गणित

अध्याय-1: संबंध एवं फलन

संबंध (Relation)

निम्न वाक्यों पर विचार कीजिए-

i. दिल्ली भारत की राजधानी है।

ii. श्रीमती इन्दिरा गाँधी पं. जवाहर लाल नेहरू की पुत्री थीं।

iii. 10,2 से विभाज्य है।

iv. x,y का घन है।

उपर्युक्त वाक्य ऐसे हैं जिन्हें हम दैनिक प्रयोग में लाते हैं। इनमें से प्रत्येक में दो अवयव हैं जो एक-दूसरे से सम्बन्धित हैं। ये संबंध पृथक्-पृथक् वाक्यों में पृथक्-पृथक् हैं। पहले वाक्य में "राजधानी है"दूसरे में "पुत्री थीं", तीसरे में "विभाज्य है", तथा चौथे में "घन है" संबंध दिये गये हैं। .. यदि प्रत्येक वाक्य में दिये गये अवयवों में एक को x व दूसरे - कोy से दर्शाया जाय तथा उपस्थित संबंध को R से दर्शाया जाय तो प्रत्येक वाक्य को x Ry का रूप दिया जा सकता है तथा इस प्रकार इन वाक्यों को व्यापक बनाया जा सकता है।

वाक्य	प्रथम अवयव x	संबंध R	द्वितीय अवयव y
(i)	दिल्ली	राजधानी है	भारत की
(ii)	श्रीमती इन्दिरा गाँधी	पुत्री थीं	पं. जवाहर लाल नेहरू की
(iii)	10	विभाज्य है	2 से
(iv)	x	घन है	y का

अतः xRy का अर्थ हुआ xy से संबंध R द्वारा जुड़ा है।

अब हम इन संबंधों के बारे में अधिक जानकारी हेतु समुच्चय A = {1,2,3} पर विचार करते हैं।

कार्तीय गुणनफल की परिभाषा से,

AxA= {(1,1), (1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)}

मान लीजिए कि संबंध R,R, व R क्रमशः <=> को प्रदर्शित करते हैं। तब,

(i) संबंध R_1:

xR_1Y

$x<y$

यहाँ $1R_1 2$, $1R_1 3$, $2R_1 3$

क्योंकि 1<2, 1<3,2<3

यदि R_1, R_1, संबंध को सन्तुष्ट करने वाले क्रमित युग्मों के समुच्चय को निरूपित करता है, तो

R= {(1,2), (1,3), (2,3)}.

(ii) संबंध R_2:

$x R_2 y$

$x=y$

यहाँ $1 R_2 1$, 2R 2, $3R_2 3$

क्योंकि 1 = 1, 2 = 2, 3=3

यदि R_2, R_2, संबंध को सन्तुष्ट करने वाले क्रमित युग्मों के समुच्चय को निरूपित करता है, तो

R_2 = {(1, 1), (2, 2), (3,3)}.

(iii) संबंध R_3:

xR_3y

$x>y$

यहाँ $2R_3 1$, $3R_3 1$, $3R_3 2$

क्योंकि 2 >1,3>1,3>2

यदि R_3, R_3, संबंध को सन्तुष्ट करने वाले क्रमित युग्मों के समुच्चय को निरूपित करता है, तो

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}.$

उदाहरण 1.

माना A = {1,2,3,4,5,6} तथा R,A में संबंध इस प्रकार है कि R = {(a,b): a-b=2}

तब R= { (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)} स्पष्ट है कि 3 R 1, 4R2, 5 R3 तथा 6 R 4.

उदाहरण 2.

माना प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर संबंध R,a+3b = 12 से परिभाषित है।

तो R= {(a, b): aEN,BEN, a+3b = 12}

= {(9,1),(6,2), (3,3)}

= 9R1,6R2,3R3.

प्रतिलोम संबंध (Inverse Relation)

मान लीजिए कि R,A से B में एक संबंध है, जहाँ

R= {(x,y):x ∈ A,Y ∈ B}

तो संबंध R का प्रतिलोम संबंध वह समुच्चय है जो R के प्रत्येक क्रमित युग्म के अवयवों को परस्पर बदल देने से प्राप्त होता है। इसे R^{-1} से निरूपित किया जाता है।

इस प्रकार,

R^{-1} = {(y,x):y ∈ B,x ∈ A तथा (x,y) ∈ R}

स्पष्ट है कि (x,y) ∈ R = (y,x) ∈ R^{-1}

परिसर R^{-1} = डोमेन R तथा डोमेन R^{-1} = परिसर

उदाहरण : मान लीजिए कि

A = {1,2,3} तथा B = {a, b,c}

पुनः मान लीजिए कि A से B में कोई संबंध R इस प्रकार है

R = {(1,a),(2,b), (3,c)}

तब R^{-1} = {(a, 1), (b,2),(c,3)}.

संबंधों के प्रकार (Types of Relations)

(1)रिक्त संबंध (Empty or void relation): समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R एक रिक्त संबंध कहलाता है यदि का कोई भी अवयव A के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है।

अर्थात् $R = \phi \subset A \times A$

मान लीजिए कि किसी बालकों के स्कूल के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है। संबंध R = { (a, b): a, b की बहन है } क्योंकि स्कूल बालकों का है अतएव स्कूल का कोई भी विद्यार्थी स्कूल के किसी भी विद्यार्थी की बहन नहीं हो सकता है।

RE = ϕ

स्पष्ट है कि R एक रिक्त संबंध है।

(2) सार्वत्रिक संबंध (Universal Relation) : समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R एक सार्वत्रिक संबंध कहलाता है यदि A का प्रत्येक अवयव A के सभी अवयवों से संबंधित है; अर्थात्

$R = A \times A.$

संबंध R = { (a, b): a तथा b की ऊँचाइयों का अंतर 3 मीटर से कम है } पर विचार करते है। किन्हीं भी दो विद्यार्थियों की ऊँचाइयों का अंतर 3 मीटर से कम होना ही चाहिए। स्पष्ट है कि $R = A \times A$ एक सार्वत्रिक संबंध है।

उदाहरण 1.

माना R = {(a,a^3):a,5 से छोटी अभाज्य संख्या है} R का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : R = {(a,a^3):a, 5 से छोटी अभाज्य संख्या है।

R = {(2,8)(3,27)}

R का परिसर = {8,27}

उदाहरण 2. यदि N पर R = {(x,y): x + 2y = 8} एक संबंध है, तो R का परिसर लिखिए।

हल : xRy=x,y $\in$ N और x + 2y = 8

जब $x=1$ तब $y=\frac{3}{2}\notin N$

जब $x=2$ तब $y=3$

जब $x=3$ तब $y=\frac{5}{2}\notin N$

जब $x=4$ तब $y=2$

जब $x=5$ तब $y=\frac{3}{2}\notin N$

जब $x=6$ तब $y=1$

जब $x=7$ तब $y=\frac{1}{2}\notin N$

जब $x=8$ तब $y=0\notin N$

R = {(2,3) (4,2)(6, 1)}

R का परिसर = {1,2,3}.

उदाहरण 3. दर्शाइए कि R= {(1,2) (2,1)} द्वारा दिए गए समुच्चय {1, 2, 3} में संबंध R समिमित है परन्तु न तो स्वतुल्य है और न ही संक्रमक है।

हल : (1,1) ∉ R,(2,2) ∉ R तथा (3,3) ∉ R इसलिए R स्वतुल्य नहीं है।

(1,2) ∉ R= (2,1) ∉ R

अत: R सममित होगा।

(1,2) ∉ R,(2,1) ∉ R = (1,1) ∉ R

R अत: R संक्रमक नहीं है।

फलन (Function)

जब दो राशियाँ इस प्रकार हों कि उनमें से एक के मान में परिवर्तन करने पर दूसरे के मान में भी परिवर्तन हो, तो ऐसी राशियाँ सम्बद्ध (related) राशियाँ कहलाती हैं।

यदि दो चर x और y इस प्रकार सम्बन्धित हों कि x के प्रत्येक मान के लिए y का एक निश्चित मान प्राप्त हो, तो y को x का फलन कहते हैं। इसे y=f(x) लिखते हैं।

जैसे- (i) वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$, वृत्त की त्रिज्या r का फलन है।

(ii) त्रिकोणमितीय अनुपात $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ....x के फलन हैं।

फलन एक नियम होता है जो दो समुच्चयों के बीच संगतता (Correspondence) स्थापित करता है।

प्रतिचित्रण अथवा फलन (Mapping or Function)

यदि किसी समुच्चय A के प्रत्येक अवयव को किसी नियम अथवा निर्देश के द्वारा समुच्चय B के किसी विशिष्ट अर्थात् अद्वितीय अवयव से सम्बन्धित किया जाय तो इस नियम अथवा निर्देश को प्रतिचित्रण अथवा फलन कहते हैं।

यदि प्रतिचित्रण के अन्तर्गत A के अवयवx के संगत B का अवयवy हो तो इस तथ्य को सूक्ष्म भाषा में y=f(x) से प्रदर्शित करते हैं तथाy को x का प्रतिबिम्ब (image) कहते हैं और x को yका पूर्व-प्रतिबिम्ब (pre-image) कहते हैं।

A →B की परिभाषा (Definition of f:A→ B)

माना A तथा B दो अरिक्त समुच्चय हैं। फलन f,A से B में एक संबंध है। यदि प्रत्येक अवयव $a \notin A$ के लिये अद्वितीय $b \notin B$ का अस्तित्व है जिससे $(a,b) \notin f$ तो b को f के अंतर्गत a का प्रतिबिम्ब (image) कहते हैं। a को f के अंतर्गत b का “पूर्व प्रतिबिम्ब" कहते हैं।

फलन A से B को f:A→ B से निरूपित करते हैं।

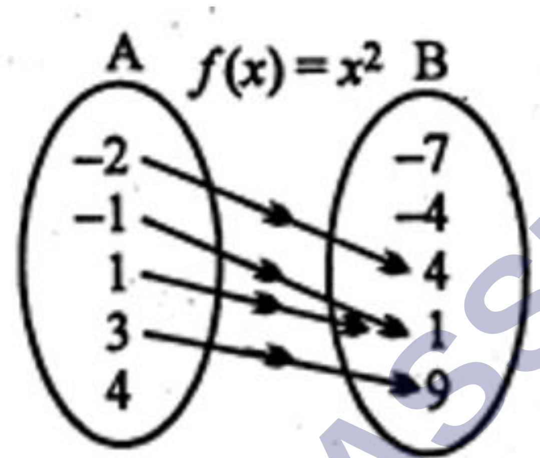
प्रान्त, सह-प्रान्त तथा परिसर (Domain, co-domain and range)

f:A→ B में निर्देश f को A से B में प्रतिचित्रण (mapping) कहते हैं। प्रतिचित्रण f A→ B में समुच्चय A,f का डोमेन तथा समुच्चय B f का सह-डोमेन तथा B के सभी अवयव जोA के प्रतिबिम्ब हैं, f का परिसर कहलाते हैं।

यदि A= {-2,-1, 1,3,4,}

तथा B= {-7,-4, 1,4,9} तथा f(x)= तोA से B में f

का प्रतिचित्रण इस प्रकार होगा-



प्रतिचित्रण f:A→ B में,

समुच्चय A,f का डोमेन

समुच्चय B,f का सह-डोमेन

तथा B के सभी अवयव जो A के प्रतिबिम्ब हैं f का परिसर कहलाते हैं।

टिप्पणी-प्रतिचित्रण f:AB, के लिए

- यह आवश्यक है कि डोमेन A के प्रत्येक अवयव के संगत सह-डोमेन B का एक अद्वितीय अवयव हो।
- यह आवश्यक नहीं है कि B का प्रत्येक अवयव,A के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब हो।

प्रतिचित्रण के प्रकार (Types of Mapping)

(i) आच्छादक प्रतिचित्रण (Onto or Surjective Mapping) : यदि प्रतिचित्रण के सह-डोमेन का प्रत्येक अवयव डोमेन के किसी-न-किसी अवयव का प्रतिबिम्ब हो तो ऐसे प्रतिचित्रण को आच्छादक प्रतिचित्रण कहते हैं।

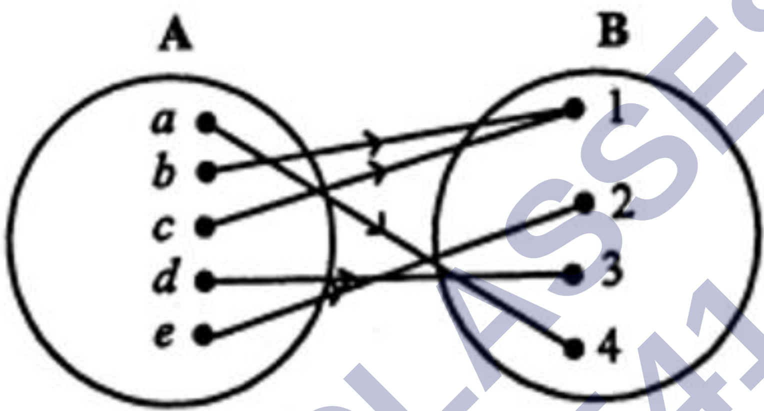
प्रतीकात्मक रूप में,

f:A→B आच्छादक होगा यदि f (A)= B, अर्थात् प्रतिचित्रण का परिसर तथा सह-डोमेन एक ही समुच्चय हो।

उदाहरण- मान लीजिए कि A= {a, b, c,d,e},

B= {1,2,3,4}

तथा f:A→B निम्न चित्रानुसार है :



$f: A \to B$

f(A)= {1,2,3,4} = B

उपर्युक्त चित्र में हम देखते हैं कि सह-डोमेन B का कोई अवयव ऐसा नहीं है जो डोमेन A के किसी-न-किसी अवयव का प्रतिबिम्ब न हो।

अत : प्रतिचित्रण आच्छादक है।

यहाँ f = {(a, 4), (b, 1), (c, i), (d, 3), (e, 2)}.

(ii) अन्त:क्षेपी प्रतिचित्रण (Into Mapping) : यदि किसी प्रतिचित्रण के सह-डोमेन में एक या एक से अधिक अवयव ऐसे हैं जो डोमेन के किसी भी अवयव के प्रतिबिम्ब नहीं हैं, तो ऐसे प्रतिचित्रण को अन्तःक्षेपी प्रतिचित्रण कहते हैं।

प्रतीकात्मक रूप में,

f:A→ B अन्तःक्षेपी होगा यदि f(A) + B.

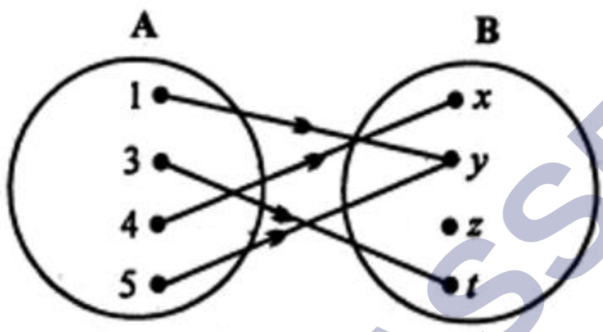
टिप्पणी- स्पष्टत: यदि कोई प्रतिचित्रण आच्छादक है तो वह अन्तःक्षेपी नहीं होगा और यदि वह अन्तःक्षेपी है तो आच्छादक नहीं होगा।

उदाहरण : मान लीजिए कि

$A = \{1,3,4,5\}$

$B = \{x,y,z,t\}$

तथा $f:A\rightarrow B$ निम्न चित्रानुसार है -



$f: A \rightarrow B$

तब, $f = \{(1,y),(3,t),(4,x),(5,y)\}$

इस चित्र में हम देखते हैं कि सह-डोमेन B में : एक ऐसा अवयव है, जो डोमेन के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं है। अतः यहाँ प्रतिचित्रण अन्तःक्षेपी है।

यहाँ $f(A) = \{x,y,t\} \subseteq B$.

(iii) एकैकी प्रतिचित्रण (One -one Mapping) : यदि किसी प्रतिचित्रण में डोमेन के भिन्न-भिन्न अवयवों के प्रतिबिम्ब सर्वथा भिन्न-भिन्न हों, तो ऐसे प्रतिचित्रण को एकैकी प्रतिचित्रण कहते हैं। प्रतीकात्मक रूप में,

$f:A\rightarrow B$ एकैकी प्रतिचित्रण होगा यदि

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$$

दूसरे शब्दों में, कोई प्रतिचित्रण एकैकी प्रतिचित्रण होगा यदि डोमेन के किन्हीं दो अवयवों का प्रतिबिम्ब एक ही हो, तो वे अवयव भी एक ही होंगे अर्थात्

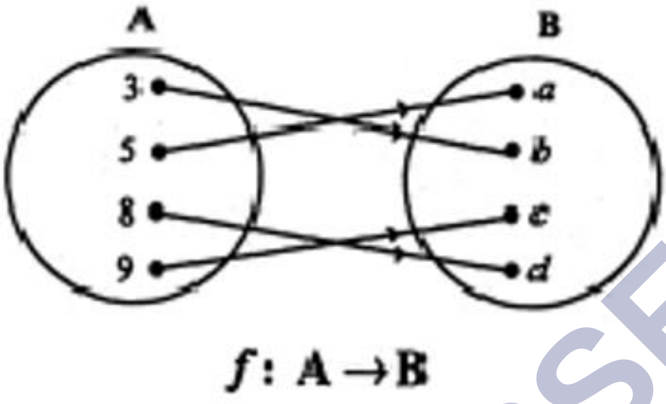
$f(x_1) = f(x_2) = x_1 = x_2, \forall x_1 X_2 \in A.$

उदाहरण : मान लीजिए कि

$A = \{3,5,8,9\}$

B= {a,b,c,d}

तथा f:A→ B निम्न चित्रानुसार है :



f= {(3, b), (5.a),(8,d),(9,c)}

उपर्युक्त चित्र में हम देखते हैं कि डोमेन 4 के भिन्न-भिन्न अवयवों के प्रतिबिम्ब भी भिन्न-भिन्न हैं। अत: यहाँ प्रतिचित्रण f एकैकी है।

(iv) बहु-एक प्रतिचित्रण (Many-one Mapping) : यदि किसी प्रतिचित्रण में दो या दो से अधिक अवयवों का प्रतिबिम्ब एक ही अवयव हो, तो ऐसे प्रतिचित्रण को बहु-एक प्रतिचित्रण कहते हैं। प्रतीकात्मक रूप में,

