\vec{a}| = a$

$\because$ $\lambda\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है,

$|\lambda\vec{a}| = 1$

$\Rightarrow |\lambda||\vec{a}| = 1$

$\Rightarrow |\lambda|a = 1$

$\Rightarrow a = \frac{1}{|\lambda|}$

अतः विकल्प (D) सही है।

प्रश्नावली 10.4 (पृष्ठ संख्या 469)

प्रश्न 1 यदि

$\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए?

उत्तर-

दिया है $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$

और $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$$= \vec{a} \times \vec{b} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -7 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 19\hat{j} + 19\hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b} = \sqrt{(-19)^2 + (-19)^2} = 19\sqrt{2}$$

प्रश्न 2 सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{a} - \vec{b}$ की लम्ब दिशा में मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ

$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\,\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

उत्तर- दिया है

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\,\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = (3i + 2\hat{j} + 2\hat{k}) + (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= 4\hat{i} + 4\hat{j}$$

तथा $\vec{a}+\vec{b}=(3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})-(\hat{i}+2\hat{j}-25\hat{k})$

$=(3-1)\hat{i}+(2-2)\hat{j}+(2+2)\hat{k}=2\hat{i}+4\hat{k}$

अब $=(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}$

$=(16-0)\hat{i}-(16-0)\hat{j}+(0-8)\hat{k}$

$=16\hat{i}-16\hat{j}-8\hat{k}$

$\therefore (\vec{a}+\vec{b})$ और $(\vec{a}-\vec{b})$ की लम्ब दिशा में मात्रक सदिश इस प्रकार है

$$\vec{n}=\pm\frac{(\vec{a}\times\vec{b}\times(\vec{a}-\vec{b})}{|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})}$$

$$=\pm\frac{16\hat{i}-16\hat{j}-8\hat{k}}{\sqrt{16^2+(-16)^2+(-8)^2}}$$

$$=\pm\frac{8(2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})}{8\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{9}}$$

$$=\pm\frac{2}{3}\hat{i}\mp\frac{2}{3}\hat{j}\mp\frac{1}{3}\hat{k}$$

अतः अभीष्ट सदिश $\frac{2}{3}\hat{i}-\frac{2}{3}\hat{j}-\frac{1}{3}\hat{k}$ तथा $-\frac{2}{3}\hat{i}+\frac{2}{3}\hat{j}+\frac{1}{3}\hat{k}$ है।

प्रश्न 3 यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}, \hat{i}$ के साथ $\frac{\pi}{3}, \vec{j}$ के साथ $\frac{\pi}{4}$, और $\hat{k}$ के साथ एक न्यूनकोण θ नाता है तो α का मान ज्ञात कीजिए और इसकी सहायता से $\vec{a}$ में घटक भी ज्ञात कीजिय।

उत्तर-

$$\because |\vec{a}| = 1$$

$$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + a_3^2 = 1$$

$$\Rightarrow a_3^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}$$

और $\left(\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}\right)$

$$\hat{k}\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right||1| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)(1) = (1)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore \vec{a}$ के घटक $\frac{1}{2}\hat{i}, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}, \frac{1}{2}\hat{k}$ है।

प्रश्न 4 दर्शाइए कि

$$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})\times=2(\vec{a}\times\vec{b})$$

उत्तर-

$$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\,(\vec{a}+\vec{b})-\overrightarrow{b}\,(\vec{a}+\vec{b})$$

बायाँ पक्ष $=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}$

$$=0+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}-0=2\,(\vec{a}\times\vec{b})$$

= दायाँ पक्ष

$[\because\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{b}=0,\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}-\vec{b}]$ इति सिद्धिम्।

प्रश्न 5 यदि

$(2\hat{i}+6\hat{j}+27\hat{k})\times(\hat{i}+\lambda\hat{j}+\mu\hat{k})=\vec{0}$ तो λ व μ के मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

प्रश्नानुसार, $(2\hat{i}+6\hat{j}+27\hat{k})\times(\hat{i}+\lambda\hat{j}+\mu\hat{k})=\vec{0}$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\2&6&27\\1&\lambda&\mu\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\hat{i}(6\mu-27\lambda)-\hat{j}(2\mu-27)+\hat{k}(2\lambda-6)=0$$

$$\Rightarrow 2\mu-27=0$$

तथा $2\lambda - 6 = 0$

$$\Rightarrow \mu = \frac{27}{2}$$

तथा $\lambda = \frac{6}{2} = 3$

प्रश्न 6 दिया हुआ है कि $\vec{a}.\vec{b} = 0$ और $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते है?

उत्तर-

दिया है, $\vec{a}.\vec{b} = 0$

$\Rightarrow \vec{a} = 0$ या $\vec{b} = 0$ या $\vec{a} \perp \vec{b}$ (इस स्थिति में $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ शून्येतर सदिश होंगे।)

तथा यदि $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ तब

$\vec{a} = 0$ या $\vec{b} = 0$ या $\vec{a} || \vec{b}$ (इस स्थिति में $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ शून्येतर सदिश होंगे।)

परन्तु $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ एक साथ परस्पर लम्ब्वत् या समान्तर नहीं हो सकते है।

$\Rightarrow \vec{a} = 0$ या $\vec{b} = 0$

प्रश्न 7 मान लीजिए सदिश

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ क्रमशः $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}, b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}, c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

के रूप में दिए है तब दर्शाइए कि

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

उत्तर- सिद्ध करना है:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

दिया है, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$,

$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$,

$$(\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{b}_1 + \vec{c}_1)\hat{i} + (\vec{b}_2 + \vec{c}_2)\hat{j} + (\vec{b}_3 + \vec{c}_3)\hat{k}$$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_2b_3 - a_1b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2c_3 - a_3c_2)\hat{i} - (a_2c_3 - a_1c_1)\hat{j} + (a_1c_2 - a_2c_1)\hat{k}$$

$\therefore$ दायाँ पक्ष $= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= [(a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}]$$

$$+\left[(a_2c_3 - a_3c_2)\hat{i} - (a_1c_3 - a_3c_1)\hat{j} + (a_1c_2 - a_2c_1)\hat{k}\right]$$

बायाँ पक्ष $= \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_1 + c_3 \end{vmatrix}$

$$\left[(a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2)\right]\hat{i}$$

$$-\left[(a_1(b_3 + c_3) - a_3(b_1 + c_1)\right]\hat{j} + \left[(a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1)\right]\hat{k}$$

$$= (a_2b_3 + a_2c_3 - a_3b_2 - a_3c_2)\hat{i} - (a_1b_3 + a_1c_3 - a_3b_1 - a_3c_1)\hat{j}$$

$$+(a_1b_2 + a_1c_2 + a_2b_1 - a_2c_1)\hat{k}$$

$$= \left[(a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2c_3 - a_3c_2)\right]\hat{i} - \left[(a_1b_3 - a_3b_2) + (a_1c_3 - a_3c_1)\right]\hat{j}$$

$$-\left[(a_1b_2 - a_2b_1) + (a_1c_2 - a_3c_2)\right]\hat{k}$$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

इस प्रकर $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ इति सिद्धम्

प्रश्न 8 यदि $\vec{a} = 0$ अथवा $\vec{b} = 0$ तब $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ होता है। क्या विलोम सत्य है? उदहारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

उत्तर- दिया है,

$$\vec{a} = \vec{b}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = 0$$

$\therefore \vec{a} \times b = |\vec{a}||b| \sin\theta\ \hat{n}$ (जहाँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बिच कोण θ है)

$$= 0 \times |\vec{b}| \sin\theta\ = 0$$

इसी प्रकार जब $\vec{b} = \vec{0}$

$$\Rightarrow |\vec{b}| = 0, \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

विलोम: माना $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3, \vec{b}$

$$= pa_1\hat{i} + pa_2\hat{j} + pa_3\hat{k}$$

$\Rightarrow \vec{a}$ और $\vec{b}$ समान्तर है इसीलिए $\theta = 0$

$|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$ किन्तु $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n} = 0$

अतः $\vec{a} \times \vec{b} = 0,$

जब $\vec{a} \neq 0,\ \vec{b} \neq 0$

प्रश्न 9 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A(1, 1, 2), B(2, 3, 5) और C(1, 5, 5) है।

उत्तर- मान लीजिए शीर्ष A का स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

B का स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{OB} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

तथा C का स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{OC} = \hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) = 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