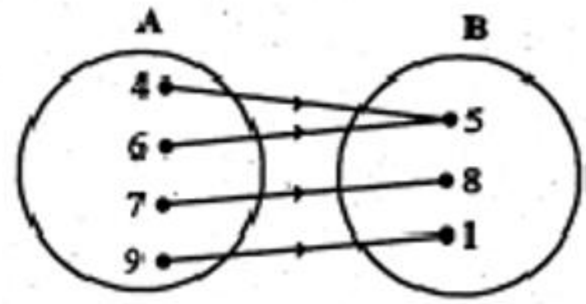
f: A + B बहु-एक प्रतिचित्रण होगा, यदि के कम-सेकम दो भिन्न अवयवों x_1x_2 x के लिए

$f(x_1) = f(x_2)$

टिप्पणी- स्पष्टत: यदि कोई प्रतिचित्रण एकैकी है तो वह बहु-एक नहीं होगा और यदि बहु-एक है तो एकैकी नहीं होगा।

उदाहरण : यदि A=(4,6,7,9},B = {5,8,1}

तथा f:A=B निम्न चित्रानुसार है:



$f: A \rightarrow B$

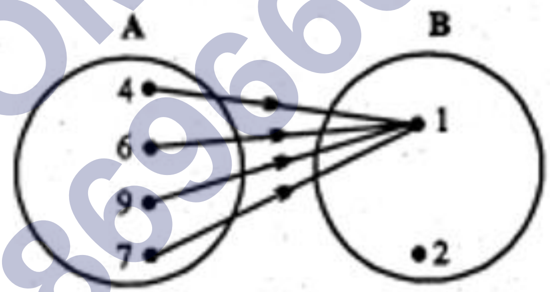
तब,f= {(4,5),(6,5),(7.8), (9, 10}

उपर्युक्त चित्र में हम देखते हैं कि के दो अवयवों 446 का B में एक ही प्रतिबिम्ब 5 है। अत: यहाँ प्रतिचित्रण f बहु-एक है।

(v) अचर प्रतिचित्रण (Constant Mapping) : यदि किसी प्रतिचित्रण में डोमेन के समस्त अवयवों का प्रतिबिम्ब एक ही हो, तो ऐसे प्रतिचित्रण को अचर प्रतिचित्रण कहते हैं।

उदाहरण :मान लीजिए कि A={4.6,9,7},B = {1,2}

तथा f: A+ B अग्र चित्रानुसार है



$f: A \rightarrow B$

तब, उपर्युक्त चित्र से स्पष्ट है कि डोमेन A के प्रत्येक अवयव का प्रतिबिम्ब 1 है। अत: F एक अचर प्रतिचित्रण है।

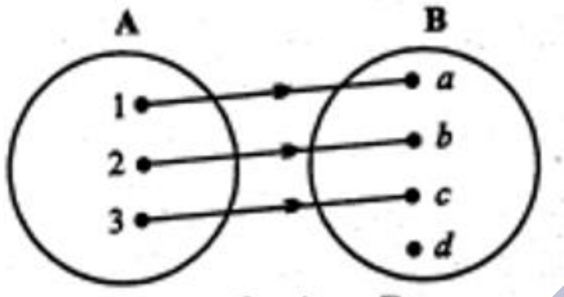
टिप्पणी-अचर प्रतिचित्रण का परिसर एकल समुच्चय होगा।

(vi) एकैकी अन्त:क्षेपी प्रतिचित्रण (One-one Into or Injective Mapping)- यदि कोई प्रतिचित्रण अन्त:क्षेपी है तथा एकैकी भी, तो उसे एकैकी अन्त: क्षेपी प्रतिचित्रण कहते हैं।

उदाहरण : यदि -{1,2,3},B= {a,b.c,d)

तथा f=A,B इस प्रकार है कि

F = {(1,a),(2.b), (3,C)}



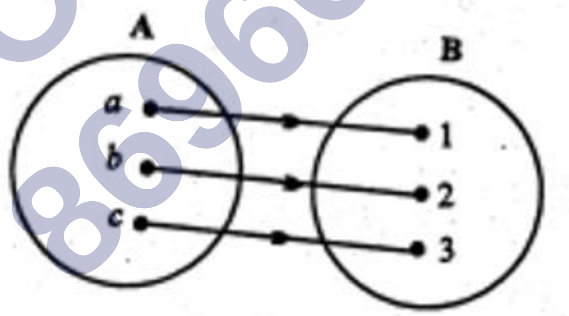
$f: A \rightarrow B$

एकैकी अन्त:क्षेपी प्रतिचित्रण है। यह प्रतिचित्रण अन्तःक्षेपी है, क्योंकि B का एक अवयव ऐसा है जो A के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं है तथा एकैकी है क्योंकि के भिन्न-भिन्न अवयवों के B में भिन्न-भिन्न प्रतिबिम्ब हैं।

(vii) एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण (One-one Onto or Bijective Mapping) : यदि कोई प्रतिचित्रण एकैकी भी है तथा आच्छादक भी, तो उसे एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण कहते हैं।

उदाहरण- यदि = {a, b,c), B = {1,2,3) तथा f:4B इस प्रकार है कि

f-{(a, 1), (b, 2), (c,3)}



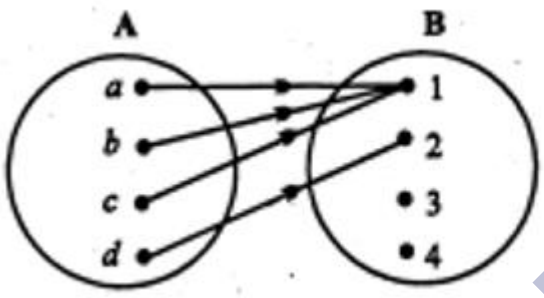
$f: A \rightarrow B$

f:4→B एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है। यह : प्रतिचित्रण एकैकी है क्योंकि A के भिन्न-भिन्न अवयवों के B में भिन्न-भिन्न प्रतिबिम्ब हैं तथा B का प्रत्येक अवयव A के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब है।

(viii) बहु-एक अन्त:क्षेपी प्रतिचित्रण (Many-one Into Mapping)- यदि कोई प्रतिचित्रप बहु-एक भी हो और अन्तःक्षेपी भी हो, तो उसे बहु-एक अन्त:क्षेपी प्रतिचित्रण कहते हैं।

उदाहरण- यदि= {a, b, c,d} तथा B = {1,2,3,4} तथा f:4 Bइस प्रकार है कि

f= {(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 2)}



$f: A \rightarrow B$

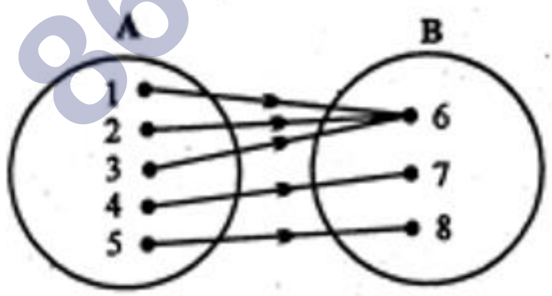
तब $f:A \rightarrow B$ बहु-एक अन्तःक्षेपी प्रतिचित्रण है। यह प्रतिचित्रण बहु-एक है क्योंकि के तीन भिन्न-भिन्न अवयवों a,b, का B में एक ही प्रतिबिम्ब 1 है तथा अन्तःक्षेपी है क्योंकि B के दो अवयव 3 और 4 ऐसे हैं जो समुच्चय के किसी भी अवयव के प्रतिबिम्ब नहीं हैं।

(ix) बहु-एक आच्छादक प्रतिचित्रण (Many- one Onto Mapping) : यदि कोई प्रतिचित्रण बहु-एक भी है और आच्छादक भी, तो उसे बहु-एक आच्छादक प्रतिचित्रण कहते हैं।

उदाहरण-यदि

A={1,2,3,4,5),B-16,7,8} तथा J:A B इस प्रकार है कि

f-{(1,6),(2,6),(3,6),(4,7), (5,8)}



$f: A \rightarrow B$

तो f:A B बहु-एक आच्छादक प्रतिचित्रण है। यह प्रतिचित्रण बहु-एक है क्योंकि के तीन भिन्न अवयवों 1,2,3 का B में प्रतिबिम्ब एक ही अर्थात् 6 है तथा आच्छादक है क्योंकि B का प्रत्येक अवयव के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब है।

उदाहरण

उदाहरण 1. R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा प्रतिचित्रण f:R,R जहाँ $f(x)=e^x, x \in R$ द्वारा परिभाषित है तो सिद्ध कीजिए कि/ एकैकी प्रतिचित्रण है।

हल :

मानलो $x_1, x_2 \in R$

$$f(x_1)=e^{x_1} \quad \text{तथा} \quad f(x_2)=e^{x_2}$$

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$e^{x_1}=e^{x_2}$$

$$x_1=x_2$$

अतः प्रतिचित्रण/ एकैकी है। यही सिद्ध करना था।

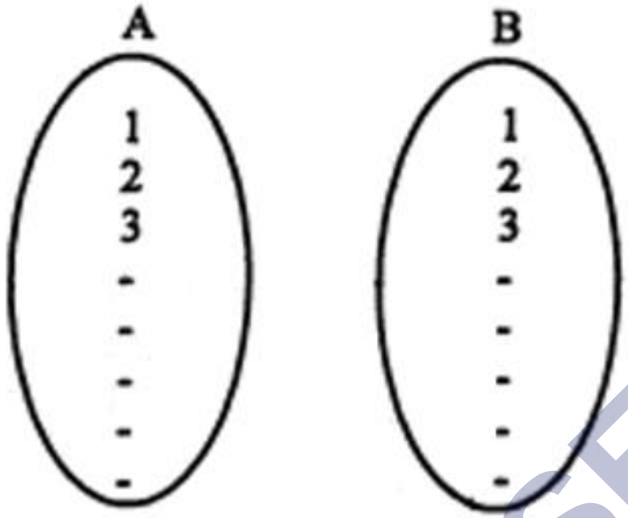
उदाहरण 2. निम्नलिखित फलनों की एकैक (Injective) तथा आच्छादी (Surjective) गुणों की जाँच कीजिए-

(i) $f(x)-x^2$ द्वारा प्रदत्त f:N,N फलन है।

(ii) $f(x)-x^2$ द्वारा प्रदत्त f:z,z फलन है।

हल : (i) दिया गया फलन f:N+N,

f(x) =x,vxEN फलन का डोमेन प्राकृत संख्या तथा सह-डोमेन भी प्राकृत संख्या है।



डोमेन A = {1,2,3,4,........}

सह-डोमेन B= {1,2,3,4,.........}

माना x_1, x_2 EN इस प्रकार है कि

$$f(x_1)=f(x_2)$$
$$x_1^2=x_2^2$$
$$(x_1^2-x_2^2)=0$$
$$(x_1-x_2)(x_1+x_2)=0$$
$$x_1=x_2 \text{ तथा } x_1=-x_2,$$
(असंभव है x_1, x_2 प्राकृत संख्या है।)

यहाँ f(x) = f(x) =x

दिया गया फलन एकैकी है।

सह-डोमेन में एक अवयव 2EN लेते हैं

$$y=x^2$$
$$x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2} \notin N$$

सह-डोमेन के अवयव 2 का डोमेन A में इसका कोई भी पूर्व प्रतिबिम्ब नहीं है।

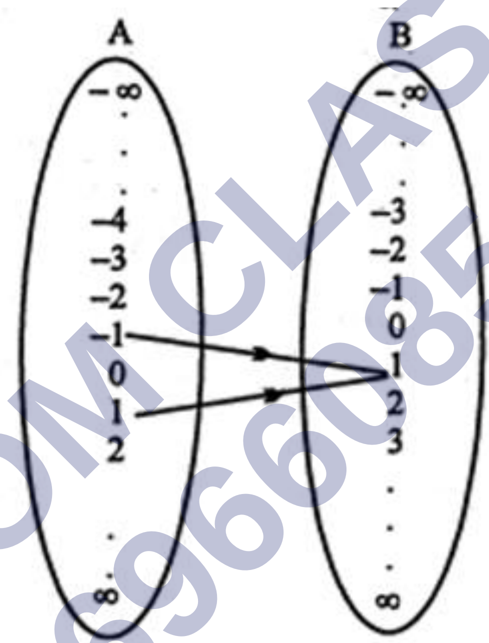
अर्थात् रेंज सह-डोमेन का उपसमुच्चय होगा।

अतः आच्छादक नहीं है।

अत: एकैकी फलन है लेकिन आच्छादक फलन नहीं है।

उत्तर

(ii) दिया गया फलन $f:z \rightarrow z, f(x)=x^2$ फलन का डोमेन पूर्णांक संख्या तथा सह-डोमेन भी पूर्णांक संख्या है।



डोमेन A={-∞ ....-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,.......∞}

सह-डोमेन B= {-∞........-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,.....∞}

माना $x_1, x_2 \in I$ इस प्रकार है कि

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$x_1^2 = x_2^2$$
$$(x_1^2 - x_2^2) = 0$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$
$$x_1 = x_2 \text{ तथा } x_1 = -x_2$$

यहाँ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

अर्थात् डोमेन A के दो अवयवों के प्रतिबिम्ब समान हैं।

जैसे— $f(x) = x^2$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$
$$f(1) = (1)^2 = 1$$

डोमेन A के अवयव-1 और 1 का प्रतिबिम्ब 1 है अत: दिया गया फलन एकैकी नहीं है।

सह-डोमेन में एक अवयव 36 I लेते हैं

$$y = x^2$$
$$x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \notin I$$

सह-डोमेन के अवयव 3 का डोमेन 4 में इसका कोई भी पूर्व प्रतिबिम्ब नहीं है।

अर्थात् रेंज Rc सह-डोमेन अतः आच्छादक नहीं है।

इसलिए .f न तो एकैकी फलन है और न ही आच्छादक फलन है।

फलनों का संयोजन (Composite Function)-

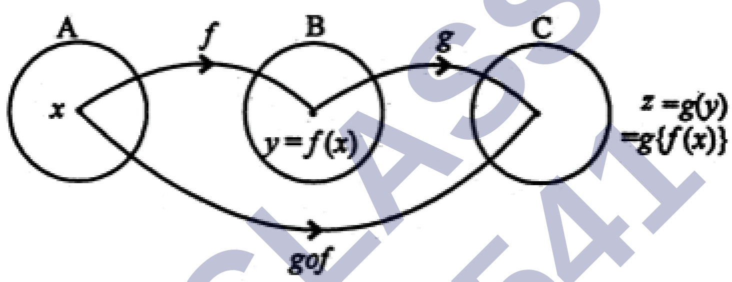
माना f:A→ B और g: B→C दो फलन हैं। तब अवयव x∈A तो फलन इस प्रकार परिभाषित है f(x)=y∈B तथा y फलन g में इस प्रकार परिभाषित है।z ∈C

अतः z = g(y) = g[f(x)]

स्पष्ट है कि x∈A के संगत C का एक अद्‌वितीय मान 2 =g[f(x)] होगा। यह नियम फलन A से C के लिए है। इस फलन को gof से व्यक्त करते हैं तथा यह फलन और g का संयुक्त फलन कहलाता है।

अतः यदि f:A→ B और g:B→C कोई दो फलन हैं, तब और g के संयुक्त फलन को gof से व्यक्त करते हैं तथा यह फलन gof :A→C में इस प्रकार परिभाषित है

$(gof)(x) = g[f(x)], \forall x \in A$



दो फलनों के परिमाण को दो फलनों का संयोजन या फलन का फलन कहते हैं।

नोट-

(i) यदि संयुक्त फलन gof विधमान है, तो यह आवश्यक है कि फलन का परिसर, फलन के प्रान्त का उपसमुच्चय है।

(ii) gof का प्रान्त =f का प्रान्त और सहप्रान्त (gof) = सहप्रान्त (8)

(iii) यदि gof परिभाषित है, तो यह आवश्यक नहीं है कि fog परिभाषित है।

सामान्यत : $gof \neq fog$.

$(gof)(x) = g[f(x)] \ \forall x \in A$

त्समक प्रतिचित्रण (Identity Mapping)

परिभाषा- एक प्रतिचित्रण f:A→ B तत्समक प्रतिचित्रण कहलाता है, यदि

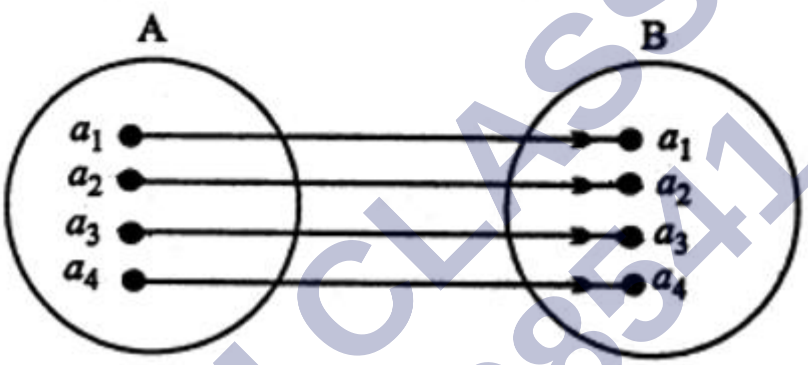
(i) A= B तथा **(ii)** f(x)=x,vxEA

यदि,A पर एक तत्समक प्रतिचित्रण हो, तो इसे सामान्यतः I_A से व्यक्त करते हैं।

उदाहरण-माना A = $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

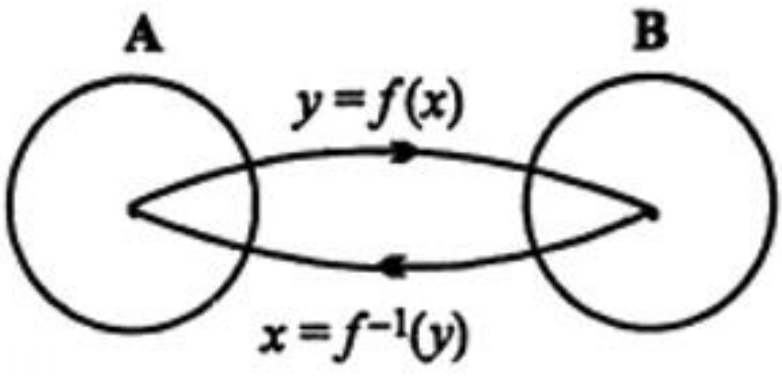
तथा f = $\{(a_1,a_1),(a_2,a_2),(a_3,a_3),(a_4,a_4)\}$

तो f एक तत्समक प्रतिचित्रण है।



प्रतिलोम प्रतिचित्रण (Inverse Mapping)

यदि f:A B एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है तो प्रतिचित्रण f^{-1}:B→A जो प्रत्येक अवयव b ϵB को उस अवयव a ϵ A सम्बन्धित करता है जिसका-प्रतिबिम्ब b ϵ B था, प्रतिलोम या व्युत्क्रम प्रतिचित्रण कहलाता है।



उदाहरण : यदि f:I→I जहाँ f(x) = x और I पूर्णांकों का समुच्चय है तो

$$f(3)=9 \qquad \because \quad 3^2=9$$
$$f(-3)=9 \qquad \because (-3)^2=9$$

तथा अन्य कोई ऐसा पूर्णांक नहीं है जिसका वर्ग 9 हो।

$$\therefore \qquad f^{-1}(9)=\{3,-3\}$$

उदाहरण 1.