अब त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$

$$= \frac{1}{2}(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \times (4\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(6 - 12)\hat{i} + (-3)\hat{j} + (4 - 0)\hat{k}$$

$$= \frac{1}{2}(-6\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})$$

प्रश्न 10 एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिश

$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ द्वारा निर्धारित है।

उत्तर- दी गयीं समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ

$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1 + 21)\hat{i} - (1 - 6)\hat{j} + (-7 + 2)\hat{k}$$

$$= 20\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k}$$

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\vec{a} \times \vec{b}| = |20\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k}|$

$$= \sqrt{20^2 + 5^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{400 + 25 + 25}$$

$$= \sqrt{450} = 15\sqrt{2}.$$

प्रश्न 11 मान लीजिए सदिश

$\vec{a}$ और $\vec{b}$ इसी प्रकार है की $|\vec{a}| = 3$ और $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$

तब $\vec{a} \times \vec{b}$ एक मात्रक सदिश है यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बिच का कोण है।

a. $\frac{\pi}{6}$

b. $\frac{\pi}{4}$

c. $\frac{\pi}{3}$

d. $\frac{\pi}{2}$

उत्तर-

b. $\frac{\pi}{4}$

हल-

$$\because \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta\, n$$

या $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}| \sin\theta$

दिया है, $|\vec{a}| = 3$ तथा $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$

जबकि $|\vec{a} \times \vec{b}| = 1$ इकाई

$$\therefore |\vec{a}|.|\vec{b}| \sin\theta = 1$$

$$3 \times \frac{\sqrt{2}}{3} \sin\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 45^\circ$$

$$\therefore \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

अतः विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 12 एक आयत के शीर्ष A, B, C और D जिसके स्थिति सदिश क्रमशः

$$-\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k},\ \hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k},-\hat{i}-\frac{1}{2}+4\hat{k}$$

है का क्षेत्रफल है।

a. $\frac{1}{2}$
b. 1
c. 2
d. 4

उत्तर-

c. 2

हल-

$$\overrightarrow{AB}=(\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}-\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k})=2\hat{i}$$

$$\therefore|AB|=2$$

अब $\overrightarrow{AD}=(-\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k})-(-\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k})=-\hat{j}$

$$\therefore|AD|=1$$

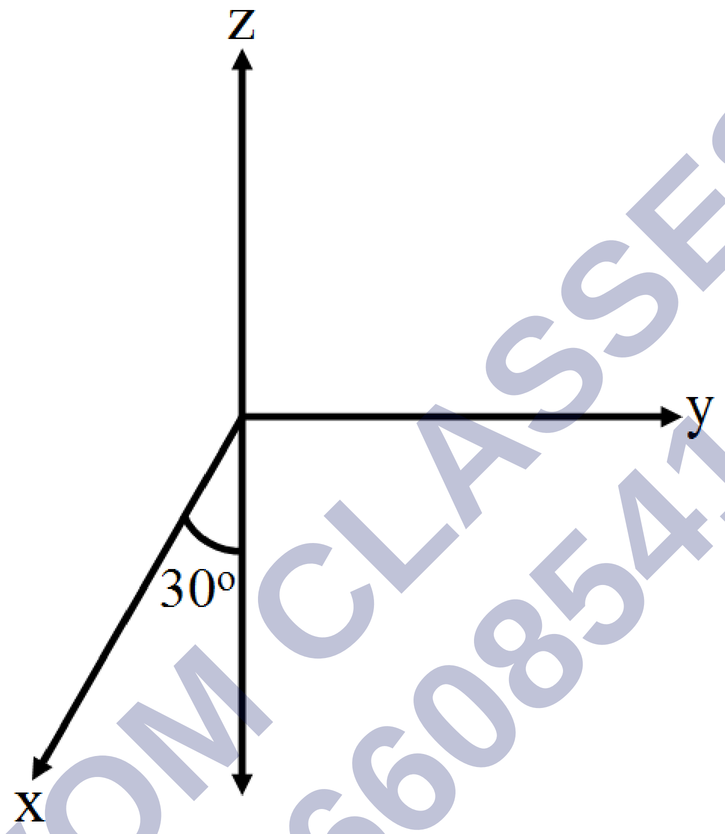
अतः आयत ABCD का क्षेत्रफल $=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AD}|2\times 1=2$

अतः विकल्प (C) सही है।

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 472-474)

प्रश्न 1 XY-तल में x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ वामावर्त दिशा में 30° का कोण बनाने वाला मात्रक सदिश लिखिए।