यदि f (x)=x^2 और g(x) = x+3,x ∈ R तब (gof)x,(fog)x,(fog)2 का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है,

$$f(x)=x^2$$
$$g(x)=x+3$$
$$(gof)x=g[f(x)]=g(x^2)$$
$$=x^2+3.$$
$$(fog)x=f[g(x)]=f(x+3)$$
$$=(x+3)^2$$
$$=x^2+9+6x.$$
$$(fog)2=(2)^2+9+6.2$$
$$=25.$$

उदाहरण 2 एक व्युत्क्रमणीय फलन है जो इस प्रकार परिभाषित है $f(x)=\frac{3x-4}{5}$ कि तब $f^{-1}(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $f(x)=\frac{3x-4}{5}$

$$y=f(x)$$

$$y=\frac{3x-4}{5}$$

$$5y=3x-4$$

$$3x=5y+4$$

$$x=\frac{5y+4}{3}$$

$$f^{-1}(y)=\frac{5y+4}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{5x+4}{3}$$

द्विआधारी संक्रियाएँ (Binary Operations)

यदि कोई समुच्चय है तथा कोई संक्रिया है तथा

Aob ϵ A,∀a,b ϵ A

अथवा

0:AxA→A एक प्रतिचित्रण है, तो o को A में द्विआधारी संक्रिया कहते हैं।

उदाहरण : हम जानते हैं कि

a+b ϵ N,∀ a,b ϵ N

a.b ϵ N, ∀a,b ϵ N

अत: संक्रिया '+' तथा संक्रिया ' प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N में द्विआधारी संक्रियाएँ हैं।

द्विआधारी संक्रियाओं के नियम (Laws of Binary Operations)

यदि A एक समुच्चय है और ∘ द्विआधारी संक्रिया है तो संक्रिया ∘ निम्न नियमों का पालन करती है

(i) क्रम-विनिमेय नियम-aob=boa, ∀a,b ∊ A.

(ii) साहचर्य नियम- (aoboc=ao(boc), ∀a,b,CE A.

(iii) तत्समक अवयव- यदि eoa=a=aoe, ∀a ∊ A हो, तो e ∊ A को तत्समक अवयव कहते हैं।

(iv) प्रतिलोम अवयव- यदि aob=e=boa, ∀a, $b \in A$ हो, तोव को b का अथवा b को a का प्रतिलोम अवयव कहते हैं।

टिप्पणी-(i) योग की सक्रिया में शून्य (0) योगात्मक तत्समक तथा गुणन की संक्रिया में एक (1) गुणात्मक तत्समक अवयव है। इस प्रकार,

$$a+0=a=0+a \text{ और } a\times 1=a=1\times a$$

(ii) $-a$ को a का योगात्मक प्रतिलोम तथा $\frac{1}{a}(a\neq 0)$, a का गुणात्मक प्रतिलोम है।

दूसरे शब्दों में, $(-a)+(a)=0=(a)+(-a)$

$$\left(\frac{1}{a}\right)\times(a)=1=(a)\times\left(\frac{1}{a}\right), \text{ जहाँ } a\neq 0.$$

उदाहरण 1. परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में संक्रिया ∘ इस प्रकार परिभाषित है

$$aob = a + b - ab, \quad \forall a, b \in Q$$

तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $aob = boa$

(ii) $ao\,(boc) = (aob)\,oc.$

हल : (i) $aob = a + b - ab$

$\therefore \quad boa = b + a - ba$

अतः $\quad aob = boa.$

(ii) $ao(boc) = ao(b + c - bc)$

$$= a + (b + c - bc) - a(b + c - bc)$$

$$= a + b + c - ab - bc - ac + abc$$

पुनः $\quad (aob)oc = (a + b - ab)oc$

$$= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c$$

$$= a + b + c - ab - ac - bc + abc$$

$\therefore \quad ao(boc) = (aob)oc.$

उदाहरण 2. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय Rके एक द्विचर संक्रिया निम्नानुसार परिभाषित है-

aob = a+b+ab

इसका तत्समक अवयव तथाका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। हल : संक्रिया के लिये माना तत्समक अवयव है। तब

$$aoe = eoa = a$$

दिया गया है,

$$aob = a + b + ab$$

$$\therefore \quad aoe = a + e + ae$$

$$a = a + e + ae,$$

$$e(1 + a) = 0$$

$$e = 0$$

अत: तत्समक अवयव 0 है

माना a का व्युत्क्रम a' है तब

$$aoa' = a'oa = 0$$

दिया गया है—

$$aob = a + b + ab$$

$$aoa' = a + a' + aa'$$

$$0 = a + a' + aa',$$

$$a + (1 + a)a' = 0$$

$$a' = -\frac{a}{1+a}$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 1.1 (पृष्ठ संख्या 6-8)

प्रश्न 1. निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित सम्बन्धों में से प्रत्येक स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हैं –

i. समुच्चय A = {1, 2, 3,....13, 14} में सम्बन्ध R, इस प्रकार परिभाषित है कि

$R = \{(x, y): 3x - y = 0\}$

ii. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में $R = \{(x, y): y = x + 5$ तथा $x < 4\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R.

iii. समुच्चय A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} में R = {(x, y) : y भाज्य है x से} द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R है।

iv. समस्त पूर्णांकों के समुच्चय z में R = {(x, y): x – y एक पूर्णांक है } द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R.

v. किसी विशेष समय पर किसी नगर के निवासियों के समुच्चय में निम्नलिखित सम्बन्ध R.

a. R = {(x, y): x तथा y एक ही स्थल पर कार्य करते
b. R = {(x, y): x तथा 'एक ही मोहल्ले में रहते हैं।}
c. R = {(x, y) : x, y से ठीक – ठीक 7 सेमी लम्बा है।}
d. R = {(x, y): x, y की पत्नी है।।
e. R = {(x, y): x, y के पिता हैं।}

उत्तर-

i. A = {1, 2, 3 ... 13, 14}

$R = \{(x, y): 3x - y = 0\}$

$\therefore R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$

R स्वतुल्य नहीं है, $(1, 1), (2, 2) \ldots (14, 14) \notin R$.

इसलिए, R सममित नहीं है, $(1,3) \in R$, परन्तु $(3, 1) \notin R$. $[3(3)-1 \neq 0]$

इसलिए, R संक्रामक नहीं है, $(1, 3), (3, 9) \in R$, but $(1, 9) \notin R$.

$[3(1) - 9 \neq 0]$

स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक में से कोई भी नहीं है।

ii. $R = \{(x, y): y = x + 5$ और $x < 4\} = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

$\because (1,1) \notin R$.

$\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है

$(1,6) \notin R$.

किन्तु,

$(6,1) \notin R$.

$\therefore$ R सममित नहीं है

अतः R में ऐसा कोई भी जोड़ा नहीं है जो कि (x, y) और $(y, z) \notin R$, इसलिए (x, z) भी R से संबंधित नहीं हो सकता

$\therefore$ R संक्रामक नहीं है

स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक में से कोई भी नहीं है।

iii. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

R = {(x, y): y विभाज्य है x द्वारा}

हम जानते हैं कि कोई भी संख्या (x) अपने आप से विभाज्य है

$(x, x) \in R$

∴ R स्वतुल्य है

अब,

$(2,4) \in R$ [4 विभाज्य है 2 द्वारा]

परन्तु,

$(4,2) \notin R$. [2 विभाज्य नहीं है 4 द्वारा]

∴ R सममित नहीं है

$(x, y), (y, z) \in R$ फिर, y विभाज्य है x से और z, विभाज्य है y से।

$\Rightarrow (x, z) \in R$

∴ R संक्रामक नहीं है

अतः R स्वतुल्य, तथा संक्रामक है, परन्तु सममित नहीं है।

iv. R = {(x, y): x - y एक पूर्णांक है}

अब, हर x, Z, $(x, x) \in R$ के लिए $x - x = 0$ के रूप में एक पूर्णांक है।

∴ R स्वतुल्य है

अब, हर $x, y \in Z$ if $(x, y) \in R$, यदि x - y एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow -(x - y)$ भी एक पूर्णांक है।

⇒ (y - x) भी एक पूर्णांक है।

∴ (y, x) ∈ R

∴ R सममित है

फिर,

यदि (x, y) and (y, z) ∈ R, जहाँ x, y, z ∈ Z.

⇒ (x - y) and (y - z) पूर्णांक हैं

⇒ x - z = (x - y) + (y - z) एक पूर्णांक है।

∴ (x, z) ∈ R

∴ R संक्रामक नहीं है

अतः R स्वतुल्य, तथा संक्रामक सममित है।

v. माना A = किसी विशेष समय पर किसी नगर के निवासियों का समुच्चय

a. R = {(x, y) : x तथा y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं}

R स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक व्यक्ति उस नगर में उस विशेष समय पर कार्यरत है। R सममित है, क्योंकि x, y एक ही स्थान पर एक समय पर कार्यरत हैं तो y, x भी उसी स्थान पर उस समय कार्यरत हैं। R संक्रामक है, क्योंकि x, y तथा y, z एक नगर में एक ही समय पर कार्यरत हैं तो उस नगर में उसी समय x, z भी कार्यरत हैं।

अतः स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

b. R = {(x , y) : x तथा y एक ही मोहल्ले में रहते हैं}

R स्वतुल्य है, क्योंकि उस स्थान का प्रत्येक व्यक्ति वहीं पर रहता है। R सममित है, क्योकि x और y एक स्थान पर रहते हैं तथा उसी स्थान पर y और x भी रहते हैं। R संक्रामक है, क्योंकि x, y तथा y, z एक स्थान पर रहते हैं तब x, z भी उसी स्थान पर रहते हैं।

अतः स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

c. R = {(x, y) : x, y से ठीक-ठीक 7 सेमी लम्बा है।

R स्वतुल्य नहीं है, क्योंकि कोई भी व्यक्ति अपने आप से 7 सेमी अधिक लम्बा नहीं हो सकता। R सममित नहीं है, क्योंकि y, x से ठीक 7 सेमी अधिक लम्बा है तब x, y से 7 सेमी लम्बा नहीं हो सकता। R संक्रामक नहीं है, क्योंकि x, y से तथा y, z से ठीक 7 सेमी लम्बे तो x, y से ठीक 7 सेमी अधिक लम्बा नहीं हो सकता।

अतः स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक में से कोई भी नहीं है।

d. R = {(x, y) : x, y की पत्नी है}

R स्वतुल्य नहीं है, क्योंकि x स्वयं अपनी ही पत्नी नहीं हो सकती है। R सममित नहीं है, क्योंकि यदि x, y की पत्नी है तो y, x की पत्नी नहीं हो सकती। R संक्रामक नहीं है, क्योंकि यदि x, y की पत्नी है तो y किसी की भी पत्नी नहीं हो सकती।

अतः स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक नहीं है।

R = {(x, y) : x, y के पिता हैं}

e. R स्वतुल्य नहीं है, क्योंकि x अपना ही पिता नहीं हो सकता। R सममित नहीं है, क्योंकि यदि x, y का पिता है तो y, x का पिता नहीं हो सकता। R संक्रामक नहीं है, क्योंकि x, y का y, z का पिता है तो x, z का पिता नहीं हो सकता।

अतः स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक नहीं है।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में R = {(a, b) : $a \le b^2$}, द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

उत्तर- माना A = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है और R = {(a, b) : $a \le b^2$}

a. R स्वतुल्य नहीं है, क्योंकि $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ से कम नहीं है।
b. R सममित नहीं है, क्योंकि $a \le b^2$ तो b, a^2 से कम या बराबर नहीं है, जैसे $-2 < 5^2$ परन्तु 5, 2^2 से कम नहीं है।
c. R संक्रामक नहीं है, माना a = 2, b = -2 और c = -1 तब $2 < (-2)^2$, $-2 < (-1)^2$ परन्तु 2, $(-1)^2$ से कम नहीं है।

अत: 1,2 तथा 3 से स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक नहीं है।

प्रश्न 3. जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5, 6} में R = {(a, b) : b = a + 1} द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है।

उत्तर- दिया है, A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} तथा R = {a, b) : b = a + 1}

a. R स्वतुल्य नहीं है, क्योंकि a, a + 1 के बराबर नहीं हो सकता।

   माना 4 = 1, 1, (1 + 1) = 2 के बराबर नहीं हो सकता।

b. R सममित नहीं है, क्योंकि b = a + 1

   तब $a \ne b + 1$ यदि b = 1 + 1 = 2, $1 \ne 2 + 1$

c. संक्रामक नहीं है, क्योंकि b = a + 1, c = b + 1

   तो $c \ne a + 1$ यदि b = 1 + 1 = 2 तथा c = 2 + 1 = 3 तो $3 \ne 1 + 1$

अत: 1, 2 तथा 3 से स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक नहीं है।

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि R में R = {(a, b) : $a \le b$}, द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है।

उत्तर- माना R कोई वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा R = {(a, b): a ≤ b}

a. R स्वतुल्य है, क्योंकि a ≤ a ⇒ a = a
b. R सममित नहीं है, क्योंकि a, b से कम है तब b, a से कम नहीं है।

यदि 1, 2 से कम है तब 2, 1 से कम नहीं हो सकती।

c. R संक्रामक है, क्योंकि a ≤ b और b ≤ c तब a ≤ b

अत: 1, 2 व 3 से स्पष्ट है कि R स्वतुल्य और संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।

प्रश्न 5. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय 5 में सम्बन्ध R, R = {(a, b): <b} द्वारा परिभाषित है, तो इसकी स्वतुल्यता, सममितता और संक्रमकता की जाँच कीजिए।

उत्तर-

$\frac{1}{2}$ वास्तविक सख्या है और $\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^3$ सत्य नहीं है

$\therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in R$

अतः R स्वतुल्य नहीं है

सममितताः वास्तविक सख्याओ $\frac{1}{2}$ व 1 के लिए

$\frac{1}{2} \leq 1^3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 2\right) \in R$

परन्तु $1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$ सत्य नहीं है

$\therefore \left(1 \frac{1}{2},\right) \in R$

∴ सम्बन्ध R सममित नहीं है

संक्रमकता: तीन वास्तविक संख्याओं $3, \frac{3}{2}$ और $\frac{4}{3}$ लेते हैं कि $3 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^3$ और

$\frac{3}{2} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3$ परन्तु $3 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3$ सत्य नहीं है।

$\therefore \left(3, \frac{3}{2}\right) \in R$, और $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right) \in R$ परन्तु $\left(3, \frac{4}{3}\right) \in R$

अतः सम्बन्ध र संक्रमक नहीं है।

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3} में R = {(1, 2), (2, 1)} द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R सममित है किन्तु न तो स्वतुल्य है और न संक्रामक है।

उत्तर- दिया है, A = {1, 2, 3} तथा R = {(1, 2), (2, 1)}

a. R स्वतुल्य नहीं है, क्योंकि (1, 1), (2, 2), (3,3) ∉ R
b. R सममित है, क्योंकि (1,2) ∈ R और (2,1) ∈ R
c. R संक्रामक नहीं है, क्योंकि R में केवल 2 ही अवयव हैं, जबकि संक्रामक होने के लिए तीन अवयव का होना आवश्यक हैं।

अतः 1, 2 व 3 से स्पष्ट है कि R न तो स्वतुल्य है और न ही संक्रामक है परन्तु R सममित है। इति सिद्धम्

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में R = {(x, y) : x तथा y में पेजों की संख्या समान है} द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध

उत्तर- दिया है, A किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों का समुच्चय है। तथा R = {(x, y) : x तथा y में पेजों की संख्या समान है}

a. R स्वतुल्य है, क्योंकि बराबर पृष्ठों वाली प्रत्येक पुस्तक में पृष्ठों की संख्या बराबर होगी।

b. R सममित है, क्योंकि x, y पुस्तकों में पृष्ठ बराबर है तो y, x पुस्तकों में भी पृष्ठ बराबर होगे।

c. R संक्रामक है, क्योंकि x, y तथा y, z पुस्तकों में पृष्ठ बराबर हैं तो x, z पुस्तकों में भी पृष्ठ बराबर होंगे।

अत: 1, 2 व 3 से स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है। इसलिए R तुल्यता सम्बन्ध है।

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए कि A = {1, 2, 3, 4, 5} में, R = {(a, b) :|a - b| सम है} द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है। प्रमाणित कीजिए कि {1, 3, 5} के सभी अवयव एक-दूसरे से सम्बन्धित हैं और समुच्चय {2, 4} के सभी अवयव एक-दूसरे से सम्बन्धित हैं परन्तु {1, 3 ,5} का कोई भी अवयव {2, 4} के किसी अवयव से सम्बन्धित नहीं है।

उत्तर- यहाँ है, A = {1, 2, 3, 4, 5} और संबंध R = {(a, b): |a - b| सम है

प्रश्न के अनुसार, सभी $a \in A$ के लिए $|a - a| = 0$ (जो की सम है)

∴ R स्वतुल्य है।

माना $(a, b) \in R = |a - b|$ सम है।

$\Rightarrow |-(a-b)| = |b-a|$ भी सम है।

$\Rightarrow (b, a) \in R$, इसलिए R सममित है।

अब, माना $(a, b) \in R$ और $(b, c) \in R$.

$\Rightarrow |a - b|$ सम है और $|b - c|$ सम है

क्योंकि दो सम संख्याओं का योग सम होता है।

|Da − b| सम है

$\Rightarrow (a, c) \in R$ इसलिए R संक्रामक है।

अतः R एक तुल्यता संबंध है। समुच्चय {1, 2, 3} के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं क्योंकि इसके सभी अवयव विषम हैं। विषम संख्याओं का अंतर सदैव सम होता है। इसीप्रकार, समुच्चय {2, 4 के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं क्योंकि इसके सभी अवयव सम हैं। सम संख्याओं का अंतर सदैव सम होता है। समुच्चय {1, 3, 5} का कोई भी अवयव समुच्चय {2, 4} के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है, क्योंकि समुच्चय {1, 3, 5} के सभी अवयव विषम है तथा समुच्चय {2, 4} के सभी अवयव सम है। सम और विषम संख्याओं का अंतर सदैव विषम होता है। जैसे 1 - 2, 1 - 4, 3 - 2, 3 - 4, 5 - 2 और 5 - 4 सभी विषम है।

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय A = {x ϵ z : 0 ≤ x ≤ 12}, में दिए गए निम्नलिखित संबंधों R में से प्रत्येक एक तुल्यता संबंध है :

i. R = {(a, b): |a – b|, 4 का एक गुणज है}
ii. R = {(a,b): a = b};

प्रत्येक दशा में 1 से संबंधित अवयवों को ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

i. A = x ∈ z : 0 ≤ x ≤ 12 = 0, 1, 2, 3, 4,....., 12

R = { (a, b) :|a – b|, 4 का एक गुणज है },

= {(1, 5), (1, 9), (2, 6), (2, 10), (3, 7), 3, 11),(4, 8) (4, 12), (5, 9), (6, 10), (7, 11), (8, 12),(0, 4), (0, 8), (0, 12), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), ..., (12, 12)}

a. R स्वतुल्य है, यदि a – b = 4k ⇒ k = 0
b. R सममित है, यदि | a - b| = | b - a| = 4k
c. R संक्रामक है, यदि a - b, 4 का गुणज है तथा b - c, 4 का गुणज है। तो a - b + b - c = |a - c| भी 4 का एक गुणज होगा।

अत: 1, 2 व 3 से स्पष्ट है कि R, स्वतुल्य, सममित तथा स्वतुल्य है।

अत: R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

1 से सम्बन्धित अवयव = {1, 5, 9}

ii. R = {(a, b) : a = b} ∴ R = {(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3),.... (12, 12)}

a. 4 = 1 = (a, a) = R

∴ R स्वतुल्य है।

a. R सममित है, यदि 4 = b = b = d
b. R संक्रामक है, यदि 1 = b,

b = c ⇒ a = c अर्थात a, b, c तीनों बराबर हैं।

अत: 1, 2 तथा 3 से स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

अंतः R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

1 से सम्बन्धित अवयव = {1}

प्रश्न 10. ऐसे सम्बन्ध का उदाहरण दीजिए, जो

i. सममित हो परन्तु न तो स्वतुल्य हो और न संक्रामक हो।
ii. संक्रामक हो परन्तु न तो स्वतुल्य हो और न सममित हो।
iii. स्वतुल्य तथा सममित हो किन्तु संक्रामक न हो।
iv. स्वतुल्य तथा संक्रामक हो किन्तु सममित न हो।
v. सममित तथा संक्रामक हो किन्तु स्वतुल्य न हो।

उत्तर-

i. माना A एक समतल में सरल रेखाओं का समुच्चय है तथा R = {(a, b) : a, b पर लम्ब है}

a. रेखा a, b पर लम्ब है तो b रेखा a पर लम्ब है।

∴ R सममित सम्बन्ध है।

b. R स्वतुल्य नहीं है, क्योंकि रेखा a अपने आप पर ही लम्ब नहीं हो सकती है।

c. R संक्रामक नहीं है, यदि a रेखा b पर लम्ब है, b रेखा c पर लम्ब है तो a रेखा c पर लम्ब नहीं

ii. माना A एक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। तथा $R = \{(a, b) : a > b\}$

a. R संक्रामक है, यदि $a > b$ और $b > c = a > c$

b. R स्वतुल्य नहीं है, a अपने आप से बड़ी संख्या नहीं है।

c. R सममित नहीं है, यदि $a > b$ तो b, a से बड़ा नहीं है।

iii. माना $A = \{1, 2, 3\}$ तथा $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

समतुल्य व सममित है। परन्तु संक्रामक नहीं है क्योंकि $(1, 2) \in R$, $(2, 3) \in R$ परन्तु $(1, 3) \in R$

iv. माना $A = \{1, 2, 3\}$ तथा

$R = \{(a, b) : a \leq b\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

a. R स्वतुल्य है, क्योंकि $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in R$

b. R संक्रामक है, क्योंकि $(1, 2), (2, 3) \in R = (1, 3) \in R$

c. R सममित नहीं है, यदि $a < b$ परन्तु b, a से कम नहीं है।

v. माना $A = \{1, 2, 3\}$ तब $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$ सममित व संक्रामक है।

परन्तु स्वतुल्य नहीं हैं क्योकि (3, 3) $\notin$ R

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि किसी समतल में स्थित बिन्दुओं के समुच्चय में R : {(P, Q : बिन्दु P की मूलबिन्दु से दूरी, बिन्दु Q की मूलबिन्दु से दूरी के समान है} द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है। पुनः सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P ≠ (0, 0) से सम्बन्धित सभी बिन्दुओं का समुच्चय P से होकर जाने वाले एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है, जिसका केन्द्र मूलबिन्दु पर है।

उत्तर- दिया है, A समतल में बिन्दुओं को समुच्चय है। तथा R = {(P, Q) : मूलबिन्दु से P तथा Q की दूरी समान है}

= {(P, Q) : OP = OQ}

a. R स्वतुल्य है, क्योंकि OP अपने ही बराबर है।
b. R सममित है, यक्योंकि OP = OQ ⇒ OQ = OP
c. R संक्रामक है, क्योंकि OP = OQ, OQ = QR ⇒ OP =QR

अत: 1, 2 तथा 3 से स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

अत: R तुल्यता सम्बन्ध है। चूँकि o मूलबिन्दु है तथा P वृत्त की परिधि पर रहता है अर्थात् यदि OP = K ⇒ बिन्दु P एक वृत्त पर रहता है जो 0 से K दूरी पर है। अतः बिन्दु P ≠ (0, 0) से सम्बन्धित सभी बिन्दुओं का समुच्चय P से होकर जाने वाले एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है, जिसका केन्द्र मूलबिन्दु पर है।

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि समस्त त्रिभुजों के समुच्चय में, R= {(T, T): T, T के समरूप है) द्वारा परिभाषित संबंध एक तुल्यता संबंध है। भुजाओं 3, 4, 5 वाले समकोण त्रिभुज T,. भुजाओं 5, 12, 13 वाले समकोण त्रिभुज T, तथा भुजाओं 6, 8, 10 वाले समकोण त्रिभुज T, पर विचार कीजिए। T, T, और T, में से कौन से त्रिभुज परस्पर संबंधित है?

उत्तर- R = {(T_1, T_2): T_1, T_2 के समान है}

आर प्रतिवर्तनीय है क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के समान है।

इसके अलावा, यदि $(T_1, T_2) \in R$, तो T_1, T_2 के समान है

$\Rightarrow T_2$ के समान है T_1

$\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$

$\therefore$ R सममित है।

अभी,

यदि $(T_1, T_2), (T_2, T_3) \in R$

$\Rightarrow T_1$ के समान है T_2 और T_2 के समान है T_3

$\Rightarrow T_1, T_3$ के समान है।

$\Rightarrow (T_1, T_3) \in R$

$\therefore$ R संक्रामक है।

इस प्रकार, R एक तुलनीय संबंध है।

अब, हम यह देख सकते हैं:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}\left(= \frac{1}{2}\right)$$

त्रिभुज T_1 और T_3 के संगत पक्ष समान अनुपात में हैं।

फिर, त्रिभुज T_1 त्रिभुज T_3 के समान है।

इसलिए, T_1 से संबंधित है T_3

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि समस्त बहुभुजों के समुच्चय A में, R = {(p_1, p_2) : p_1, तथा p_2}, की भुजाओं की संख्या समान है। प्रकार से परिभाषित सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है। 3, 4 और

5 लम्बाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से सम्बन्धित समुच्चय A के सभी अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है, A समस्त बहुभुजों का समुच्चय है। तथा R = { (p1, p2) : p1, p2, की भुजाओं की संख्या बराबर है।

a. R स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक बहुभुज की भुजाओं की संख्या स्वयं के समान होती है।
b. R सममित है, यदि बहुभुज p1, p2, की भुजाएँ n है तो बहुभुज p2 और p1, की भुजाएँ भी n ही होंगी।
c. R संक्रामक है, यदि बहुभुज p1, p2 औरp2, p3 प्रत्येक की n भुजाएँ है तो p1 और p3 की भुजाएँ भी n ही होंगी।

अतः 1, 2 तथा 3 से स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हैं।

अतः R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

सभी त्रिभुजों का समुच्चय त्रिभुज T से सम्बन्धित है।

प्रश्न 14. मान लीजिए कि XY - तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय L है और L में R = { (L_1, L_2) : L_1 समान्तर है L_2 के } द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है। रेखा $y = 2x + 4$ से सम्बन्धित समस्त रेखाओं का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है, L किसी XY- तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय है तथा R = {(L_1, L_2) : L_1 समान्तर है L_2 के}

a. R स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक रेखा अपने आप के समान्तर है।
b. R सममित है, यदि L_1 रेखा, L_2 के समान्तर है तो L_2 रेखा, L_1 के भी समान्तर होगी।
c. R संक्रामक है, यदि L_1, L_2 और L_2, L_3 समान्तर रेखाएँ हैं तो L_1और L_3 भी समान्तरे रेखाएँ होंगी।

अतः 1, 2 तथा 3 से स्पष्ट है कि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

अतः R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

माना y = 2x + c, जबकि c का मान कुछ भी हो सकता है।

अतः y = 2x + 4 से सम्बन्धित रेखाओं का समुच्चय y = 2x + c है।

प्रश्न 15. bमान लीजिए कि समुच्चय {(1, 2, 3, 4)} में, R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 0, (3, 3), (3, 2)} द्वारा परिभाषित सम्बन्ध में है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए।

a. R स्वतुल्य तथा सममित है किन्तु संक्रामक नहीं है।
b. R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है।
c. R सममित तथा संक्रामक है किन्तु स्वतुल्य नहीं है।
d. R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

उत्तर-

b. R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है।

हल-

दिया है, A = {1, 2, 3, 4}

तथा R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), 4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)}

a. R स्वतुल्य है, क्योंकि $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in \mathrm{R}$

b. R सममित नहीं है, क्योंकि $(1,2) \in \mathrm{R}$ परन्तु $(2,1) \in \mathrm{R}$

c. R संक्रामक है, क्योंकि $(1,3) \in \mathrm{R},(3,2) \in \mathrm{R}=(1,2) \in \mathrm{R}$

अत: 1, 2 तथा 3 से स्पष्ट है कि R स्वतुल्य तथा संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।

प्रश्न 16. यदि प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N में सम्क्न्ध में इस प्रकार है कि R = {(a, b) : a = b - 2, b > 6} तो सही उत्तर चुनिए।

a. $(2, 4) \in R$

b. $(3, 8) \in R$

c. $(6, 8) \in R$

d. $(8, 7) \in R$

उत्तर- 6 = 8 - 2, तथा 8 > 6

$\therefore (6, 8) \in R$

अत: विकल्प (c) सही है।

प्रश्नावली 1.2 (पृष्ठ संख्या 12-13)

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि $fx = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R_* \to R_*$ एकैकी तथा आच्छादक है, जहाँ R_* सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। यदि प्रान्त R_* को N से बदल दिया जाए, जबकि सहप्रांत पूर्ववत R_* ही रहे, तो भी क्या यह परिणाम सत्य होगा?

उत्तर-

i.

a. दिया है, $f(x) = \frac{1}{x}$ दिया $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

अत: प्रान्त के प्रत्येक अवयव का एक ही प्रतिबिम्ब है।

अत: f एकैकी फलन है।

b. दिया है, ye

$$y = \frac{1}{x}$$
$$x = \frac{1}{y}$$
$$y \neq 0$$

सहप्रान्त का प्रत्येक अवयव प्रान्त में क्रमश: एक ही अवयव का प्रतिबिम्ब है।

∴ f आच्छादक फलन है।

∴ f एकैकी व आच्छादक फलन है।

ii. यदि प्रान्त R को N से बदल दिया जाता है तब सहप्रान्त R वही रहे तो

$$f : N \to R$$

जब $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$$

$$x_1 = x_2 \in N$$

$\Rightarrow f$ एकैकी है।

परन्तु सहप्रान्त का प्रत्येक अवयव प्रान्त के अवयव का प्रतिबिम्ब न हो।

उदाहरणार्थः $-\frac{3}{2}$ अहपरंता मे है तो $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} \in N$ अर्थात $\frac{2}{3}$ प्रान्त में नहीं है

स प्रकार f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित फलनों की एकैक (Injective) तथा आच्छादी (Surjective) गुणों की जाँच कीजिए:

i. f (x) = x^2 द्वारा प्रदत्त f : N → N फलन है।

ii. f (x) = x^2 द्वारा प्रदत्त f : Z → Z फलन है।

iii. f (x) = x^2 द्वारा प्रदत्त f : R → R फलन है।

iv. f (x) = x^3 द्वारा प्रदत्त f : N → N फलन है।

v. f(x) = x^3 द्वारा प्रदत्त f : Z → Z फलन है।

उत्तर-

i. दिया है, f(x) = x_2 और f : N → N

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow x\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \in N$$

f एकैकी है।

परन्तु सहप्रान्त में ऐसे कुछ अवयव हैं जो प्रान्त के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं हैं।

उदाहरणार्थ: माना 3 सहप्रान्त में है तो 3 प्रान्त के किसी भी अवयव को प्रतिबिम्ब नहीं होगा।

∴ f आच्छादक नहीं है।

अत: f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है।

ii.

$$f(x) = x^2 f : Z \to Z, \text{ जबकि } f(x) = x^2$$

1. $f(-1) = f(1) = 1 \Rightarrow -1$ और 1 का प्रतिबिम्ब 1 है।

∵ प्रान्त के दो भिन्न-भिन्न अवयवों −1 और 1 का

परिसर R में एक ही f-प्रतिबिम्ब 1 पर है।

∵ प्रतिबिम्ब समान है।

∵ f एकैकी नहीं है।

सहप्रान्त में ऐसे अवयव हैं जो प्रान्त के किसी अवयव में प्रतिबिम्ब नहीं हैं।

उदाहरणार्थ: सहप्रान्त में है, परन्तु 3 प्रान्त के किसी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं है।

∵ f आच्छादक नहीं है।

अत: f न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है।

iii.

$f : R \to R$ यदि $f(x) = x^2$

1. $(-1)^2 = (1)^2 = f(-1) = f(1)$

−1 और 1 का प्रतिबिम्ब 1 है। अर्थात् प्रान्त के दो भिन्न-भिन्न अवयवों −1 और 1 का परिसर

R में एक ही f - प्रतिबिम्ब 1 है। अर्थात् प्रतिबिम्ब समान है

∴ f एकैकी नहीं है।

−2 सहप्रान्त में है परन्तु यह प्रान्त के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं है।

अत: f आच्छादक नहीं है।

∴ f न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है।

iv.

$\mathrm{f} : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ यदि $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3$

$\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$

$\Rightarrow \mathrm{x}_1^3 = \mathrm{x}_2^3$

$\Rightarrow \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$

प्रत्येक $\mathrm{x} \in \mathrm{N}$ का एक प्रतिबिम्ब है।

$\therefore \mathrm{f}$ एकैकी नहीं है।

सहप्रान्त के बहुत से ऐसे अवयव ऐसे हैं जिनमें प्रान्त के किसी भी अवयव के प्रतिबिम्ब नहीं हैं।

उदाहरणार्थ- 2, 3, 4, 5, ... ये प्रान्त के किसी भी अवयव के प्रतिबिम्ब नहीं हैं।

∴ f आच्छादक नहीं है।

इसलिए f एकैकी है, परन्तु आच्छादक नहीं है।

v. f : Z → Z यदि f(x) = x^3

$\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$

$\Rightarrow \mathrm{x}_1^3 = \mathrm{x}_2^3$

$\Rightarrow \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$

$\therefore \mathrm{f}$ एकैकी है।

f के सहप्रान्त में बहुत से अवयव ऐसे हैं जो प्रान्त में किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं हैं

उदाहरणार्थ- 2, 3, 4, 5, ... में प्रान्त के किसी भी अवयव के प्रतिबिम्ब नहीं है।

∴ f आच्छादक नहीं है।

इसलिए f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है।

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि f(x) = [x] द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन f : R → R, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ [x], x से कम या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है।

उत्तर- स्पष्ट है कि f(x) का प्रान्त = R

तथा f(x) = 0, y x ∈ (0, 1)

∴ f : R → R एकैकी नहीं है।

पुनः f(x) केवल पूर्णांक मान ग्रहण करता है।

∴ सह प्रान्त के अपूर्णांक अवयव प्रान्त के किसी भी अवयव के प्रतिबिम्ब नहीं हैं।

∴ f : R → R आच्छादक नहीं है।

अत: f : R → R न तो एकैकी है और न ही आच्छादक।

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि f(x) = |x| द्वारा प्रदत्त मापांक फलन f: R → R, न तो एकैकी है। और न आच्छादक है, जहाँ |x| बराबर x , यदि x धन या शून्य है तथा |x| बराबर -x, यदि x ऋण है।

उत्तर- यहाँ f: R → R, जबकि f (3) = [x]

f(-1) = |-1| = 1, f(1) = |1| = 1

-1 और 1 का एक ही प्रतिबिम्ब है।

अत: प्रान्त के दो भिन्न-भिन्न अवयवों -1 और 1 का परिसर R में एक ही f - प्रतिबिम्ब 1 है।

∵ प्रतिबिम्ब समान है।

इसलिए f एकैकी नहीं है।

सहप्रान्त की कोई भी ऋणात्मक संख्या प्रान्त के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं है।

∴ f आच्छादक नहीं है।

अत: f न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है।

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि f : R → R

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x > 0 \\ 0 & \text{यदि } x = 0 \\ -1 & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

द्वारा दिया गया चिन्ह फलन न तो एकाकी है और अच्छादक है

उत्तर- स्पष्टतया f(2) = 1 तथा f(3) = 1

∴ f(2) = f(3) जबकि 2 ≠ 3

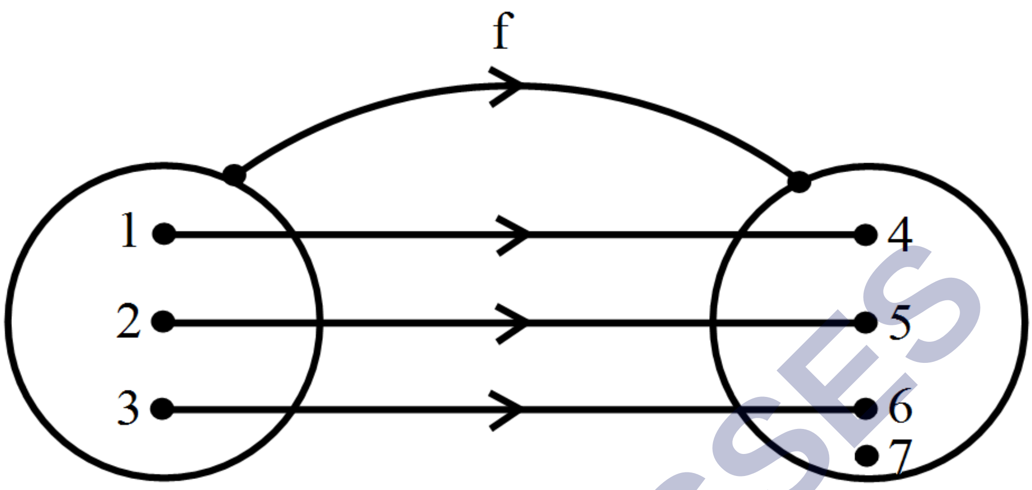
∴ f एकैकी नहीं है। f का परिसर = {1, 0, -1} c R