उत्तर-



$\therefore$ x $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

तथा $y = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

जब $\overrightarrow{OZ}$ के साथ 90° का कोण बनता है।

$\therefore Z = \cos 90^\circ = 0$

$\therefore \overrightarrow{OP} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta + \hat{k} \times 0$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}$

प्रश्न 2 बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले सदिश के अदिश घटक और परिणाम ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिए गए बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ के स्थिति सदिश क्रमशः है।

$$\text{अतः } \overrightarrow{OP}\ x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

$$\text{तथा } \overrightarrow{OQ}\ x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$= (x_2\hat{i} + z_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

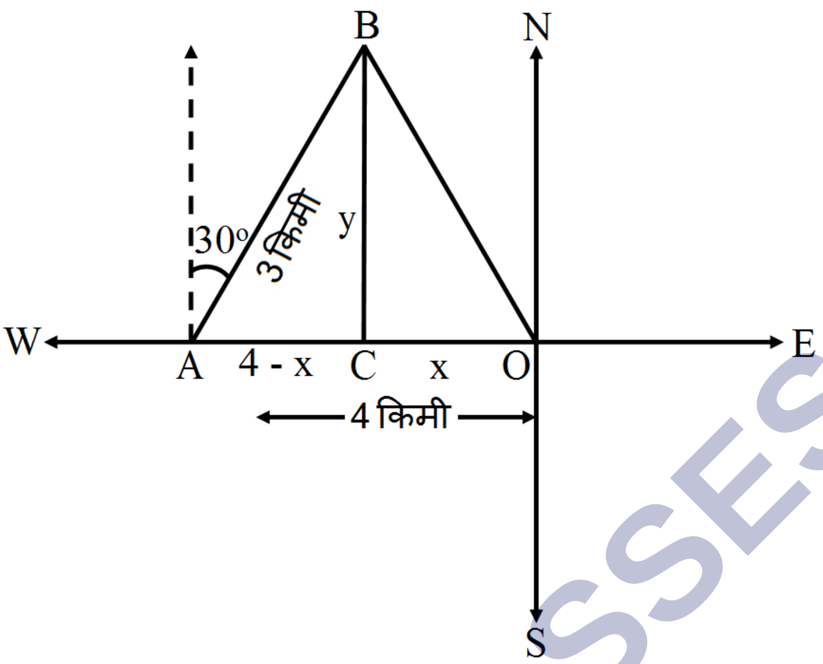
$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - x_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\text{अतः } \overrightarrow{PQ} \text{ के अदिश घटक } x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$$

$$\text{तथा परिमाण } |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

प्रश्न 3 एक लड़की पश्चिम दिशा में 4 कि.मी. चलती है। उसके पश्चात् वह उत्तर से 30° पश्चिम की दिशा में 3 कि.मी. चलती है और रुक जाती है। प्रस्थान बिन्दु से लड़की का विस्थापन ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



मान लीजिए $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$

अतः $\vec{r} = -x\hat{i} + y\hat{j}$

अब समकोण त्रिभुज ABC सें

$\sin 60^\circ = \frac{y}{3}$ या $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{3}$ या $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

तथा $\cos 60^\circ = \frac{4-x}{3}$ या $\frac{1}{2} = \frac{4-x}{3}$ या $3 = 8 - 2x$

या $2x = 8 - 3 = 5$ या $x = \frac{5}{2}$

अतः विस्थापन $\vec{r} = -\frac{5}{2}\hat{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

प्रश्न 4 यदि $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ तब क्या यह सत्य है की $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

उत्तर- दिया है, $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

मान लीजिए $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$

वर्ग करने पर $|\vec{a}|^2 = |\vec{b} + \vec{c}|^2 = (\vec{b} + \vec{c})(\vec{b} + \vec{c})$

$= \vec{b}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{b} + \vec{c}.\vec{c}$

$= |\vec{b}|^2 + 2(\vec{b}.\vec{c}) + |\vec{c}|^2$

$(\because \vec{c}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c}, \vec{b}.\vec{b} = |\vec{b}|^2, \vec{c}.\vec{c} = |\vec{c}|^2)$

$= |\vec{b}|^2 + 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta + |\vec{c}|^2$