∴ f अन्त: क्षेपी है।

अत: फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक।

प्रश्न 6. मान लीजिए कि A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6, 7} तथा f = {(1, 4), (2, 5), (3, 6)} A से B तक एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है।

उत्तर-



दिया है, A ={1, 2, 3}, B = {4, 5, 6, 7}

f: A → B इस प्रकार है कि f = {(1, 4), (2, 5), (3, 6)} A के प्रत्येक अवयव का अलग-अलग प्रतिबिम्ब है। इसलिए f एकैकी है।

प्रश्न 7. निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति में बताइये कि क्या दिए हुए फलन एकैकी, आच्छादक अथवा एकैकी आच्छादी (bijective) हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइये।

i. f(x) = 3 – 4x द्वारा परिभाषित फलन f : R → R है।
ii. f(x) = 1+ x2 द्वारा परिभाषित फलन f: R →R है।

उत्तर-

i. यहाँ f: R - R, यदि f(x) = 3 - 4x

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 3 - 4x_1 = 3 - 4x_2$

$\Rightarrow 4x_1 = 4x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

अत: f एकैकी है।

माना $f(x) = y = 3 - 4x$

$$\Rightarrow x = \frac{3-y}{4}$$

y के प्रत्येक मान के लिए प्रान्त में एक मान है।

अर्थात् सहप्रान्त में प्रत्येक प्रान्त के किसी एक अवयव का प्रतिबिम्ब है।

∴ f आच्छादक है।

इसलिए f एकैकी भी है तथा आच्छादक भी है।

अत: f बहु-एक फलन है।

∴ f एकैकी नहीं है।

ii. पुनः x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए (1 + x) का मान सदैव 1 या 1 से बड़ा होगा।

∴ परिसर R में 1 से छोटे अवयव (0 तथा ऋणात्मक संख्याएँ), डोमेन R के किसी भी अवयव के f-प्रतिबिम्ब नहीं होंगे।

∴ f - अन्त:क्षेपी फलन है अर्थात् आच्छादक नहीं है।

इसलिए दिया हुआ फलन न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है।

प्रश्न 8. मान लीजिए A तथा B दो समुच्चय हैं। सिद्ध कीजिए कि f: A × B → B × A, इस प्रकार हैं कि f (a, b) = f (b, a) एक एकैकी आच्छादक फलन है।

उत्तर- f एकैकी है क्योकी

$f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2) \Rightarrow f(b_1, b_1) = (b_1, a_1)$

$\Rightarrow a_1 = a_2$ और $b_1 = b_2$

$\Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$

पुनः माना (b, a), B × A का कोई स्वैच्छ अवयव है

तब $(b,a) \in (b \times A)$

$\Rightarrow b \in B, a \in A$

$\Rightarrow (a, b) \in (A \times B)$

$\therefore$ प्रत्येक $(b,a) \in (B \times A)$ के लिए $(A \times B)$ में एक अवयव (a,b) इस प्रकार है कि

$f(a,b) = (b,a)$

∴ f आच्छादक है

अतः f एकेकी आच्छादक है

प्रश्न 9. दिखाइए कि फलन f: N → N जोकि

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ \frac{n}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$$

उत्तर-

$$f(1) = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ और } f(2) = \frac{2}{2} = 1$$

∴ f एकैकी नहीं है अर्थात बहुएक है

पुनः माना n ∈ N

यदि n विषम है तब $(2n-1)$ विषम होगा और $f(2n-1)=\frac{2n-1+1}{2}=\frac{2n}{2}=n$

यदि n सम है तो 2n सम होगा और $f(2n)=\frac{2n}{2}=n$

$\therefore \forall\ n \in N$ के पूर्व प्रतिबिम्ब N में उपस्थित है

$\therefore f$ अच्छादेक है

प्रश्न 10. मान लीजिए कि A= R → {3} तथा B = R - {1} हैं। $(x)=\frac{x-2}{x-3}$ द्वारा परिभाषित फलन f: A → B पर विचार कीजिए। क्या । एकैकी तथा आच्छादक है? अपने का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर- दिया है , f: A → B, तथा A = R → {3} तथा B = R - {1} हैं। $(x)=\frac{x-2}{x-3}$ द्वारा परिभाषित फलन f: A → B पर विचार कीजिए। क्या। एकैकी तथा आच्छादक है? अपने का औचित्य भी बतलाइए।

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1-2}{x_1-3}=\frac{x_2-2}{x_2-3}$$

$$\Rightarrow (x_1-2)(x_2-2)=(x_2-2)(x_1-3)$$

$$\Rightarrow x_1x_2-3x_1-2x_2+6=x_1x_2-3x_2-2x_1+6$$

$$\Rightarrow 3x_2-2x_2=3x_1+6$$

$$\Rightarrow x_2=x_1$$

∴ f एकेकी है

माना $y = \frac{x-2}{x-3}$

$\therefore y(x-3) = x-2$

$\Rightarrow xy - 3y = x - 2$

$\Rightarrow x(y-1) = 3y - 2$

$\therefore x = \frac{3y-2}{y-1}$

प्रश्न 11. मान लीजिए f: R → R; f(x) = x^4 द्वारा परिभाषित है। सही उत्तर का चयन कीजिए।

a. f एकैकी आच्छादक है।
b. f बहुएक आच्छादक है।
c. f एकैकी है किन्तु आच्छादक नहीं है।
d. f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

उत्तर-

d. f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

दिया है, f: R → R, यदि f(x) = x^4

$f(-1) = (-1)^4 = 1, f(1) = 1^4 = 1$

$f(-1) = f(1)$

-1 और 1 का प्रतिबिम्ब 1 है। इसलिए f एकैकी नहीं है।

सहप्रान्त का अवयव -1 प्रान्त के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं है। इसलिए f आच्छादक नहीं है। अत: f न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है।

प्रश्न 12. मान लीजिए कि f(a) = 3x द्वारा परिभाषित फलन f : R → R है। सही उत्तर चुनिए:

a. f एकैकी आच्छादक है

b. f बहुएक आच्छादक है।

c. f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है

d. f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

उत्तर-

a. f एकैकी आच्छादक है

हल:

दिया है, f: R → R, f(x) = 3x द्वारा परिभाषित किया गया है

$f\{x_1\} = f\{x_2\}$

$\Rightarrow 3x_1 = 3x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

अतः f एकैकी है

माना y = 3x

$\therefore x = \frac{y}{3}$

f(x) = 3x मे $x = \frac{y}{3}$ रखने पर,

$$f\left(\frac{y}{3}\right) = 3\left(\frac{y}{3}\right) = y$$

इससे सिद्ध होता है कि सहडोमेन R का स्वेच्छ अवयव y, डोमेन R के किसी-न-किसी अवयव का f-प्रतिबिम्ब अवश्य है। फलन f का परिसर = सहडोमेन R, फलन/ आच्छादक है। इसलिए f एकैकी तथा आच्छादक है।

प्रश्नावली 1.3 (पृष्ठ संख्या 20-22)

प्रश्न 1. मान लीजिए कि f:{1, 3, 4} → {1,2, 5} तथा f:{1,2, 5} → {1, 3}, f = {(1, 2), (3, 5), (4, 10} तथा g = {(1, 3), (2, 3), (5, 10} द्वारा प्रदत्त हैं। gof ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है, f:{1, 3, 4} → {1, 2, 5} तथा g:{1, 2, 5} → {1, 3}

f = {f(1, 2), (3, 5), (4, 1)}

g = {f(1, 3), (2, 3), (5, 1)}

∴ f(1) = 2, f(3) = 5, f(4) = 1

और g(1) = 3, g(2) = 3, g(5) = 1

gof(1) = g{f(1)} = g(2) = 3

gof(1) = g{f(3)} = g(5) = 1

gof(4) = g{f(4)} = g(1) = 3

gof = {(1, 3), (3, 1)(4, 3)}

प्रश्न 2. मान लीजिए कि f, g तथा h, R से R तक दिए फलन हैं। सिद्ध कीजिए कि

(f + g) oh = foh + goh

(f.g) oh = (foh). (goh)

उत्तर- दिया है, दिया है, f, g, h, R → R में फलन है

∴ (f + g) oh (x) = (f + g)[h(x)]

= f[h(x)] + g[h(x)]

= foh(x) + (goh) (x)

इसलिए (f + g) oh = foh + gof

तथा (f.g) oh (x) = (fg). [h(x)]

= f[h(x)]. g[h(x)]

इसलिए (f.g) oh = (foh). (gof)

प्रश्न 3. gof तथा fog ज्ञात कीजिए, यदि

i. f(x) = |x| तथा g (x) =|5x - 2|

ii. $f\ (x) = gx^3$ तथा $g(x) = x\frac{1}{3}$

उत्तर-

i. दिया है, f(x) = |x|, तथा g(x) = |5x - 2|

∴ gof(x) = g[f(x)] = g|x| = |5|x|-2|

तथा fog(x) = f[f(x)] = f(|5x - 2|) = |5x - 2|

ii.

$f(x) = 8x\frac{1}{3}$ तथा $g(x) = x\frac{1}{3}$

$\therefore gof(x) = f[(x)] = g(8x^3) = (8x^3)\frac{1}{3} = 2x$

तथा $fog(x) = f[g(x)] = g(x)\frac{1}{3} = 8.(x\frac{1}{3})^3 = 8x$

प्रश्न 4. यदि $y(x) = \frac{4x+3}{6x-4}, x \neq \frac{2}{3}$ तो सिद्ध कीजिए कि सभी $x \neq \frac{2}{3}$ के लिए fof(x) = x है। f का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$fof(x) = f\{f(x)\}$$

$$= f\left\{\frac{4x+3}{6x-4}\right\} = \frac{4.\frac{4x+3}{6x-4}+3}{6.\frac{4x+3}{6x-4}-4}$$

$$= \frac{16x+12+18x-12}{24x+18-24x+16} = \frac{34x}{34} = x$$

f का प्रतिलोम तभी ज़ात किया जा सकता है जब f एकैकी आच्छादक हो। f एकैकी है माना कि $x_1 x_2 \in$

प्रान्त तब

$$\Rightarrow \frac{4x_1+3}{6x_1-4} = \frac{4x_2+3}{6x_2-4}$$

$$\Rightarrow (4x_1 + 3)(6x_2 - 4) = (6x_1 - 4)(4x_2 + 3)$$

$$\Rightarrow 24x_1x_2 + 18x_2 - 16x_1 - 12$$
$$= 24x_1x_2 - 16x_2 + 18x_1 - 12$$

$$\Rightarrow 34x_1 = 34x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

f आच्छादक है

माना कि $y = f(x)$

$\Rightarrow y = \frac{4x+3}{6x-4}$

$\Rightarrow 6xy - 4y = 4x + 3$

$\Rightarrow (6y - 4)x = 4y + 3$

$\Rightarrow x = \frac{4y+3}{6y-4} \in$ प्रान्त f

$\therefore$ f आच्छादक है अतः f^{-1} ज्ञात किया जा सकता है

$\because y = f(x)$

$\Rightarrow x = \frac{4y+3}{6y-4}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{4y+3}{6y-4}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{6x-4} = f(x)$

अतः f का प्रतिलोम स्वयं f है।

प्रश्न 5. कारण सहित बतलाइए कि क्या निम्नलिखित फलनों के प्रतिलोम हैं-

i. f:{1, 2, 3, 4} → {10} जहाँ f = {(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10)}

ii. g : {5, 6, 7, 8} → {1, 2, 3, 4} जहाँ g = {(5, 4), (6, 3), (7, 4),(8, 2}}

iii. h: {2, 3, 4, 5} → {7, 9, 11, 13} जहाँ h = {(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)}

उत्तर-

i. दिया है : f :{1, 2, 3, 4} → {10) जहाँ

f = {(1, 10),(2, 10), (3, 10),(4, 10)}

∵ $f(1) = 10, f(2) = 10, f(3) = 10, f(4) = 10$

$\Rightarrow f(1) = f(2) = f(3) = f(4)$

∴ f एकैक नहीं है।

नहीं, क्योंकि एक बहुएक फलन है।

ii. $g = \{5, 6, 7, 8\} \rightarrow 1, 2, 3, 4)$ जहाँ

$g = \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$

∴ $g(5) = 4$ तथा $g(7) = 4$

∵ $(5) = g(7) = 4$

∴ एकैक नहीं है।

नहीं, इयोंकि g एक बहुएक फलन है।

iii. $h : \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{7, 11, 13\}$ जहाँ

$h = \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$

∴ $h(2) = 7, h(3) = 9, h(4) = 11$ तथा $h(5) = 13$

∴ h एकैक है

हाँ, क्योंकि h एक एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रश्न 6. यदि $f : [-1, 1] \rightarrow Y : f(x) = \frac{x}{x+2}, x \neq -2$ तथा Y = परिसर (f) तो दिखाइए कि f-1 व्युत्क्रमणीय है तथा ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \frac{x_1}{x_1+2} = \frac{x_2}{x_2+2}$

$\Rightarrow x_1x_2 + 2x_1 = x_1x_2 + 2x_2$

$\Rightarrow 2(x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

∴ f एकैकी है।

∵ परिसर (f) = y

∴ f अच्छादका है।

∴ f एकैकी व अच्छादका है अत: f व्युत्क्रमणीय है।

माना y ∈ Y तब एक अवयव x ∈ [−1, 1] का अस्तित्व है जिससे कि f(x) = y

अब $y = f(x)$

अब $y = f(x)$

$\Rightarrow y = \frac{x}{x+2}$

$\Rightarrow x = \frac{2y}{1-y}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{2y}{1-y}$

अतः f^{-1} इस प्रकार परिभाषित होता है।

$f^{-1} : Y \to [-1, 1] : f^{-1}(y) = \frac{2y}{1-y}, y \neq 1$

प्रश्न 7. f(x) = 4x + 3 द्वारा प्रदत्त फलन f: R → R पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। f का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है f(x) = 4x + 3 तथा f: R → R

माना $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 4x_1 + 3 = 4x_2 + 3$

$\Rightarrow 4x_1 = 4x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

अत: f एकेकी है।

पुन: माना y = 4x + 3

$$\therefore x = \frac{y-3}{4}$$

सहप्रांत का प्रत्येक अवयव y प्रांत में, किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब है।

∴ f आच्छादक है।

∵ f एकेकी और आच्छादक है।

∴ f व्युत्क्रमणीय है।

अत: $f^{-1}(x) = g(y) = \frac{y-3}{4}$

प्रश्न 8. f(x) = x + 4 द्वारा प्रदत्त फलन f : R → (4, ∞) पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए किf व्युत्क्रमणीय है तथा का प्रतिलोम -1, $f(y) = \sqrt{y-4}$ द्वारा प्राप्त होता है, जहाँ R सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

उत्तर-

दिया है $f(x) = x^2 + 4$ जबकि $f : R \rightarrow (4, \infty)$

माना $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1^2 + 4 = x_2^2 + 4$

$\therefore x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

अतः f एकेकी है।

पुनः माना $y = x^2 + 4$

$\therefore x^2 = y - 4$ या $x = g(y) = \sqrt{y-4}, y \geq 4$

सभी $y \geq 4, g(y)$ का वास्तविक मान है।

∴ f आच्छादक है।

∵ f एकेकी और आच्छादक है।

∴ f व्युत्क्रमणीय है।

इसलिए f का प्रतिलोम $f^{-1}(x) = g(y) = \sqrt{y-4}$

प्रश्न 9. $f(x) = 9x^2 + 6x - 5$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : R_+ \rightarrow [-5, \infty]$: $f(3) = 9x^2 + 6x - 5$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए की f व्युत्क्रमणीय है तथा

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{\left(\sqrt{y+6}\right)-1}{3}\right)$$ है।

उत्तर-

$f: R_+ \rightarrow [-5, \infty]$ के रूप में दिया गया है। f(x) = $9x^2 + 6x - 5$.

यदि y एक मनमाना तत्व हो $[-5, \infty]$ का y = $9x^2 + 6x - 5$

$\Rightarrow y = (3x + 1)^2 - 1 - 5 = (3x+1)^2 - 6$

$\Rightarrow (3x+1)^2 = y + 6$

$\Rightarrow 3x + 1 = \sqrt{y + 6}$ [जेसा $y \geq -5 \Rightarrow y + 6 > 0$]

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{y+6}-1}{2}$

$\therefore$ व्युत्क्रमणीय है $f = [-5, \infty]$

अब

$g : [-5, \infty] \rightarrow R_+$ जैसे

$g(y) = \frac{\sqrt{y+6}-1}{3}$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(9x^2 + 6x - 5)$

$= g((3x+1)^2 - 6)$

$= \frac{\sqrt{(3x+1)^2 - 6 + 6 - 1}}{3}$

$= \frac{3x+1-1}{3} = x$

$$(fog)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}\right)$$

$$= \left[3\left(\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}\right)\right]^2 - 6$$

$$= \left(\sqrt{y+6}\right)^2 - 6 = y + 6 - 6 = y$$

$$\therefore gof = I_R$$

$$fog = I_{(-5,\infty)}$$

इसलिए, f^{-1} दिया गया है।

$$f^{-1}(y) = g(y) = \frac{\sqrt{y+6}-1}{3}.$$

प्रश्न 10. मान लीजिए कि f: X → Y एक व्युत्क्रमणीय फलन है। सिद्ध कीजिए कि f को प्रतिलोम फलन अद्वितीय (unique) है।

उत्तर- माना f: x → y तथा f के व्युत्क्रमणीय है।

यदि संभव है तो माना इसके दो प्रतिलोम g और h है।

तथा (fog) = I_y

$$\Rightarrow (fog)(y) = (foh)(y)$$

$$\Rightarrow f[h(y)] = f[h(y)]\ \forall y \in Y$$

$$\Rightarrow g(y) = h(y)\ \forall\ y \in Y$$

अर्थता f का प्रतिलोम अद्वितीय है

प्रश्न 11. f:{1, 2, 3} {a, b, c}, f(1) = a, f(2) = b तथा f(3) = c द्वारा प्रदत्त फलन f पर विचार कीजिए। f -1 ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि (f -1)-1 = f है।

उत्तर- $f:\{1, 2, 3,\} \rightarrow \{a, b, c\}$ इस प्रकार है की

$f(1) = a$, $f(2) = b$ तथा $f(3) = c$

$\Rightarrow f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

माना $x = \{1, 2, 3\}$ $y = \{a, b, c\}$

$\therefore f: x \rightarrow y$

$f(1) = a$, $f(2) = b$

$f^{-1}(a) = 1, f^{-1}(b) = 2, f^{-1}(c) = 3$

$f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$

$\Rightarrow (f^{-1})^{-1} : x \rightarrow y$

$(f^{-1})^{-1}(1)=a, (f^{-1})^{-1}(2) = b, (f^{-1})^{-1}(3) = c$

$\therefore (f^{-1})^{-1} = \{(1, a), (2, b), (3, c)\} = f$

प्रश्न 12. मान लीजिए कि $f: A \rightarrow B$ एक व्युत्क्रमणीय फलन है। सिद्ध कीजिए कि f^{-1} का प्रतिलोम f है अर्थात् $(f^{-1})^{-1} = f$ है

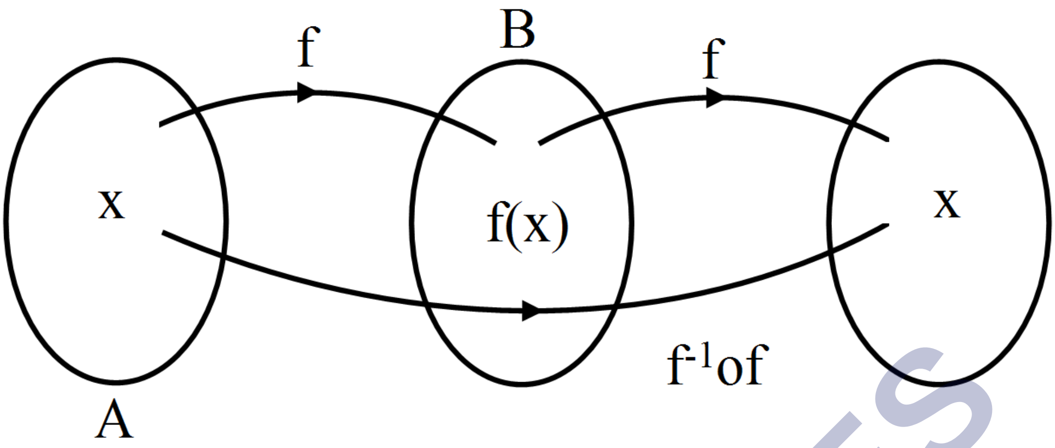
उत्तर- माना $f: A \rightarrow B$ व्युत्क्रमणीय फलन है

$(f^{-1})^{-1} = f$ सिद्ध करने के लिए हम सिद्ध करेंगे कि

f^{-1} of = IA तथा fof-1 = IB

स्पष्टतया $f: A \rightarrow B$ एकैकी आच्छादक है

$\therefore$ f-1: $B \rightarrow A$ एकैकी आच्छादक है



माना $x \in$ और $f(x) = y$ तब $f^{-1}(y) = x$

$\therefore (f^{-1} of)(x) = f^{-1}\{f(x)\}$

$= f^{-1}(y)$

$= x = I_A(x)$

$\therefore f_{-1} of = I_A$

पुनः माना $y \in B$

$\because$ f आच्छादक है।

$\therefore$ एक ऐसे अवयव $x \in A$ का आस्थित्व है की

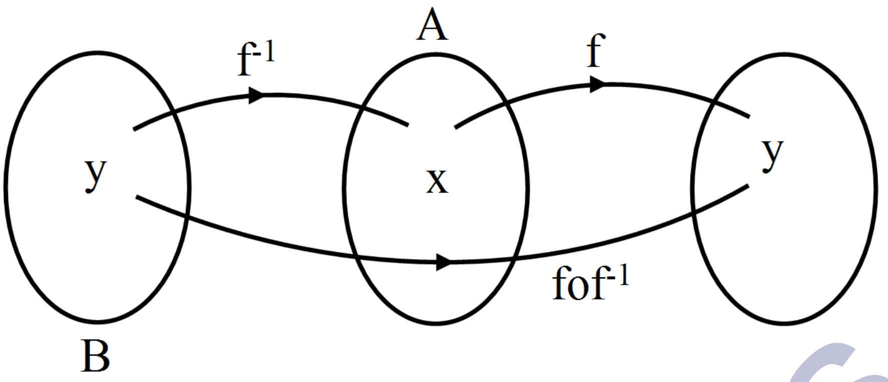
$f(x) = y$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$\therefore (fof^{-1})(y) = f\{f^{-1}(y)\}$

$= f(x)$

$= y$



$= I_B(y)$

$\therefore fof^{-1} = I_B$

चुकी $f^{-1} of = I_A$ और $fof_{-1} = I_B$

$\therefore (f^{-1})-1 = f$

प्रश्न 13. यदि $f : R \to R, f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ जो द्वारा प्रदत फलन है तो fof(x) बराबर है

a. $\frac{1}{x^3}$

b. x^3

c. x

d. $(3 - x^3)$

उत्तर-

c. x

हल:

दिया है फलन $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ जो $f : R \to R$ द्वारा परिभाषा है

$$\therefore fof(x) = f(f(x)) = f((3 - x^3)\frac{1}{3}) = \left[3 - ((3 - x^3)^{\frac{1}{3}})^3\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= [3 - (3 - x^3)]^{\frac{1}{3}} = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x$$

$$\therefore fof(x) = x$$

प्रश्न 14. मान लीजिए कि $f(x) = \frac{4x}{3x+4}$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f : R - \left(-\frac{4}{3}\right) \rightarrow R$ है। f का प्रतिलोम, अर्थात प्रतिचित्र g परिसर $f \rightarrow R - \left(-\frac{4}{3}\right)$ निम्नलिखित में से किसके द्वारा प्राप्त होगा

a. $g(y) = \frac{3y}{3-4y}$

b. $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$

c. $g(y) = \frac{4y}{3-4y}$

d. $g(y) = \frac{3y}{4-3y}$

उत्तर-

b. $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$

हल:

दिया है फलन $f(x) = \frac{4x}{3x+4}$ जो $f : R - \left(-\frac{4}{3}\right) \rightarrow R$ द्वारा परिभाषा है

माना y, f के पारीसर में कोई अवयव है

तब, $x \in R - \left(-\frac{4}{3}\right)$ कोई अवयव है की $y = f(x)$ है

$$\Rightarrow y = \frac{4x}{3x+4}$$

$$\Rightarrow 3xy + 4y = 4x$$

$$\Rightarrow x(4 - 3y) = 4y$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y}{4-3y}$$

यहाँ, माना फलन $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$ जो $f : R \to R - \left(-\frac{4}{3}\right)$ द्वारा परिभाषा है

अब,

$$gof(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{4x}{3x+4}\right) = \frac{4\left(\frac{4x}{3x+4}\right)}{4-3\left(\frac{4x}{3x+4b}\right)}$$

$$= \frac{16x}{12x+6-12x} = \frac{16x}{16} = x$$

और,

$$fog(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{4y}{4-3y}\right) = \frac{4\left(\frac{4y}{3y+4}\right)}{4-3\left(\frac{4y}{3y+4}\right)}$$

$$= \frac{16y}{12y+16-12y} = \frac{16y}{16} = y$$

$\therefore gof = I_{\left(-\frac{4}{3}\right)}$ और $fog = I_f$ का परिसर

इसप्रकार, f का प्रतिलोपन g है अर्थात $f^{-1} = g$ है

प्रतिलोपन, अर्थता प्रतिचित्र g परिसर $f \to R - \left(-\frac{4}{3}\right)$ जहा $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$ है

प्रश्नावली 1.4 (पृष्ठ संख्या 27-29)

प्रश्न 1. निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित प्रत्येक संक्रिया से एक द्विआधारी संक्रिया प्राप्त होती है या नहीं। उस दशा में जब एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है, औचित्य भी बतलाइए।

i. Z^+ में, $a * b = a - b$ द्वारा परिभाषित संक्रिया

ii. Z^+ में, $a * b = ab$ द्वारा परिभाषित संक्रिया

iii. R में, संक्रिया *, a * b = ab2 द्वारा परिभाषित

iv. Z^+ में, संक्रिया *, a * b = |a – b| द्वारा परिभाषित

v. Z^+ में, संक्रिया *, a * b = a द्वारा परिभाषित

उत्तर-

i. Z में, a * b = a द्वारा परिभाषित संक्रिया*

ये एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है, क्योंकि (1, 2) के लिए संक्रिया से 1*2 = 1 – 2 = – 1 ∈ Z

ii. Z^+ में, a * b = ab द्वारा परिभाषित संक्रिया*

हम जानते हैं कि दो धनात्मक a, b ∈ Z का गुणनफल ab सदैव धनात्मक होगा और 2 में निहित होगा। अर्थात संक्रिया से प्रत्येक युग्म (ab) के लिए 7 में a * b = ab है। इसलिए एक द्विआधारी संक्रिया है।

iii. R में, संक्रिया* a * b = ab द्वारा परिभाषित*

हम जानते हैं कि दो वास्तविक संख्याओं a, b ∈ R के लिए ab^2 भी वास्तविक होगा अर्थात ab^2 ∈ R. अतः संक्रिया से प्रत्येक युग्म (a, b) के लिए Rमें a * b = ab^2R है।

इसलिए, एक द्विआधारी संक्रिया है।

iv. Z^+ में, संक्रिया*, a * b = |a - b| द्वारा परिभाषित*

हम जानते हैं कि दो वास्तविक संख्याओं a, b ∈ R के लिए |a - b| सदैव धनात्मक होगा और Z^+ में निहित होगा। अर्थात संक्रिया* से प्रत्येक युग्म (a, b) के लिए Z^+ में a * b = |a - b| है।

e. Z^+ में, संक्रिया*, a * b = a द्वारा परिभाषित*

हम जानते हैं कि दो वास्तविक संख्याओं a, b ∈ Z^+ के लिए a सदैव धनात्मक होगा और Z+ में निहित होगा। अर्थात संक्रिया* से प्रत्येक युग्म (a, b) के लिए Z+ में a * b = a है।

इसलिए, *एक द्विआधारी संक्रिया है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित परिभाषित प्रत्येक द्विआधारी संक्रिया के लिए निर्धारित कीजिए कि क्या द्वि आधारी क्रमविनिमेय है तथा क्या साहचर्य है।

i. Z में, a * b = a – b द्वारा परिभाषित
ii. Q में, a * b = ab + 1 द्वारा परिभाषित
iii. Q में, a * b = $\frac{ab}{2}$ द्वारा परिभाषित
iv. Z+ में, a * b = 2^{ab} द्वारा परिभाषित
v. Z+ में, a* b = a^b द्वारा परिभाषित
vi. R – { – 1} में, a* b = $\frac{a}{b+1}$ द्वारा परिभाषित

उत्तर-

i. Z में, a * b = a - b द्वारा परिभाषित*

यहाँ, 1 * 2 = 1 - 2 = -1 और 2 * 1 = 2 - 1 = 1.

∴ 1 * 2 ≠ 2 * 1, जहाँ 1, 2 ∈ Z, अतः द्विआधारी सक्रिया* क्रमविनिमय नहीं है।

और अब (1 * 2) * 3 = -1 * 3 = -1 - 3 = -4

तथा 1 * (2 * 3) = 1 * (2 - 3) = 1 * - 1 = -1 (-1) = 2

∴ (1 * 2) * 3 ≠ 1 * (2 * 3), जहाँ 1, 2, 3 ∈ Z अतः द्विआधारी संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

ii. Q में, a * b = ab + 1 द्वारा परिभाषित*

हम जानते है की ab = ba सभी a, b ∈ Q के लिए

⇒ a * b = a * b सबके लिए a, b ∈ Q

अत: द्विआधारी संक्रिया क्रमविनिमय है।

यहाँ, (1 * 2) * 3 = (1 × 2 +1) * 3 = 3 * 3 = 3 × 3 + 1 = 10

तथा 1 * (2 * 3) = 1 * (2 × 3 + 1) = 1 * 7 = 1 × 7 + 1 = 8

∴ (1 * 2) * 3 ≠ 1 * (2 * 3) जहाँ 1, 2, 3, ∈ Q, अत: द्विआधारी सक्रिया* साहचर्य नहीं है।

iii. Q में, $a * b = \frac{ab}{2}$ द्वारा परिभाषित*

हम जानते है की ab = ba सभी a, b ∈ Q के लिए

⇒ a * b = ba सभी a, b ∈ Q के लिए, अत: द्विआधरि सक्रिया *क्रमविनिमय है।

सभी a, b, c ∈ Q के लिए,

$$(a^* b)^* c = \left(\frac{ab}{2}\right) * c = \frac{\left(\frac{ab}{2}\right)c}{2} = \frac{abc}{4}$$

$$a^*(a^* c) = a^*\left(\frac{bc}{2}\right) = \frac{a\left(\frac{bc}{2}\right)}{2} = \frac{abc}{4}$$

∴ (a * b) * c = a * (b * c), जहॉ a, b, c ∈ Q, अत:, द्विआधारी सक्रिया *साहचर्य है।

iv. Z^+ में a * b = 2^{ab} द्वारा परिभाषित*

हम जानते है की ab = ba सभी a, b ∈ Z^+ के लिए, ⇒ $2^{ab} = 2^{ba}$ सभी a, b ∈ Z^+ के लिए

$\Rightarrow$ a * b = b * a सभी a, b $\in$ Q के लिए अतः द्विआधरि सक्रिया* क्रमविनिमय है।

यहाँ, (1 * 2) * 3 = $2^{1\times2}$ * 3 = 4 * 3 = $2^{4\times3}$ = 2^{12}

और 1 * (2 * 3) = 1 * $2^{2\times3}$ = 1 * 2^6 = 1 * 64 = $2^{1\times64}$ = 2^{64}

$\therefore (1^*2)^*3 \neq 1^*(2^*3)$, जहाँ $1, 2, 3 \in Z^+$,

अतः द्विआधारी सक्रिया* क्रमविनिमय नहीं है।

अब, (2 * 3) * 4 = 2^3 * 4 = 8 * 4 = 8^4 = 2^{12} और 2 * (3 * 4) = 2 * 3^4 = 2 * 81 = 2^{81}

$\therefore (2^*3)^*4 \neq 2^*(3^*4)$ जहाँ $2, 3, 4 \in Z^+$,

अतः द्विआधारी सक्रिया *साहचर्य नहीं है।

v. Z^+ में a * b = a^b द्वारा परिभाषित*

यहाँ, (1 * 2) = 1^2 = 1 और 2 * 1 = 2^1 = 2

$\therefore 1^*2 \neq 2^*1$, जहाँ $1, 2 \in Z^+$ अतः, द्विआधारि सक्रिया* क्रमविनिमय नहीं है।

अब, (2 * 3) * 4 = 2^3 * 4 = 8 * 4 = 8^4 = 2^{12} और 2 * (3 * 4) = 2 * 3^4 = 2 * 81 = 2^{81}

$\therefore (2^*3)^*4 \neq 2^*(3^*4)$, जहाँ $2, 3, 4, \in Z^+$

अतः द्विआधारी सक्रिया *साहचर्य नहीं है।

vi. R - {-1} में $a * b = \frac{a}{b+1}$ द्वारा परिभाषित*

यहाँ, $1^*2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ और $2^*1 = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore 1^*2 \neq 2^*1$, जहाँ $1, 2 \in R - \{-1\}$

अत: द्विआधारी सक्रिया* क्रमविनिमय नहीं है।

$$(1^*2)^*3 = \frac{1}{2+1}{}^*3 = \frac{1}{3}{}^*3 = \frac{\frac{1}{3}}{3+1} = \frac{1}{12}$$

$$1^*(2^*3) = 1^*\frac{2}{3+1} = 1^*\frac{2}{4} = 1^*\frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore (1^*2)^*3 \neq 1^*(2^*3)$, जहाँ $1, 2, 3 \in R - \{-1\}$,

अत: द्विआधारी सक्रिया *साहचर्य नहीं है।

प्रश्न 3. समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में a ∧ b = निम्नतम {a, b} द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया पर विचार कीजिए। संक्रिया के लिए संक्रिया सरणी लिखिए।

उत्तर- दिया है: समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में a ∧ b = निम्नतम {a, b} द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया है। इसलिए, संक्रिया के लिए संक्रिया सरणी निम्नलिखित है:

∧	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

प्रश्न 4. समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5) में, निम्नलिखित संक्रिया सरणी द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया* पर विचार कीजिए तथा

i. (2 * 3) * 4 तथा 2 * (3 * 4) का परिकलन कीजिए.
ii. क्या * क्रमविनिमय है?
iii. (2 * 3) * (4 * 5) का परिकलन कीजिए। (संकेत: निम्न सरणी का प्रयोग कीजिए।)

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

उत्तर-

i. (2 * 2) * 4 = 1 * 4 = 1 और 2 * (3 * 4) = 2 * 1 = 1

ii. सारणी में प्रत्येक a, b ∈ {1, 2, 3, 4, , 5} के लिए, a * b = b * a है अतः द्विआधारी सक्रिया* क्रमविनिमय नहीं है।

iii. (2 * 3) = 1 और (4 * 5) = 1, ∴ (2 * 3) * (4 * 5) = 1 * 1 = 1

प्रश्न 5. मान लीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में एक द्विआधारी संक्रिया *', a *' b = a तथा b का HCF द्वारा परिभाषित है। क्या संक्रिया *' उपर्युक्त प्रश्न 4 में परिभाषित संक्रिया * के समान है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर- प्रश्नानुसार, समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} संक्रिया a *' b H.C.F. a तथा b द्वारा परिभाषित है। द्विआधारी संक्रिया * के लिए सारणी निम्नलिखित होगी।

*'	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

यह संक्रिया सारणी प्रश्न 4 में दी गई संक्रिया सारणी के समान है।

अतः द्विआधारी संक्रिया *' तथा * समान होगी।

प्रश्न 6. मान लीजिए कि N में एक द्विआधारी संक्रिया, a * b = a तथा b का LCM द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

i. 5 * 7, 20 * 16
ii. क्या संक्रिय * क्रम विनिमेय है?
iii. क्या * साहचार्य है?
iv. N में * का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।
v. N के कौन-से अवयव * संक्रिया के लिए व्युत्क्रमणीय है?