जब $\theta, \vec{b}$ और $\vec{c}$ बिच का कोण है।

यदि $\theta \neq 0, \cos\theta = 1$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + 2|\vec{b}||\vec{c}| + |\vec{c}|^2 = \left(|\vec{b}| + |\vec{c}|^2\right)$

$\therefore |\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$

यदि $\theta \neq 0, \cos\theta \neq 1$

$|\vec{a}|^2 \neq \left(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2\right)$

या $|\vec{a}| \neq |\vec{b}| + |\vec{c}|$

अतः यह आवश्यक नहीं है कीं $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$

प्रश्न 5 x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$x(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

एक मात्रक सदिश है।

उत्तर-

मान लीजिए $\vec{a} = x(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = x\hat{i}+x\hat{j}+x\hat{k}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 \times x^2 \times x^2}$$

$$= \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$$

मात्रक सदिश के लिए $|\vec{a}| = 1$

$$\therefore x\sqrt{3} = 1$$

या $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 6 सदिशों

$\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ त

के परिणाम के समान्तर एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिणाम 5 इकाई है।

उत्तर- मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का परिणाम सदिश $\vec{c}$ है।

$$\therefore \vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$$

$$= (2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$$

$$\vec{c} = 3\hat{i}+\hat{j}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

दिया है, $|\vec{c}|$ के अनुदिश वह सदिश जिसका परिणाम 5 है।

$$= \frac{5\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{5(3\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{5\sqrt{10}}{10}(3\hat{i} + \hat{j}) = \frac{3\sqrt{10}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{10}}{2}\hat{j}$$

प्रश्न 7 यदि

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

तो सदिश $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ के समान्तर एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दिया है, $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

और $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore\ 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$

$= 2(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$|2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}| = \sqrt{3^2 + (-3^2) + 2^2}$

$= \sqrt{9 + 9 + 4} = \sqrt{22}$

$$\therefore 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c} \text{ के समान्तर मात्रक सदिश } = \frac{2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}}{|2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}|}$$

$$= \frac{3\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{22}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{22}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{22}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{22}}\hat{k}$$

प्रश्न 8 दर्शाइए कि बिन्दु 4(1,-2,-8), B(5, 0, -2) और C(11, 3, 7) संरेख हैं और B द्वारा AC को विभाजित करने वाला अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिए गए बिन्दुओं A, B तथा C के स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = 5\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\text{तथा } \overrightarrow{OC} = 11\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

$$= 4\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 +^2 +6^2}$$

$$= \sqrt{16 + 4 + 36}$$

$$= \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (11\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}) - (5\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= 6\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6^2 + 3^3 + 9^2}$$

$$= \sqrt{36 + 9 + 81}$$

$$= \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

तथा $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (11\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k})$

$$= 10\hat{i} + 5\hat{j} + 15\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10^2 + 5^2 + 15^2}$$

$$= \sqrt{100 + 25 + 225}$$

$$= \sqrt{350} = 5\sqrt{14}$$

यहाँ $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$ इसलिए A, B, C संरेख है।

अब B सदिश द्वारा $|\overrightarrow{AC}|$ को विभाजित करने का अनुपात

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{14}}$$

$$= \frac{2}{3} = 2 : 3$$

प्रश्न 9 दो बिन्दुओं $P(2\vec{a} + \vec{b})$ और $Q(\vec{a} - 3\vec{b})$ को मिलाने वाली रेखा को 1 : 2 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए। यह भी दर्शाइए कि बिन्दु P रेखाखण्ड RQ का मध्य बिन्दु है।

उत्तर-

दिए गए बिन्दु 2.0 के स्थिति सदिश क्रमशः $2\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{a} - 3\vec{b}$ हैं।

बिन्दु R के स्थिति सदिश जो PQ को बाह्य 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है।

$$= \frac{1(\vec{a}-3\vec{b})-2(\overrightarrow{2a}+\vec{b})}{1-2}$$

$$= \frac{-3\vec{a}-5\vec{b}}{-1} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$$

$\overrightarrow{RQ}$ के मध्य बिन्दु का स्थिति सदिश

$$= \frac{(3\vec{a}+5\vec{b})+(\vec{a}-3\vec{b})}{2} = \frac{4\vec{a}+2\vec{b}}{2} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

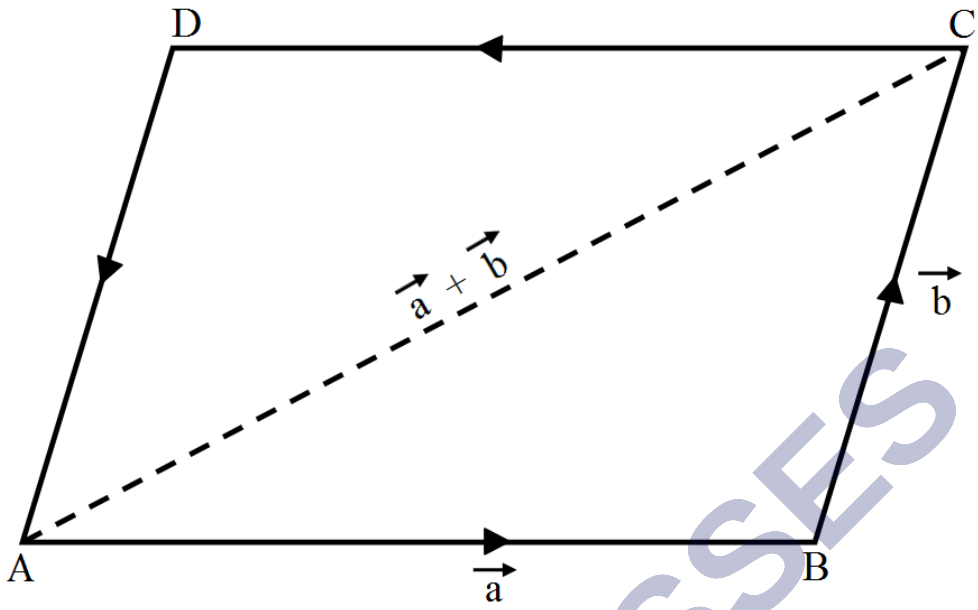
जो P का स्थिति सदिश है।

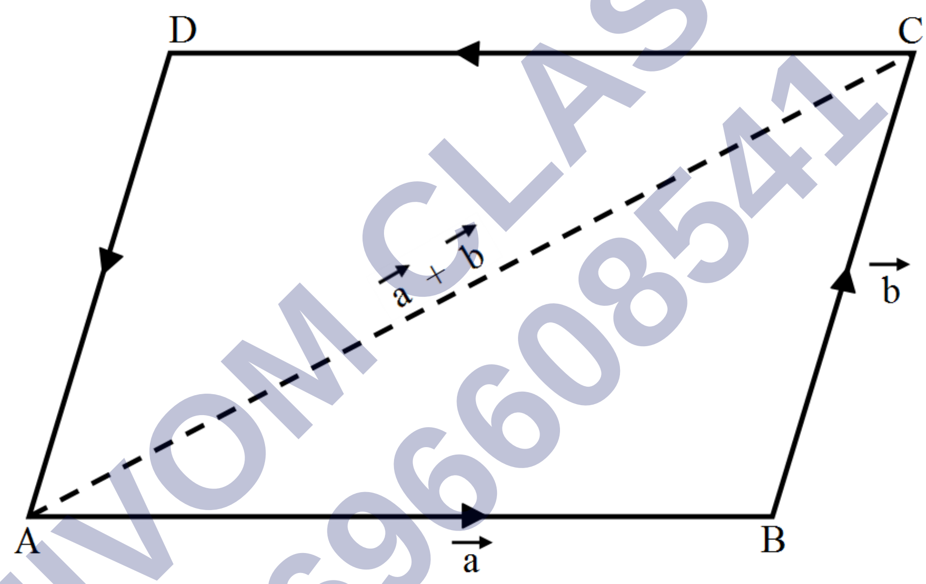
अत: P, RQ का मध्य बिन्दु है।

प्रश्न 10 एक समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ हैं। इसके विकर्ण के समान्तर एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान लीजिए समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं।

$$\therefore \vec{a} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}, \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$$





अतः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का विकर्ण $= \vec{a} + \vec{b}$

$$= (2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}) + (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

$$= 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = |3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}|$$

$$= \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$$

$\therefore \vec{a} + \vec{b}$ के समान्तर मात्रक सदिश

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}}{7}$$

$$= \frac{3}{7}\hat{i} - \frac{6}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k} = \frac{1}{7}(3\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k})$$

अब समान्तर समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\vec{a} + \vec{b}|$