उत्तर-

i. प्रश्न में समुच्चय N = प्राकृत संख्याओं का समुच्चय में * संक्रिया, a * b = a, b का L.C.M. द्वारा परिभाषित है।

5 * 7 = 5 व 7 का L.C.M. = 35

20 * 16 = 20 वे 16 का L.C.M. = 80

∴ 5 * 7 = 35, 20 * 16 = 80

ii. प्रश्न में समुच्चय N = प्राकृत संख्याओं का समुच्चय में * संक्रिया, a * b = a, b का L.C.M. द्वारा परिभाषित है।

a * b = a, b का L.C.M.

b * a = b, a का L.C.

∵ a * b तथा b * a का L.C.M. बराबर है।

इसलिए

⇒ a * b = b * a

∵ स्पष्ट है कि संक्रिया * क्रमविनिमेय द्विआधारी संक्रिया है।

iii. प्रश्न में समुच्चय N = प्राकृत संख्याओं का समुच्चय में * संक्रिया, a * b = a, b का L.C.M. द्वारा परिभाषित है।

a * (b * c) = a * (b, c का L.C.M.)

= a, b, c का L.C.M.

= (a * b) * c = (a, b का L.C.M.) * C

= a, b, c का L.C.M.

∵ a * (b * c) तथा (a * b) * c के L.C.M. बराबर हैं।

⇒ (a * b) * c = a * (b * c)

∴ स्पष्ट है कि संक्रिया * साहचर्य द्विआधारी संक्रिया है।

iv. प्रश्न में समुच्चय N = प्राकृत संख्याओं का समुच्चय में * संक्रिया, a * b = a, b का L.C.M. द्वारा परिभाषित है।

*संक्रिया का तत्समक अवयव 1 है।

1 * a = a * 1 = a

v. N * N → N, * संक्रिया का a * b = a, b का L.C.M. द्वारा परिभाषित किया गया है। यदि a = 1, b = 1, a * b = 1 अन्यथा नहीं

⇒ 1 * 1 = 1

⇒ 1 के लिए व्युत्क्रमणीय है।

प्रश्न 7. क्या समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में a * b = a तथा b का L.C.M. द्वारा परिभाषित * एक द्विआधारी संक्रिया है? अपने उत्तर का औचि भी बतलाइए।

उत्तर- दिया है: समुच्चय (1, 2, 3, 4, 5) में a * b = a तथा b का L.C.M. द्वारा परिभाषित * एक संक्रिया है। इसलिए, संक्रिया के लिए संक्रिया सारणी निम्नलिखित है:

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	6	4	10
3	3	6	3	12	15
4	4	4	12	4	20
5	5	10	15	20	5

प्रश्न 8. मान लीजिए कि N में,* b = a तथा b का H.C.F. द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया है। क्या क्रमविनिमय है? क्या * साहचर्य है? क्या N में इस द्विआधारी संक्रिया के तत्समक का अस्तित्व है?

उत्तर- दिया है: N में *, a * b = a तथा b का H.C.F. द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया है।

हम जानते हैं कि a और b का H.C.F. = b और a का H.C.F., सभी a, bEN के लिए ∴ a * b = b * a, अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय है।

सभी a, b, c ∈ N के लिए, (a * b) * c = (a और b का H.C.F.) * c = a, b और c का H.C.F. तथा a * (b * c) = a * (b और c का H.C.F.) = a, b और c का H.C.F. ∴ (a * b) * c = a * (b * c),

अतः संक्रिया * साहचर्य है।

अब, कोई अवयव e ∈ N संक्रिया में तत्समक होगा यदि a * e = a = e * a, सभी a∈N के लिए लेकिन ये संबंध किसी भी a∈N के लिए सत्य नहीं है। अतः N में इस द्विआधारी संक्रिया * के तत्समक का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 9. मान लीजिए कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय में निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित * एक द्विआधारी संक्रिया है:

i. a * b = a – b
ii. a * b = a^2 + b^2
iii. a * b = a + ab
iv. a * b = $(a – b)^2$
v. a * b = $\frac{ab}{4}$
vi. a * b = ab^2

ज्ञात कीजिए कि इनमें से कौन-सी संक्रियाएँ क्रमविनिमेय हैं और कौन-सी साहचर्य हैं।

उत्तर-

i. Q में, संक्रिया*, a * b = a - b से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है, इसलिए

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$\therefore \frac{1}{2} * \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} * \frac{1}{2} \text{ जहाँ } \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in Q$$

अतः सक्रिया * क्रमविनिमय नहीं है।

यह स्पष्ट है कि

$$\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4}$$

$$= \left(\frac{3-2}{6}\right) * \frac{1}{4} = \frac{1}{6} * \frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2-3}{12} = \frac{-1}{12}$$

$$\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} * \left(\frac{4-3}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{6-1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right) \text{ जहाँ } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \in \mathbf{Q}$$

अतः संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

ii. Q में, संक्रिया * a * b = $a^2 + b^2$ से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है,

इसलिए सभी a, b ∈ Q के लिए a * b = $a^2 + a^2 = a^2 + b^2 + a^2$ = b * a, ∴ a * b * a अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय है।

अब (1 * 2) * 3 = $(1^2 + 2^2)$ * 3 = (1 + 4) * 3 = 5 * 3 = $5^2 + 3^2 = 3^4$

और 1 * (2 * 3) = 1 * $(2^2 + 3^2)$ = 1 * (4 + 9) = 1 * 13 = $1^2 + 13^2$ = 170

$\therefore (1^*2)^*3 \neq 1^*(2^*3)$, जहाँ $1, 2, 3 \in \mathbf{Q}$ अतः संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

iii. Q में, संक्रिया * a * b = a + ab से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है

इसलिए यहाँ, 1 * 2 = 1+ 1 × 2 = 1 + 2 = 3 और 2 * 1 = 2 + 2 × 1 = 2 + 2 = 4

$\therefore 1^*2 \neq 2^*1$, जहाँ $1, 2 \in \mathbf{Q}$ अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय नहीं है।

अब, (1 * 2) * 3 = (1 + 1 × 2) * 3 = (1 + 2) * 3 = 3 * 3 = 3 + 3 × 3 = 3 + 9 = 12

और 1 * (2 * 3) = 1 * (2 + 2 × 3) = 1 * (2 + 6) = 1 * 8 = 1 + 1 × 8 = 1 + 8 = 9

$\therefore (1^*2)^*3 \neq 1^*(2^*3)$ जहाँ $1, 2, 3 \in \mathbf{Q}$

अतः संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

iv. Q में, संक्रिया *, a * b = (a - b)2 से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है, इसलिए सभी a, b ∈ Q के लिए, a * b = (a - b) तथा b * a = $(b - a)^2 = [-(a - b)]^2 = (a - b)^2$

∴ a * b = b * a, अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय है।

यहाँ $(1 * 2) * 3 = (1 - 2)^2 * 3 = (-1)^2 * 3 = 1 * 3 = (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$

और $1 * (2 * 3) = 1 * (2 - 3)^2 = 1 * (-1)^2 = 1 * 1 = (1 - 1)^2 = 0$

$\therefore (1^*2)^*3 \neq 1^*(2^*3)$, जहाँ $1, 2, 3 \in Q$

अतः, संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

v. Q में, संक्रिया, $a * b = \frac{ab}{4}$ से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है

इसलिए सभी $a, b \in Q$ के लिए, $a*b = \frac{ab}{4} = \frac{ba}{4} = b*a$

$\therefore a*b = b*a$

अतः संक्रिया * क्रमविनिमय है। अवयवों $a, b, c \in Q$ के लिए,

$$(a*b)^*c = \left(\frac{ab}{4}\right) * c = \frac{\left(\frac{ab}{4}\right).c}{4} = \frac{abc}{16}$$

$$a*(b*c) = a^*\left(\frac{bc}{4}\right) = \frac{a\left(\frac{ab}{4}\right)}{4} = \frac{abc}{16}$$

$\therefore (a*b)^*c = a^*(b*c)$ जहाँ $a, b, c \in Q$

अतः सक्रिया * साहचर्य है।

vi. Q में सक्रिया * a * b = ab^2 से परिभाषित एक द्विआधरि सक्रिया है

यहाँ $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{2} . \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} . \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

$\frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{3} . \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} . \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$\therefore \frac{1}{2} * \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$, जहाँ $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$

अतः संक्रिया * क्रमविनिमय नहीं है।

$\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right] * \frac{1}{4} = \frac{1}{18} * \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{18} . \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{18 \times 16} = \frac{1}{288}$

$\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} * \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]$

$= \frac{1}{2} * \frac{1}{48} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{48}\right)^2 = \frac{1}{2 \times 2304} = \frac{1}{4608}$

$\therefore \left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right)$ जहाँ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \in \mathbf{Q}$

अतः संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए कि प्रश्न 9 में दी गई संक्रियाओं में किसी का तत्समक है, वह बतलाइए।

i. $a * b = a - b$
ii. $a * b = a^2 + b^2$
iii. $a * b = a + ab$
iv. $a * b = (a - b)^2$
v. $a * b = \frac{a^b}{4}$

उत्तर-

i. दिया है, $a * b = a - b$ यदि e तत्समक अवयव हो तब।

$a * e = a - e$ तथा $e * a = e - a$

$a - e \neq e - a \Rightarrow a * e \neq e * a$

अत: स्पष्ट है कि e का अस्तित्व नहीं है।

ii. दिया है, $a * b = a^2 + b^2$

$\therefore a * e = a^2 + e^2$ तथा $e * a = e^2 + a^2$

$\because$ हम देखते हैं कि

$a * e = e * a \neq 1$

अत: स्पष्ट है कि e का अस्तित्व नहीं है।

iii. दिया है, $a * b = a + ab$

$a * e = a + ae$ तथा

$\because$ हम देखते हैं कि $a * e \neq e * a \neq a$

अत: स्पष्ट है कि e का अस्तित्व नहीं है।

iv. दिया है, $a * b = (a - b)^2$

$a * e = (a - e)^2 \neq a$ तथा $e * a = (e - a)^2 \neq a$

$a * e = e * a \neq a$

अत: स्पष्ट है कि e का अस्तित्व नहीं है।

v. दिया है, $a * b = \frac{a^b}{4}$

$$a^*e = \frac{ae}{4} \neq a \text{ तथा } e^*a = \frac{ea}{4} \neq a$$

$$a^*e = e^*a \; \forall a \neq Q$$

$$\Rightarrow \frac{ae}{4} = \frac{ea}{4} \forall a \in Q$$

$$\Rightarrow e = 4$$

अत: स्पष्ट है कि e का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 11. मना लीजिए की A = N × N है तथा A में (a, b)* = (c, d) = (a + c, b + d) द्वारा परिभाषीत एक द्विआधरि सक्रिया है। सिद्ध कीजिए की * क्रमविनियम तथा साहचर्य है। A में * का तत्समक अवयव यदी कोई है तो ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है, A = N × N है तथा A में (a, b) * (c, d) = (a + c, b + d) द्वारा परिभाषीत एक द्विआधरि सक्रिया है।

माना (a, b), (c, d) $\in$ A जहाँ a, b, c, d $\in$ N इसलिए (a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)

तथा (c, d) * (a, b) = (c + a, d + b) = (a + c, b + d)

∴ (a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b)

अतः सक्रिया * क्रमविनिमय है।

अब माना (a, b), (c, d), (e, f) $\in$ A जहाँ a, b, c, d, e, f $\in$ N

[(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (a + c, b + d) * (e, f) = (a + c + e, b + d + f)

∴ [(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (a, b)* [(c, d) * (e, f)]

अतः सक्रिया * साहचर्य है।

माना कोई अवयव $e = (e_1, e_2) \in A$ सक्रिया * में तत्समक अवयव है। इसलिए

$a * e = a = e * a$ सभी $a = (a_1, a_2) \in A$ के लिए अर्थात $(a_1 + e_1, a_2 + e_2) = (a_1, a_2) = (e_1 + a_1, e_2 + a_2)$

$\Rightarrow a_1 + e_1 = a_1$

$\Rightarrow e_1 = 0 \notin N$ तथा $a_2 + e_2 = a_2$

$\Rightarrow e_2 = 0 \notin N$

जो A के किसी भी अवयव के लिए सत्य नहीं है। क्योंकि $A = N \times N$ और 0 प्राकृत सख्या नहीं है।

इसलिए सक्रिया * में कोई तत्समक अवयव नहीं है।

प्रश्न 12. बताइए कि क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य हैं। औचित्य भी बतलाइए।

i. समुच्चय N में किसी भी स्वेच्छ द्विआधारी संक्रिया* के लिए $a * a = a, \forall a \in N$
ii. यदि N में * एक क्रमविनिमेय द्विआधारी संक्रिया है तो $a * (b * c)=(c * b) * a$

उत्तर- यहाँ द्विआधारी संक्रिया समुच्चय N पर इस प्रकार परिभाषित की गयी है कि

$a * a = a \; \forall \; a \in N$

i. यहाँ पर * संक्रिया में केवल एक ही अवयव का प्रयोग किया गया है।

   अतः यह कथन असत्य है।

ii. वास्तविक संख्याओं में समुच्चय पर संक्रिया क्रमविनिमेय है।

   $b * c = c * b$

   $= (c * b) * a = (b * c) * a = a * (b * c)$

   $\therefore a * (b * c) = (c * b) * a$

अतः यह कथन सत्य है।

प्रश्न 13. $a * b = a^3 + b^3$ प्रकार से परिभाषित N में एक द्विआधारी संक्रिया * पर विचार कीजिए। अब निम्नलिखित में से सही उत्तर का चयन कीजिए।

A. साहचर्य तथा क्रमविनिमेय दोनों है
B. क्रमविनिमेय है किन्तु साहचर्य नहीं है
C. साहचर्य है किन्तु क्रमविनिमेय नहीं है
D. न तो क्रमविनिमेय है और न साहचर्य है

उत्तर- $a * b = a^3 + b^3$ तथा $b * a = b^3 + a^3$

$\therefore$ हम जानते है की- $a * b = b * a \; \forall a, b \in N$

अतः यह सक्रिया क्रमविनिमेय है

$a * (b * c) = a * (b^3 + c^3) = a^3 + (b^3 + c^3)^3$ ...(1)

$(a * b) * c = (a^3 + b^3) * c = (a^3 + b^3)^3 + c^3$...(2)

समीकरण (1) और (2) से

$\therefore a*(b*c) \neq (a*b)*c$

अतः यह * सक्रिया साहचर्य नहीं है

$\therefore$ सक्रिया क्रमविनिमेय है लेकिन साहचर्य नहीं है

अतः विकल्प (B) सही है

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 33-35)

प्रश्न 1. मान लीजिए कि $f : R \rightarrow R$, $f[x) = 10x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन है। एक ऐसा फलन $g : R \rightarrow R$ ज़ात कीजिए जिसके लिए $gof = fog = I_R$ हो।

उत्तर- दिया है: $f:R \to R$, $f(x) = 10x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन है।

माना $f(x) = f(y)$, जहा $x, y \in R$.

$\Rightarrow 10x + 7 = 10y + 7$

$\Rightarrow x = y$

$\therefore$ फलन f आच्छादक है।

इसप्रकार फलन f एकेकी तथा आच्छादक है। अतः फलन f व्युत्क्रमणीय है।

अब माना $g : R \to R$ इस प्रकार है की $g(y) = \frac{y-7}{10}$ इसलिए

$$gof(x) = g(f(x)) = g(10x + 7) = \frac{(10x+7)-7}{10} = \frac{10x}{10} = x$$

$$fog(y) = f(g(y)) = \left(\frac{y-7}{10}\right) = 10\left(\frac{y-7}{10}\right) + 7 = y - 7 + 7 = y$$

$\therefore gof = I_R$ तथा $fog = I_R$.

अतः अभीष्ट फलन $g : R \to R$, $g(y) = \frac{y-7}{10}$ से परिभाषित है।

प्रश्न 2. मान लीजिए कि $f : w \to w$. $f(n) = n - 1$, यदि n विषम है तथा $f(n) = n + 1$, यदि n सम है, द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। f का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए। यहाँ W समस्त पूर्णांकों का समुच्चय है।

उत्तर- दिया है:

माना $(n) = f(m)$, तब, निम्नलिखित स्थितियां हो सकती हैं:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{यदि n विषम है} \\ n+1 & \text{यदि n सम है} \end{cases} \quad \text{द्वारा परिभाषित है}$$

यदि विषम हो और m एक सम पूर्णांक हो, तब, f(n) = (m) ⇒ n - 1 = m + 1 ⇒ n - m = 2

जो संभव नहीं है, क्योंकि एक सम पूर्णांक और एक विषम पूर्णांक का अंतर कभी सम नहीं हो सकता है।

इसी प्रकार यदि n सम हो और m एक विषम पूर्णांक हो तो भी स्थिति संभव नहीं होगी।

यदि दोनों n और m विषम हों, तो, f(n) = f(m)

⇒ n - 1 = m - 1

⇒ n = m

⇒ n + 1 = m + 1

⇒ n = m

यदि दोनों n और m सम हों, तो, f(n) = f(m)

⇒ n + 1 = m + 1

⇒ n = m

यहाँ, सहप्रांत N में, प्रत्येक अवयव 2r + 1 के लिए, अवयव 2r प्रांत N में है तथा सहप्रांत N में, प्रत्येक अवयव 2r के लिए अवयव 2r + 1 प्रांत N में है।

∴ फलन f आच्छादक है।

अतः, फलन f व्युत्क्रमणीय फलन है।

जब, m विषम है, तो gof (m) = g(f(m)) = g(m - 1) = m -1 + 1 = m और

जब m सम है, तो gof (m) = g(f(m)) = g(m + 1) = m + 1 - 1 = m

इसीप्रकार, जब m विषम है, तो fog(m) = f(g(m)) = f(m - 1) = m - 1 + 1 = m और

जब m सम है, तो fog (m) = f(g(m)) = f(m + 1) = m + 1 - 1 = m

∴ gof = I_w और fog = I_w

अतः, फलन f व्युत्क्रमणीय है और f का व्युत्क्रम f^{-1} = g है, जोकि के समान है। इसप्रकार, फलन f का व्युत्क्रम स्वयं f ही है।

प्रश्न 3. यदि f : R जहाँ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा परिभाषित है तो f(f(x)) ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है: f: R → R जहाँ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा परिभाषित है। इसलिए

$$f(f(x)) = f(x^2 - 3x + 2) = (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) + 2$$

$$= (x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 - 12x + 4x^2) + (-3x^2 + 9x - 6) + 2$$

$$= x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$$

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि $f : R \rightarrow \{x \in R :- 1 < x < 1\}$ जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ x ∈ R द्वारा परिभाषित फलन एकैकी तथा आच्छादक है।