या $\vec{a} \times \vec{b} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}) \times (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (12 + 10)\hat{i} - (-6 - 5)\hat{j} + (-4 + 4)\hat{k}$$

$$= 22\hat{i} + 11\hat{j}$$

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\vec{a} \times \vec{b}| = |22\hat{i} + 11\hat{j}|$

$$= \sqrt{22^2 + 11^2} = \sqrt{605}$$

$$11\sqrt{5}$$

प्रश्न 11 दर्शाइए कि OX, OY एवं OZ अक्षों के साथ बराबर झुके हुए सदिश की दिक्-कोसाइन कोज्याएँ

$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ हैं।

उत्तर- माना कि सदिश

$\overrightarrow{OP}$, OX, OY और OZ के साथ बराबर झुका हुआ है तथा प्रत्येक के साथ समान कोण α बनाता है।

$\therefore \overrightarrow{OP}$ की दिक् कोज्याएँ $= \cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha,$

$= \cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha,$ दिक् कोज्याएँ हैं।

$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\therefore 3\cos^2\alpha = 1$

या $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

अत: दी गयी अक्षो के साथ बराबर झुके हुए सदिश की दिक् कोज्याएँ $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ हैं। इति सिद्धम्।

प्रश्न 12 मान लीजिए

$\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\ \vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}\ \vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

एक ऐसा सदिश $\vec{b}$ ज्ञात कीजिए जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों पर लम्ब है और $\vec{c}.\vec{b} = 15$

उत्तर- दिया है

$\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (28 + 4)\hat{i} + (6 - 7)\hat{j} + (-2 - 12)\hat{k}$$

$$= 32\hat{i} - \hat{j} - 14\hat{k}$$

मान लीजिए $\vec{b} = \lambda(32\hat{i} - \hat{j} - 14\hat{k})$

$\therefore \vec{d}$ सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लम्ब है।

परन्तु $\vec{c}.\vec{d} = 15$

$\therefore (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}).(\lambda)(32\hat{i} - \hat{j} - 14\hat{k}) = 15$

या $\lambda(64 + 1 - 56) = 15$

या $9\lambda = 15$

$\therefore \lambda = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

अतः $\vec{d} = \lambda(32\hat{i} - \hat{j} - 14\hat{k})$

$\frac{5}{3}(32\hat{i} - \hat{j} - 14\hat{k})$

$\frac{106}{3}\hat{i} - \frac{5}{3}\hat{j} - \frac{70}{3}\hat{k}$

$\vec{d} = \frac{1}{3}(106\hat{i} - 5\hat{j} - 70\hat{k})$

प्रश्न 13 सदिश

$\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का, सदिशों $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

के योगफल की दिशा में मात्रक सदिश के साथ अदिश गुणनफल 1 के बराबर है तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$

तथा $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

सदिश $\vec{b}$ और $\vec{c}$ का योगफल,

$\vec{b} + \vec{c} = (\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) + (\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= (2 + \lambda)\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

$|\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(2 + \lambda)^2 + 36 + 4}$

$= \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda + 4 + 36 + 4}$

$\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda + 44}$

$\vec{b} + \vec{c}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $= \frac{\vec{b}+\vec{c}}{|\vec{b}+\vec{c}|}$

$\frac{(2+\lambda)\hat{i}+6\hat{j}-7\hat{k}}{\sqrt{\lambda^2+4\lambda+44}}$ (मान लिया)

$\vec{a}$ और $\vec{b}$ का अदिश गुणनफल = 1

$\Rightarrow (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \frac{(2+\lambda)\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{\lambda^2+4\lambda+44}} = 1$

$$\frac{2+\lambda+6-2}{\sqrt{\lambda^2+4\lambda+44}}=1$$

$$\lambda+6=\sqrt{\lambda+4\lambda+44}$$

या $(\lambda+6)^2=\lambda^2+4\lambda+44$

या $\lambda^2+12\lambda+36=\lambda^2+4\lambda+44$

$\Rightarrow 8\lambda=44-36=8$

$\therefore \lambda=1$

प्रश्न 14 यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ समान परिमाणों वाले परस्पर लंबवत् सदिश है तो दर्शाइए कि सदीश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के साथ बराबर झुका हुआ है।

उत्तर- दिया है की सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ परस्पर लंबवत् है।