उत्तर- दिया है: $f : R \rightarrow \{x \in R :- 1 < x < 1\}$ जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ x ∈ R द्वारा परिभाषित फलन है।

माना f(x) = f(y), जहाँ $x, y \in R$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}$$

यहाँ कई स्थितियां संभव है जैसे कि यदि x धनात्मक हो तथा y ऋणात्मक हो तब

$$\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow 2xy = x - y$$

क्योंकि, x धनात्मक है और yऋणात्मक है, इसलिए x>yax -y> 0, लेकिन, 2xy भी ऋणात्मक होगा।

अतः, 2xy + x - y

इसीप्रकार, x ऋणात्मक तथा y धनात्मक भा सभव नहीं है

अब, यदि x और y दोनों धनात्मक हैं। तो,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$$

$$\Rightarrow x + xy = y + xy \Rightarrow x = y$$

तथा यदि x और y दोनों ही ऋणात्मक हों, तो

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1+y} = \frac{y}{1-y}$$

$$\Rightarrow x - xy = y - xy \Rightarrow x = y$$

∴ फलन f एकेकी है

अब, माना y ∈ R इस प्रकार है कि -1 < y < 1, यदि y ऋणात्मक है, तो $x = \frac{y}{1+y} \in R$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1+y}\right) = \frac{\left(\frac{y}{1+y}\right)}{1+\left|\frac{y}{1-y}\right|}$$

$$= \frac{\frac{y}{1-y}}{1+\left(\frac{y}{1-y}\right)} = \frac{y}{1-y+y} = y$$

∴ फलन f आच्छादक है।

अतः, फलन f एकैकी तथा आच्छादक है।

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि F(x) = x^3 द्वारा प्रदत्त फलन R → R एकैकी है।

उत्तर- सिद्ध कीजिए कि F(x) = x^3 द्वारा प्रदत्त फलन R → R एकैकी है।

माना f(x) = (y), जहाँ $x, y \in R. \Rightarrow x^3 = y^3$

अब, हमें x = y सिद्ध करना है। माना x ≠ y तब उनके घन भी बराबर नहीं होंगे।

$\Rightarrow x^3 \neq y^3$ लेकिन ये समीकरण (1) का विरोधाभास है। ∴ x = y, अत:, फलन f एकैकी है।

प्रश्न 6. दो फलनों: N → Z तथा g : Z → Z के उदाहरण दीजिए जो इस प्रकार हों कि, gof एकैकी है परन्तु g एकैकी नहीं है। (संकेत: f(x) = x तथा g(x) = |x| पर विचार कीजिए)

उत्तर- माना फलन f : N → Z जो f(x) = x द्वारा परिभाषित है तथा फलन g : Z → z जो g(x) = |x| द्वारा परिभाषित है। सबसे पहले हम सिद्ध करेंगे कि g एकैकी नहीं है।

यहाँ, g(-1) = |-1] = 1 तथा g(1) = |1| = 1

∴ g (-1) = g (1), लेकिन −1 ≠ 1. ∴ एकैकी नहीं है।

अब, gof N → Z के लिए gof(x) = g(F(x)) = g(x) = |x|.

माना x, y ∈ N इस प्रकार हैं कि gof(x) = gof(y) = x = |y|

क्योंकि x, y ∈ N अत:, दोनों धनात्मक होंगे। ∴ |x = |y| = x = y अत:, gof एकैकी है।

प्रश्न 7. दो फलनों f: N → N तथा g : N - N के उदहारण दीजिए, जो इस प्रकार हों कि gof आच्छादक है किन्तु f आच्छादक नहीं है। (संकेत: (x) = x + 1 तथा g(x) = {x}

उत्तर- माना, फलन f : N - N जहाँ f(x) = x + 1 तथा फलन g : N → N जहाँ g(x)

सबसे पहले हम सिद्ध करेंगे कि g आच्छादक नहीं है।

यहाँ, सहप्रांत N में अवयव 1 के लिए प्रांत N में किसी भी अवयव का अस्तित्व नहीं है। ∴ f आच्छादक नहीं है।

अब, gof : N → N के लिए, gof(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = x + 1 - 1 = x [$x \in N \Rightarrow x + 1 > 1$]

इस प्रकार, ये स्पष्ट हिया कि $y \in N$ के लिए, $x = y \in N$ ताकि gof(x) = y हो। अतः, gof आच्छादक है।

प्रश्न 8. एक अरिक्त समुच्चय x दिया हुआ है। P(X) जो कि x के समस्त उपसमुच्चयों का समुच्चय है, पर विचार कीजिए।निम्नलिखित तरह से P(X) में एक संबंध R परिभाषित कीजिए: P(X) में उपसमुच्चयों A, B के लिए, ARB, यदि और केवल यदि $A \subset B$ है। क्या R, P(X) में एक तुल्यता संभंध है? अपने उत्तर का औचित्य भी लिखिए।

उत्तर- क्योंकि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का ही उपसमुच्चय होता है, इसलिए ARA सभी AEP(X) के लिए। अतः, R स्वतुल्य है।

माना $ARB \Rightarrow A \subset B$ परन्तु ये आवश्यक नहीं है कि $B \subset A$ भी हो। जैसे: यदि A = {1, 2} और B = {1, 2, 3} हो।

∴ R सममित नहीं है।

अब, यदि ARB तथा BRC है तो $A \subset B$ और $B \subset A \Rightarrow A \subset C \Rightarrow ARC$

∴ R संक्रामक है। अतः, R एक तुल्यता संबंध नहीं है क्योंकि R स्वतुल्य, संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।

प्रश्न 9. किसी प्रदत्त अरिक्त समुच्चय x के लिए एक द्विआधारी संक्रिया * : $P(X) \times P(x) \to P(X)$ पर विचार कीजिए, जो $A * B = A \cap B \forall A, B \in P(x)$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ P(X) समुच्चय का घात समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि इस संक्रिया का तत्समक अवयव x है तथा संक्रिया * के लिए P(X) में केवल X व्युत्क्रमणीय अवयव है।

उत्तर- दिया है: द्विआधारी संक्रिया * $P(x) \times P(x) \to P(x)$ जो $A * B = A \cap B \forall A, B \in P(x)$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ P (X) समुच्चय X का घात समुच्चय है।

हम जानते हैं कि $A \cap X = A = X \cap A$ सभी $A \in P(X)$ के लिए $\Rightarrow A * x = A = x * A$ सभी $A \in P(x)$ इस प्रकार,X इस संक्रिया का तत्समक अवयव है।

अब, कोई अवयव $A \in P(x)$ व्युत्क्रमणीय होगा यदि $B \in P(x)$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि $A * B = x = B * A$

अर्थात $A \cap B = x = B \cap A$ यह तभी संभव है जब $A = x = B$. इस प्रकार, संक्रिया * के लिए P (X) में केवल X व्युत्क्रमणीय अवयव है। अतः, यह सिद्ध होता है।

प्रश्न 10. समुच्चय{1, 2, 3, ..., n} से स्वय तक के समस्त आच्छादक फलनों की सख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- समुच्चय {1, 2, 3, ...n} से स्वय तक के समस्त आच्छादक फलनों की सख्या = 1, 2, ..., n के कुल क्रमचयो की सख्या के बारबार है।

समुच्चय {1, 2, 3, ...n} से स्वय तक के समस्त आच्छादक फलनों की सख्या = 1, 2, ..., n के कुल क्रमचयो की सख्या = n

प्रश्न 11. मान लीजिए कि S = {a, b, c} तथा T = {1, 2, 3} है। S से T तक के निम्नलिखित फलनों F के लिए F^{-1} ज्ञात कीजिए, यदि उसका अस्तित्व है :

i. F = {(1, 3), (b, 2), (c, 1)}
ii. F = {(a, 2), (b, 1), (c, 1)}

उत्तर-

i. S = {a, b, c}, T = {1, 2, 3}

   यहाँ, $F : S \to T$, F = {(a, 3), (b, 2), (c, 1)} द्वारा परिभाषित है।

   $\Rightarrow F(a) = 3, F(b) = 2, F(c) = 1$

   इसलिए $F^{-1} : T \to S$, जो F^{-1} = {(3, a), (2, b), (1, c)} द्वारा परिभाषित है।

ii. $S = \{a, b, c\}$, $T = \{1, 2, 3\}$

यहाँ, $F : S \rightarrow T$, जो $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$ द्वारा परिभाषित है।

क्योंकि $F(b) = F(c) = 1$, इसलिए F एकेकी नहीं है

अतः F व्युत्क्रमणीय नहीं है अर्थता F^{-1} का अस्तित्व नहीं है

प्रश्न 12. $a * b = |a - b|$ तथा $a \text{ o } b = a$, $\forall$ a, b $\in$ R द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रियाओं* : $R \times R \rightarrow R$ तथा 0: $R \times R \rightarrow R$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि * क्रमविनिमेय है परन्तु साहचर्य नहीं है, . साहचर्य है परन्तु क्रमविनिमेय नहीं है। पुनः सिद्ध कीजिए कि सभी a, b, c $\in$ R के लिए $a * (b \text{ o } c) = (a * b) \text{ o } (a * c)$ है। [यदि ऐसा होता है तो हम कहते हैं कि संक्रिया * संक्रिया o पर वितरित (Distributes) होती है। क्या o संक्रिया * पर वितरित होती है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर- दिया है : $a * b = |a - b|$ और $a \text{ o } b = a$

$a * b = |a - b|$, $|b * a| = |b - a| = |a - b|$

अतः यह क्रमविनिमेय संक्रिया है।

$a * b = |a - b|$, $b * c = |b - c|$

$\Rightarrow a * c \neq |a - c|$

अतः यह साहचर्य संक्रिया नहीं है।

$a \text{ o } b = a$, $b \text{ o } a = b \Rightarrow a \neq b$

अतः o क्रमविनिमेय संक्रिया नहीं है।

$a \text{ o } b = a$, $b \text{ o } c = b$, $a \text{ o } c = a$

अतः o एक साहचर्य संक्रिया है।

सिद्ध करना है:

a * (boc)= (a * b) 0 (b * c)

L.H.S. = a * (boc)= a * b = |a – b|

R.H.S. = (a * b) 0 (b * c)

= |a – b| o |b – c| = |a – b|

∴ L.H.S. = R..S.

अतः A * (boc)= (a * b) o (b * c)

क्या a o (b * c) और (a o b) * (a0c) बराबर है?

L.H.S. = a 0 * (b * c) = ao |b – c| = a

R.H.S. = (aob) * (aoc) = a * a = |a – a|= 0

∴ L.H.S. ≠ R.H.S.

अतः संक्रिया o संक्रिया * पर वितरण संक्रिया नहीं है।

प्रश्न 13. किसी प्रदत्त अरिक्त समुच्चय x के लिए मान लीजिए कि * : P(X) × P(X) → P(X), जहाँ A * B = (A – B) ∪ (B – A), ∀A, B ϵ P(X) द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि रिक्त समुच्चयक ϕ, संक्रिया * का तत्समक है तथा P(X) के समस्त अवयव A व्युत्क्रमणीय हैं, इस प्रकार कि A^{-1} = A.

उत्तर- यहाँ * : P(X) × P(X) → P(X) जो इस प्रकार परिभाषित है।

A * B = (A – B) ∪ (B – A)

दिया है : A * B = (A – B) ∪ (B – A)

जब B = ϕ क रखने पर,

$A * \phi = (A - \phi) \cup (\phi - A)$

$= A \cup \phi = A$

$\phi * A = (\phi - A) \cup (A - \phi) = \phi \cup A = A$

$\Rightarrow A * \phi = \phi * A = A$

अतः ϕ तत्समक अवयव है।

$A * A = (A - A) \cup (A - A) = \phi$

$A * A = \phi = A\text{-}1 = A$

प्रश्न 14. निम्नलिखित प्रकार से समुच्चय {0, 1, 2, 3, 4, 5} में एक द्विआधारी संक्रिया * परिभाषित कीजिए।

$$a * b = \begin{matrix} a+b, & \text{यदि } a+b<6 \\ a+b-6, & \text{यदि } a+b \geq 6 \end{matrix}$$

सिद्ध कीजिए कि शून्य इस संक्रिया का तत्समक है तथा समुच्चय का प्रत्येक अवयव a * 0 व्युत्क्रमणीय है, इस प्रकार कि 6 - a, a का प्रतिलोम है।

उत्तर- माना x = {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

यहाँ, समुच्चय x में संक्रिया * इस प्रकार परिभाषित है कि

$$a * b = \begin{matrix} a+b, & \text{यदि } a+b<6 \\ a+b-6, & \text{यदि } a+b \geq 6 \end{matrix}$$

e तत्समक अवयव है, यदि a * e = e * a = a

अब, माना e = 0, a * e = a + 0 = a

e* a = 0 + a = a

∴ a * e = e * a = a

अतः O तत्समक अवयव है।

b अवयव a का व्युत्क्रम है, यदि a * b = b * a = e

a * (6 – a)= a + (6 – a) – 6 = a + 6 – a – 6 = 0

(6 – a) * a = (6 – a) + a – 6 = 0

∴ a * (6 – a) = (6 – a) * a = 0

अतः A के प्रत्येक अवयव a का 6 – a व्युत्क्रम है।

प्रश्न 15. मान लीजिए कि A ={ – 1, 0, 1, 2}, B = { – 4, – 2, 0, 2} और f, g: A → B, क्रमशः $f(x) = x^2 - x$, x ϵ A तथा $g(x) = 2x \mid x - \frac{1}{2} \mid - 1. x \in A$ द्वारा परिभाषित फलन हैं क्या है तथा g समान हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

उत्तर- यहाँ, यदि A = { – 1, 0, 1, 2) B = { – 4, – 2, 0, 2}

और f, g . A → B फलन की f(x) = x2 – x, x ϵ A और $g(x) = \mid x - \frac{1}{2} \mid . 1, x \in A$ द्वारा परिभाषित है।

$$f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

$$g(-1) = 2\left|(-1) - \tfrac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\tfrac{3}{2}\right) - 1 - 3 - 1 = 2$$

यहाँ,

$$f(0) = (0)^2 - (0) = 0$$

$$= 2\left|0 - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = g(0)$$

इसीप्रकार $f(1) = (1)^2 - (1) = 1 - 1 = 0$

$$g(1) = 2\left|(1) - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow f(2) = f\,(2)$$

$\therefore f(a) = g(a)$ सभी $a \in A$ के लिए

अतः फलन f तथा g समान फलन है।

प्रश्न 16. यदि A = {1, 2, 3} हो तो ऐसे संबंध जिनमे अवयव (1, 2) तथा (1, 3) हों और जो स्वतुल्य तथा सममित हैं किंतु संक्रामक नहीं हैं, कि संख्या है:

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4

उत्तर-

a. 1

हल- दिया है: समुच्चय A = {1, 2, 3}. समुच्चय A = {1, 2, 3} में सबसे छोटा संबंध जिसमें अवयव (1, 2) तथा (1, 3) हों और जो स्वतुल्य तथा सममित तो हो किंतु संक्रामक नहीं हो, निम्नलिखित प्रकार से होगा:

R= {(1, 1), (2, 2). (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1}}

संबंध R स्वतुल्य है क्योंकि ($(1,1),(2,2),(3,3) \in \mathrm{R}$

संबंध R सममित है क्योंकि $(1,2),(2,1) \in \mathrm{R}$ और $(1,3),(3,1) \in \mathrm{R}$

लेकिन संबंध R संक्रामक नहीं है क्योंकि $(3,1),(1,2) \in \mathrm{R}$ परन्तु $(3,2) \notin \mathrm{R}$

अब, यदि हम (3, 2) और (2, 3) (या दोनों) को संबंध R में शामिल कर लें तो संबंध R संक्रामक भी होगा।

अतः, कुल अभीष्ट संबंध संख्या में 1 ही होंगे।

प्रश्न 17. यदि A = {1, 2, 3} हो तो अवयव (1, 2) वाले तुल्यता संबंधो की संख्या है।

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4

उत्तर-

b. 2

हल- दिया है: समुच्चय A = {1, 2, 3}

समुच्चय A = {1, 2, 3} में अवयव (1, 2) वाले सबसे छोटा तुल्यता संबंध

R1 = {(1, 1), (2,2), (3,3), (1,2), (2, 1}}

इसके अतिरिक्त समुच्चय A = {1, 2, 3) में केवल चार युग्म ही बचे हैं अर्थात (2, 3), (3, 2), (1, 3) और (3, 1) हैं

यदि हम एक युग्म, माना (2,3), को R_1 में शामिल कर लें, तो संबंध को सममित बनाने के लिए. हमें युग्म (3, 2) को भी शामिल करना होगा और साथ ही संक्रामक बनाने के लिए (1,3) और (3,1) को भी सम्मिलित करना होगा।

अतः, एकमात्र तुल्यता संबंध (जो R_1 से बड़ा हो) सार्वत्रिक संबंध होगा।

इसप्रकार, अवयव (1, 2) वाले तुल्यता संबंधो की संख्या 2 है।

प्रश्न 18. मान लीजिए कि f R → R है तब निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित चिन्ह फलन है।

द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन है, जहाँ [x], x से कम या x के बराबर पूर्णांक है, तो क्या fog तथा gof, अन्तराल (0, 1) में संपाती हैं?

उत्तर- दिया है: तथा g : R → R, g(x) = [x], द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन है, जहाँ [x], x से कम या x के बराबर पूर्णांक है।

यहाँ, माना x ∈ (0, 1) तब [x] = 1 यदि x = 1 और [x] = 0 यदि 0 < x < 1.

इसलिए,

$$fog(\mathrm{x}) = f(g(\mathrm{x})) = f([\mathrm{x}]) = \begin{cases} f(1), & \text{यदि } \mathrm{x} = 1 \\ f(0), & \text{यदि } \mathrm{x} \in (0, 1) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{यदि } \mathrm{x} = 1 \\ 0, & \text{यदि } \mathrm{x} \in (0, 1) \end{cases}$$

fog(x) = f(g(x)) = g(|x|)

gof(x) = g(f(x)) = g(1) = [1] = 1

इस प्रकार, जब x ∈ (0, 1) तो fog(x)=0 और gof(x)=1

अतः, fog तथा gof, अन्तराल (0, 1) में संपाती नहीं हैं।

प्रश्न 19. समुच्चय {a, b} में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या है

a. 10
b. 16
c. 20
d. 8

उत्तर-

b. 16

हल- समुच्चय {a, b} में एक द्विआधारी संक्रिया * एक फलन {a, b} × {a, b} → {a, b} है।

अर्थात संक्रिया *, {(a, a), (a, b), (b, a), (b, b}} → {a, b} से एक फलन है।

समुच्चय {a, b} में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या 2^4 है अर्थात 16 है।