तब $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}=0$

मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ के बिच में θ कोण बनता है तथा

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\lambda$ (दिया है)

$\therefore \vec{a}.(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|.|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\cos\theta$

या $\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=|\vec{a}|.|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\cos\theta$

या $|\vec{a}|^2+0+0=|\vec{a}||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\ [\because \vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}=0]$

या $\lambda^2=\lambda|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{\lambda}{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|}$ इति सिद्धम्

इसी प्रकार सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \vec{b}, \vec{c}$ के साथ भी यही कोण बनता है।

अतः यह कहा जा सकता है कि सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ के साथ बराबर झुका हुआ है।

प्रश्न 15 सिद्धि कीजिए कि

$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{a}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

यदि और केवल यदि $\vec{a}, \vec{b}$ लंबवत् है। यह दिया हुआ है कि $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}.$

उत्तर-

$\because (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} \; (\because \vec{b}.\vec{a} = \vec{a}.\vec{b})$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$

यदि $\vec{a} \perp \vec{b},$

$\vec{a}.\vec{b} = 0$

तो $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

पुनः $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + \vec{a}.\vec{b}$

$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ जबकि $\vec{a}.\vec{b} \neq 0$

$\therefore (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ जब $\vec{a}.\vec{b} = 0$

यदि और केवल यदि $\vec{a}.\vec{b} = 0$ अर्थात $\vec{a} \perp \vec{b}.$ इति सिद्धम्।

प्रश्न 16 प्रश्न में सही उत्तर का चयन कीजिए-

यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बिच का कोण θ है तो $\vec{a}.\ \vec{b} \geq 0$ होता यदि।

a. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

b. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

c. $0 < \theta < \pi$

d. $0 \leq \theta \leq \pi$

उत्तर-

b. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

हल-

$\vec{a}.\ \vec{b} \geq 0$

$\Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \geq 0$

अब $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ धनात्मक हो, तब

$\cos\theta \geq 0$

इसलिए $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

अतः विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 17 प्रश्न में सही उत्तर का चयन कीजिए-

मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो मात्रक सदिश है और उनके बिच का कोण θ है तो $\vec{a}+\vec{b}$ एक मात्रक सदिश है यदि।

a. $\theta=\frac{\pi}{4}$

b. $\theta=\frac{\pi}{3}$

c. $\theta=\frac{\pi}{2}$

d. $\theta=\frac{2\pi}{3}$

उत्तर-

हल-

$|\vec{a}|=1$ और $|\vec{b}|=1$

तथा $|\vec{a}+\vec{b}|=1$

या $|\vec{a}+\vec{b}|^2=1$

या $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=1$

या $|\vec{a}|^2+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+|\vec{b}|^2=1$

या $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}=1$

या $1+1+2|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\theta=1$

या $2+2\times 1\cos\theta=-1$

$2\cos\theta=-1$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

अतः विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 18 प्रश्न में सही उत्तर का चयन कीजिए-

$\hat{i}, (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j}(\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k}(\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है।

a. 0
b. -1
c. 1
d. 3

उत्तर-

c. 1

हल-

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ परस्पर लंबवत् इकाई सदिश है।

$$\therefore \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

तथा $\hat{i}.\,\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

$$\therefore \hat{i}(\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j}(\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k}(\hat{i} \times \hat{j})$$

$$\hat{i}, \hat{i}, \hat{j}(\hat{k} \times \hat{i}) + \hat{k}.\hat{k}$$

$$= 1 - \hat{j}.\hat{j} + 1$$

$$= 1 - 1 + 1$$

$$1$$

अतः विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 19 प्रश्न में सही उत्तर का चयन कीजिए-

यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बिच का कोण θ होतो $|\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ जब θ बराबर है।

a. 0

b. $\frac{\pi}{4}$

c. $\frac{\pi}{2}$

d. π

उत्तर-

b. $\frac{\pi}{4}$

हल-

$\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बिच का कोण θ है।

$\therefore\ |\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.|\cos\theta|$

और $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.|\sin\theta|$

दिया है, $|\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$

या $\therefore |\vec{a}.\vec{b}|.|\cos\theta| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.|\sin\theta|$

या $|cos\theta| = |\sin\theta|$

या $|\tan\theta| = 1$

या $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4}$

या $\theta = \frac{\pi}{4}$

अतः विकल्प (B) सही है।